

# 弾性固有値問題の積分方程式による解法

## APPLICATIONS OF INTEGRAL EQUATION METHOD TO EIGENVALUE PROBLEMS OF ELASTICITY

丹羽 義次\*・小林 昭一\*\*・北原 道弘\*\*\*

By Yoshiji NIWA, Shoichi KOBAYASHI and Michihiro KITAHARA

### 1. はじめに

線形場の境界値問題とか、初期値問題を積分方程式に帰着させて数値的に解く方法は、一般に積分方程式法とよばれている。この方法は、最近急速に発展し、種々の問題に適用され始めている。しかしながら、固有値問題を対象としたものはきわめて少なく、なかでも面内の固有振動に関する解析はまだ見当たらないようである。

本論文は、このような観点から、弾性学の固有値問題を対象として積分方程式法を定式化し、その適用性を検討したものである。前半では、まず弾性学の境界値問題を積分方程式に定式化する方法について再検討し、それらを分類して示した。ついで、固有値問題の積分方程式法について論議した。後半では、まず具体的な数値解析例として、円形領域での Helmholtz 式の固有値を決定し、その精度を検討した。最後に、積分方程式を弾性体の固有振動問題に適用し、固有値を決定し、その有用性を確認した。

### 2. 積分方程式の基礎

まず、準備として 4. で固有値決定積分方程式を定式化するために必要な定義と関係式を述べておこう。

#### (1) 定 義

以下のことを定義する。Fig. 1 も参照されたい。

(i) 対象とする場

$$R^3 = D_- \cup \partial D \cup D_+ \quad (3 \text{次元 Euclid 空間})$$

$$D_- : R^3 \text{ 内の有界領域}$$

$$\partial D : \text{閉じた Lyapunov 曲面}^{(1)} \text{をもつ境界}$$

$D_+ : \partial D$  の外部

$$\left. \begin{aligned} X &= (X_1, X_2, X_3) : \text{Field Point} \\ Y &= (Y_1, Y_2, Y_3) : \text{Source Point} \end{aligned} \right\}$$

$$X, Y \in D_- \cup D_+$$

$$\left. \begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3) : \text{Field Point} \\ y &= (y_1, y_2, y_3) : \text{Source Point} \end{aligned} \right\} x, y \in \partial D$$

$n_y$  : 境界上の点  $y$  における単位外向き法線ベクトル

以後、直交デカルト座標を採用し、シンボル記号表示と指標表示とを、便宜的に、場合に応じて併用する。

(ii) 偏微分作用素

定常弾性問題における Navier-Cauchy 作用素

$$\begin{aligned} L &\equiv \dot{L} + \rho \omega^2 \mathbf{1} = \lambda \nabla \nabla \cdot + \mu (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{1} + \mu \nabla \nabla \cdot + \rho \omega^2 \mathbf{1} \\ &= \rho [C_T \Delta \mathbf{1} + (C_L^2 - C_T^2) \nabla \nabla \cdot + \omega^2 \mathbf{1}] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $\nabla$  はナブラ作用素、 $\Delta$  はラプラス作用素、 $\rho$  は密度、 $C_T = \sqrt{\mu/\rho}$ 、 $C_L = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$  は横波、縦波の波速、 $\lambda, \mu$  は Lamé 定数、 $\omega$  は角振動数、 $\mathbf{1}$  は単位テンソルである。

$$\overset{n_x}{T} \equiv \lambda n \nabla \cdot + 2\mu (n \cdot \nabla) \mathbf{1} + \mu n \wedge \nabla \wedge \dots\dots\dots (2)$$

2点テンソルを扱ううえで、作用点を明示する必要がある場合は、 $L^x, \overset{n_x}{T}$  などと添字を付けて記す。

境界極限については、次のように約束する。例えば、

$$\overset{n_x}{T}(S\mu)(x^+) \equiv \lim_{X \rightarrow x^+} \overset{n_x}{T}(S\mu)(X) : \text{関数の外部極限値}$$

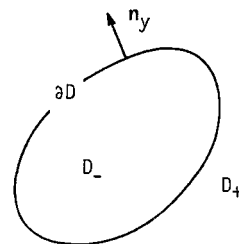


Fig. 1 Domain, Boundary and Normal Vector

\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室  
\*\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室  
\*\*\* 学生会員 工修 京都大学大学院工学研究科

$$\overset{n_x}{T}(S\mu)(x^-) \equiv \lim_{X \rightarrow x^-} \overset{n_x}{T}(S\mu)(X) : \text{関数の内部極限値}$$

$x^+$ ,  $x^-$  の意味は次のようである.

$$x^+ : D_+ \ni X \rightarrow x \in \partial D$$

$$x^- : D_- \ni X \rightarrow x \in \partial D$$

(iii) 基本解 (2. (3) 参照)

$U(X, Y; \omega)$  : 外向きの波より生成される解

$\overline{U}(X, Y; \omega)$  :  $U(X, Y; \omega)$  の複素共役, 内向きの波より生成される解

内部問題においては  $U, \overline{U}$  両者が用いられる.

(iv) 積分作用素

$K(x, y; \omega)$  : 境界  $\partial D$  上の積分作用素注 1)

$$(K\mu)(x) = \int_{\partial D} \overset{n_x}{T}U(x, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y, \quad x, y \in \partial D \dots \dots \dots (3)$$

$K^*(x, y; \omega)$  :  $K$  の随伴作用素

$$(K^*\mu)(x) = \int_{\partial D} \overset{n_y}{T}\overline{U}(x, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y, \quad x, y \in \partial D \dots \dots \dots (4)$$

(2) 定常弾性問題における境界値問題の分類

内部固有値の存在は外部問題の解法と関係することから, 固有値決定条件は外部問題の可解性条件からも導かれる. 準備として, ここでは内部, 外部境界値問題を分類して列挙しておく.

(i) 内部第一種問題

$$(\overset{\circ}{L} + \rho\omega^2 \mathbf{1})u(X) = -\rho b(X), \quad X \in D_- \dots \dots (5)$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial D$$

(ii) 外部第二種問題

$$(\overset{\circ}{L} + \rho\omega^2 \mathbf{1})u(X) = -\rho b(X), \quad X \in D_+ \dots \dots (6)$$

$$\overset{n_x}{T}u(x) = t(x) = g(x), \quad x \in \partial D$$

(iii) 内部第二種問題

$$(\overset{\circ}{L} + \rho\omega^2 \mathbf{1})u(X) = -\rho b(X), \quad X \in D_- \dots \dots (7)$$

$$\overset{n_x}{T}u(x) = t(x) = g(x), \quad x \in \partial D$$

(iv) 外部第一種問題

$$(\overset{\circ}{L} + \rho\omega^2 \mathbf{1})u(X) = -\rho b(X), \quad X \in D_+ \dots \dots (8)$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial D$$

(v) 内部第三種問題

$$(\overset{\circ}{L} + \rho\omega^2 \mathbf{1})u(X) = -\rho b(X), \quad X \in D_- \dots \dots (9)$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial D_u$$

$$\overset{n_x}{T}u(x) = t(x) = g(x), \quad x \in \partial D_t$$

$$(\partial D = \partial D_u \cup \partial D_t)$$

(vi) 外部第三種問題

$$(\overset{\circ}{L} + \rho\omega^2 \mathbf{1})u(X) = -\rho b(X), \quad X \in D_+ \dots \dots (10)$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial D_u$$

$$\overset{n_x}{T}u(x) = t(x) = g(x), \quad x \in \partial D_t$$

$$(\partial D = \partial D_u \cup \partial D_t)$$

なお, 外部問題については放射条件<sup>3)</sup>が満たされることが必要である. また,  $\overset{\circ}{L}, \overset{n_x}{T}$  は式 (1), (2) で定義した作用素であり, 変位, 応力, 物体力ベクトル  $u, t, b$  は複素ベクトル値関数である.

(3) 基本解

基本解は以下に述べる Hörmander の方法<sup>4)</sup>を用いると容易に求められる. まず次の定義をする.

