

円筒，円錐形状をもつ管路のシェルとしての応力解析

STRESS ANALYSIS OF PIPELINES CONSISTING OF LONG CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS AND CONICAL SHELLS

中 村 秀 治*

By Hideharu NAKAMURA

1. ま え が き

管路はエネルギーの伝達，物量の輸送に重要な役割を演じている。特に土木の分野では，水圧鉄管，冷却水取水管，燃料輸送用パイプライン，送電用管路，各種配管系その他広範囲に用いられ，その輸送手段としての優れた特性により今後も広く適用されるさう勢にある。

管路を構造的にみれば，ほとんどの場合，全長が断面径の数倍以上になる“非常に長いシェル”であり，支台により一定間隔で支持されるか，あるいは土中に埋設されている。荷重は土圧，水圧，気圧，熱，地震力，自重の他に支点の不等沈下などもあるが，これらによる応力を緩和するため，通常，伸縮継手が適切に配置されている。

解析法としては，従来，2次元あるいは3次元のはり要素を用い，支点や地盤等を適切な評価によりばねに置換して解く方法が多く用いられてきた¹⁾が，近年，断面径が大きくなり，径に比較して肉厚が薄くなりつつある状況下では，はり要素による方法で必ずしも十分な応力評価が可能とはいえない場合が多くなりつつある。等断面直線部には円筒殻，変断面直線部には円錐殻，等断面曲線部には円環殻の各理論式を適用して解析的に解くことにより，管路各部の応力分布が求められるが，複雑な境界条件を満足させる解析解の得られることは少ない。

円筒殻については，Donnell²⁾，Novozhilov³⁾，Flügge⁴⁾などの基礎方程式をもとに，8階あるいは4階の偏微分方程式に帰着させ，2重 Fourier 級数展開または一方向にのみ Fourier 級数展開して解く方法が広く知られている。円筒殻支持部の設計に参照される Bijlaard⁵⁾ の計算結果は2重 Fourier 級数展開による解である。一方向にのみ Fourier 級数展開する場合，軸方向と周方向があるが，2重 Fourier 級数展開も含めて軸方向級数展開は長

くなったときの解の発散や精度低下^{13), 24)}が知られている。また，周方向級数展開では境界条件の制約が緩められる反面，軸方向座標のみに関する常微分方程式の同次解と特解を考え合わせて解かなければならない。ただし，軸方向座標のみに関する常微分方程式を差分法で解いた Budiansky らの例⁶⁾もある。

一般に解析的に解く場合，境界および集中荷重点近傍のシェル特有の応力集中に追従性がよい反面，解の形が複雑になり，境界条件の制約を受け，また長くなれば数値による解を得る過程で誤差が入りやすい。特に長い円筒殻を対象とした Klosner の研究⁷⁾もあるが，これは三次元弾性論的であり，Kirchhoff-Love の仮定に基づいたいわゆる薄肉シェルを扱ったものではない。

円錐殻，円環殻についても同様に，任意の条件で解析的に解くのは難しく，きわめて限られた境界条件，荷重条件に対して，特殊関数を用いた解などが示されている²⁶⁾。

そこで，実務者サイドの必要性から，有限要素法による軸対称薄肉シェルの軸対称荷重，非軸対称荷重に対する解法が検討された。Grafton らの初期の研究⁸⁾，Percy らによる非軸対称荷重への拡張^{9), 10)}，要素内変位関数の次数増加による精度向上^{11), 12)}，曲線要素を用いて形状の適合性を向上させる研究などが短期間のうちに発表され，燃料貯蔵タンク，自然通風冷却塔その他に適用されるに至っている。ただし有限要素法には境界条件，荷重条件がかなり自由に選択でき，解法の簡明さという利点がある一方，応力集中箇所の要素細分割の必要性，長くなった場合の応力値の精度低下および大次元マトリクス演算の必要性など問題の多いことも確かである。これらは計算例でも若干示すことにする。

以上の状況をもとにして，本論文では特に長い管路構造物に注目し，その応力解析法を検討した。とりあえず変断面部は含むが直線部のみとし，変断面部の長さは短いものと考えて理論構成したが，留意した点は次のとお

