

不規則波の波高・周期の結合確率特性について

COMBINED DISTRIBUTION OF WAVE HEIGHTS AND PERIODS OF RANDOM SEA WAVES

木 村 晃*
By Akira KIMURA

1. 結 言

従来、不規則な海の波を解析する手段として、主に、スペクトル解析法と、zero-up-cross 法を中心とする波別解析法が用いられてきた。この 2 つの解析法を比較するとき、スペクトル法は、微小振幅波理論に基づく理論的裏付けがあるが、波別解析法の方は一種の便宜的方法であるという漠然とした評価がなされてきたようである。しかし、著者ら¹⁾は最近の研究で、浅海域における不規則波に対しては、スペクトル法も十分な理論的裏付けをもつものではないことを指摘した。また、砕波のような不連続な現象を取り扱うには、スペクトル法が不向きであり、このような場合には波別解析法に頼らざるを得ない。波別解析法として提案されている二、三の方法のうちでは、zero-up-cross 法が最も普通に用いられている。元来 zero-up-cross 法は力学的な根拠をもつ波の定義法ではないが、平均的にみればこの方法で定義された個々の波は同じ波高、周期をもつ規則波とほぼ等しい力学的性質をもつと考えてよいようである^{2)~4)}。したがって zero-up-cross 法における次の問題は、この方法で定義した不規則波の波高、周期さらには両者の結合確率特性を明らかにしてゆくことである。この点を明らかにすることができれば前述したように個々の波の力学的特性と波高・周期の結合確率特性とを結びつけることにより、不規則波群全体の力学的特性を定量的に評価することが可能となる。この研究はこのように zero-up-cross 法による不規則波浪の解析を効果的なものとするため、波高・周期の結合確率特性について検討したものである。Longuet-Higgins⁵⁾は狭帯域スペクトル (narrow band spectrum) の仮定のもとでは、その振幅 a の確率分布が次のような Rayleigh 分布をすることを導いた。

$$P(a)da = \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{\bar{a}} \right) \exp \left[-\frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{\bar{a}} \right)^2 \right] \frac{da}{\bar{a}} \quad \dots (1)$$

ここに、 \bar{a} は振幅の平均値である。その後、数多くの実験、あるいは現地観測の結果、zero-up-cross 法により定義した波の波高は、狭帯域スペクトルの仮定が成立しない場合でも Rayleigh 分布がほぼ適用できることが知られている。一方、zero-up-cross 法で定義した波の周期の確率特性に関する研究例は非常に少ない。理論的な研究としては、Rice⁶⁾の研究をまず挙げることができる。Rice は不規則信号の zero-cross 点の間隔について検討を行ったが、実行困難な無限級数に逢着するため、この級数の第 1 項だけを用いた近似解を得るにとどまった。その後、たとえば Longuet-Higgins⁷⁾による近似精度の向上、あるいは竹内ら⁸⁾のように Rice の解の補正など、解析解を得るための種々の努力が払われたが、この方面からのアプローチは現在のところまだ十分な成功を収めるまでには至っていない。また、Longuet-Higgins⁹⁾は狭帯域スペクトルの仮定のもとに、前と異なる方法で周期の確率分布を導いた。しかし、この狭帯域の仮定はあまり適当ではなく、結果の普遍性に大きな制約を及ぼす。このように、この zero-crossing problem に対する理論解は現時点ではまだ与えられていない。一方、Bretschneider¹⁰⁾は Mexico 湾などでの現地観測の記録を検討して、周期 T の確率分布に対し、次のようないわゆる T^2 -Rayleigh 分布を提案した。

$$P(T)dT = 2.7 \left(\frac{T}{\bar{T}} \right)^3 \exp \left[-0.675 \left(\frac{T}{\bar{T}} \right)^4 \right] \frac{dT}{\bar{T}} \quad \dots (2)$$

ここに \bar{T} は平均周期である。合田・永井¹¹⁾は名古屋港などでの観測結果を検討し、十分に発達した風波に対しては、式 (2) がかなりよく適用できることを報告している。

一方、著者ら¹²⁾は、不規則波のシミュレーション実験の結果をもとに、周期の確率分布の形状が、スペクトル

* 正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部土木工学科

の形状によりかなりの幅で変化することを指摘し、次のような、より一般的な Weibull 分布と非常によく対応することを示した。

$$P(T)dT = Am \left(\frac{T}{T_r}\right)^{m-1} \exp\left[-A\left(\frac{T}{T_r}\right)^m\right] \frac{dT}{T_r} \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 T_r は周期の root mean square 値である。Weibull 分布はかなり普遍的な分布形状であり、たとえばこの式で形状母数 m が 2 の場合は Rayleigh 分布に、 m が 4 の場合には T^2 -Rayleigh 分布に一致する。また、前述した Rice の無限級数が解析的に解ける唯一の場合は white-noise の zero-cross 点間の距離の分布であり、これは指数分布になる。この場合も、式 (3) において m を 1 とすればよいことがわかる。

zero-up-cross 法で定義した不規則波の波高、周期に関する研究の現状は概略以上のものである。このような従来の研究の結果を考えると、波高と周期の結合確率分布がまず満足すべき要件としては、

- ① 波高の確率分布は Rayleigh 分布である。
- ② 周期の確率分布は Weibull 分布、もしくはそれに非常に近い分布である。
- ③ 波高および周期の相関特性が考慮されている。

などを挙げることができる。Longuet-Higgins¹³⁾ はすでに振幅と周期の結合分布を導いているが、二、三の要件が満足されておらず、結果の適用範囲がかなり制約されている。一方、Battjes¹⁴⁾ は Rice⁶⁾ が雑音電流の包絡線の確率分布として導いた 2 次元 Rayleigh 分布が、前述した要件を満足〔要件 ② は一部〕していることに着目して用いている。

$$P(h, t) = \frac{\pi^2}{4} \frac{h \cdot t}{1-k^2} \exp\left(-\frac{\pi}{4} \frac{h^2+t^2}{1-k^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{\pi}{2} \frac{k}{1-k} ht\right) \dots\dots\dots(4)$$

ここに、 h, t は波高および周期をそれぞれの平均値で割って正規化したものであり、 $I_0(\)$ は変形ベッセル関数である。また、 k は h と t の相関に関するパラメーターである。式 (4) は周期の確率分布としては、 T^2 -Rayleigh 分布を採用したことになる。しかし、やはり前にも述べたように、周期の確率分布はスペクトルの分布形状に対応して変化するものであり、より一般的な分布であることが望ましい。

これまでの説明からもわかるように、理論的に波高・周期の結合分布を明らかにするためには、まず周期の確率分布を明らかにし、次に Rayleigh 分布とこの周期の分布とをそれぞれ周辺分布とする結合分布を導くという二つの問題を解決しなければならない。浅海域の不規則波に対しては、波形の非線形性の影響もさらに考慮する必要もある。このように、現状においては両者の結合分

布を理論的に与えることは非常に困難であると考えられる。したがってここでは逆に、波高および周期の確率特性として従来より知られているいくつかの条件を満たすような 2 次元確率分布を導き、実験値と比較検討してその適合性を検討する。