$P\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)$  : (1) で定義した偏微分作用素  $L$  の行列表現

${}^c P\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)$  :  $P\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)$  の余因子行列

$\det P\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)$  :  $P\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)$  の行列式

$e_x$  :  $\det P\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)$  の基本解

すなわち,  $\det P\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)e_x = -\delta_x(0)$  の解

$L$  は自己随伴 ( $L^* = L$ ) であることに注意して, 次の式を満足する超関数  $U$  を偏微分作用素  $L$  に対する基本解とよぶ.

$$LU = -1 \delta \quad (\delta : \text{Dirac measure})$$

$P\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)$  に対する微分多項式  $P(\xi) \neq 0$  ならば基本解  $U$  は次のように表示される.

$$U(X, 0) = {}^c P\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)(-e_x \mathbf{1})$$

すなわち,  $U_{ij}(X, 0) = {}^c P\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)_{ik}(-e_x \delta_{kj})$

これより 2 次元, 3 次元問題における基本解が次のように得られる.

2 次元の場合:

$$U(X, Y; \omega) = \frac{i}{4\mu} \left[ H_0^{(1)}(k_{Tr}) \mathbf{1} + \frac{1}{k_T^2} \nabla \nabla \{ H_0^{(1)}(k_{Tr}) - H_0^{(1)}(k_{Lr}) \} \right]$$

$$\overline{U}(X, Y; \omega) = -\frac{i}{4\mu} \left[ H_0^{(2)}(k_{Tr}) \mathbf{1} + \frac{1}{k_T^2} \nabla \nabla \right]$$

注 1) 積分作用素が定義される関数空間については次のように約束する. 弾性論の場合に得られる積分方程式において, その積分は Cauchy の主値の意味でしか意味をもたない特異積分方程式となる. 以後, 定式化を行ううえにおいて密度の属する関数クラスとして Hölder 連続関数の空間  $H_r(\partial D)^2$  を仮定しておく.

すなわち, 曲面  $\partial D$  上で定義された関数  $\mu(x)$  が  $H_r(\partial D)$  の元であるとは,  $\partial D$  上の任意の 2 点  $x$  と  $y$  に対し,  $x$  と  $y$  に無関係な定数  $A > 0, \gamma$  があって, 次の不等式が成立するときをいう.

$$|\mu(x) - \mu(y)| \leq Ar^\gamma, \quad \text{ここに, } r = |x - y|, \quad 0 < r \leq 1$$

$$\{H_0^{(2)}(k_T r) - H_0^{(2)}(k_L r)\}$$

3次元の場合:

$$U(X, Y; \omega) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[ \frac{e^{ik_T r}}{r} 1 + \frac{1}{k_T^2} \nabla \nabla \left\{ \frac{e^{ik_T r}}{r} - \frac{e^{ik_L r}}{r} \right\} \right]$$

$$\overline{U(X, Y; \omega)} = \frac{1}{4\pi\mu} \left[ \frac{e^{-ik_T r}}{r} 1 + \frac{1}{k_T^2} \nabla \nabla \left\{ \frac{e^{-ik_T r}}{r} - \frac{e^{-ik_L r}}{r} \right\} \right]$$

ここに,  $H_0^{(1)}(kr), H_0^{(2)}(kr)$  はそれぞれ第1種0次, 第2種0次の Hankel 関数であり,  $k_T = \omega/C_T$  は横波の波数,  $k_L = \omega/C_L$  は縦波の波数,  $r = |X - Y|$  である.

角振動数  $\omega$  を 0 とする極限操作により静弾性問題に対する基本解が次のように得られる.

2次元の場合:

$$U(X, Y) = \frac{1}{4\pi\mu C_L^2} \left[ (C_L^2 + C_T^2) \log \frac{1}{r} 1 + (C_L^2 - C_T^2) (\nabla r) (\nabla r) \right]$$

3次元の場合:

$$U(X, Y) = \frac{1}{8\pi\mu C_L^2 r} [(C_L^2 + C_T^2) 1 + (C_L^2 - C_T^2) (\nabla r) (\nabla r)]$$

(4) ポテンシャルの性質

曲面に関して Lyapunov 曲面程度の滑らかさ, 密度に関しては Hölder 連続性を仮定すれば, 古典ポテンシャル論と同様な次の結果が得られる<sup>9)</sup>.

(i) 一重層ポテンシャルの定義と性質

$(S\mu)(X)$ : 密度  $\mu$  による境界  $\partial D$  上の一重層ポテンシャルが点  $X \in R^3$  に与える影響, すなわち,

$$(S\mu)(X) \equiv \int_{\partial D} U(X, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y, X \in R^3 \dots\dots\dots(11)$$

その性質は,

(ア)  $(S\mu)(X)$  は全空間  $(R^3)$  で連続であり, 境界への極限も連続である. すなわち,

$$(S\mu)(x^+) = (S\mu)(x^-) = (S\mu)(x) \dots\dots\dots(12)$$

(イ)  $\overset{ny}{T}(S\mu)(X)$  は境界への極限として次のような不連続性をもつ.

$$\overset{ny}{T}(S\mu)(x^+) = -\frac{1}{2} \mu(x) + (K\mu)(x), x \in \partial D \dots\dots\dots(13)$$

$$\overset{ny}{T}(S\mu)(x^-) = \frac{1}{2} \mu(x) + (K\mu)(x), x \in \partial D \dots\dots\dots(14)$$

$$\overset{ny}{T}(S\mu)(x^+) - \overset{ny}{T}(S\mu)(x^-) = -\mu(x), x \in \partial D \dots\dots\dots(15)$$

(ii) 二重層ポテンシャルの定義と性質

$(D\mu)(X)$ : 密度  $\mu$  による境界  $\partial D$  上の二重層ポテンシャルが点  $X \in R^3$  に与える影響, すなわち,

$$(D\mu)(X) \equiv \int_{\partial D} \overset{ny}{T}U(X, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y, X \in R^3 \dots\dots\dots(16)$$

境界上の点  $x \in \partial D$  に対しては随伴作用素  $K^*$  の定義により, 次のように書ける.

$$(D\mu)(x) = \int_{\partial D} \overset{ny}{T}U(x, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y = (\bar{K}^* \mu)(x), x \in \partial D \dots\dots\dots(17)$$

その性質は,

(ア)  $(D\mu)(X)$  は境界で次のような不連続性をもつ.

$$(D\mu)(x^+) = \frac{1}{2} \mu(x) + (\bar{K}^* \mu)(x), x \in \partial D \dots\dots\dots(18)$$

$$(D\mu)(x^-) = -\frac{1}{2} \mu(x) + (\bar{K}^* \mu)(x), x \in \partial D \dots\dots\dots(19)$$

$$(D\mu)(x^+) - (D\mu)(x^-) = \mu(x), x \in \partial D \dots\dots\dots(20)$$

(イ)  $\overset{nx}{T}(D\mu)(X)$  は, その境界への片側極限值が存在すれば, 全空間  $(R^3)$  で連続である.

$$(D_n \mu) \begin{cases} \equiv \overset{nx}{T}(D\mu)(X) \\ = \overset{ny}{T} \int_{\partial D} \overset{ny}{T}U(X, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y, \\ X \in D_+ \cup D_- \\ \equiv \overset{nz}{T}(D\mu)(x^-) = \overset{nz}{T}(\bar{K}^* \mu)(x), x \in \partial D \end{cases} \dots\dots\dots(21)$$

$$\overset{nz}{T}(D\mu)(x^+) = \overset{nz}{T}(D\mu)(x^-) = (D_n \mu)(x), x \in \partial D \dots\dots\dots(22)$$

(5) Green の第3公式 (Somigliana 公式)

式(1)で定義された偏微分作用素  $L$  の随伴作用素 (いま,  $L^* = L$ ) を導入し, 2.(3)で述べたところにより  $L^*$  の基本解を求め, さらに 2.(4)の結果を考慮すると, 次のように Green の第3公式 (Somigliana 公式) が導かれる.

(i) 内部公式

$$\int_{\partial D} [(\overset{ny}{T}u(y))U(X, y; \omega) - u(y)\overset{ny}{T}U(X, y; \omega)] dS_y = (St)(X) - (Du)(X) = \begin{cases} 0, & X \in D_+ \\ \frac{1}{2}u(x), & x \in \partial D \\ u(X), & X \in D_- \end{cases} \dots\dots\dots(23)$$

内部公式は  $U(X, y; \omega)$  を  $\overline{U(X, y; \omega)}$  に置き換えても成立する.

