

曲げとねじりモーメントを受ける一様な長方形 断面棒の弾塑性解析

ELASTO-PLASTIC ANALYSIS OF UNIFORM RECTANGULAR SECTION BARS SUBJECTED TO BENDING AND TORSIONAL MOMENTS

太田 俊 昭*・日 野 伸 一**

By Toshiaki OHTA and Shinichi HINO

1. 緒 言

本研究は、一様な長方形断面を有する棒が、軸力や曲げおよびねじりの種々の組み合わせ荷重を受けて弾塑性状態になったときの応力解析法を一般的に提示し、一様な長方形断面の鋼棒が、純ねじりモーメントならびに曲げとねじりモーメントを同時に受ける場合の応力分布や変形状の推移を明らかにしたものである。

数値解析法としてもっとも一般的なものに有限要素法^{1)~4)}およびその範ちゆうに入る有限帯板法⁵⁾があり、いずれも組み合わせ荷重を受ける棒の弾塑性問題に広く活用されている。たとえば、I形、H形や箱形断面などに対しては、板構造とみなせば、三角形や四角形の板要素もしくは帯板要素を用いて、機械的に全体剛性を導けばよいことになり^{6)~9)}、軸力と曲げを受ける弾塑性座屈問題¹⁰⁾などに効果的に応用されている^{9)~11)}。このうち、肉厚が形状寸法に比べて小さい、いわゆる薄肉断面では、せん断応力が肉厚に関して一様とみなされるので、せん断流理論^{12)~14)}が適用できることになり、特に、その効果を見捨てる円管断面では、曲げとねじりの組み合わせ荷重に対する解析解¹⁵⁾も得られている。これに対して、正方形断面や長方形断面のような太肉断面に対しては、せん断応力が一様でなく、弾塑性境界も複雑に推移するので、四面体要素や三角柱要素などの立体要素を採用しなければならず、その弾塑性挙動を忠実に追跡しうることは容易でないが、堀井・川原¹⁶⁾は、三角柱要素を用いて軸力と曲げモーメントの組み合わせ負荷の場合を、同じく山田・高塚¹⁷⁾は軸力とねじりの組み合わせ問題を解いている。また Zienkiewicz ら¹⁸⁾や、川本ら¹⁹⁾

の RC ばりの曲げ破壊に関する応用研究も見逃せない。

以上のような有限要素法や有限帯板法による一連の研究に比べて、解析解、特に太肉断面のねじりに関するものは、簡単な円形や卵形および三角形断面しか得られておらず^{20)~21)}、それ以外の断面については、Hodge²²⁾や太田²³⁾らの差分法がみられるにすぎない。また、曲げとねじりモーメントを同時に受ける太肉断面の場合については、Hill と Siebel²⁴⁾ および Gaydon と Nuttall²⁵⁾ によって長方形断面に対する相互作用曲線の上界と下界の解、材料を剛塑性体とした Steele²⁶⁾ や Imegwu²⁷⁾ の正方形断面に対する差分法がみられ、材料を弾塑性体としたものには、石川²⁸⁾の全ひずみ理論による解および進藤ら²⁹⁾の増分理論による正方形断面に対する差分法などが見受けられる。

本研究は、材料を Bauschinger 効果を見捨てる理想的な硬化型弾塑性材料とし、ミーゼス降伏条件に従う塑性流れ法則による応力-ひずみ関係式、すなわちロイスの方程式を用いて、曲げとねじりモーメントを同時に受ける太肉断面棒の弾塑性曲率とねじり率の算定式を一般的に誘導したもので、前者に対しては周知の断面分割法³⁰⁾を、後者に対してはねじりの応力関数に関する非線形微分方程式を差分法で解く方法³¹⁾を採用した。応力関数を用いる手法は、前述の Steele²⁶⁾ らや、石川²⁸⁾らの研究にみられるが、いずれも曲率とねじり率に関するひずみ経路で表わされたものである。著者らの方法は、それとは異なり、塑性ひずみ増分を規定する比例定数をそのままの形で与えているため、後述するように組み合わせ解に対するねじりの応力関数の非線形微分方程式が純ねじりのそれとまったく同一の表現となる。

しかも、応力関数を解くにあたっては、塑性判別パラメーターが導入されており、これにより、ねじり率算定のための行列の元数ならびに要素配列が、応力状態のいかんを問わず固定化できるため、演算は、きわめて平易

* 正会員 工博 九州大学助教授 工学部土木工学科

** 学生会員 工修 九州大学大学院工学研究科土木工学専攻博士課程

かつ機械的になるといえる。

さて、本論文では、前述の曲げとねじりを受ける場合の Steele の式²⁶⁾、およびねじりを受ける焼きなました棒に関して求められた Prager の式²³⁾が、いずれも本理論の特例として導かれることを示し、本法の妥当性の一端を裏づけている。

また、長方形断面の棒が、軸力とねじりもしくは一軸曲げとねじりの組み合わせ負荷を受ける場合、荷重履歴と応力状態の変化にかかわらず、応力分布(相当応力)は対称性を示し、ねじりの中心は移動しないこと(いうまでもなく、純ねじりを受ける二軸対称断面棒では、ねじりの中心は固定されている)、しかも上述のごとく応力関数が純ねじりのそれと同一式で与えられるという理由により、ねじりに関する応力、ひずみ、ねじり率などの諸量の算定式とその手順は、まったく純ねじりの場合と同じになる。したがって、間接的ではあるが、この種の組み合わせ負荷を受ける場合のねじり挙動に関する本理論式の妥当性は、純ねじりの解をねじり試験のそれと比較対照することにより、確かめられるといえよう。