2. 2 次元 Weibull 分布

Rayleigh 分布が Weibull 分布の一特殊型であることを利用すれば、式 (4) は比較的簡単に Rayleigh-Weibull 結合分布に変換することができる。しかし、式 (4) は、周辺分布である 2 つの Rayleigh 分布が共通の統計学的モーメントをもつように導かれている。したがって、上に述べたように一方の変数を変換して Rayleigh-Weibull 確率分布に変換した場合、どちらか一方の確率分布の統計学的モーメントを決定すれば、他方の統計学的モーメントも一意的に固定してしまう。このため、一方の確率分布は、平均値あるいは rms 値等で正規化した比較的使いやすい関数型を選ぶことができるが、その結果他方の確率分布は統計学的に特に意味のない数で正規化された関数型になり、データとの比較において正確な判断を困難にさせるばかりでなく、データの正規化のために煩雑な変数変換を行う必要性が生じ、応用の際の障害となる。そのため、ここでは波高と周期の確率分布とともに使いやすい関数型で与えるため、Rice の手法に基づいて新たに 2 次元 Weibull 分布を導いた。すなわち、2 つの不規則変動

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t - \varepsilon_{1n}) \\ \eta_2(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\omega_n t - \varepsilon_{2n}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

において両者の間に

$$\eta_2(t) = c\eta_1(t) \dots\dots\dots(6)$$

なる関係があると仮定し、 η_1 と η_2 の包絡線の結合確率特性を検討する。いま式 (5) の η_1 および η_2 の中心周波数のまわりの包絡線をそれぞれ $R_1(t)$ および $R_2(t)$ とすれば、両者の結合確率分布 $P(R_1, R_2)$ は Rice と同じ方法⁶⁾により

$$P(R_1, R_2) dR_1 dR_2 = \frac{R_1 R_2}{A} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2A}(\phi_2 R_1^2 + \phi_1 R_2^2)\right\} \cdot I_0\left(\frac{R_1 R_2}{A} \rho\right) dR_1 dR_2 \dots\dots\dots(7)$$

のように求めることができる。ここに $I_0(\)$ は変形ベッセル関数であり、 $A = \phi_1 \phi_2 - \rho^2$ である。詳細は後に示すが、 ρ は R_1 と R_2 の相関係数に関係するパラメーターであり、 ϕ_1, ϕ_2 はそれぞれ R_1 および R_2 の分散で

ある. 式 (6) の c を変えることにより ϕ_1 と ϕ_2 の相対的な関係を変化させることができるので前に指摘した式 (4) を 2 次元 Weibull 分布に変換する際の問題点を解決することができる. いま, 式 (7) において, $R_1 = h^{m/2}$, $R_2 = t^{n/2}$ なる変数変換をほどこすと, 次に示す 2 次元 Weibull 分布を得る.

$$P(h, t) dh dt = \frac{mn}{4A} h^{m-1} t^{n-1} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2A}(\phi_2 h^m + \phi_1 t^n)\right\} \cdot I_0\left(\frac{h^{m/2} t^{n/2}}{A} \rho\right) dh dt \dots \dots \dots (8)$$

ここに m および n はそれぞれ Weibull 分布の形状母数である. 式 (8) は $h \geq 0, t \geq 0$ に対して与えられた式であり, $h < 0, t < 0$ の場合は $P(h, t) = 0$ となる.

(1) 周辺分布

定義より, h の周辺分布 $P(h)$ は次式で与えられる.

$$P(h) = \int_0^\infty P(h, t) dt = \frac{m}{2\phi_1} h^{m-1} \exp\left[-\frac{h^m}{2\phi_1}\right] \dots \dots \dots (9)$$

同様に t の周辺分布は

$$P(t) = \frac{n}{2\phi_2} t^{n-1} \exp\left[-\frac{t^n}{2\phi_2}\right] \dots \dots \dots (10)$$

のように与えられる.

(2) 条件付確率分布

t の値を t_0 に固定した場合の h の条件付確率分布 $P(h/t_0)$ は定義より,

$$P(h/t_0) = P(h, t) / P(t)|_{t_0} = \frac{\phi_2}{2A} m h^{m-1} I_0\left(\frac{h^{m/2} t_0^{n/2} \rho}{A}\right) \cdot \exp\left[-\frac{1}{2A}(\phi_2 h^m + \phi_1 t_0^n) + \frac{t_0^n}{2\phi_2}\right] \dots \dots \dots (11)$$

詳細については後で説明するが, ρ は h と t の相関に関するパラメーターである. いま両者がまったく無関係な変数であるとして $\rho = 0$ とおけば, 式 (11) は

$$P(h/t_0) = \frac{m}{2\phi_1} h^{m-1} \exp\left[-\frac{h^m}{2\phi_1}\right] \dots \dots \dots (12)$$

となり, 式 (9) に一致する.

また, h を h_0 に固定した場合の t の条件付確率分布は

$$P(t/h_0) = \frac{\phi_1}{2A} n t^{n-1} I_0\left(\frac{h_0^{m/2} t^{n/2} \rho}{A}\right) \cdot \exp\left[-\frac{1}{2A}(\phi_2 h_0^m + \phi_1 t^n) + \frac{h_0^m}{2\phi_1}\right] \dots \dots \dots (13)$$

となる.

(3) 統計学的モーメント

式 (8) の原点に関するそれぞれ i, j 次のモーメントを M_{ij} とすれば, M_{ij} は次式のように定義される.

$$M_{ij} = \int_0^\infty \int_0^\infty h^i t^j P(h, t) dh dt \dots \dots \dots (14)$$

式 (14) に式 (8) を代入して計算すると

$$M_{ij} = 2^{i/m+j/n} \phi_1^{i/m} \phi_2^{j/n} \Gamma\left(\frac{i}{m} + 1\right) \Gamma\left(\frac{j}{n} + 1\right) \cdot F\left(-\frac{i}{m}, -\frac{j}{n}; 1; \frac{\rho^2}{\phi_1 \phi_2}\right) \dots \dots \dots (15)$$

のように整理される. ここに $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数, $F(\cdot)$ は超幾何関数である. 式 (15) より h および t の平均および 2 乗平均は, 次のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} h_m &= \int_0^\infty \int_0^\infty h P(h, t) dh dt = M_{10} \\ &= 2^{1/m} \phi_1^{1/m} \Gamma\left(\frac{1+m}{m}\right) \\ t_m &= M_{01} = 2^{1/n} \phi_2^{1/n} \Gamma\left(\frac{1+n}{n}\right) \\ h^2_{rms} &= M_{20} = 2^{2/m} \phi_1^{2/m} \Gamma\left(\frac{2+m}{m}\right) \\ t^2_{rms} &= M_{02} = 2^{2/n} \phi_2^{2/n} \Gamma\left(\frac{2+n}{n}\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} h^2_{rms} &= M_{20} = 2^{2/m} \phi_1^{2/m} \Gamma\left(\frac{2+m}{m}\right) \\ t^2_{rms} &= M_{02} = 2^{2/n} \phi_2^{2/n} \Gamma\left(\frac{2+n}{n}\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

ここに, suffix m および rms はそれぞれ平均, root-mean-square 値であることを示す. いま, 式 (16) または, 式 (17) における ϕ_1 および ϕ_2 を, それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2} \left[\Gamma\left(\frac{1+m}{m}\right) \right]^{-m} \\ \phi_2 &= \frac{1}{2} \left[\Gamma\left(\frac{1+n}{n}\right) \right]^{-n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

のように選べば, h_m および t_m はともに 1 となり, 周辺分布, 式 (9) および式 (10) は h および t のそれぞれの平均値で正規化した式になる. まったく同様に, 式 (17) から

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2} \left[\Gamma\left(\frac{2+m}{m}\right) \right]^{-m/2} \\ \phi_2 &= \frac{1}{2} \left[\Gamma\left(\frac{2+n}{n}\right) \right]^{-n/2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

のように ϕ_1, ϕ_2 を選べば, 式 (9) および式 (10) は h_{rms} , および t_{rms} で正規化した式になる. この他に M_{ij} から導かれる重要なパラメーターとして相関係数がある.