(ii) 外部公式

$$\int_{\partial D} [u(y) \overset{ny}{T}U(X, y; \omega) - (\overset{ny}{T}u(y))U(X, y; \omega)] dS_y$$

$$= (Du)(X) - (St)(X) = \begin{cases} u(X), & X \in D_+ \\ \frac{1}{2}u(x), & x \in \partial D \\ \mathbf{0}, & X \in D_- \end{cases}$$

.....(24)

境界上の点  $x \in \partial D$  に対しては、式 (23), (24) は次のように書ける。

(iii) 内部公式

$$\frac{1}{2}u(x) = (St)(x) - (\bar{K} * u)(x), \quad x \in \partial D$$

.....(25)

(iv) 外部公式

$$\frac{1}{2}u(x) = (\bar{K} * u)(x) - (St)(x), \quad x \in \partial D$$

.....(26)

### 3. 定常問題に対する積分方程式

定常問題に対する積分方程式では、積分核に固有パラメーターが含まれるため、パラメーターが固有値に一致した場合の考察が必要となる。ここでは次章の準備として次の2つの方法、すなわち、層ポテンシャル表示および Green 表示により積分方程式を構成した。

例として、外部第二種問題に対するものを示そう。

(i) 層ポテンシャル表示による方法

外部領域において、変位は一重層ポテンシャルにより次のように表示されると仮定する。

$$u(X) = (S\mu)(X), \quad X \in D_+$$

上式に  $\overset{ny}{T}$  を作用させた後、外部極限移行 ( $X \rightarrow x^+$ ) により、性質 (13) と、境界条件 (6) を考慮して、次の第2種積分方程式を得る。

$$\frac{1}{2}\mu(x) - (K\mu)(x) = -g(x), \quad x \in \partial D \dots(27)$$

(ii) Green 積分表示による方法

外部公式 (26) に境界条件 (6) を考慮すると、次の第2種積分方程式を得る。

$$\frac{1}{2}u(x) - (\bar{K} * u)(x) = -(Sg)(x), \quad x \in \partial D$$

.....(28)

一方、外部公式 (24) に  $\overset{ny}{T}$  を作用させた後、外部極限移行 ( $X \rightarrow x^+$ ) により、性質 (13), (22) と境界条件 (6) を用いることにより、次の第1種積分方程式を得る。

$$(D_n u)(x) = \frac{1}{2}g(x) + (Kg)(x), \quad x \in \partial D$$

.....(29)

2つの異なる方法 (i) と (ii) により、形式的には3つの異なる積分方程式が構成された。また、右辺の擾乱項の相違は定常問題における解法を論じる場合は問題とな

る。

ここで Green 積分表示による方法では、異なる固有値をもつ2種類の積分方程式が構成された点に注意されたい。すなわち、式 (28) は微分方程式 (6) の境界における解表現式 (26) に、境界条件 (6) を適用したものであるが、積分核に含まれるパラメーターが、内部固有値 (詳しくは、内部第一種問題の固有値) に一致する場合には、内部固有関数による任意性が存在するため、一意解は保証されない。このことは、形式的には周知の Fredholm の定理の主張にほかならない。問題となるのは、この定理の適用可能性と、適用できるとすればいかなる意味において適用できるかということであるが、このことについては 4. の始めの部分で述べる。しかし、この場合にも、Fredholm の交代定理と 4. の 4) に述べるところから、式 (29) により一意解が保証される。

静的問題においては、これら式 (28), (29) なる2つの積分方程式の解は一致する。これは、積分核が固有パラメーターを含まないためであって、式 (29) に対応する積分方程式は不必要なものとなる。

いま、外部第二種問題についてのみ簡単な考察を行ったが、これと同様にして、2. において示された境界値問題に対し、積分方程式とその解表現をまとめると Table 1 のようになる。

Table 1 の説明

問題の構成：2. (2) における境界値問題であり、以後内部問題を F.I., 外部問題を S.E. などと略記する。また、2つの構成法による積分方程式を次のように分類している。

- L: 層ポテンシャル表示による構成であり、積分核として  $U(x, y; \omega)$  をもつ。
- $\bar{L}$ : 同じく、積分核として  $\overline{U}(x, y; \omega)$  をもつ。
- G: Green 積分表示による構成であり、積分核として  $U(x, y; \omega)$  をもつ。
- $\bar{G}$ : 同じく、積分核として  $\overline{U}(x, y; \omega)$  をもつ。

以後、参照する場合は、F.I.(G), S.E.(L) などと記述する。

積分方程式：各問題に対する積分方程式を示したものであり、ここでは  $I$  は恒等作用素を意味する。

作用素 (O) :

$$S\mu = \int_{\partial D} U(x, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y,$$

$$K\mu = \int_{\partial D} \overset{ny}{T}U(x, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y,$$

$$\bar{K}\mu = \int_{\partial D} \overset{ny}{T}\overline{U}(x, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y,$$

(K の複素共役核をもつ作用素)

$$K^* \mu = \int_{\partial D} \overset{ny}{T}U(x, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y,$$

(K の随伴作用素)