ただし、それ以外の組み合わせ負荷、例えば、二軸曲げモーメントとねじりモーメント、あるいは、それに軸力が付加される場合、二軸対称断面棒においてもねじり中心(せん断中心)の移動を生じるゆえ上記類似は成立しない。

それゆえ、本法の組み合わせ負荷の適用範囲は、(1)軸力とねじり、(2)軸力と曲げ、(3)一軸曲げとねじりに限定されるといえよう。

2. 基礎理論

一様な長方形断面(二軸対称断面)棒が、図-1 に示すように x, y 軸まわりの曲げモーメント増分 dM_x, dM_y と z 軸まわりのねじりモーメント増分 dT および断面の図心点に軸力増分 dN の外力を受け、弾塑性状態になったとする。このとき、断面に生じる支配的な応力成分は、 z 方向の垂直応力 σ_z とねじりによるせん断応力 τ_{zx}, τ_{zy} とし、他の応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は無視できるとする。このような条件のもとでの弾塑性曲げ

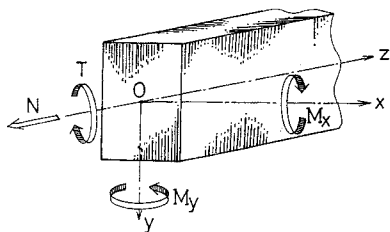


図-1 棒に作用する外力

に関する取り扱い手法は、明らかに文献 3), 13), 16)などに準じたものになる。それゆえ、ここでは重複を避けるため、骨子のみ述べることにする。

まず、断面での力のつり合い式は、

$$\left. \begin{aligned} dN &= \int d\sigma_z dA \\ dM_x &= \int y d\sigma_z dA \\ dM_y &= \int (-x) d\sigma_z dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 dA は微小断面積とし、座標 (x, y) の原点は断面の図心点とする。

いうまでもなく、式 (1) は断面の要素の位置の変化³⁾(断面の形状変化)が無視しうることを前提としている。

ここで、変化が微小で長辺に対する短辺の比がそれほど大きくない、いわゆる太肉断面を対象とする場合、曲げ変形に及ぼすその影響が無視でき、平面保持の法則が近似的に成立すると仮定すれば、任意点 (x, y) の z 方向の垂直ひずみ増分 $d\varepsilon_z$ は、 z 方向の適合条件式より図心点のひずみ増分 $d\varepsilon_c$ と x, y 軸に関する曲率増分 $d\phi_x, d\phi_y$ を用いて、

$$d\varepsilon_z = d\varepsilon_c + y d\phi_x - x d\phi_y \dots\dots\dots (2)$$

材料を Bauschinger 効果は無視した理想的な硬化型弾塑性体とすれば、ロイスの応力-ひずみ方程式より、

$$d\sigma_z = E d\varepsilon_z - \frac{2}{3} \sigma_z E d\lambda \dots\dots\dots (3)$$

同様に、ねじりによるせん断応力増分およびせん断ひずみ増分をそれぞれ $d\tau_{zx}, d\tau_{zy}$ および $d\gamma_{zx}, d\gamma_{zy}$ とすれば、同じくロイスの応力-ひずみ式より、

$$\left. \begin{aligned} d\tau_{zx} &= 2G d\gamma_{zx} - 2G \tau_{zx} d\lambda \\ d\tau_{zy} &= 2G d\gamma_{zy} - 2G \tau_{zy} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 E : ヤング率、 $G = E/2(1+\nu)$: せん断弾性係数、 ν : ポアソン比。

式 (3), (4) の $d\lambda$ は、硬化型ミーゼス条件

$$\sigma_z^2 + 3(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) = \sigma_{eq}^2 \dots\dots\dots (5)$$

と、変形硬化係数

$$H' = d\sigma_{eq} / d\varepsilon_{eq}^p \dots\dots\dots (6)$$

を用いれば、文献 3) より次式で算定できる。ただし、 $\sigma_{eq}, d\varepsilon_{eq}^p$ は、それぞれ相当応力と相当塑性ひずみ増分である。

$$d\lambda = \frac{3\{E\sigma_z d\varepsilon_z + 6G(\tau_{zx} d\gamma_{zx} + \tau_{zy} d\gamma_{zy})\}}{2\{H'\sigma_{eq}^2 + E\sigma_z^2 + 9G(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)\}} \dots\dots\dots (7)$$

純ねじりの場合の $d\lambda$ は、 $\sigma_z = 0$ とおけば、

$$\left. \begin{aligned} d\lambda &= \frac{9G(\tau_{zx} d\gamma_{zx} + \tau_{zy} d\gamma_{zy})}{H'\sigma_{eq}^2 + 9G(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)} \\ \sigma_{eq}^2 &= 3(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

また、曲げと軸力の場合には、 $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ において(曲げによるせん断応力を無視している)、

$$d\lambda = \frac{3E\sigma_z d\epsilon_z}{2(H'\sigma_{eq}^2 + E\sigma_z^2)} = \frac{3E\sigma_z d\epsilon_z}{2(H'+E)\sigma_z^2} \dots (9)$$

ここに、弾塑性の判別、除荷の判定操作は、通常の塑性力学で用いられている方法を採用する（詳しくは、文献3)、4)、15)を参照されたい。

式(1)に式(2)、(3)を代入し、断面について積分を施せば、それぞれ次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} dN &= EA(d\epsilon_c - d\epsilon_c^p) \\ dM_x &= EI_x(d\phi_x - d\phi_x^p) \\ dM_y &= EI_y(d\phi_y - d\phi_y^p) \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

もしくは

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_c &= \frac{dN}{EA} + d\epsilon_c^p \\ d\phi_x &= \frac{dM_x}{EI_x} + d\phi_x^p \\ d\phi_y &= \frac{dM_y}{EI_y} + d\phi_y^p \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