(4) 相関係数

h と t の相関係数 τ_{ht} は, h および t の標準偏差をそれぞれ σ_h および σ_t , h と t の共分散を $cov(h, t)$ とすれば

$$\tau_{ht} = \frac{cov(h, t)}{\sigma_h \sigma_t} \dots \dots \dots (20)$$

と定義される。ここで、

$$\begin{aligned} \text{cov}(h, t) &= \int_0^\infty \int_0^\infty (h-h_m)(t-t_m)P(h, t)dhdt \\ &= M_{11} - M_{10}M_{01} \dots\dots\dots(21) \\ \left. \begin{aligned} \sigma_h^2 &= \int_0^\infty (h-h_m)^2 P(h)dh = M_{20} - M_{10}^2 \\ \sigma_t^2 &= \int_0^\infty (t-t_m)^2 P(t)dt = M_{02} - M_{01}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

であるから、式 (20) はモーメントを用いて

$$\tau_{ht} = \frac{M_{11} - M_{10}M_{01}}{(M_{20} - M_{10}^2)^{1/2}(M_{02} - M_{01}^2)^{1/2}} \dots\dots(23)$$

となり、式 (15) より

$$\begin{aligned} \tau_{ht} &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\sqrt{\left[\Gamma\left(\frac{m+2}{m}\right) - \Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)^2\right]}} * \\ &\quad * \frac{\left\{F\left(-\frac{1}{m}, -\frac{1}{n}; 1; \frac{\rho^2}{\phi_1\phi_2}\right) - 1\right\}}{\left[\Gamma\left(\frac{n+2}{n}\right) - \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right]} \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

と表わすことができる。この式から相関係数が $\rho^2/\phi_1\phi_2$ の関数になっていることがわかる。

(5) Rayleigh~T²-Rayleigh 結合分布

ここまでの議論は、2次元 Weibull 分布のままでも式を変換してきたので、かなり煩雑な関数形が導かれた。そこでここでは問題を限定して、具体的な分布型について論議する。

$m=n=2$ の場合： $\kappa = \rho/\sqrt{\phi_1\phi_2}$ とおけば、式 (8) は

$$\begin{aligned} P(h, t) &= \frac{1}{\phi_1\phi_2} \frac{ht}{1-\kappa^2} I_0\left(\frac{1}{\sqrt{\phi_1\phi_2}} \frac{\kappa}{1-\kappa^2} ht\right) \\ &\quad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\phi_1\phi_2(1-\kappa^2)} [\phi_2 h^2 + \phi_1 t^2]\right\} \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

となり、 ϕ_1, ϕ_2 に式 (18) の関係を用いると、この式は式 (4) と一致する。また、相関係数 τ_{ht} は式 (24) より

$$\tau_{ht} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2 \left\{F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; \kappa^2\right) - 1\right\}}{1 - \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

となり、さらに次のように表わされる。

$$\tau_{ht} = \frac{E(\kappa) - (1/2)(1-\kappa^2)K(\kappa) - \pi/4}{1-\pi/4} \dots\dots(26)$$

ここに $K(\)$ および $E(\)$ は第1種および第2種完全楕円積分である。前にも述べたが、式 (24) または式 (26) よりわかるように、相関係数は $\kappa(=\rho/\sqrt{\phi_1\phi_2})$ の関数になっている。ここでその意味を明らかにするため、以下のような検討を行う。

いま ϕ_1 および ϕ_2 として式 (19) の値、すなわち $\phi_1 = \phi_2 = 1/2$ を用い、 h^2 と t^2 の相関係数 R を考える。定義より

$$R = \frac{E[(h^2 - h_{rms}^2)(t^2 - t_{rms}^2)]}{\sqrt{E[(h^2 - h_{rms}^2)^2]E[(t^2 - t_{rms}^2)^2]}} \dots(27)$$

ここに $E[\]$ は平均操作を意味する。式 (27) に式 (17)、(19) の関係を代入すると、最終的に $R = \kappa^2$ となる。したがって、 $m=n=2$ の場合には、 $\kappa^2(=4\rho^2)$ が h^2 と t^2 の相関係数になっていることがわかる。

$m=2, n=4$ の場合：Rayleigh~T²-Rayleigh 分布はその適用に際し、周期のデータを2乗して式 (4) と比較する必要がある。ところが、式 (8) において $m=2, n=4$ とおき、正規化の尺度母数として h_{rms}, t_{rms} を用いると

$$\begin{aligned} P(h, t)dhdt &= \frac{2\pi}{1-\pi\rho^2} ht^3 I_0\left[\frac{\pi ht^2}{1-\pi\rho^2} \rho\right] \\ &\quad \cdot \exp\left[-\frac{(4h^2 + \pi t^4)}{4(1-\pi\rho^2)}\right] dhdt \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

のように、直接比較の可能な式を導くことができる。また、それぞれの周辺分布は、式 (9) および (10) より

$$\left. \begin{aligned} P(h) &= 2h \exp(-h^2) \\ P(t) &= \pi t^3 \exp\left(-\frac{\pi}{4} t^4\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

のようになる。ここで注意しなければならないことは、式 (28) の周辺分布が互いに異なる確率分布であるため、両者の相関係数が1になることはない。

図-1 は m を2と固定し、 n を2, 4, 6と変化させたときの式 (24) の τ_{ht} と $\rho/\sqrt{\phi_1\phi_2}$ の

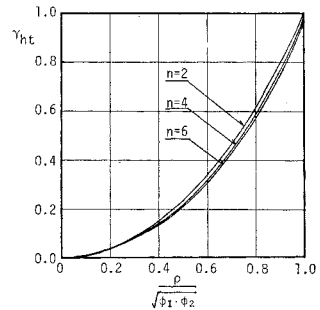


図-1 τ_{ht} と $\rho/\sqrt{\phi_1\phi_2}$ の関係

関係を示したものである。図より、 m と n の差が大きくなるほど τ_{ht} の値が下ってきていることがわかる。 $\rho/\sqrt{\phi_1\phi_2}=1$ において、相関係数が1となるのは、形状母数 m, n が等しい場合に限られる。

3. 実験値との比較

(1) 周辺分布

著者ら¹³⁾は、すでに約50ケースにおよぶ不規則波のシミュレーション実験を行っており、その結果得られた水位変動の記録を A-D 変換した後、磁気テープにファイルし、種々の解析に使用できるようにしてある。ここ

表-1 統計学的代表値

Case	N	H_m (cm)	T_m (sec)	H_{rms} (cm)	T_{rms} (sec)	$H_{1/3}$ (cm)	$T_{1/3}$ (sec)	γ_{ht}	m	n	ρ	ϵ
1	1036	3.33	2.17	3.76	2.30	5.31	2.62	0.75	1.86	3.08	0.43	0.78
2	1952	5.37	1.15	5.95	1.21	8.28	1.34	0.51	2.18	3.59	0.43	0.70
3	1849	7.16	1.22	7.91	1.27	10.96	1.35	0.41	2.23	4.01	0.39	0.68
4	1154	5.35	0.97	6.01	1.00	8.47	1.04	0.38	2.07	4.61	0.38	0.76