Table 1 Boundary Integral Equation and Representation of Solution

Formulation of Problem		Integral Equation		O	I.P.	A.P.	Representation of Solution		U
First Interior Problem, F.I.	L	(30·a)	$\left(\frac{1}{2}I - \bar{K}^*\right) \mathbf{u}^* = -\mathbf{f}$	$\bar{K}^*$	$I_1$	$A_1$	(30·b)	$\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{u}^*$	$\mathbf{u}^*$
	$\bar{L}$	(31·a)	$\left(\frac{1}{2}I - \mathbf{K}^*\right) \mathbf{u}^* = -\mathbf{f}$	$\mathbf{K}^*$		$A_2, A_3$	(31·b)	$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}^*$	$\mathbf{u}^*$
	G	(32·a)	$\left(\frac{1}{2}I - \mathbf{K}\right) \mathbf{t}_- = -\mathbf{D}_n \mathbf{f}$	$\mathbf{K}$	$I_1$	$A_4$	(32·c)	$\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{t}_- - \mathbf{D}\mathbf{f}$	$\mathbf{t}_-$
		(32·b)	$\mathbf{S}\mathbf{t}_- = \left(\frac{1}{2}I + \bar{\mathbf{K}}^*\right) \mathbf{f}$	$\mathbf{S}$					
	$\bar{G}$	(33·a)	$\left(\frac{1}{2}I - \bar{\mathbf{K}}\right) \tilde{\mathbf{t}}_- = -\mathbf{D}_n \mathbf{f}$	$\bar{\mathbf{K}}$		$A_1, A_3$	(33·c)	$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{t}}_- - \bar{\mathbf{D}}\mathbf{f}$	$\tilde{\mathbf{t}}_-$
		(33·b)	$\bar{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{t}}_- = \left(\frac{1}{2}I + \mathbf{K}^*\right) \mathbf{f}$	$\bar{\mathbf{S}}$					
Second Exterior Problem, S.E.	L	(34·a)	$\left(\frac{1}{2}I - \mathbf{K}\right) \mathbf{t} = -\mathbf{g}$	$\mathbf{K}$	$I_1$	$A_2$	(34·b)	$\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$
	G	(35·a)	$\left(\frac{1}{2}I - \bar{\mathbf{K}}^*\right) \mathbf{u}_+^* = -\mathbf{S}\mathbf{g}$	$\bar{\mathbf{K}}^*$	$I_2$	$A_1$	(35·c)	$\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{u}_+^* - \mathbf{S}\mathbf{g}$	$\mathbf{u}_+^*$
		(35·b)	$\mathbf{D}_n \mathbf{u}_+^* = \left(\frac{1}{2}I + \mathbf{K}\right) \mathbf{g}$	$\mathbf{D}_n$					
Second Interior Problem, S.I.	L	(36·a)	$\left(\frac{1}{2}I + \mathbf{K}\right) \mathbf{t} = \mathbf{g}$	$-\mathbf{K}$	$I_1$	$A_4$	(36·b)	$\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$
	$\bar{L}$	(37·a)	$\left(\frac{1}{2}I + \bar{\mathbf{K}}\right) \tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{g}$	$-\bar{\mathbf{K}}$		$A_1, A_3$	(37·b)	$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{t}}$	$\tilde{\mathbf{t}}$
	G	(38·a)	$\left(\frac{1}{2}I + \bar{\mathbf{K}}^*\right) \mathbf{u}_-^* = \mathbf{S}\mathbf{g}$	$-\bar{\mathbf{K}}^*$	$I_2$	$A_3$	(38·c)	$\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{g} - \mathbf{D}\mathbf{u}_-^*$	$\mathbf{u}_-^*$
		(38·b)	$\mathbf{D}_n \mathbf{u}_-^* = \left(-\frac{1}{2}I + \mathbf{K}\right) \mathbf{g}$	$\mathbf{D}_n$					
	$\bar{G}$	(39·a)	$\left(\frac{1}{2}I + \mathbf{K}^*\right) \mathbf{u}_-^* = \bar{\mathbf{S}}\mathbf{g}_-$	$-\mathbf{K}^*$		$A_3, A_1$	(39·c)	$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{S}}\mathbf{g}_- - \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}_-^*$	$\mathbf{u}_-^*$
		(39·b)	$\bar{\mathbf{D}}_n \mathbf{u}_-^* = \left(-\frac{1}{2}I + \bar{\mathbf{K}}\right) \mathbf{g}$	$\bar{\mathbf{D}}_n$					
First Exterior Problem, F.E.	L	(40·a)	$\left(\frac{1}{2}I + \bar{\mathbf{K}}^*\right) \mathbf{u}^* = \mathbf{f}$	$-\bar{\mathbf{K}}^*$	$I_2$	$A_1$	(40·b)	$\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{u}^*$	$\mathbf{u}^*$
	G	(41·a)	$\left(\frac{1}{2}I + \bar{\mathbf{K}}\right) \mathbf{t}_+ = \mathbf{D}_n \mathbf{f}$	$-\mathbf{K}$	$I_1$	$A_3$	(41·c)	$\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{t}_+$	$\mathbf{t}_+$
		(41·b)	$\mathbf{S}\mathbf{t}_+ = \left(-\frac{1}{2}I + \bar{\mathbf{K}}^*\right) \mathbf{f}$	$\mathbf{S}$					
Mixed (Third) Interior Prob., M.I.	G	(42·a)	$(\mathbf{S}\mathbf{t}_-)_{\partial D_n} - (\bar{\mathbf{K}}^* \mathbf{u}_-^*)_{\partial D_t}$ $= \left[ \left(\frac{1}{2}I + \bar{\mathbf{K}}^*\right) \mathbf{f} \right]_{\partial D_n} - (\mathbf{S}\mathbf{g})_{\partial D_t}$ $(\mathbf{S}\mathbf{t}_-)_{\partial D_n} - \left[ \left(\frac{1}{2}I + \bar{\mathbf{K}}^*\right) \mathbf{u}_-^* \right]_{\partial D_t}$ $= (\bar{\mathbf{K}}^* \mathbf{f})_{\partial D_n} - (\mathbf{S}\mathbf{g})_{\partial D_t}$	$\mathbf{S}$	$x \in \partial D_n$		(42·b)	$\mathbf{u} = (\mathbf{S}\mathbf{t}_-)_{\partial D_n} - (\mathbf{D}\mathbf{u}_-^*)_{\partial D_t}$ $+ (\mathbf{S}\mathbf{g})_{\partial D_t} - (\mathbf{D}\mathbf{f})_{\partial D_n}$	$\mathbf{t}_-$ on $\partial D_n$ $\mathbf{u}_-^*$ on $\partial D_t$
Mixed (Third) Exterior Prob., M.E.	G	(43·a)	$(\mathbf{S}\mathbf{t}_+)_{\partial D_n} - (\bar{\mathbf{K}}^* \mathbf{u}_+^*)_{\partial D_t}$ $= \left[ \left(-\frac{1}{2}I + \bar{\mathbf{K}}\right) \mathbf{f} \right]_{\partial D_n} - (\mathbf{S}\mathbf{g})_{\partial D_t}$ $(\mathbf{S}\mathbf{t}_+)_{\partial D_n} - \left[ \left(-\frac{1}{2}I + \bar{\mathbf{K}}\right) \mathbf{u}_+^* \right]_{\partial D_t}$ $= (\bar{\mathbf{K}}^* \mathbf{f})_{\partial D_n} - (\mathbf{S}\mathbf{g})_{\partial D_t}$	$\mathbf{S}$	$x \in \partial D_n$		(43·b)	$\mathbf{u} = -(\mathbf{S}\mathbf{t}_+)_{\partial D_n} + (\mathbf{D}\mathbf{u}_+^*)_{\partial D_t}$ $- (\mathbf{S}\mathbf{g})_{\partial D_t} + (\mathbf{D}\mathbf{f})_{\partial D_n}$	$\mathbf{t}_+$ on $\partial D_n$ $\mathbf{u}_+^*$ on $\partial D_t$

注) Table において, O は Operator, I.P. は Identity Pair, A.P. は Adjoint Pair, U は Unknown を意味する。

$$D\mu = \bar{K}^* \mu = \int_{\partial D} \bar{T}^* U(x, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y,$$

(いわゆる第2基本特異解を核とする作用素)

$$D_n \mu = \bar{T}^* (\bar{K}^* \mu)$$

同一対 (I.P.) : 同じ積分核をもつ積分方程式対であり, たとえば表中における  $I_1$  と  $I_1$  は同一対であることを示している.

随伴対 (A.P.) : 随伴積分核をもつ積分方程式対であり, たとえば表中における  $A_1$  と  $A_1$  は随伴対であることを示している.

解表現 : 積分方程式の解が存在したとき, 対象とする領域内の解表現を与えている.

未知量 (U) : 各積分方程式における未知複素量を示した.

Green 積分表示による積分方程式における未知量は, 実際の変位とか応力を意味するが, 層ポテンシャル表示における未知密度は, 実際の変位とか応力を意味していない. このことを明示するために, 前者における未知量に対しては外部, 内部問題に応じ (+), (-) なる符号を付した.

この Table 1 は, 定常弾性問題における基本的境界値問題を境界上の積分方程式に変換したとき, 積分作用素  $K(x, y; \omega)$  の間の関係を示しているが,  $K(x, y; \omega)$  の型に着目したとき, 同一対, 随伴対が示すように, 内部第一種問題と外部第二種問題, 内部第二種問題と外部第一種問題は, 密接に関係していることがわかる. このことは, 積分方程式により固有値問題を考えるとき, より明確となる.

#### 4. 固有値問題

本章では積分方程式による固有値決定積分方程式を考えるが, この問題の周辺は定常問題における外部問題の解の存在, 一意性と関連して, 理論と数値解析法という両面で興味ある問題を含んでいる. 3. においては, 連続な場を支配する偏微分方程式系をそれと等価な積分方程式に変換したが, 得られた積分方程式は有界な曲面上で Cauchy の主値の意味でしか積分に意味がなく, この特異積分作用素の扱いには一応の注意が必要となる.

上に述べた問題の一部は, この特異積分方程式に Fredholm の一連の定理は適用可能か, という問題に帰着される. これについては, Mikhlin<sup>6)</sup>, 特に定常弾性問題に対しては Kupradze<sup>7)</sup> に詳しく述べられており, ここに得られた特異積分方程式は,  $\lambda > 0, \mu > 0$  なる Lamé 定数に対し, 常に正則化 (regularization) が可能であり, この意味において Fredholm の一連の定理は適用可能であることが証明されており, 古典ポテンシヤ

ル論と同様な結果が成立することが示されている.

さて, 3. に示した積分方程式は, 一般に次の形の非同次積分方程式を構成している. ここでは第二種方程式のみを例として挙げるが, 第一種方程式, また, 第三種問題に対する方程式についても同様に考える. 要するに, 非同次か同次かを問題とする.

$$(I - \kappa K) \mu = f \dots\dots\dots(44)$$

たとえば, Table 1 における問題 S.I.(G) においては,  $\kappa = -2, K = \bar{K}^*, \mu = \bar{u}_-, f = 2 Sg_-$  である.

これに対応する同次積分方程式は次のようになる.

$$(I - \kappa K) \mu = 0 \dots\dots\dots(45)$$

詳しく書くと,

$$\mu(x) - \kappa K(x, y; \omega) \cdot \mu(y) = 0, x, y \in \partial D \dots\dots\dots(46)$$

ここで, もとの境界値問題 2.(2) において固有値を見出す問題は, 『同次積分方程式 (45) に非自明解が存在するときのパラメーター  $\omega$  を見出す問題』に変換された. このときのパラメーター  $\omega$  が, もとの問題における固有値と等価であることは, さきに示した結果により簡単に確かめられる.