ここに、 A : 断面積, $I_x = \int y^2 dA$, $I_y = \int x^2 dA$: 断面二次モーメント。

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_c^p &= \frac{2}{3A} \int \sigma_z d\lambda dA \\ d\phi_x^p &= \frac{2}{3I_x} \int y \sigma_z d\lambda dA \\ d\phi_y^p &= \frac{2}{3I_y} \int (-x) \sigma_z d\lambda dA \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

$d\epsilon_c^p$ および $d\phi_x^p$, $d\phi_y^p$ は、それぞれ図心点の塑性ひずみ増分および x, y 軸に関する塑性曲率増分で、いずれも弾性時には零となる ($\because d\lambda=0$) が、塑性域発生時には断面分割法^{15), 20)}により数値積分によって算定される量である。

一方、弾塑性ねじりに関しては、断面のゆがみ関数の増分を $d\psi$, ねじり率増分を $d\omega$ とすれば、せん断ひずみ増分 $d\tau_{zy}$, $d\tau_{zx}$ が文献 15), 23) より次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} d\tau_{zy} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(d\psi)}{\partial y} + x d\omega \right\} \\ d\tau_{zx} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(d\psi)}{\partial x} - y d\omega \right\} \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

式(4)、(12)より、

$$\left. \begin{aligned} G \left\{ \frac{\partial(d\psi)}{\partial y} + x d\omega \right\} &= d\tau_{zy} + 2G\tau_{zy} d\lambda \\ G \left\{ \frac{\partial(d\psi)}{\partial x} - y d\omega \right\} &= d\tau_{zx} + 2G\tau_{zx} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

上式をそれぞれ x, y で偏微分し、 $d\psi$ を消去すれば、

$$\begin{aligned} 2Gd\omega &= \frac{\partial(d\tau_{zy})}{\partial x} - \frac{\partial(d\tau_{zx})}{\partial y} \\ &+ 2G \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{zy} d\lambda) - \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{zx} d\lambda) \right\} \end{aligned} \dots (14)$$

ここで、曲げによるせん断応力を無視できるものとすれば、ねじりの応力関数 ϕ が次のように導入できる^{15), 23)}。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zy} &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \tau_{zx} &= \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

式(14)に式(15)を代入すれば、ねじりの応力関数 ϕ に関する次の非線形微分方程式が求められる。

$$\begin{aligned} -2d\omega &= \frac{1}{G} \left\{ \frac{\partial^2(d\phi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(d\phi)}{\partial y^2} \right\} \\ &+ 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(d\lambda \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(d\lambda \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned} \dots (16)$$

特に、弾性時では $d\lambda=0$ より周知の次式が得られる。

$$-2d\omega = \frac{1}{G} \left\{ \frac{\partial^2(d\phi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(d\phi)}{\partial y^2} \right\} \dots (17)$$

式(16)より $d\phi$ が求めれば、ねじりモーメント増分 dT ^{15), 23)} は、一般に、

$$dT = 2 \iint d\phi dA \dots (18)$$

で与えられる。

次に、材料が $E, G \rightarrow \infty$ の剛塑性体の場合を考えてみる。

式(3)および式(16)は、それぞれ、

$$d\lambda = \frac{3d\epsilon_z}{2\sigma_z} \dots (19)$$

$$-d\omega = \frac{\partial}{\partial x} \left(d\lambda \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(d\lambda \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \dots (20)$$

となる。

式(20)に式(19)を代入して、

$$-d\omega = \frac{3}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\epsilon_z}{\sigma_z} \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d\epsilon_z}{\sigma_z} \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \right\} \dots (21)$$

特に、 x 軸まわりの曲率 $d\phi_x$ とねじり率 $d\omega$ に関するひずみ経路が一定となるような特定の負荷²⁶⁾を考える場合には、式(21)の $d\epsilon_z$ が式(2)より $d\epsilon_z = y d\phi_x$ と表わされ、また、 σ_z が式(5)のミーゼスの降伏条件(非硬化材料では¹⁵⁾, $\sigma_{eq}^2 = 3\tau_Y^2$, τ_Y : 降伏せん断応力)より、

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \pm \sqrt{3} \sqrt{\tau_Y^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{zy}^2} \\ &= \pm \sqrt{3} \sqrt{\tau_Y^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2} \end{aligned} \dots (22)$$

と表わされる。

以上の関係を式(21)に代入すれば、次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{y \frac{\partial\phi}{\partial x}}{\sqrt{\tau_Y^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{y \frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\sqrt{\tau y^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2}} \right\} \\
 & \pm \frac{2 d\omega}{\sqrt{3} d\phi} = 0 \dots\dots\dots (23)
 \end{aligned}$$

上式は, Steele²⁶⁾ が非硬化剛塑性体について導いた式にほかならない。

さらに, 関数 $f(\sigma_{eq})$ を次のように定義導入する³²⁾。

$$\ln f = \int_0^{\sigma_{eq}} \frac{3 G d\sigma_{eq}}{H' \sigma_{eq}} = \int_0^{\sigma_{eq}} 2 G d\lambda \dots\dots\dots (24)$$

$$\therefore d\lambda = \frac{df}{2 G f} \dots\dots\dots (25)$$

式 (16) に式 (25) を代入すれば,

$$\begin{aligned}
 -2 G d\omega = & \left\{ \frac{\partial^2 (d\Phi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (d\Phi)}{\partial y^2} \right\} \\
 & + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{df}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{df}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right\} \\
 & \dots\dots\dots (26)
 \end{aligned}$$

特に, 純ねじりの場合は, 断面変形が $d\omega$ のみで規定されることになるので, 上式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
 -2 G = & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(f \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right\} \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(f \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right\} \dots\dots\dots (27)
 \end{aligned}$$