では、これらの記録のうちから、表-1 に示すような4つのケースを選び、前節で導いた2次元 Weibull 分布との比較検討を行う。表には代表的な特性が示してあるが、 N は波の総数、 H は波高、 T は周期で、添字の1/3、1/10 は、それぞれ 1/3 最大波、1/10 最大波であることを示す。その他の記号は、前節で用いた記号と対応するものである。なお、Weibull 分布の形状母数である m, n の値は、波高、周期のそれぞれの非超過確率の値を Weibull 確率紙上にプロットし、最小二乗法を

用いて直線を引き、その勾配から決定した。また、 ρ の値は γ_{ht} の値から式 (21) を逆に解いて求めた。

次に、図-2(a)~(d) に各ケースのスペクトル形を示した。ケース 1, 2 は Pierson-Moskowitz スペクトル、ケース 3 は Neuman スペクトル、ケース 4 はさらにシャープなピークをもつスペクトルをシミュレートした結果であり、各ケースともいづれも、ほぼ満足すべき精度で期待スペクトルが再現されている。

図-3(a)~(d) は各ケースの波高の頻度分布を示したものである。図中の点線は Rayleigh 分布であり、実線は表-1 に示した m の値を式 (6) に代入して計算した Weibull 分布である。これらの図よりわかるように、実験値との対応は実線で示した Weibull 分布の方が良好である。Rayleigh 分布が波高の確率分布の理論式として適用されるのは、狭帯域スペクトルの場合に限られるわけであり、一般的な広帯域スペクトルの場合には、Rayleigh 分布も経験式にすぎない。したがって波高の確率分布としては、実験値との対応のよい Weibull 分布がより望ましいといえる。前に述べた約 50 ケースのシミュレーション実験のすべての結果に Weibull 分布の適用を試みたところ、形状母数 m の平均値は 2.09 であり、その標準偏差は 0.10 であった。この m の値が何により変化するかという点は現在必ずしも明確でないが、ただ、Bretschneider¹⁰⁾ は水位の頻度分布が Gauss 分布からはずれるにつれて、波高の頻度分布も Rayleigh 分布からはずれることを指摘している。

図-4 は前述の実験結果の水位変動の skewness $\sqrt{\beta_1}$ と m との関係を示したものである。実験値はかなりばらついてはいるが、skewness の増加に伴って m の値は徐々に増加し、 $\sqrt{\beta_1}=0.4$ 付近で極大値を示した後、徐々に減少する傾向を示す。skewness の値は、正規分布よりのひずみを示す有力なパラメーターであり、この図から $\sqrt{\beta_1}=0.4$ 程度までは Bretschneider の指摘が妥当であることがわかる。しかし、なぜこうなるかという点については明らかでない。次に図-5(a)~(d) は各ケースの周期の頻度分布を示したものであり、各図とも Weibull 分布と実験値の対応は非常に良好であることがわかる。図-5 (a) に点線で T^2 -Rayleigh 分布をあわせて示したが、実験値との間にかかなり大きな差がみられる。これらの図からも、周期の確率分布に対しては

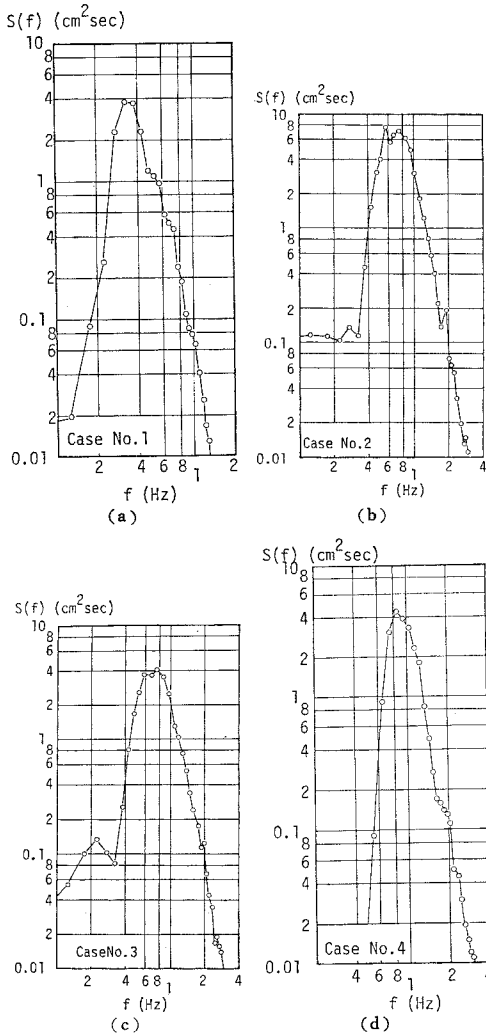


図-2 パワースペクトル

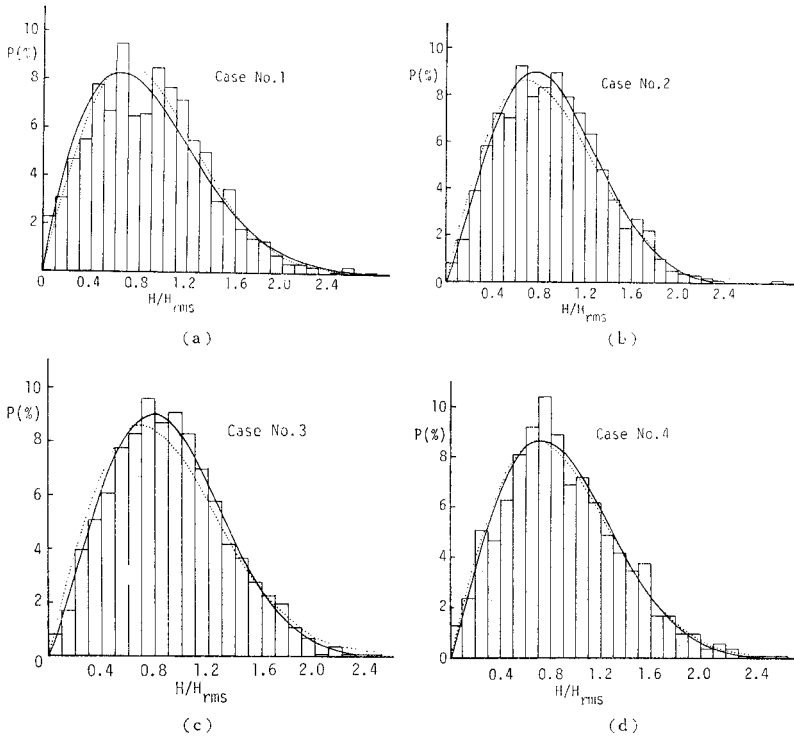


図-3 波高の頻度分布

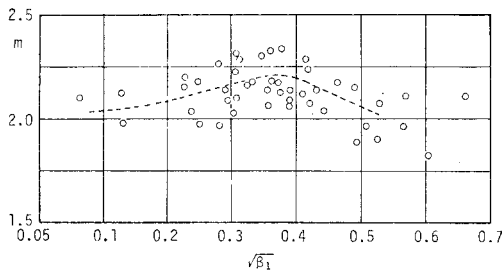


図-4 m と skewness の関係

T^2 -Rayleigh 分布のような画一的な分布形を適用することは妥当でなく、Weibull 分布のような比較的適応範囲の広い分布形が望ましいことがわかる。図-5 の各図中に実線で示した Weibull 分布の形状母数も、前述したように最小二乗法により決定したものであるが、これらの値が他の物理量から推定できることが望ましい。図-6 に形状母数の値による Weibull 分布の変化の様子を示した。すでに述べたが、 $n=2$ の場合が Rayleigh 分布、 $n=4$ の場合が T^2 -Rayleigh 分布である。この図よりわかるように、 n の値が大きくなるにつれて次第に分布形の幅が狭まり、ピークが高くなると同時に、徐々に左右対称な分布形になってゆくことがわかる。一方、この周期の確率分布とパワースペクトルの形状との間に何らかの相関が存在することは容易に予想できる。すなわち、狭帯域スペクトルの場合には、幅が狭く鋭い