* 正会員 工修 電力中央研究所 土木技術研究所

りである。

(i) 境界および集中荷重点近傍の応力集中を適確に把握できる。

(ii) かなり長い管路でも精度的に問題を生じにくい。

(iii) 薄肉軸対称シェル有限要素法と同程度に境界条件選択の任意性を有する(部分円筒殻、円錐殻および孔を有するような場合は本解析法の対象外である)。

(iv) 中型程度の計算機でも十分処理可能である。

具体的な手順は

① Novozhilov の円筒殻、円錐殻に関する基礎方程式^{15), 16)}から、円周方向 Fourier 級数展開により軸方向座標、母線方向座標に関する正規形常微分方程式を誘導し、マトリックスの形で示す。

② 円筒殻では定数係数の方程式になるため、係数マトリックスの固有値解析により数値的に境界値問題の一般解を求め¹⁴⁾、円錐殻ではもはや定数係数ではないが、数値積分の併用により両端の物理量の間の関係を求める。

③ 一般解に含まれる任意定数は境界条件に合わせて決定する。
などである。

ここで、円筒殻において、円周方向波数 $n=0, 1$ に対する係数マトリックスの退化現象の指摘と、固有値および対応する右、左固有ベクトル、主要ベクトルの数式表示は検討に値する点と思われる。

数値計算例は、上記留意点の確認を目的として5例を示し、解析解、有限要素解などと比較した。

2. 薄肉円筒殻、円錐殻の弾性変形に関する基礎方程式から正規形常微分方程式を誘導する過程

文献 15), 16), 17) などに従い、微小要素の平衡方程式、応力(あるいは合力、曲げモーメント)-ひずみ関係式、ひずみ-変位関係式から、周方向 Fourier 級数展開により軸方向座標のみに関する正規形常微分方程式を導く過程を略述する。

(1) 等断面部(円筒殻)

円筒殻の微小要素に作用する単位幅当り合力、曲げモーメントおよび座標を図-1のように取れば、平衡方程式と合力、曲げモーメント-変位関係式は次のとおりである。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{r\partial\theta} + F_x = 0 \dots\dots\dots (1)$$

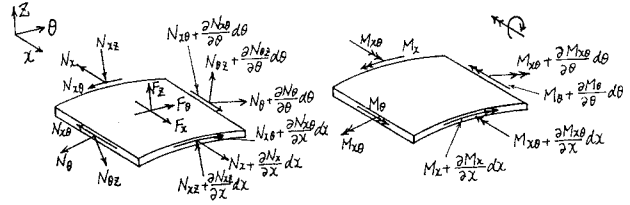


図-1 円筒殻の微小要素に作用する力と座標系

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{r\partial\theta} + \frac{N_{\theta z}}{r} + F_\theta = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial N_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta z}}{r\partial\theta} - \frac{N_\theta}{r} + F_z = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\theta}}{r\partial\theta} - N_{xz} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_\theta}{r\partial\theta} - N_{\theta z} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$N_x = K \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial v}{r\partial\theta} + \frac{w}{r} \right) \right\} - T_0 \dots\dots\dots (6)$$

$$N_\theta = K \left\{ \left(\frac{\partial v}{r\partial\theta} + \frac{w}{r} \right) + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - T_0 \dots\dots\dots (7)$$

$$N_{x\theta} = G' \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial\theta} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$M_x = -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial v}{r^2 \partial \theta} \right) \right\} - t_0 \dots\dots (9)$$

$$M_\theta = -D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial v}{r^2 \partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} - t_0 \dots\dots\dots (10)$$

$$M_{x\theta} = M_{\theta x} = D(1-\nu) \left\{ \frac{\partial v}{r\partial x} - \frac{\partial^2 w}{r\partial x \partial \theta} \right\} \dots\dots (11)$$

$$Q_z = N_{xz} + \frac{\partial M_{x\theta}}{r\partial\theta} \dots\dots\dots (12)$$

$$Q_\theta = N_{x\theta} + \frac{M_x}{r} \dots\dots\dots (13)$$

$$S_z = \frac{\partial w}{\partial x} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 r : 円筒殻断面の半径 (ただし、断面中心から板厚中心まで)

h : 板厚

u, v, w : それぞれ x, θ, z 軸方向変位

E : ヤング率

ν : ポアソン比

$K = Eh/(1-\nu^2)$

$G' = Eh/2(1+\nu)$

$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$

T_0 : 温度分布を $\tau(x, \theta, x)$ とした時

$$\frac{E\beta}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \tau dz$$

t_0 : 温度分布を $\tau(x, \theta, x)$ とした時

$$-\frac{E\beta}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} x\tau dz$$