これは, Prager³³⁾ が焼きなました棒 (硬化材料) のねじりに関して導いた式にほかならない。

以上述べたように, 式 (16) は各種の組み合わせ負荷を受ける場合の弾塑性ねじりに関する基礎式となり, 汎用性をもつといえる。しかしながら, その解析解を得ることは一般に困難であるので, ここでは以下に述べるような差分法を採用した。

いま, 図-2 (a), (b) に示すように, 10×10 等分に分けた長方形断面の場合を例にとり, $(i+6)$ 点に着目することにする。

式 (16) の第 1 項は, $h_0^2/b_0^2 = \kappa$ とおいて,

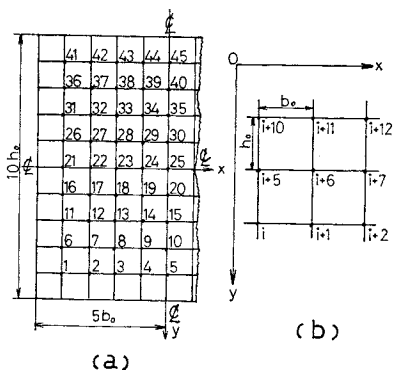


図-2 長方形断面の分割 (10×10 等分割の例)

$$\begin{aligned}
 & -h_0^2 \left\{ \frac{\partial^2 (d\Phi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (d\Phi)}{\partial y^2} \right\}_{i+6} \\
 & = \{ 2(1+\kappa) d\Phi_{i+6} - \kappa d\Phi_{i+7} - \kappa d\Phi_{i+5} \\
 & \quad - d\Phi_{i+11} - d\Phi_{i+1} \} \dots\dots\dots (28)
 \end{aligned}$$

また, 式 (16) の第 2 項は, 便宜的に後進差分を用いて (境界外の仮想点をとらなくてすむ) 次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{i+6, i+5} & = \frac{\Phi_{i+6} - \Phi_{i+5}}{b_0} \\
 \left(d\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{i+6, i+5} & = \frac{d\lambda_{i+6} + d\lambda_{i+5}}{2} \cdot \frac{\Phi_{i+6} - \Phi_{i+5}}{b_0}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

この関係を用いれば,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left(d\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{i+6} \\
 & = -\frac{1}{2 b_0^2} \{ -\Phi_{i+5} (d\lambda_{i+5} + d\lambda_{i+6}) \\
 & \quad + \Phi_{i+6} (2 d\lambda_{i+6} + d\lambda_{i+5} + d\lambda_{i+7}) \\
 & \quad - \Phi_{i+7} (d\lambda_{i+6} + d\lambda_{i+7}) \} \dots\dots\dots (30)
 \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial y} \left(d\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{i+6}$ も同様であり, 結局, 式 (16) の第 2 項は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 & -2 G h_0^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(d\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(d\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right\}_{i+6} \\
 & = G \alpha_{i+6} [\kappa \{ \Phi_{i+6} (2 d\lambda_{i+6} + d\lambda_{i+5} + d\lambda_{i+7}) \\
 & \quad - \Phi_{i+5} (d\lambda_{i+5} + d\lambda_{i+6}) - \Phi_{i+7} (d\lambda_{i+7} + d\lambda_{i+6}) \} \\
 & \quad + \{ \Phi_{i+6} (2 d\lambda_{i+6} + d\lambda_{i+1} + d\lambda_{i+11}) \\
 & \quad - \Phi_{i+1} (d\lambda_{i+1} + d\lambda_{i+6}) - \Phi_{i+11} (d\lambda_{i+11} + d\lambda_{i+6}) \}] \\
 & = C_{i+6} \dots\dots\dots (31)
 \end{aligned}$$

ここに, α_{i+6} は, 格点 $(i+6)$ が弾性のときは零, 塑性のときは 1 となるパラメーターであり, 弾塑性状態の推移のいかんを問わず, 式 (31) を適用することができる。もちろん, 精度を上げるには, 分割数を増す必要がある (文献 23) 参照)。

式 (28), (31) を全格点 (1~45) について求め (周辺の Φ の値は零), 行列表示すれば次式を得る。

$$[H][d\Phi] = 2 G h_0^2 d\omega [B] - [C] \dots\dots\dots (32)$$

ここに,

- $[d\Phi] = [d\Phi_1 \dots d\Phi_{45}]^T$
- $[H]$: 式 (28) に関する係数行列 (45×45)
- $[B]$: 要素 1 なる列行列 (45×1)
- $[C]$: 式 (31) の C_i に関する列行列 (45×1)

式 (32) より,

$$[d\Phi] = 2 G h_0^2 d\omega [H]^{-1} [B] - [H]^{-1} [C] \dots\dots (33)$$

式 (18) を差分表示すれば, 文献 23) より,

$$dT = 2 b_0 h_0 [D][d\Phi] \dots\dots\dots (34)$$

ここに,

$$\begin{aligned}
 [D] & = [D_1 \ D_1 \ D_1 \ D_1 \ D_1 \ D_1 \ D_1 \ D_1 \ D_1 \ D_1] \\
 D_1 & = [2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1]
 \end{aligned}$$

式 (34) に式 (33) を代入すれば、

$$\begin{aligned} dT &= 4Gb_0h_0^3d\omega[D][H]^{-1}[B] \\ &\quad - 2b_0h_0[D][H]^{-1}[C] \\ &= GJ(d\omega - d\omega^p) \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