ピークをもつ分布形をもち、逆の場合には平坦な分布をするであろう。スペクトル幅を示すパラメーターとして、通常、Cartwright ら¹⁷⁾ が提案したパラメーター ϵ が用いられることが多い。図-7 は、データから計算した n と ϵ の関係を示したもので、若干のばらつきはあるが、両者の間には非常に明確な相関関係が存在し、 ϵ の減少に伴って、 n の値はかなり急に増大してゆくことがわかる。このことから、スペクトル形が定まれば、そのスペクトル幅に関するパラメーターが算定でき、図-7 に示すような ϵ と n の関係から、その周期の確率分布が決定できることがわかる。

以上、不規則波のシミュレーション実験の結果をもと

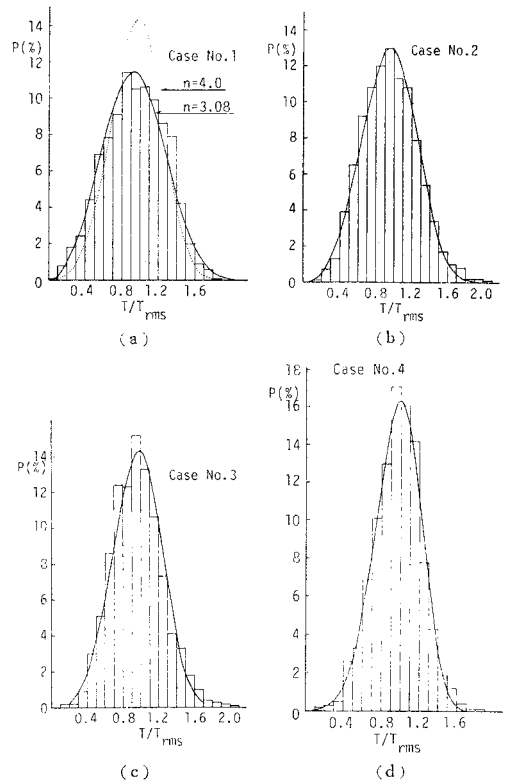


図-5 周期の頻度分布

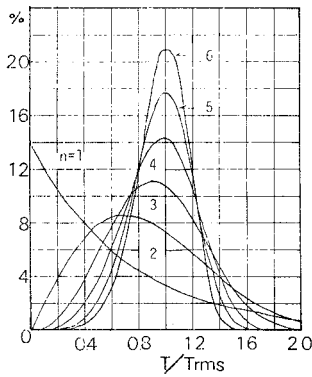


図-6 Weibull 分布

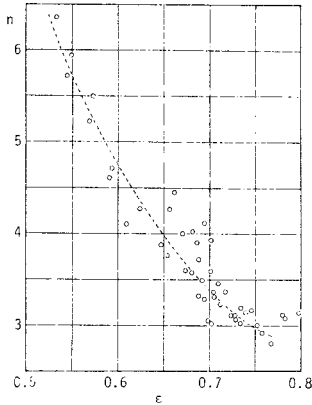
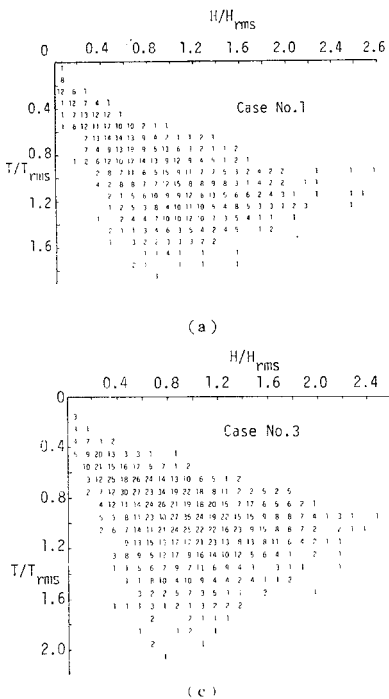


図-7 n と ε の関係



(a)

に、波高および周期のそれぞれの確率分布を検討した結果、両者とも、Weibull 分布の適応が非常に良好な結果を与えることがわかった。次に、これらの結果をもとに、実験値への Weibull 分布の適用を試みる。

(2) 波高, 周期の結合分布

図-8(a)~(d) はそれぞれケース 1 から 4 までの波高および周期の平面的な分布の様子を示したものである。図中の数字は、 $H \sim T$ 平面を H_{rms} および T_{rms} のそれぞれ 1/10 ほどのランクにわたった場合の各ランクに入るデータの数を示し

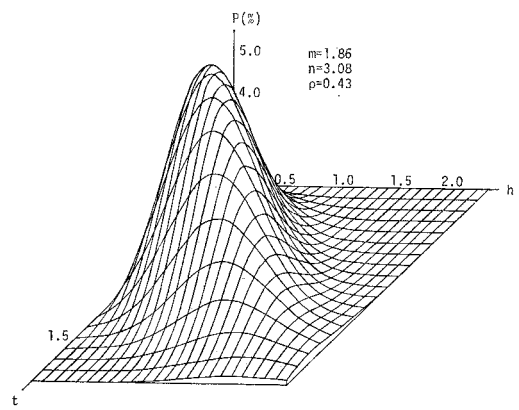
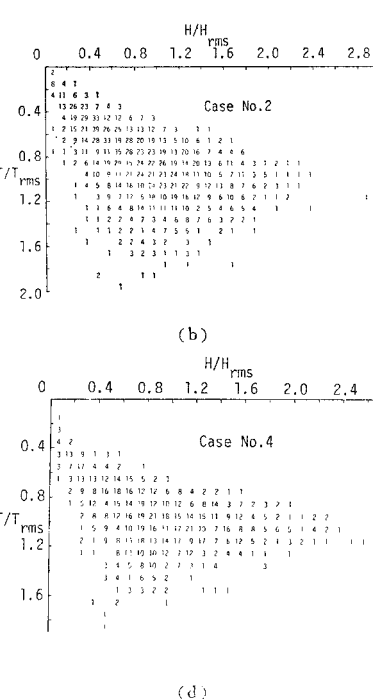


図-9 2次元 Weibull 分布の分布曲面 (ケース 1)

た。各ケースのデータ総数は表-1 に示すように 1000 波以上であって、サンプル数としてはかなり多いと思われるが、平面的な頻度分布の検討には必ずしも十分な数でなく、データにかなりの凹凸がみられる。一方、図-9 はケース 1 に対応する 2次元 Weibull 分布の確率密度の分布曲面である。しかしこれらの図からは、実験値と確率分布との対応を十分検討することは難しい。そこで、ここでは、 $t=0.8, 1.0, 1.2$ の 3つの断面において実験値と確率分布との対応を検討した。図-8 からわかるように、分布の主要部はほぼ $t=0.8 \sim 1.2$ の範囲内に入る。また、データは数の不足による分布形の凹凸を少なくするため、 $1/5 H_{rms}$ および $1/5 T_{rms}$ ほどの



(b)

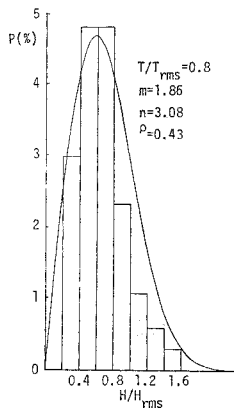
(c)