β : 線膨張係数

Q_z, Q_θ : 等価せん断力

表-1 円筒殻の係数マトリックス $A^{(n)}$

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n^2\nu}{r^2} & 0 & 0 & \frac{n\nu}{r^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{D} \\ -\frac{\nu}{r} & 0 & 0 & -\frac{n\nu}{r} & \frac{1}{K} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{n(1-\nu)D}{r^2G'} & \frac{n}{r} & 0 & 0 & \frac{1}{G'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n^2(1-\nu)D}{r^2} & \frac{n^2(1-\nu)D}{r^4} & 0 & 0 & -\frac{n}{r} & 0 & 0 & 0 \\ (1-\nu^2)\left\{\frac{nK}{r^2} + \frac{n^3D}{r^4}\right\} & 0 & 0 & (1-\nu^2)\left\{\frac{n^2K}{r^2} + \frac{n^2D}{r^4}\right\} & \frac{n\nu}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{n\nu}{r^2} \\ (1-\nu^2)\left\{\frac{K}{r^2} + \frac{n^2D}{r^4}\right\} & 0 & 0 & (1-\nu^2)\left\{\frac{nK}{r^2} + \frac{n^2D}{r^4}\right\} & \frac{\nu}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{n^2\nu}{r^2} \\ 0 & -\frac{2n^2(1-\nu)D}{r^2} & -\frac{2n^2(1-\nu)D}{r^4} & 0 & 0 & -\frac{2n(1-\nu)D}{r^2G'} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とする。

次に, 変位, 単位幅当り合力および曲げモーメント, 荷重, 温度のうち, $u, w, N_x, N_\theta, N_{xz}, M_x, M_\theta, Q_z, S_z, F_x, F_z, T_\theta, t_\theta$ を $\begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$ で, $v, N_{x\theta}, N_{\theta z}, M_{x\theta}, Q_\theta, F_\theta$ を $\begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix}$ で Fourier 級数展開し, x のみの関数である Fourier 係数は右肩に (n) をつけて表わすことにする。

円周方向波数 n の各 Fourier 係数を用いて, 式 (1) ~ (14) は次式のように変形される。

$$\frac{dN_x^{(n)}}{dx} + \frac{n}{r} N_{x\theta}^{(n)} + F_x^{(n)} = 0 \dots (15)$$

$$\frac{dN_{x\theta}^{(n)}}{dx} - \frac{n}{r} N_\theta^{(n)} + \frac{N_{\theta z}^{(n)}}{r} + F_\theta^{(n)} = 0 \dots (16)$$

$$\frac{dN_{xz}^{(n)}}{dx} + \frac{n}{r} N_{\theta z}^{(n)} - \frac{N_\theta^{(n)}}{r} + F_z^{(n)} = 0 \dots (17)$$

$$\frac{dM_x^{(n)}}{dx} + \frac{n}{r} M_{x\theta}^{(n)} - N_{xz}^{(n)} = 0 \dots (18)$$

$$\frac{dM_{x\theta}^{(n)}}{dx} - \frac{n}{r} M_\theta^{(n)} - N_{\theta z}^{(n)} = 0 \dots (19)$$

$$N_x^{(n)} = K \left\{ \frac{du^{(n)}}{dx} + \nu \left(\frac{n}{r} v^{(n)} + \frac{w^{(n)}}{r} \right) \right\} - T_\theta^{(n)} \dots (20)$$

$$N_\theta^{(n)} = K \left\{ \frac{n}{r} v^{(n)} + \frac{1}{r} w^{(n)} + \nu \frac{du^{(n)}}{dx} \right\} - T_\theta^{(n)} \dots (21)$$

$$N_{x\theta}^{(n)} = G' \left\{ \frac{dv^{(n)}}{dx} - \frac{n}{r} u^{(n)} \right\} \dots (22)$$