ここに、

$$GJ = 4Gb_0h_0^3[D][H]^{-1}[B] : \text{ねじり剛性}$$

b_0, h_0 : 断面の分割長

$$d\omega^p = \frac{2b_0h_0}{GJ}[D][H]^{-1}[C] : \text{塑性ねじり率増分}$$

式 (35) より、ねじり率増分の算定式が次のような周知の式で求められる。

$$d\omega = \frac{dT}{GJ} + d\omega^p \dots\dots\dots(36)$$

3. 純ねじりを受ける正方形断面棒

1.28 cm × 1.28 cm の正方形断面で長さ 20 cm の軟鋼の棒を SMT 型ねじり試験機 (写真-1 参照) を用いて弾塑性ねじりの実験を行い、式 (36) の理論解との比較を試みた。

材料の応力-ひずみに関する力学性状は、別に直径 1.23 cm、長さ 10.6 cm の円柱供試体を作製してねじり試験を行い、文献 32) の方法によって、図-3 の合せん断応力 $\tau^*(= \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2})$ と合せん断ひずみ $r^*(= 2\sqrt{r_{zx}^2 + r_{zy}^2}$: 工学定義) の曲線を得た (図中、×印は実験値、実線は理想化した τ^*-r^* 曲線)。

これより、 $G = 0.637 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\tau_Y^* = \tau_Y = 1494 \text{ kg/cm}^2$ 、 $r_Y^*/2 = r_Y = 0.117 \times 10^{-2}$ の諸値 (平均値) が定められる。また、硬化域の τ^*-r^* 曲線については、ここでは簡単に図-3 の実線のような 1 本の折線で近似し、勾配比としては $\mu = 8.84 \times 10^{-3}$ の値を採用した。したがって、硬化係数 $H'^{3)}$ は、 r^* の塑性増分 dr^*p を用いて、

$$H' = \frac{d\sigma_{eq}}{d\varepsilon_{eq}^p} = \frac{\sqrt{3}d\tau}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}dr^*p\right)} = \frac{3\mu}{1-\mu}G = 0.027G$$

の値を計算に採用した。

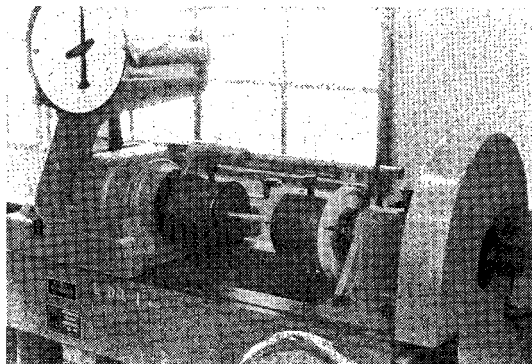


写真-1 SMT 型ねじり試験機

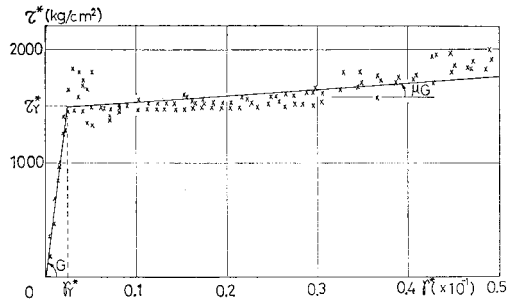


図-3 鋼材の合せん断応力-合せん断ひずみ曲線

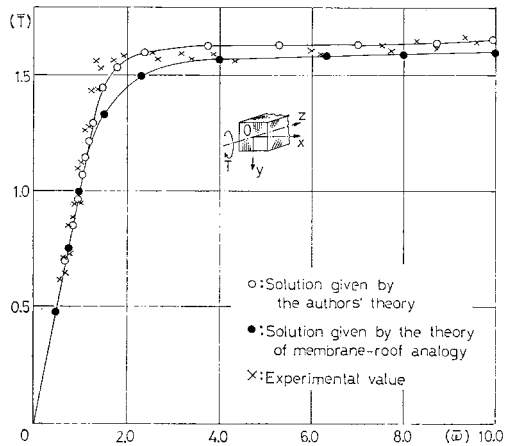


図-4 T を受ける正方形断面の $\bar{T}-\bar{\omega}$ 曲線

図-4 は、正方形断面の $\bar{T}(= T/T_Y) - \bar{\omega}(= \omega/\omega_Y)$ 曲線を実験値 (図中×印) と理論値 (12×12 等分割、図中白丸) を比較したものであり、図中の黒丸は、非硬化材料に対する理論解 (薄膜屋根根類似の理論²³⁾) を示す。この図より、硬化材料に対する本理論解が、実験値と比較的良好に合致しているといえる (ただし、弾性限界のねじりモーメントとねじり率 (理論値) は、それぞれ $T_Y = 655 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ 、 $\omega_Y = T_Y/GJ = 0.271 \times 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ となる)。

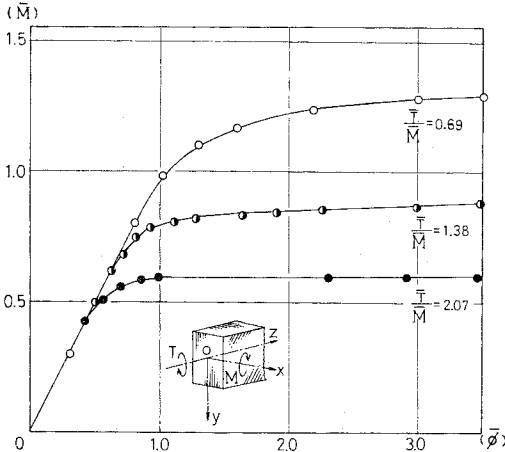
なお、この場合の完全塑性ねじりモーメント (理論値) T_P の値は、文献 15) より $T_P/T_Y = 1.61$ となり、当然のことながら非硬化材料の \bar{T} 値 (図中、黒丸) は、この値に漸近する。