(d)

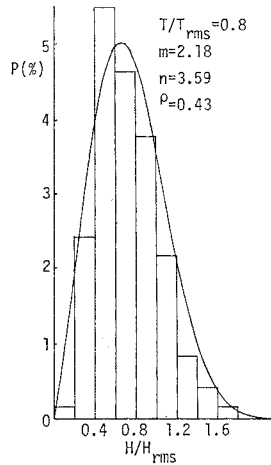
図-8 波高および周期の平面分布

ランクに再配分して用いた。図-10, 11, 12, 13 の各図はその結果を示したもので、データ数の不足により、頻度分布の形状が若干、不連続に変化している部分もあるが、いずれの場合も 2次元 Weibull 分布との対応は良好である。ここに示さなかった他のケースにおいても、実験値と 2次元 Weibull 分布との対応は、図-10~13 に示したものとほぼ同じ程度であった。

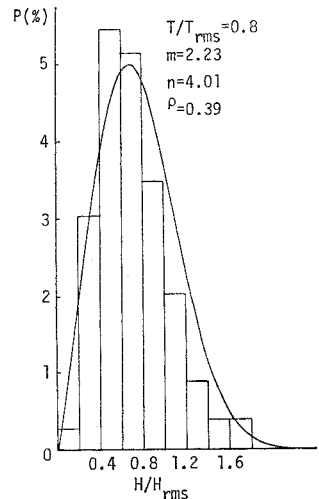
次に、図-14(a),(b) は図-11 に示したケース 2 の $t=0.6$ と 1.4 の場合のデータと 2次元 Weibull 分布(実線)との対応を示したものである。両図とも、実験値の頻度分布は、2次元 Weibull 分布に比して若干 mode が h



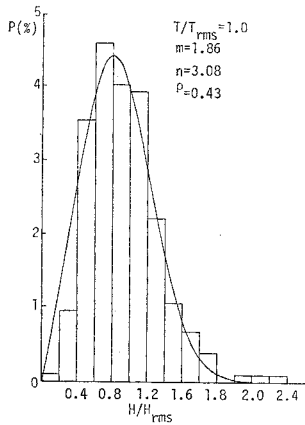
(a)



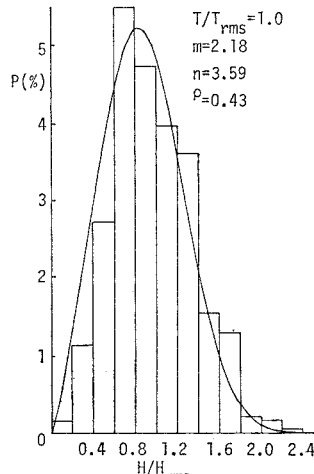
(a)



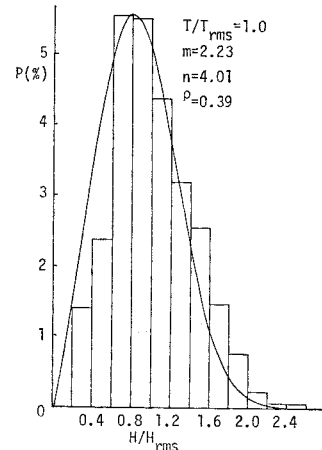
(a)



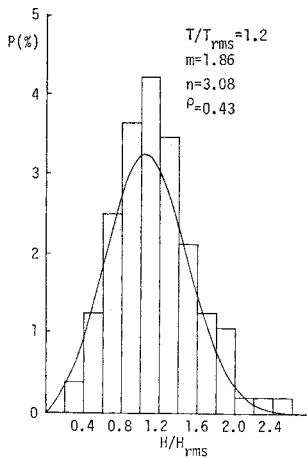
(b)



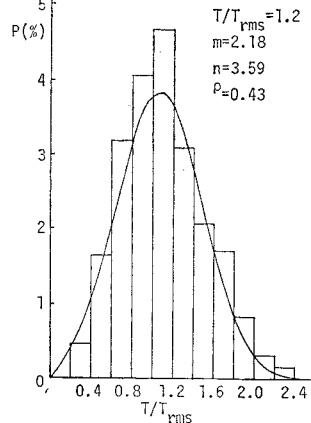
(b)



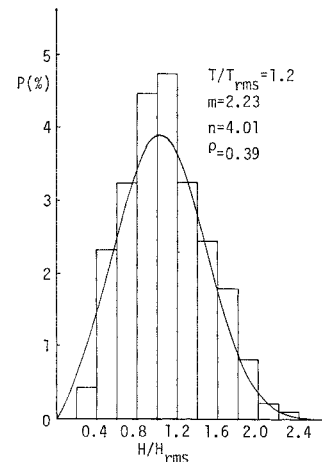
(b)



(c)



(c)

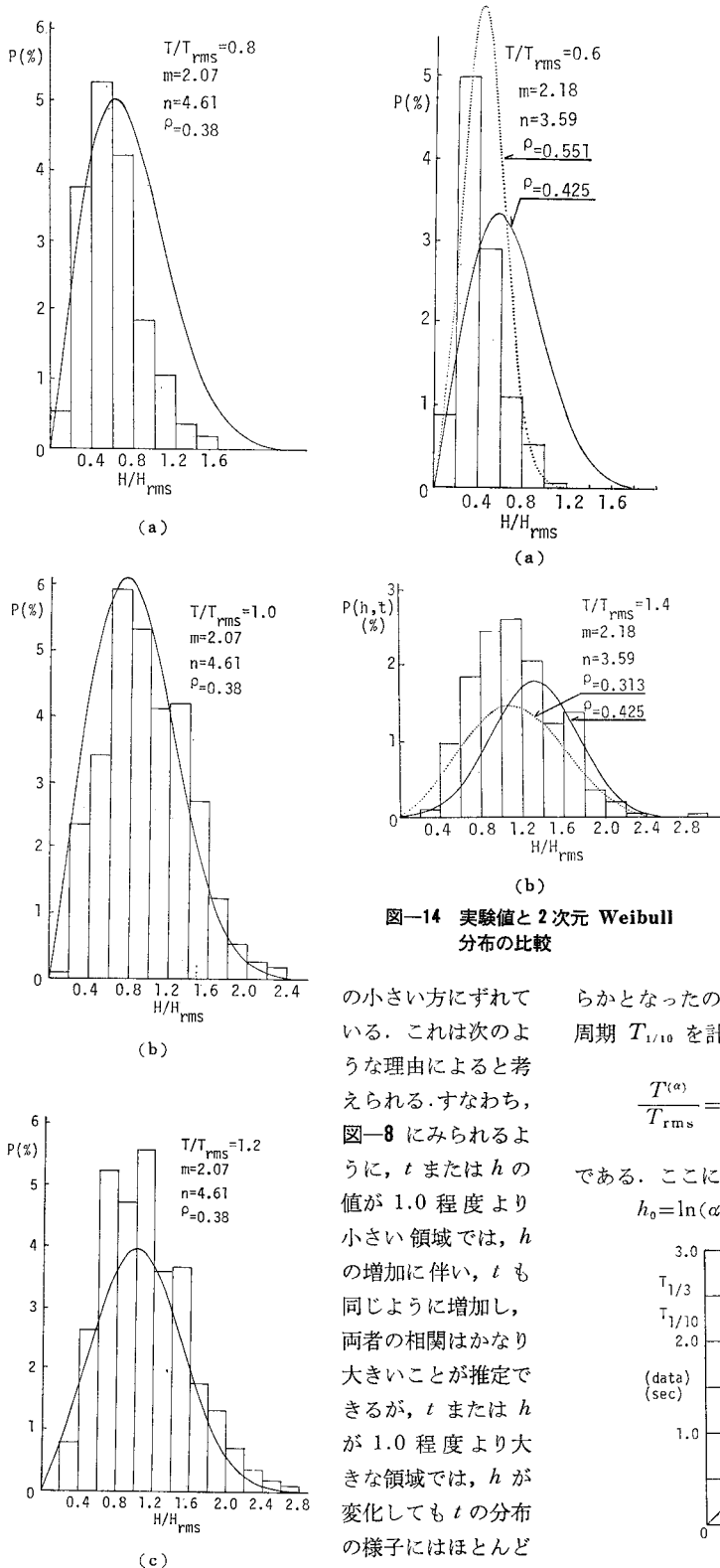


(c)