以上の状況を各問題に対して説明するために, 同次積分方程式の立場からまとめたものが Table 2 である. Table 2 中の未知量の上に付した  $\circ$  は固有関数に対応することを, また, S.E., F.E., M.E., における空白は, 外部問題には固有関数が存在しないことを示している.

ここで本章のはじめに述べた Kupradze らの結果より, 固有値解析に必要なものをまとめると次のようになる.

1) 積分核 :

$K, \bar{K}^*, K^*, \bar{K}$  に対する固有値は一致する.  
 $-K, -\bar{K}^*, -K^*, -\bar{K}$  に対する固有値は一致する.

2) 各積分作用素に対する 0 でないスペクトルは有限階の固有値であり, 固有値はたかだか可算個である.

3) 固有値は非負の実数である注2).

1), 2) は Fredholm の定理の主張の一部分そのものであり, 3) は作用素の対称性と物理的制約によるものである. さらに,

4) 積分核 :

$S$  と  $K$  したがって

$\bar{K}^*, K^*, \bar{K}$  に対する固有値は一致する.

$D_n$  と  $-K$  したがって

$-\bar{K}^*, -K^*, -\bar{K}$  に対する固有値は一致する.

$S$  と  $K$  の固有値が一致することを確認するには, 無限遠における放射条件により, “外部問題には固有値は

注 2) 内部第二種問題には固有値 0 が存在するが, この場合, 固有関数は 2 次元, 3 次元問題ではそれぞれ 3 個, 6 個の自由度をもつ剛体変形に対応する. いまはこれは考えないこととする.

Table 2 Homogeneous Boundary Integral Equation and Eigenfunction

Formulation of Problem		Integral Equation	O	I.P.	A.P.	Eigenfunction	U	
First Interior Problem, F.I.	$\mathring{L}$ (47. a)	$\left(\frac{1}{2}I - \mathring{K}^*\right)\mathring{u}^* = 0$	$\mathring{K}^*$	$I_2$	$A_5$	(47. b) $u = D\mathring{u}^*$	$\mathring{u}^*$	
	$\mathring{L}$ (48. a)	$\left(\frac{1}{2}I - \mathring{K}^*\right)\mathring{u}^* = 0$	$\mathring{K}^*$		$A_2, A_6$	(48. b) $u = \bar{D}\mathring{u}^*$	$\mathring{u}^*$	
	$\mathring{G}$	(49. a)	$\left(\frac{1}{2}I - \mathring{K}\right)\mathring{t}_- = 0$	$\mathring{K}$	$I_1$	$A_6$	(49. c) $u = S\mathring{t}_-$	$\mathring{t}_-$
		(49. b)	$S\mathring{t}_- = 0$	$S$				
	$\mathring{G}$	(50. a)	$\left(\frac{1}{2}I - \bar{\mathring{K}}\right)\mathring{t}_- = 0$	$\bar{\mathring{K}}$		$A_1, A_5$	(50. c) $u = \bar{S}\mathring{t}_-$	$\mathring{t}_-$
		(50. b)	$\bar{S}\mathring{t}_- = 0$	$S$				
Second Exterior Problem, S.E.	$\mathring{L}$ (51. a)	$\left(\frac{1}{2}I - \mathring{K}\right)\mathring{t} = 0$	$\mathring{K}$	$I_1$	$A_2$		$\mathring{t}$	
	$\mathring{G}$	(52. a)	$\left(\frac{1}{2}I - \bar{\mathring{K}}^*\right)\mathring{u}_+^* = 0$	$\bar{\mathring{K}}^*$	$I_2$	$A_1$		$\mathring{u}_+^*$
		(52. b)	$D_n\mathring{u}_+^* = 0$	$D_n$				
Second Interior Problem, S.I.	$\mathring{L}$ (53. a)	$\left(\frac{1}{2}I + \mathring{K}\right)\mathring{t} = 0$	$-\mathring{K}$	$I_4$	$A_4$	(53. b) $u = S\mathring{t}$	$\mathring{t}$	
	$\mathring{L}$ (54. a)	$\left(\frac{1}{2}I + \bar{\mathring{K}}\right)\mathring{t} = 0$	$-\bar{\mathring{K}}$		$A_7, A_3$	(54. b) $u = \bar{S}\mathring{t}$	$\mathring{t}$	
	$\mathring{G}$	(55. a)	$\left(\frac{1}{2}I + \mathring{K}^*\right)\mathring{u}_-^* = 0$	$-\mathring{K}^*$	$I_3$	$A_3$	(55. c) $u = -D\mathring{u}_-^*$	$\mathring{u}_-^*$
		(55. b)	$D_n\mathring{u}_-^* = 0$	$D_n$				
	$\mathring{G}$	(56. a)	$\left(\frac{1}{2}I + \bar{\mathring{K}}^*\right)\mathring{u}_-^* = 0$	$-\bar{\mathring{K}}^*$		$A_4, A_1$	(56. c) $u = -\bar{D}\mathring{u}_-^*$	$\mathring{u}_-^*$
		(56. b)	$\bar{D}_n\mathring{u}_-^* = 0$	$\bar{D}_n$				
First, Exterior Problem, F.E.	$\mathring{L}$ (57. a)	$\left(\frac{1}{2}I + \bar{\mathring{K}}^*\right)\mathring{u}^* = 0$	$-\bar{\mathring{K}}^*$	$I_3$	$A_7$		$\mathring{u}^*$	
	$\mathring{G}$	(58. a)	$\left(\frac{1}{2}I + \mathring{K}\right)\mathring{t}_+ = 0$	$-\mathring{K}$	$I_4$	$A_6$		$\mathring{t}_+$
		(58. b)	$S\mathring{t}_+ = 0$	$S$				
Mixed (Third) Interior Prob., M.I.	$\mathring{G}$ (59. a)	$(S\mathring{t}_-)_{\partial D_u} - (\bar{\mathring{K}}^*\mathring{u}_+^*)_{\partial D_t} = 0$ $(S\mathring{t}_-)_{\partial D_u} - \left[\left(\frac{1}{2}I + \bar{\mathring{K}}^*\right)\mathring{u}_+^*\right]_{\partial D_t} = 0$	$S$ $\bar{\mathring{K}}^*$	$x \in \partial D_u$ $x \in \partial D_t$		(59. b) $u = (S\mathring{t}_-)_{\partial D_u} - (D\mathring{u}_+^*)_{\partial D_u}$	$\mathring{t}_-$ on $\partial D_u$ $\mathring{u}_+^*$ on $\partial D_t$	
Mixed (Third) Exterior Prob., M.E.	$\mathring{G}$ (60. a)	$(S\mathring{t}_+)_{\partial D_u} - (\bar{\mathring{K}}^*\mathring{u}_+^*)_{\partial D_t} = 0$ $(S\mathring{t}_+)_{\partial D_u} - \left[\left(-\frac{1}{2}I + \bar{\mathring{K}}^*\right)\mathring{u}_+^*\right]_{\partial D_t} = 0$	$S$ $\bar{\mathring{K}}^*$	$x \in \partial D_u$ $x \in \partial D_t$			$\mathring{t}_+$ on $\partial D_u$ $\mathring{u}_+^*$ on $\partial D_t$	

注) Table において, O は Operator, I.P. は Identity Pair, A.P. は Adjoint Pair, U は Unknown を意味する.