4. 一軸曲げとねじりモーメントを同時に受ける長方形断面棒

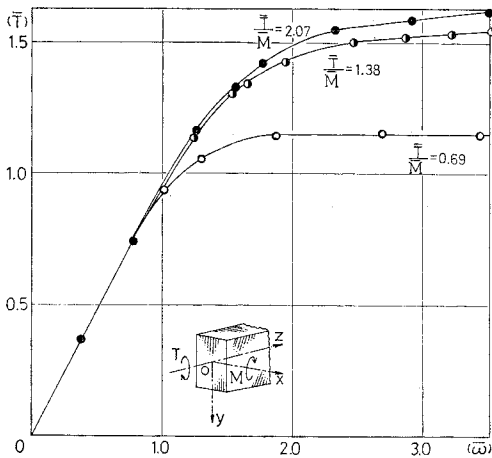
前述した 2. の理論的考察ならびに 3. の実験結果との比較により、式 (16) および (36) が弾塑性ねじりに関して妥当性をもつことがわかった。しかも、式 (16) は、他の組み合わせ負荷条件によっても式形を変えることはないで、冒頭でも述べたように本法は一軸曲げとねじり問題に対しても有用性を失わないといえよう。

そこで、上述の誘導式を用いて、 $1.0\text{ cm} \times 1.5\text{ cm}$ の長方形断面棒 (10×10 等分割) が、 M/T —一定の漸増比例負荷を受ける場合の解析を行い (曲げモーメントは、強軸 (x 軸) まわりとし、添字 x は省く)、結果を図—5~14 にまとめた (計算は、Marcal の荷重増分法³⁴⁾ を採用した)。ただし、 $E=2.1 \times 10^6\text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_Y=3400\text{ kg/cm}^2$ (降伏応力)、 $T_Y=682\text{ kg}\cdot\text{cm}$ 、 $M_Y=1275\text{ kg}\cdot\text{cm}$ (純曲げ降伏モーメント)、 $\omega_Y=0.287 \times 10^{-2}\text{ cm}^{-1}$ 、 $\phi_Y=M_Y/EI=2.16 \times 10^{-3}\text{ cm}^{-1}$ 、 $H'/E=0.01$ 、 $\nu=0.3$ 、 $\tau_Y=\sigma_Y/\sqrt{3}$ とした。

図—5 は、 \bar{T} と \bar{M} ($=M/M_Y$) の比を変えたときの $\bar{M}-\bar{\phi}$ ($=\phi/\phi_Y$) 曲線であり、また、図—6 は、 $\bar{T}-\bar{\omega}$ 曲線で、いずれも組み合わせ負荷によって初期降伏が早められ、塑性流れ効果が著しくなっていることが看取される (例えば、図—5 では \bar{T}/\bar{M} が大きい場合、すなわち、 \bar{M} に対し大きな \bar{T} が作用している場合、図—6 では \bar{T}/\bar{M} が小さい場合、すなわち \bar{T} に対して大きな \bar{M}



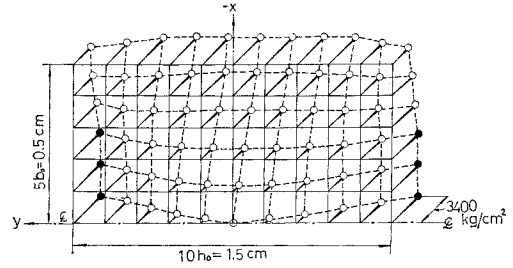
図—5 M と T を受ける長方形断面の $\bar{M}-\bar{\phi}$ 曲線



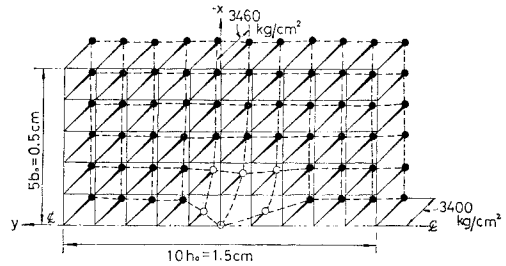
図—6 M と T を受ける長方形断面の $\bar{T}-\bar{\omega}$ 曲線

が作用する場合に相当する)。

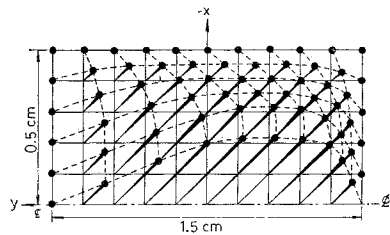
また、 $\bar{T}/\bar{M}=1.38$ の漸増比例負荷条件のもとで、かなり塑性が進行したときの相当応力分布 σ_{eq} の推移を図—7, 8 に (図中、黒丸は降伏した点を示す)、さらに、 $\bar{T}=1.61$ のときのねじりの応力関数 ϕ の分布形状、垂直応力 σ_z およびねじりのせん断応力 τ_{zx} 、 τ_{zy} の分布を示せば、それぞれ図—9, 10 および図—11, 12 のよう



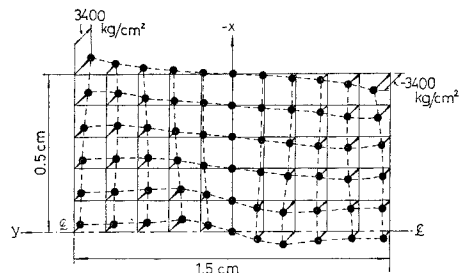
図—7 M と T を受ける長方形断面の σ_{eq} 分布 ($\bar{T}=1.12$, $\bar{T}/\bar{M}=1.38$)



図—8 M と T を受ける長方形断面の σ_{eq} 分布 ($\bar{T}=1.61$, $\bar{T}/\bar{M}=1.38$)



図—9 M と T を受ける長方形断面の ϕ 分布形状 ($\bar{T}=1.61$, $\bar{T}/\bar{M}=1.38$)