$$M_x^{(n)} = -D \left\{ \frac{d^2 w^{(n)}}{dx^2} + \nu \left(-\frac{n^2}{r^2} w^{(n)} - \frac{n}{r^2} v^{(n)} \right) \right\} + t_\theta^{(n)} \dots (23)$$

$$M_\theta^{(n)} = -D \left\{ -\frac{n^2}{r^2} w^{(n)} - \frac{n}{r^2} v^{(n)} + \nu \frac{d^2 w^{(n)}}{dx^2} \right\} + t_\theta^{(n)} \dots (24)$$

$$M_{x\theta}^{(n)} = D(1-\nu) \left\{ \frac{dv^{(n)}}{r dx} + \frac{n}{r} \frac{dw^{(n)}}{dx} \right\} \dots (25)$$

$$Q_z^{(n)} = N_{xz}^{(n)} + \frac{n}{r} M_{x\theta}^{(n)} \dots (26)$$

表-2 円筒殻の荷重ベクトル $P^{(n)}$ と 温度荷重ベクトル $T^{(n)}$

$$P^{(n)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F_x^{(n)} \\ -F_\theta^{(n)} \\ -F_z^{(n)} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad T^{(n)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{t_\theta^{(n)}}{D} \\ \frac{T_\theta^{(n)}}{K} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{n(1-\nu)T_\theta^{(n)}}{r} + \frac{n(1-\nu)t_\theta^{(n)}}{r^2} \\ -\frac{(1-\nu)T_\theta^{(n)}}{r} + \frac{n^2(1-\nu)t_\theta^{(n)}}{r^2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$Q_\theta^{(n)} = N_{x\theta}^{(n)} + \frac{1}{r} M_{x\theta}^{(n)} \dots (27)$$

$$S_z^{(n)} = \frac{dw^{(n)}}{dx} \dots (28)$$

式 (15) ~ (28) を用いて式を変形し, 未知関数ベクトル $Y^{(n)}$ を次のように選べば

$$Y^{(n)T} = [w^{(n)}, S_z^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)}, N_x^{(n)}, Q_\theta^{(n)}, Q_z^{(n)}, M_x^{(n)}] \dots (29)$$

最終的に円筒殻の 8 元の正規形常微分方程式は次の形で求められる。

$$\frac{dY^{(n)}}{dx} = A^{(n)} Y^{(n)} + P^{(n)} + T^{(n)} \dots (30)$$

ここで, $A^{(n)}$ は係数マトリックスであり, 表-1 に示すとおり定数マトリックスである。 $P^{(n)}, T^{(n)}$ はそれぞれ荷重ベクトル, 温度荷重ベクトルで表-2 に示すものである。

式 (30) を導く途中で, $(1-h^2/r^2)$ が分母にくるときは,

$$\left(1 - \frac{h^2}{r^2}\right) \approx 1 \dots (31)$$

としているが, 文献 3) の理論式は分母の $(1-h/r)$ を近似的に 1 と仮定しているもので, 無理は生じていないものと考えられる。

(2) 変断面部 (円錐殻)

円錐殻の微小要素に作用する単位幅当り合力, 曲げモーメントおよび座標を図-2 のように取れば, 平衡方程

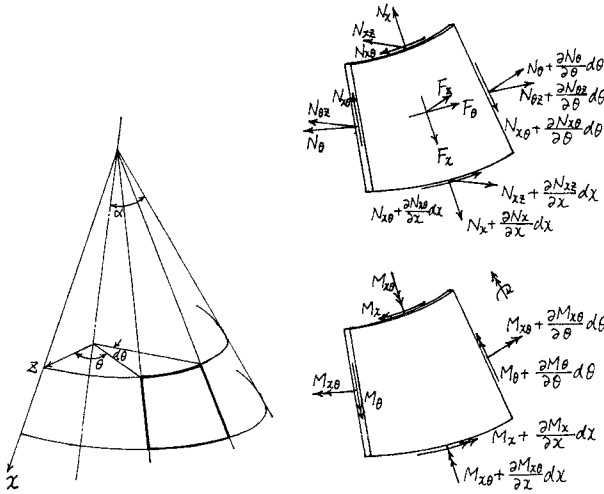


図-2 円錐殻の微小要素に作用する力と座標系

式と合力、曲げモーメント-変位関係式は次のようになる。x座標は母線方向であり、円筒殻の場合と異なっている。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{N_x - N_\theta}{x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + F_x = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{2}{x} N_{x\theta} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \alpha}{x} N_{\theta z} + F_\theta = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial N_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{x} N_{xz} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{\cot \alpha}{x} N_\theta + F_z = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{M_x - M_\theta}{x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - N_{xz} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{2}{x} M_{x\theta} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - N_{\theta z} = 0 \quad (36)$$