存在しない”という事実を用いることにより、簡単に確認できる。たとえば、Table 2 において (49・a) と (49・b) で与えられた内部第一種問題を考える。ここで、

$$\left(\frac{1}{2}I-K\right)\dot{\ell}_-(x)=0$$

に非自明解が存在することと、 $S\dot{\ell}_-(x)=0$  に非自明解が存在することが同値であることを示せばよいわけである。まず、第二種同次積分方程式 (49・a) の非自明解の外部における一重層表現は、“外部問題には固有値は存在しない”という事実より、恒等的に零となる。ここで、一重層の性質より、外部からの境界極限も零となり (49・b) を得る。また、 $\overline{\mathbf{T}}$  をこの一重層表現に作用させて、外部からの境界極限をとれば (49・a) を得る。したがって、境界上で上述の同値性が示された。

$D_n$  と  $-K$  についてもまったく同様にして、固有値が一致することが確かめられる。

なお、 $S$  の固有値に対する数値的検証は後の 5. (2) で行うが、 $D_n$  に対する数値的検証はいまのところ行っていない。 $D_n$  の持つ特異性からみて、 $D_n$  による数値計算は避けたほうが得策と思われるからである。

さて、1) と 4) より、本来は外部問題を記述する境界積分方程式は、同次系においては内部固有値を決定することがわかる。これより、Table 2 は次のことを意味している。

- : 内部第一種問題に対する固有値決定積分方程式
- : 内部第二種問題に対する固有値決定積分方程式
- : 内部第三種問題に対する固有値決定積分方程式

ここで、もとの偏微分方程式系において、固有値を決定する問題は、境界上の積分方程式の固有値を求める問題として定式化されたわけであるが、Table 2 に示した同次積分方程式の積分作用素のとらえ方が問題となる。固有値を求める立場からは、特に、各積分作用素に含まれるパラメーター  $\omega$  に対する作用素の挙動を探ることが必要となるわけである。まず、ここで得られた積分作用素の性質を列挙しておく。

- 1) 未知関数に対しては線形作用素。
- 2) 各積分作用素は、作用素に含まれるパラメーター  $\omega$  に関する作用素値関数と見なすことができる。
- 3) このとき、積分作用素は  $\omega$  を非線形超越的に含む。

性質 2) は、本手法における固有値決定法を特徴付けるものであり、この概念は数値計算上重要である。

さて、数値計算に入るまえに、Table 1, 2 に示された各積分作用素の  $r(x, y)=0$  近傍の特異性のオーダー

を概略確認しておこう。それらは次のようになる。

	3次元	2次元
$S$	$O(1/r)$	$O(\log 1/r)$
$K, \overline{K^*}, K^*, \overline{K}$	$O(1/r^2)$	$O(1/r)$
$D_n$	$O(1/r^2)$	$O(1/r^2)$

### 5. 数値計算法

積分方程式で核の中にパラメーターとして含まれる固有値を陽な形で評価するためには、一般には数値計算によらざるを得ない。数値計算に際しては、次の 2 つの点、すなわち、境界をいかに正確に近似するか、積分をいかに精度よく近似するかが問題となる。実際問題としては、数値解析上は、境界を有限個の部分に分割し、一般には直線で近似しており、積分はそのうえでの数値積分に置き換えているのが普通である。

このような手法によると、積分方程式は、近似されて、たとえば密度に関する代数方程式に帰着され、固有値が存在するための条件として、その係数行列式が 0 でなければならないことになる。一般には、この行列式は複素数を要素としているので、その評価が数値計算上重要となる。

#### (1) 固有値と複素行列式の評価法

Table 2 に示した固有値決定同次積分方程式は、式 (45) と同様に、一般に次の形に書ける。

$$B(r, \mathbf{n}; \omega) \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (61)$$

$B$  は Table 2 における各種積分作用素であり、境界上の 2 点間の距離  $r$ 、単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$ 、固有値パラメーター  $\omega$  (いまの場合、角振動数) に関係する。 $\boldsymbol{\mu}$  は対応する未知複素量である。

境界を有限個に分割し、積分を適切に評価すると、次の行列表現を得る。

$$[A(\omega)]\{\boldsymbol{\mu}\} = \{0\} \dots\dots\dots (62)$$

行列  $[A(\omega)]$  は、4. に述べた積分作用素と同じ、いくつかの特性をもっている。

ここで、前章に述べた固有値問題は、次に述べるように数値的に式 (62) の固有値を見出す問題に変換されたわけである。

同次積分方程式 (61) の離散化行列表現 (62) が、非自明解をもつための必要十分条件は、周知のように次のようである。

$$\overline{D} = \det[A(\omega)] = 0 \dots\dots\dots (63)$$

上式は、非負実数値  $\omega$  に対し、複素行列式の値 (複素数) が 0 であることを示している。この行列式の値 0 に対応するパラメーター  $\omega$  の値が、数値計算という意味で、積分方程式 (61) に対する近似的な固有値として求



められる。

実際には、『数値計算上、これが、どのような近似で得られるか』という点が問題であり、数値でもって状況を確認しておくことが必要である。このことは、次節で検討することとする。

ここで、複素行列式の挙動を感知するのにもっとも原始的かつ有効な方法は、実パラメーター  $\omega$  を連続的に変化させたとき、その値  $\bar{D}$  が複素平面上に描く曲線を追跡することであろう。いま、 $\bar{D} = \det[A(\omega)]$  は実数値パラメーターから、複素数値への変換器であり、本手法の精度は、パラメーターの与え方とこの変換器の精度（すなわち、境界形状の近似度と、数値積分の精度）に左右される。数値計算的には、 $\bar{D}$  の値が 0 となることはないけれども、できるだけ 0 に近づけたいわけである。

**Fig. 2** はこの状況を説明したもので、 $\det[A(\omega)]$  の値域を示している。ここで、複素平面上の曲線 (A) 上の点の原点からの距離  $|\bar{D}|$  が、各パラメーター  $\omega$  に対する行列式の大きさを与えている。この数値計算段階においては、積分方程式法による固有値決定問題は、複素平面上の極値問題としてとらえることが自然であろう。この推論の検証は次節で行うこととする。

なお、曲線 (B) は、複素行列  $[A(\omega)]$  の実数化行列を用いた場合の行列式  $D$  の描く曲線を示しており、複素行列式の値  $\bar{D}$  とは  $|\bar{D}|^2 = D$  なる関係にある。この関係は、数値計算上は重要な点であり、複素行列式そのものの行列式の値  $\bar{D}$  を用いる方が、桁あふれの点で有利であることを示している。

なお、数値計算上は、計算時間、演算の簡単さなどのために、得られた近似行列  $[A(\omega)]$  の実数部か虚数部のみに対する行列式が、固有値判定条件とならないか、と考えられる。事実、以下に例として示す 2 次元問題においては、 $[A(\omega)]$  の実部、虚部を支配するものは、それぞれ、第二種 Bessel 関数 (Neumann 関数)、第一種 Bessel 関数であり、積分方程式を特徴付ける原点近傍の特異性のオーダーからみて、実部が  $[A(\omega)]$  に対する 1 つの近似となっていることが考えられる。しかし、この実部行列式、虚部行列式に対し予備計算を実行した結果は、ある固有値はほぼ正確に求まるが、すべて

の固有値を追跡することは不可能であり、また、固有値以外のパラメーターに対しても行列式の値が 0 となる場合があること、また、ほぼ正確に求まった場合にも、実部行列式、虚部行列式ともに行列式の零値を達成することは期待できないことが確認された。