図—10 M と T を受ける長方形断面の σ_z 分布 ($\bar{T}=1.61$, $\bar{T}/\bar{M}=1.38$)

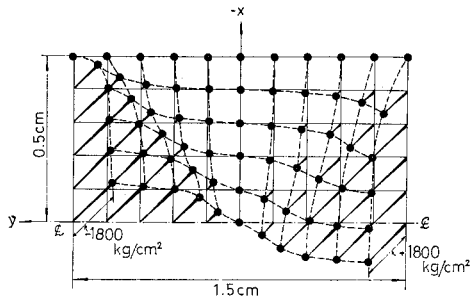


図-11 M と T を受ける長方形断面の τ_{zx} 分布
($\bar{T}=1.61, \bar{T}/\bar{M}=1.38$)

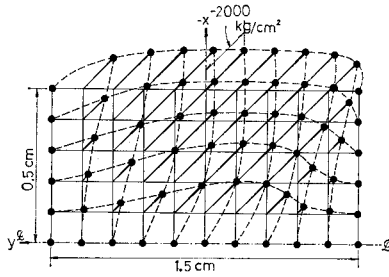


図-12 M と T を受ける長方形断面の τ_{zy} 分布
($\bar{T}=1.61, \bar{T}/\bar{M}=1.38$)

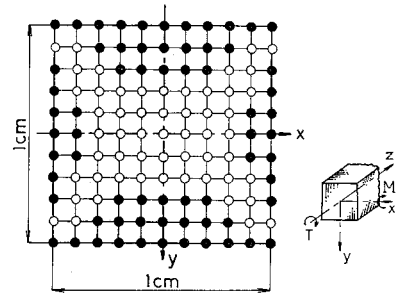


図-13 M と T を受ける正方形断面の塑性域
($\bar{T}=1.28, \bar{T}/\bar{M}=1.38$)

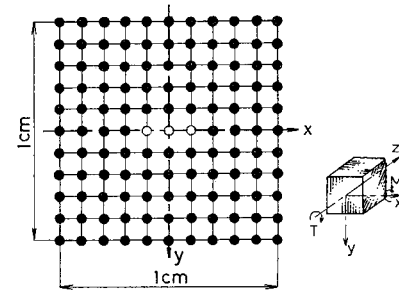


図-14 M と T を受ける正方形断面の塑性域
($\bar{T}=1.70, \bar{T}/\bar{M}=1.38$)

になる。図-7, 8 において、塑性化が進んでも、 σ_{eq} の値はほぼ $\sigma_Y=3400 \text{ kg/cm}^2$ に抑えられているのは H'/E の値を 0.01 と小さくしたための当然の結果である。また、図-10, 11, 12 において、応力成分 σ_z や τ_{zx} , τ_{zy} 分布が単純曲げや純ねじりの場合に比べて複雑に変化しているのは、塑性状態で各応力成分が相互に作用しあい、応力の再配分などが生じたためである。

なお、参考までに、 $1.0 \text{ cm} \times 1.0 \text{ cm}$ の正方形断面棒が $\bar{T}/\bar{M}=1.38$ の同一負荷条件下の降伏域の推移 ($E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_Y=3400 \text{ kg/cm}^2$, $T_Y=410 \text{ kg}\cdot\text{cm}$, $M_Y=567 \text{ kg}\cdot\text{cm}$, $\nu=0.3$, $H'/E=0.01$) を図-13, 14 に示す (図中、黒丸は降伏した点を示す)。

5. 結 言

本研究は、軸力とねじり、軸力と曲げ、および一軸曲げとねじりの組み合わせ負荷を受ける一様な長方形断面棒の弾塑性解析法に関する一手法を提示したもので、応用解析例としては、純ねじりを受ける正方形断面と一軸曲げおよびねじりモーメント漸増比例負荷を受ける長方形断面を取り扱った。

本法によって得られた結論を要約すれば、次のとおりである。

(1) 本法によれば、上述の組み合わせ負荷の場合の

解法が、形の上で一応、曲げに関する式 (10) とねじりに関する式 (36) とに分けて増分形式で取り扱うことができ、いずれも曲げやねじりがそれぞれ単独に作用する場合と同一式で与えられ、しかも応力状態の推移のいかんを問わず、一貫したスカラー表示式であるため骨組構造解析にも平易に活用しうる。特に Φ の算定にあたっては、パラメーター α を導入して、必要行列の元数や要素配列の順序を固定化し、演算を塑性負荷、除荷にかわりなく機械的に行うことができ、サブルーチン化も容易であること。

(2) 誘導されたねじりの応力関数の非線形微分方程式 (式 (16)) の特例として、曲率とねじり率のひずみ経路一定条件に対する Steele の式および純ねじりを受ける硬化材料に対する Prager の式が得られること。

(3) 一様な正方形断面鋼棒の弾塑性ねじり試験を行い、実験値と本理論値とを比較した結果、よい一致がみられたこと。

(4) 曲げとねじりモーメントを同時に受ける長方形断面棒の塑性域発生後の応力状態や、曲率、ねじり率などの変形挙動が、本法により追跡解明できたこと。

以上から、本法は、一様な長方形 (太肉) 断面棒が各種の組み合わせ負荷を受ける場合の弾塑性解析法として有用であり、また、前述の制約条件のもとでは妥当性を有するといえよう。