$$N_x = K \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{x} + \frac{\cot \alpha}{x} w \right) \right\} - T_0 \quad (37)$$

$$N_\theta = K \left\{ \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{x} + \frac{\cot \alpha}{x} w + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - T_0 \quad (38)$$

$$N_{x\theta} = G' \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} \quad (39)$$

$$M_x = -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{x \partial x} - \frac{\cot \alpha}{x^2 \sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right\} + t_0 \quad (40)$$

$$M_\theta = -D \left\{ \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{x \partial x} - \frac{\cot \alpha}{x^2 \sin \alpha} \right\} \quad (41)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} + t_0 \quad (41)$$

$$M_{x\theta} = D(1-\nu) \left\{ -\frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{x^2 \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\cot \alpha}{x^2} v + \frac{\cot \alpha}{x} \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \quad (42)$$

$$Q_z = N_{xz} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} \quad (43)$$

$$Q_\theta = N_{x\theta} + \frac{\cot \alpha}{x} M_{x\theta} \quad (44)$$

$$S_z = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (45)$$

ここで、 $h, u, v, w, E, \nu, K, G', D, T_0, t_0, \beta, Q_z, Q_\theta$ はすべて円筒殻の場合と同じである。

周方向 Fourier 級数展開も円筒殻の場合と同様に行えば、式 (32)~(45) は各波数 n に対して次のようになる。

$$\frac{dN_x^{(n)}}{dx} + \frac{N_x^{(n)} - N_\theta^{(n)}}{x} + \frac{n}{x \sin \alpha} N_{x\theta}^{(n)} + F_x^{(n)} = 0 \quad (46)$$

$$\frac{dN_{x\theta}^{(n)}}{dx} + \frac{2}{x} N_{x\theta}^{(n)} - \frac{n}{x \sin \alpha} N_\theta^{(n)} + \frac{\cot \alpha}{x} N_{\theta z}^{(n)} + F_\theta^{(n)} = 0 \quad (47)$$

$$\frac{dN_{xz}^{(n)}}{dx} + \frac{N_{xz}^{(n)}}{x} + \frac{n}{x \sin \alpha} N_{\theta z}^{(n)} - \frac{\cot \alpha}{x} N_\theta^{(n)} + F_z^{(n)} = 0 \quad (48)$$

$$\frac{dM_x^{(n)}}{dx} + \frac{M_x^{(n)} - M_\theta^{(n)}}{x} + \frac{n}{x \sin \alpha} M_{x\theta}^{(n)} - N_{xz}^{(n)} = 0 \quad (49)$$

$$\frac{dM_{x\theta}^{(n)}}{dx} + \frac{2}{x} M_{x\theta}^{(n)} - \frac{n}{x \sin \alpha} M_\theta^{(n)} - N_{\theta z}^{(n)} = 0 \quad (50)$$

$$N_x^{(n)} = K \left\{ \frac{du^{(n)}}{dx} + \nu \left(\frac{n}{x \sin \alpha} v^{(n)} + \frac{u^{(n)}}{x} + \frac{\cot \alpha}{x} w^{(n)} \right) \right\} - T_0^{(n)} \quad (51)$$

$$N_\theta^{(n)} = K \left\{ \frac{n}{x \sin \alpha} v^{(n)} + \frac{u^{(n)}}{x} + \frac{\cot \alpha}{x} w^{(n)} + \nu \frac{du^{(n)}}{dx} \right\} - T_0^{(n)} \quad (52)$$

$$N_{x\theta}^{(n)} = G' \left\{ \frac{dv^{(n)}}{dx} - \frac{v^{(n)}}{x} - \frac{n}{x \sin \alpha} u^{(n)} \right\} \quad (53)$$