以上の諸点を考えると、多少面倒ではあるけれども、任意なパラメーター域に対して、複素行列式をもって固有値判定条件とすることが妥当と考えられる。

(2) Helmholtz 方程式による固有値計算手法の検証

いままで述べてきたことの数値的妥当性を検証するた

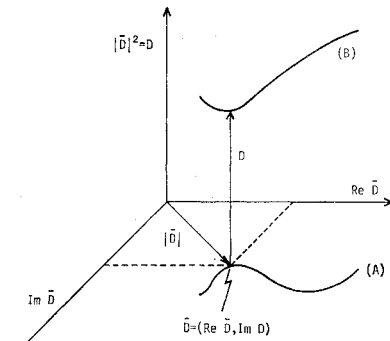


Fig. 2 Evaluation of Complex Determinant

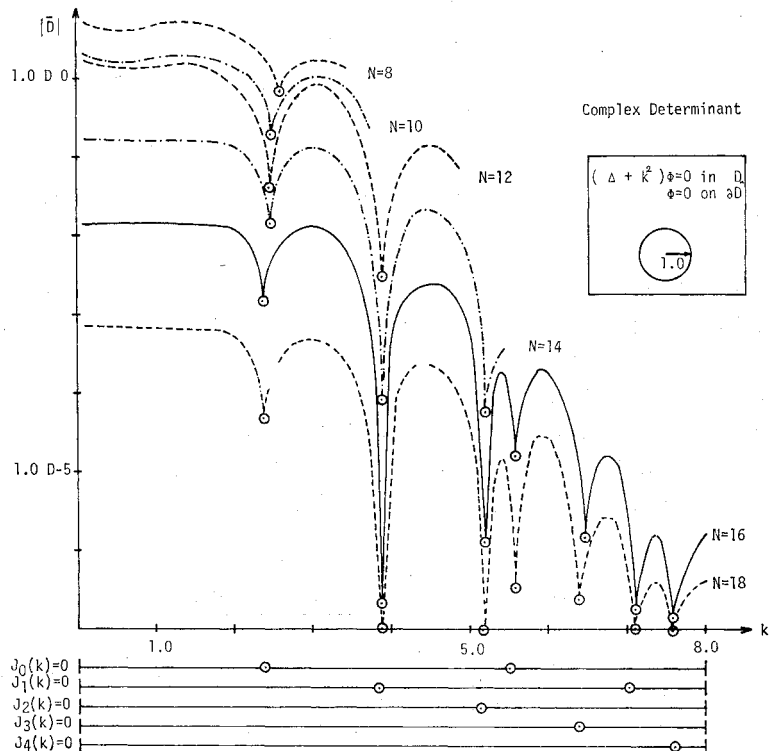


Fig. 3 Eigenvalues of Helmholtz Equation

めに, Helmholtz 方程式の Dirichlet 固有値問題:  $(\Delta + k^2)\phi = 0$  in  $D$ ,  $\phi = 0$  on  $\partial D$  について考えてみる. この場合, 固有値決定積分方程式は Table 2 の (49-b) に対応して,  $S(\partial\phi/\partial n) = 0$ , すなわち第一種方程式として定式化し, 数値計算を実行した. 幾何形状としては, Fig. 3 の中に示したような円形形状を選んだ. 円の半径を 1.0 と指定することにより, 固有値の正解は Bessel 関数の零点に一致する. 図の下部には, この零点の位置を示している. 図の縦軸が複素行列式の値の絶対値  $|\bar{D}|$  であり, 横軸は Helmholtz 方程式におけるパラメーター  $k$  である.  $N$  は境界の等分割数である.

この Fig. 3 と以下に示した Table 3 の結果より, 4. の 4) で述べたように, 第一種積分方程式による固有値決定法は,  $S$  については数値的にも有効であることがわかる.

また, この Fig. 3 は数値計算上, 複素行列式の値の絶対値がどのようにして 0 に近づき, 対応するパラメーターが正解に近づくかを示している. これより, 前節 5. (1) で述べたように, 本手法によれば数値計算上は, 固有値が, “複素行列式の絶対値の極値に対応するパラメーターの値”として決定されるということも理解されよう.

さて, ここで得られた固有値の近似度について考えてみる. これは, 概略 次の 3 点に関係していると思われる.

- 1) 境界形状の近似 (境界分割数  $N$ )
- 2) 数値積分法 (Gauss 積分法)
- 3) 固有パラメーターの分割 ( $\Delta k$ )

以下, これらの点を中心に, 得られた固有値の精度について検討する. 数値積分法については, Gauss 積分法がかなり精度がよいことが確認されており, 本計算においては Gauss 8 分点積分法を用いた.

Fig. 3 における  $\odot$  印は, 各境界分割数  $N$  に対する  $|\bar{D}|$  の極値を示しており,  $\odot$  印に対応するパラメーター  $k$  の値が近似固有値  $k_N$  となる. 相当荒い分割 (境界分割数  $N$  とパラメーターの分割  $\Delta k$ , いまの場合は  $N=8\sim 18$ ,  $\Delta k=0.1$ ) にもかかわらず, 各近似固有値  $k_N$  は正解を追跡していることがわかる. すなわち, 固定されたパラメーターの分割に対し, 境界が正確に近似される

に従い ( $N$  の増加とともに) 行列式の値が零に近づく方向で, より正確な近似固有値が求められる状況が理解できる. たとえば, 第一固有値に着目しよう. 境界分割数  $N$  が 8 から 18 に変化するにつれて, 第一固有値の正解 2.40 を近似する様子を示している. 次に, たとえば,  $N=16$  に対する  $|\bar{D}|$  の極値に着目しよう.  $|\bar{D}|$  の値の極値は, 各固有値の位置をもれなく, 明確に, 指示していることがわかる. この極値近傍でさらに細分割 (境界分割数  $N$  とパラメーターの分割  $\Delta k$ ) を行えば, さらに正確な近似固有値を得ることができる. この主張を数値的に検討したものが Table 3 であり (この場合,  $N=16\sim 50$ ,  $\Delta k=0.001$  である), 境界が正確に近似されるにつれて, 誤差が一樣に小さくなることが保証されていることがわかる.

数値例が示すように, 得られる近似固有値は, 境界分割数  $N$  とパラメーターの分割  $\Delta k$  に依存するが, 本手法にとって  $N$  への依存性は本質的ではない. ここで注意することは, 行列の大きさを支配するのは境界分割数  $N$  であるが, ここでは, この各分割区間ごとに Gauss 積分法が適用されており, この意味で各区間には Legendre 多項式の零点に対応した細分割が施されている. この意味において, より少ない分割数  $N$  であっても, その分割が境界形状を適切に評価しておれば, 数値積分法自身の精度の向上とともに誤差は減少すると考えられる. この例では, 円形を  $N$  個の直線で近似してそのうえで数値積分を実行しているけれども, 境界を曲面 (曲線) で近似し, そのうえで数値積分を行うことにより, より高精度の解が期待できよう.

以上のことから, 本手法により固有値を求める場合には, この精度は, 境界形状が適切に評価されておれば, 原理的には, 数値積分法の精度のみに依存することになる. ただし, この場合には, 固有パラメーターの変域と, 各分割区間で選ばれた数値積分法における細分割点数の関係が, Bessel 関数の周期性を正当に評価するように考慮する必要がある. この関係が満たされるとき, 境界分割数  $N$  によらず, 高次固有値をも正確に求めることができる. これは, もともの連続な場における積分表示式の意味を考えれば当然な結果であり, 他の手法にはみられない特徴の 1 つといえよう.

なお, 数値計算上, 本手法のもっとも重要な段階は Fig. 3 にあると思われる. すなわち, 演算能率の向上という意味において, なるべく荒い境界分割と数値積分法, そしてパラメーターの分割によって, すべてのパラメーター域について, もれなく固有値の位置を指定する段階にあると思われる. 主観性が入る可能性がこの点にあるわけであるが, この問題は, 数値積分

Table 3 The First and Second Eigenvalues

$N$	Exact $\bar{K}_1=2.40483$			Exact $\bar{K}_2=3.83171$		
	Numerical $k_1$	Error $e= k_1-\bar{K}_1 $	$e/\bar{K}_1(\%)$	Numerical $k_2$	Error $e= k_2-\bar{K}_2 $	$e/\bar{K}_2(\%)$
16	2.447	0.042	1.75	3.897	0.065	1.70
20	2.432	0.027	1.12	3.873	0.041	1.07
30	2.417	0.012	0.50	3.851	0.019	0.50
40	2.412	0.007	0.29	3.842	0.010	0.26
50	2.409	0.009	0.17	3.839	0.007	0.18