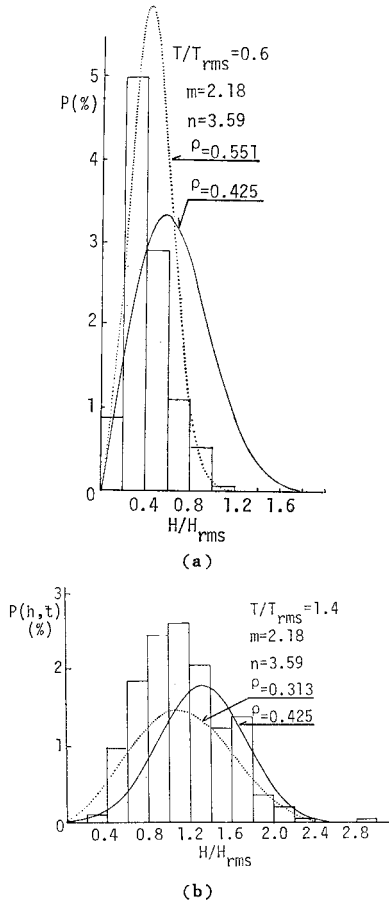
図一10 実験値と2次元 Weibull 分布の比較 (ケース1)

図一11 実験値と2次元 Weibull 分布の比較 (ケース2)

図一12 実験値と2次元 Weibull 分布の比較 (ケース3)



図一三 実験値と2次元 Weibull 分布の比較(ケース4)



図一四 実験値と2次元 Weibull 分布の比較

の小さい方にずれている。これは次のような理由によると思われる。すなわち、図一八にみられるように、 t または h の値が 1.0 程度より小さい領域では、 h の増加に伴い、 t も同じように増加し、両者の相関はかなり大きいことが推定できるが、 t または h が 1.0 程度より大きな領域では、 h が変化しても t の分布の様子にはほとんど変化がなく、逆もまた同様である。した

って、この部分での両者の相関は小さいといえる。このように、部分的に相関係数の値が異なるため、周辺部では平均的な相関係数を用いて計算した確率分布の値との間に若干の差が生じてくるものであろう。

図一四(a),(b)の点線は、実験値と平均値があうように ρ の値を変化させて計算した2次元 Weibull 分布である。実線で示した曲線が平均値 $\rho=0.425$ に対応するのに対し、図一四(a)の点線は $\rho=0.551$ と平均値より大きく、(b)は $\rho=0.313$ と逆に小さく、前の図一八からの推定を裏づけている。しかしながら、前にも示したように、データのほとんどが集中する部分では、2次元 Weibull 分布と実験値との対応は良好であり、波高、および周期の結合分布に対して、式(8)の2次元 Weibull 分布が、十分適用できることがわかる。

(3) 有義周期

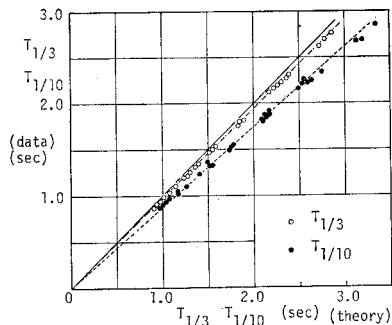
通常、有義周期 $T_{1/3}$ は、波高とのかねあいのもとに定義される値である。したがって、3.(2)で示したように2次元 Weibull 分布が波高と周期の結合分布として適用できることが明

らかとなったので、式(8)から $T_{1/3}$ または $1/10$ 最大周期 $T_{1/10}$ を計算することができる。定義より、

$$\frac{T^{(\alpha)}}{T_{rms}} = t^{(\alpha)} = \frac{\int_0^{\infty} \int_{h_0}^{\infty} t P(h, t) dh dt}{\int_0^{\infty} \int_{h_0}^{\infty} P(h, t) dh dt} \dots\dots (30)$$

である。ここに、

$$h_0 = \ln(\alpha^{-2}\phi_1)^{1/m} \dots\dots\dots (31)$$



図一五 $T_{1/3}$ および $T_{1/10}$ の実験値と理論値の比較

であり、 $\alpha=1/3$ の場合に有義周期、 $\alpha=1/10$ の場合に $1/10$ 最大周期の値を与える。

図-15 は式 (30) より求めた $T_{1/3}$ および $T_{1/10}$ の値と実験値から計算した値を比較したものである。ただし式 (30) の解析的な表現は困難であったので、ここでは数値計算によった。図より、 $T_{1/3}$ および $T_{1/10}$ とも式 (30) より計算した値の方が、実験値よりやや大きいことがわかる。これは 3.(2) で説明したように、実験値の方は h の大きい部分では、 h と t の相関が小さくなるのに比して、2次元 Weibull 分布では、すべての領域で一様な相関関係が存在するとしているためである。しかし、 $T_{1/3}$ および $T_{1/10}$ ともに、ほとんどばらつくことなく一直線上に並んでいる。このことは、 h もしくは t の大きい部分での両者の相関関係の減少パターンは n の値に関係なく、各ケースとも一様であることを示している。各ケースのデータから計算した $T_{1/3}(\text{data})$ の値と、式 (27) から計算した $T_{1/3}(\text{theo})$ との比の平均値は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_{1/3}(\text{data})}{T_{1/3}(\text{theo})} &= 0.970 \text{ (標準偏差, 0.006)} \\ \frac{T_{1/10}(\text{data})}{T_{1/10}(\text{theo})} &= 0.872 \text{ (標準偏差, 0.019)} \end{aligned} \right\} \text{.....(32)}$$

であり、一方、 $T_{1/10}$ は
.....(32)
であった。 $T_{1/3}$ 、 $T_{1/10}$ とも、標準偏差は非常に小さい。したがって、式 (32) の値を用いて補正を行えば、 $T_{1/3}$ 、 $T_{1/10}$ の値もほぼ正確に算定し得る。

(4) 相関係数

図-16 は実験値より求めた波高と周期の相関係数と、スペクトル幅に関するパラメーター ϵ との関係を示したものである。Goda¹⁸⁾ は、不規則波の数値シミュレーションの結果から、両者には明確な相関関係が存在することを示した。図より、実験値に若干のばらつきはあるが、やはり明らかな相関関係が存在し、 ϵ の増加に伴い相関係数が急速に大きくなる。