$$M_x^{(n)} = -D \left\{ \frac{d^2 w^{(n)}}{dx^2} - \nu \left(\frac{n^2}{x^2 \sin^2 \alpha} w^{(n)} - \frac{dw^{(n)}}{x dx} + \frac{n \cot \alpha}{x^2 \sin \alpha} v^{(n)} \right) \right\} + t_0^{(n)} \quad (54)$$

$$M_\theta^{(n)} = -D \left\{ -\frac{n^2}{x^2 \sin^2 \alpha} w^{(n)} + \frac{dw^{(n)}}{xdx} - \frac{n \cot \alpha}{x^2 \sin \alpha} v^{(n)} + \nu \frac{d^2 w^{(n)}}{dx^2} \right\} + t_0^{(n)} \dots \dots \dots (55)$$

$$M_{x\theta}^{(n)} = D(1-\nu) \left\{ \frac{n}{x \sin \alpha} \frac{dw^{(n)}}{dx} - \frac{n}{x^2 \sin \alpha} w^{(n)} - \frac{\cot \alpha}{x^2} v^{(n)} + \frac{\cot \alpha}{x} \frac{dv^{(n)}}{dx} \right\} \dots \dots \dots (56)$$

$$Q_z^{(n)} = N_{xz}^{(n)} + \frac{n}{x \sin \alpha} M_{x\theta}^{(n)} \dots \dots \dots (57)$$

$$Q_\theta^{(n)} = N_{x\theta}^{(n)} + \frac{\cot \alpha}{x} M_{x\theta}^{(n)} \dots \dots \dots (58)$$

$$S_z^{(n)} = \frac{dw^{(n)}}{dx} \dots \dots \dots (59)$$

式 (46)~(59) を用いて式を変形し，未知関数ベクトル $Y^{(n)}$ を円筒殻の場合と同様に次のように選べば，

$$Y^{(n)T} = [w^{(n)}, S_z^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)}, N_x^{(n)}, Q_\theta^{(n)}, Q_z^{(n)}, M_x^{(n)}] \dots \dots \dots (60)$$

円錐殻の 8 元の正規形常微分方程式は次の形で求められる¹⁷⁾。

$$\frac{dY^{(n)}}{dx} = A^{(n)}(x) Y^{(n)} + P^{(n)} + T^{(n)} \dots \dots \dots (61)$$

ここで， $A^{(n)}(x)$ は係数マトリックスであり，表—3

表—4 円錐殻の荷重ベクトル $P^{(n)}$ と温度荷重ベクトル $T^{(n)}$

$$P^{(n)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F_x^{(n)} \\ -F_\theta^{(n)} \\ -F_z^{(n)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad T^{(n)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{t_0^{(n)}}{D} \\ \frac{T_0^{(n)}}{K} \\ 0 \\ -\frac{(1-\nu)T_0^{(n)}}{x} \\ -\frac{n(1-\nu)T_0^{(n)}}{x \sin \alpha} + \frac{n(1-\nu) \cot \alpha t_0^{(n)}}{x^2 \sin \alpha} \\ -\frac{(1-\nu) \cot \alpha T_0^{(n)}}{x} + \frac{n^2(1-\nu)t_0^{(n)}}{x^2 \sin^2 \alpha} \\ \frac{(1-\nu)t_0^{(n)}}{x} \end{Bmatrix}$$

に示すとおり，もはや定数マトリックスではない。 $P^{(n)}$ ， $T^{(n)}$ はそれぞれ荷重ベクトル，温度荷重ベクトルで表—4 に示すとおりである。

式 (61) を導く過程において，円筒殻の場合と同様に， $(1-h^2/x^2 \sin^2 \alpha)$ が分母にくるときは，

$$\left(1 - \frac{h^2}{x^2 \sin^2 \alpha} \right) \approx 1 \dots \dots \dots (62)$$