法に考慮を払うことにより改善されよう。実用上は、**Fig. 3**の結果をみる限り、ほぼ問題はないと考えてよからう。

(3) 弾性問題の固有値決定への適用

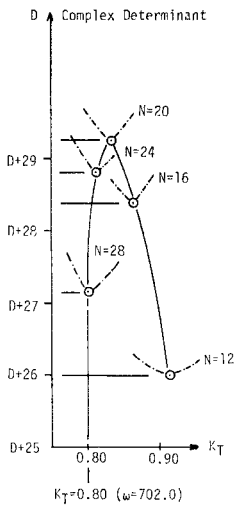
前節において示した計算手法を、弾性問題の固有値決定に応用した例を以下に示す。

**Table 2** に示した固有値決定積分方程式において、原点近傍の特異性により、積分核の計算機特性も考慮して、各問題に対し、次の3つの積分方程式を数値計算例としてとり上げた。

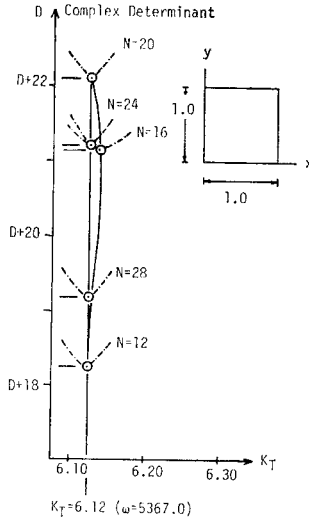
(i) 第一種問題 (49・b) :

$$(\mathbf{S}\mathbf{L})(x) = \mathbf{0}, x \in \partial D$$

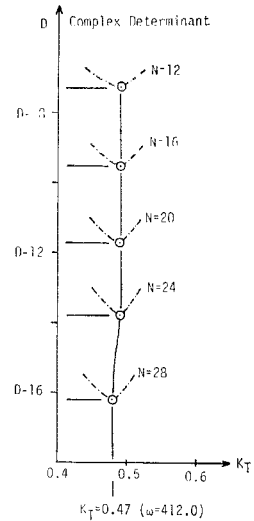
(ii) 第二種問題 (55・a) :



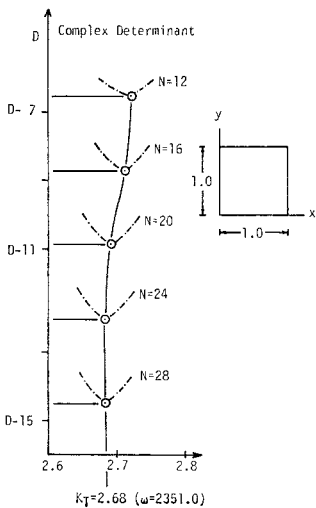
**Fig. 4 (a)** The First Eigenvalue (Fixed Boundary)



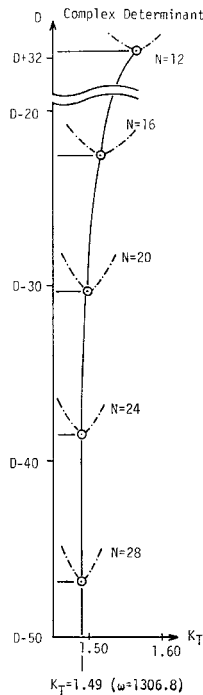
**Fig. 4 (b)** The Second Eigenvalue (Fixed Boundary)



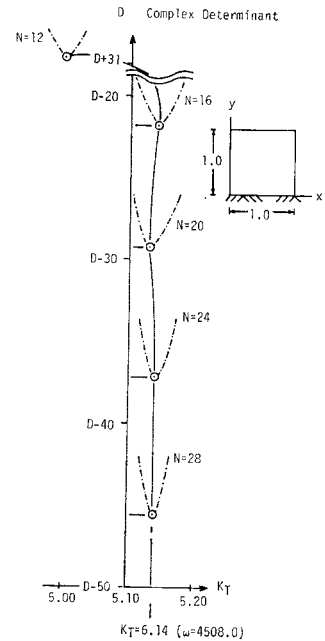
**Fig. 5 (a)** The First Eigenvalue (Free Boundary)



**Fig. 5 (b)** The Second Eigenvalue (Free Boundary)



**Fig. 6 (a)** The First Eigenvalue (Mixed Boundary)



**Fig. 6 (b)** The Second Eigenvalue (Mixed Boundary)

$$\left(\frac{1}{2}I + \bar{K}^*\right)\hat{u}(x) = 0; \quad x \in \partial D.$$

(iii) 第三種問題 (59・a) :

$$\begin{aligned} (S\hat{t})_{\partial D_u}(x) - (\bar{K}^*\hat{u})_{\partial D_t}(x) &= 0, \quad x \in \partial D_u, \\ (S\hat{t})_{\partial D_u}(x) - \left[\left(\frac{1}{2}I + \bar{K}^*\right)\hat{u}\right]_{\partial D_t}(x) &= 0, \\ & x \in \partial D_t. \end{aligned}$$

前節と同じ過程を経た後、本手法における最終的な固有値決定段階を図示した。入力データは、ポアソン比 0.25, 横弾性係数  $0.20 \times 10^4$  kg/cm<sup>2</sup>, 密度  $0.26 \times 10^{-2}$  kg/cm<sup>3</sup> である。Fig. 4~6 は、各問題に対する第 1, 第 2 固有値決定段階を示している。より高次の固有値も同様に決定できる。なお、各図の横軸は横波の波数  $k_T$  であり、縦軸は複素行列式の値である。横波の波数  $k_T$  を固有パラメーターとして採用し、対応する角振動数は、各図の下部に  $\omega$  として記入しておいた。

弾性問題においては、現段階では解析解がないので直接的に精度を検討することはできないが、前節の例からみて、十分精度がよいと考えられる。また、弾性問題においても、前節で示された固有値決定法は有効であることがわかる。他の解析手法との関係、現実問題への適用が今後考えられるべきであろう。

## 6. おわりに

積分方程式による固有値問題の定式化と数値計算法について述べた。ここで、得られた結果と関連する事項についてまとめておく。

(1) 層ポテンシャル表示と Green 積分表示により、固有値決定積分方程式が、第一種、第二種、第三種問題に対し、Table 2 として整理された。これより、パラメーターを積分核を含む同次積分方程式に非自明解が存在するときのパラメーターの値として固有値は特徴付けられた。

(2) 数値計算上は、積分方程式法により固有値を求める問題は、複素平面上の極値問題としてとらえられ、その極値に対応するパラメーターの値として固有値は決定された。

(3) 任意幾何形状を有する物体に対し、境界形状の近似が妥当なものであり、数値積分の精度が保証される時、境界分割数によらず、高次固有値をも求めることができる。

(4) 弾性問題の固有値決定に、本手法はそのまま応

用できる。

最後に、本手法によるマトリックス表現は、固有値パラメーター  $\omega$  に関していわゆる代数的な固有値問題とはならなかった。これは、本論における積分方程式による固有値問題の定式化の一つの特徴である。すなわち、本論における積分方程式の構成において注意すべき点は、パラメーターを積分核を含む積分方程式を構成している点にある。パラメーターを積分核の外に出した構成法を取れば、固有値決定は、Rayleigh 商を最小にする変分問題になる<sup>9)</sup>。本論におけるように、境界積分だけでおさえる定式化を採用するか、後者のように、領域積分をも含める定式化を採用するかは、数値計算の難易さにも関係し、いまのところどちらが有効であるかは一概には議論できないであろう。

また、本論には直接的には関係しなかったが、ここで述べられた積分作用素の性質は、定常状態にある外部問題を積分方程式法により解析しようとする場合には、2. (2) において設定した放射条件により、外部問題には固有値は存在し得ないという事実と関係して、かなり重要となる。この場合には、層表示か Green 表示かのどちらの定式化を採用するかにより、非同次項の相違と積分核のもつ性質が、4. の始めに述べた意味で、Fredholm の一連の定理の主張<sup>9)</sup> と関係してくるであろう。

なお、本研究を遂行する過程で、福井卓雄講師(現、福井大学勤務)に貴重なコメントとご討議をいただいた。深く感謝の意を表わしたい。また、本計算には京都大学大型計算機センター FACOM M-190 を使用した。

## 参 考 文 献

- 1) Günter, N.M. : Potential Theory and Its Applications to Basic Problems of Mathematical Physics, Ch. 1, Unger, 1967.
- 2) 前出, 1), Ch. 1.
- 3) Kupradze, V.D. : Potential Methods in the Theory of Elasticity, Israel Program for Scientific Translations, Ch. 3, Jersalem, 1965.
- 4) 溝畑 茂 : 偏微分方程式論, Ch. 2, 岩波, 1965.
- 5) 前出, 3), Ch. 1, 2, 5, 6.
- 6) Mikhlin, S.G. : Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations; § 45, 46, Pergamon Press, 1965.
- 7) 前出, 3), Ch. 5, 6.
- 8) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity; Ch. 2, § 7, Pergamon Press, 1975.
- 9) 前出, 3), Kleinman, R.E. and Roach, G.F. : Boundary Integral Equations for the Three-Dimensional Helmholtz Equation, SIAM Review, Vol. 16, No. 2, pp. 214-236, 1974.

(1978.3.3・受付)