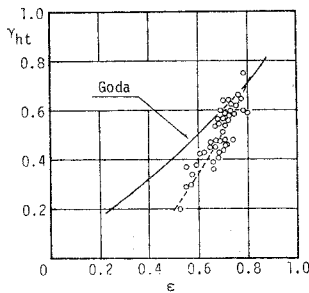


図-16 r_{ht} と ϵ の関係

図中に実線で示した Goda の結果とは若干の差はあるが、傾向は同じである。

次に、周期の分布の形状母数 n と相関係数の関係を示したものが、図-17 であり、両者の関係は図-16 に示した ϵ と r_{ht} の関係より明確であり、 n の増加に伴い r_{ht} の値は徐々に小さくなってゆくことがわかる。

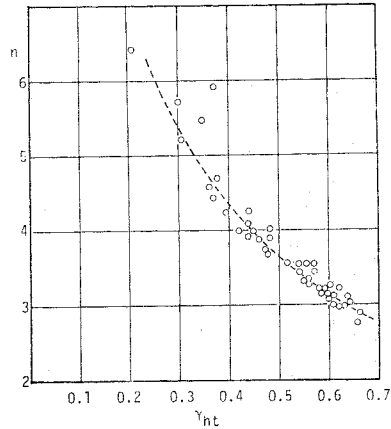


図-17 n と r_{ht} の関係

図-7, 16, 17 の結果をあわせて考えると、波高と周期の結合分布にはスペクトル幅に関するパラメーター ϵ が重要な役割を果たすことがわかる。

4. 結 言

この研究は、zero-up-cross 法で定義した不規則波の波高と周期の結合分布に対して、新たに導いた 2 次元 Weibull 分布の適用を試みたものである。その結果、以下のようなことがわかった。

(1) 波高の頻度分布に対し、Weibull 分布の適用を試みた結果、形状母数 m の値は 2.0 よりもいくぶん大きい値を示すものが多かった。この Rayleigh 分布からのずれは、Bretschneider の指摘するように、ある程度までは水位の分布の正規分布からのずれと関係するようである。したがって、波高の分布に対しても Weibull 分布を適用するのが望ましい。

(2) 周期の頻度分布は、波高の分布と異なり、スペクトル形によりかなり大きく変化する。しかしそのいずれの場合にも、実験値と Weibull 分布との対応は非常に良好であった。今回用いた実験値の範囲内では、Weibull 分布の形状母数 n はおよそ 3.0~6.0 の値を示したが、この値は、スペクトル幅に関するパラメーター ϵ と密接な相関関係を有し、 ϵ の増加に伴い n の値は徐々に小さくなってゆく。

(3) 波高と周期の結合分布に対し、2 次元 Weibull 分布をあてはめたところ、データの集中する主要部での両者の対応は非常に良好であった。しかし、波高もしくは周期の大きい部分での両者の相関係数は、全体を通じての相関係数より小さくなる傾向がみられ、この部分では 2 次元 Weibull 分布との対応が若干悪くなるようである。このことにより、理論式から求めた、 $T_{1/3}$ もしく

は $T_{1,10}$ の値は実験値から計算した値よりも若干大きくなる。しかし、理論式から求めた値に若干の補正をほどこすことにより、実験値とほぼ完全に一致する。

(4) 波高と周期の相関係数は Goda も示したように、スペクトル幅をあらわす ϵ とかなり明確な相関を有し、また周期に対する形状母数 n とも明確な関係をもつ。(1) で示した m と ϵ の関係とあわせて考えると、スペクトルの形状が決まれば、波高と周期の結合確率分布はほぼ確定される。ただ ϵ は非常に鋭敏なパラメーターであり、スペクトルの形状、特に高周波領域の形状がこの値に大きな影響を与えること、またその計算に二、三の異なる方法があり、方法によりいくぶん異なる値を与えることなどに注意しなければならない。ここで用いた ϵ の値は、水面変動の1次および2次の導関数(数値微分による)を用いて計算したものである。この他、実験あるいは現地での観測記録に含まれるノイズも ϵ の値に大きな影響を与える。したがって今後相互に比較の可能なように、この値の計算にも何らかの基準が必要となろう。

以上がこの研究で得た結果の概略である。これらのことから、ここで示した2次元 Weibull 分布が波高と周期の結合分布に対して十分な精度で適用できることがわかった。しかし本文中でも述べたように、波高と周期の結合分布は部分的に両者の相関特性が変化し、非常に複雑な形状をもつので、実験値と2次元 Weibull 分布との対応をさらによくするためには ρ の値の局所的な変化についても検討しなければならない。

謝 辞：この研究を進めるにあたり、終始ご指導を賜った京都大学工学部 岩垣雄一教授、ならびに一部研究に協力していただいた上総周平氏(当時京都大学大学院)に感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) 岩垣雄一・木村 晃：浅海域における不規則波の分散特性について、京都大学防災研究所年報、第20号 B-2, pp. 493~512, 1977.
- 2) 岩垣雄一・木村 晃：波別解析法に基づく不規則波の波

長・波速に関する研究、第23回海岸工学講演会論文集、pp. 751~754, 1976.

- 3) 岩垣雄一・木村 晃・岸田典史：斜面上における不規則波の砕波に関する研究、第24回海岸工学講演会論文集、pp. 102~106, 1977.
- 4) 岩垣雄一・木村 晃・池尻一仁：底面粗度による不規則波の波高の頻度分布の変化、第25回海岸工学講演会論文集、pp. 179~183, 1978.
- 5) Longuet-Higgins, M.S. : On the statistical distributions of the heights of sea waves Jour. Marine Res., Vol. IX, No. 3, pp. 245~266, 1967.
- 6) Rice, S.O. : 雑音理論(宮脇一男ほか訳)、電気書院、206 p., 1955.
- 7) Longuet-Higgins, M.S. : On the intervals between successive zeros of a random function, Proc. Roy. Soc., Ser. A, 246, pp. 99~118, 1958.
- 8) 竹内 信・山本善之：正規不規則過程における相継ぐ極値の近似確率分布とシミュレーションについて、日本造船学会論文集、第131号、pp. 97~113, 1972.
- 9) Longuet-Higgins, M.S. : On the statistical distribution of the heights of sea waves, J. Mar. Res., 9, pp. 245~266, 1952.
- 10) Bretschneider, C.L. : Wave variability and wave spectra for wind-generated gravity waves, U.S. Army Corps of Engineers, B.E.B., Tech. Memo., No. 113, 192 p., 1959.
- 11) 合田良実・永井康平：名古屋港における波浪観測第2報、港湾技研資料、No. 61, 64 p., 1961.
- 12) 岩垣雄一・木村 晃：不規則波の周期の確率特性に関する研究、第22回海岸工学講演会論文集、pp. 295~300, 1975.
- 13) Longuet-Higgins, M.S. : On the joint distribution of the periods and amplitudes of sea waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 80, No. 18, pp. 2688~2694, 1975.
- 14) Battjes, J.A. : Run-up distributions of waves breaking on slopes, Proc. ASCE, WW-1, pp. 91~114, 1971.
- 15) 岩垣雄一・木村 晃：不規則波発生機による現地波浪のシミュレーションシステム、第21回海岸工学講演会論文集、pp. 231~236, 1974.
- 16) Bretschneider, C.L. : Probability distribution of wave force, Proc. of the ASCE, WW-2, pp. 5~26, 1967.
- 17) Cartwright, D.E. and M.S. Longuet-Higgins : The statistical distribution of the maxima of a random function, Proc. of Royal Society of London, Vol. 237, pp. 212~232, 1956.
- 18) Goda, Y. : Numerical experiments on wave statistics with spectral simulation, Rept. of the Port and Harbour Research Institute, Vol. 9, No. 3, 57 p., 1970.

(1977.6.24・受付)