参 考 文 献

- 1) Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, London, pp. 450~499, 1977.
- 2) Gallagher, R.H. (川井彦彦監訳) : 有限要素法の基礎, 丸善, pp. 269~304, 1976.
- 3) 山田嘉昭 : マトリックス法材料力学, コンピューターによる構造工学講座 I-3-A, 培風館, pp. 67~112, 1971.
- 4) 三好俊郎ほか3名 : 有限要素法一構造要素の変形・破壊挙動の解析, 実教出版, pp. 29~43, 1976.
- 5) Cheung, Y.K. : Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, Oxford, pp. 78~114, 1976.
- 6) Rajasekaran, S. and D.W. Murray : Finite element solution of inelastic beam equations, Proc. ASCE, ST 6, Vol. 99, pp. 1025~1041, June 1973.
- 7) 前田幸雄・林 正・有岡謙一 : 有限帯板要素法によるプレートガーダーの非線形解析, 土木学会関西支部昭和51年度年次学術講演会講演概要集, 第1部, pp. 54~55, 1976.
- 8) 藤田 譲ほか3名 : 平面骨組構造物の最高荷重(弾塑性有限変形解析), 日本鋼構造協会第5回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集, pp. 218~228, 1971.
- 9) Nishino, F. and L. Tall : Residual stress and local buckling strength of steel columns, Trans. JSCE, No. 172, pp. 79~96, 1969.
- 10) 福本秀士・伊藤義則 : フランジ局部座屈強度とフランジの幅厚比制限, 土木学会論文報告集, 第160号, pp. 27~38, 1968.
- 11) 宇佐美勉 : 補剛材つき板の弾性ならびに非弾性圧縮座屈強度, 土木学会論文報告集, 第228号, pp. 13~28, 1974.
- 12) Komatsu, S. and T. Sakimoto : Elasto-plastic behavior of thin-walled steel tubes under combined forces, Proc. JSCE, No. 235, pp. 125~136, March 1975.
- 13) 太田俊昭・中沢隆雄 : 曲げおよび捩りを受ける鋼管の弾塑性解析(第1報), 九州大学工学集報, 第46巻, 第4号, pp. 502~509, 1973.8.
- 14) 太田俊昭・藤岡健三 : 薄肉箱型断面をもつ片持梁の弾塑性捩り解析, 九州大学工学集報, 第49巻, 第3号, pp. 253~255, 1976.6.
- 15) 山田嘉昭 : 塑性力学, 日刊工業新聞社, pp. 155~159, 1966.
- 16) 堀井健一郎・川原睦人 : 立体骨組構造物の弾塑性解析, 第16回橋梁・構造工学研究発表会, 構造物またはその構成要素の終局強度に関する研究, pp. 7~14, 1969.
- 17) 山田嘉昭・高塚公郎 : 組合せ荷重を受ける棒の弾塑性解析 I—軸荷重と捩りの組合せ, 日本鋼構造協会第5回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集, pp. 252~259, 1971.
- 18) Phillips, D.V. and O.C. Zienkiewicz : Finite element non-linear analysis of concrete structures, Proc. Instn. Civ. Engrs, Part 2, pp. 59~88, March 1976.
- 19) 川本眺万・林 義信 : 補強筋をもつ単純支持ばりの一般解析法について, 土木学会第29回年次学術講演会講演概要集, 第1部, pp. 142~143, 1974.
- 20) Sokolovsky, V.V. (大橋義夫訳) : 塑性学, 朝倉書店, pp. 87~112, 1959.
- 21) 半沢 宏・石川博将 : 弾・塑性ねじり問題の一理論解法, 日本機械学会論文集(第1部), 35巻, 276号, pp. 1624~1639, 1969.8.
- 22) Hodge, P.G. : Elastic-plastic torsion as a problem in non-linear programming, Int. J. Solids Str., Vol. 3, pp. 989~999, 1967.
- 23) 太田俊昭 : 一樣な断面棒の弾塑性ねじり解析, 土木学会論文報告集, 第201号, pp. 23~29, 1972.5.
- 24) Hill, R. and M.P.L. Siebel : On the plastic distortion of solid bars by combined bending and twisting, J. Mech. Phys. Solids, 1-2, pp. 207~216, 1953.
- 25) Gaydon, F.A. and N. Nuttall : On the combined bending and twisting of beams of various sections, J. Mech. Phys. Solids, 6-1, pp. 17~26, 1957.
- 26) Steele, M.C. : The plastic bending and twisting of square section members, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 3, pp. 156~166, 1954.
- 27) Imegwu, E.O. : Plastic flexure and torsion, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, pp. 141~146, 1960.
- 28) 石川博将 : 曲げと捩りを受ける中実棒の弾・塑性解法, 日本機械学会第48期通常総会学術講演会講演論文集, No. 710-2, pp. 77~92, 1971.
- 29) 進藤明夫ほか3名 : 圧縮性を考慮する真直棒の弾塑性曲げ捩り, 日本機械学会第48期通常総会学術講演会講演論文集, No. 710-2, pp. 73~76, 1971.
- 30) 太田俊昭 : 骨組構造物の弾塑性解析, 土木工学における数値解析, 変形応力解析編, 土木学会編, サイエンス社, pp. 88~101, 1975.
- 31) 太田俊昭・岡本良夫・大津留哲夫 : 歪増分理論による鋼材の弾塑性捩り解析, 土木学会西部支部昭和46年度研究発表会講演集, pp. 7~8, 1972.
- 32) Hill, R. (鷲津ほか2名共訳) : 塑性学, 培風館, pp. 88~94, 1957.
- 33) Prager, W. : An introduction to the mathematical theory of plasticity, J. App. Phys., Vol. 18, pp. 375~383, 1947.
- 34) Marcal, P.V. and I.P. King : Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method, Int. J. Mech. Sci., Vol. 9, pp. 143~155, 1967.
- 35) 宇佐美勉 : 軸力, 曲げおよび一樣ねじりを受ける薄肉閉断面の降伏後の挙動, 土木学会論文報告集, 第220号, pp. 9~16, 1973.12.

(1978.4.17・受付)