とし，また， $h^2/x^2 \sin^2 \alpha$ より微小な項は省いている。

3. 数値解析法

前章で，円筒殻，円錐殻ともに 8 元の正規形常微分方

表—3 円錐殻の係数マトリックス $A^{(n)}(x)$

$$A^{(n)}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n^2 \nu}{x^2 \sin^2 \alpha} & -\frac{\nu}{x} & 0 & \frac{n \nu \cot \alpha}{x^2 \sin \alpha} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{D} \\ -\frac{\nu \cot \alpha}{x} & 0 & -\frac{\nu}{x} & -\frac{n \nu}{x \sin \alpha} & \frac{1}{K} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & \frac{n}{x \sin \alpha} & \frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{G'} & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & \frac{n(1-\nu^2)K}{x^2 \sin \alpha} & -\frac{1-\nu}{x} & -\frac{n}{x \sin \alpha} & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & \frac{n \nu}{x \sin \alpha} & a_{66} & 0 & \frac{n \nu \cot \alpha}{x^2 \sin \alpha} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & \frac{\nu \cot \alpha}{x} & a_{76} & -\frac{1}{x} & \frac{n^2 \nu}{x^2 \sin^2 \alpha} \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & 0 & a_{86} & 1 & -\frac{1-\nu}{x} \end{bmatrix}$$

$$a_{41} = \frac{n(1-\nu)D \cot \alpha}{x^3 G' \sin \alpha}$$

$$a_{42} = \frac{n(1-\nu)D \cot \alpha}{x^2 G' \sin \alpha}$$

$$a_{51} = \left\{ \frac{(1-\nu^2)K \cot \alpha}{x^2} - \frac{n^2(1-\nu)D \cot \alpha}{x^4 \sin^2 \alpha} \right\}$$

$$a_{52} = \frac{n^2(1-\nu)D \cot \alpha}{x^3 \sin^2 \alpha}$$

$$a_{53} = \left\{ \frac{(1-\nu^2)K}{x^2} + \frac{n^2(1-\nu)D \cot^2 \alpha}{x^4 \sin^2 \alpha} \right\}$$

$$a_{61} = \left\{ \frac{n(1-\nu^2)K \cot \alpha}{x^2 \sin \alpha} + \frac{n(1-\nu)D \cot \alpha}{x^4 \sin \alpha} + \frac{n^3(1-\nu^2)D \cot \alpha}{x^4 \sin^3 \alpha} \right\}$$

$$a_{62} = \left\{ \frac{n(1-\nu)D \cot \alpha}{x^3 \sin \alpha} + \frac{n(1-\nu^2)D \cot \alpha}{x^3 \sin \alpha} \right\}$$

$$a_{63} = \left\{ \frac{n(1-\nu^2)K}{x^2 \sin \alpha} - \frac{n(1-\nu)D \cot^2 \alpha}{x^4 \sin \alpha} \right\}$$

$$a_{64} = \left\{ \frac{n^2(1-\nu^2)K}{x^2 \sin^2 \alpha} + \frac{n^2(1-\nu^2)D \cot^2 \alpha}{x^4 \sin^2 \alpha} \right\}$$

$$a_{65} = -\left\{ \frac{2}{x} + \frac{(1-\nu)D \cot^2 \alpha}{x^3 G'} \right\}$$

$$a_{71} = \left\{ \frac{2n^2(1-\nu)D}{x^4 \sin^2 \alpha} + \frac{(1-\nu^2)K \cot^2 \alpha}{x^2} + \frac{n^4(1-\nu^2)D}{x^4 \sin^4 \alpha} \right\}$$

$$a_{72} = -\left\{ \frac{2n^2(1-\nu)D}{x^3 \sin^2 \alpha} + \frac{n^2(1-\nu^2)D}{x^3 \sin^2 \alpha} \right\}$$

$$a_{73} = \left\{ \frac{(1-\nu^2)K \cot \alpha}{x^2} - \frac{2n^2(1-\nu)D \cot \alpha}{x^4 \sin^2 \alpha} \right\}$$

$$a_{74} = \left\{ \frac{n(1-\nu^2)K \cot \alpha}{x^2 \sin \alpha} + \frac{n^3(1-\nu^2)D \cot \alpha}{x^4 \sin^2 \alpha} \right\}$$

$$a_{76} = \frac{2n(1-\nu)D \cot \alpha}{x^3 G' \sin \alpha}$$

$$a_{81} = \left\{ \frac{n^2(1-\nu^2)D}{x^3 \sin^2 \alpha} + \frac{2n^2(1-\nu)D}{x^3 \sin^2 \alpha} \right\}$$

$$a_{82} = -\left\{ \frac{(1-\nu^2)D}{x^2} + \frac{2n^2(1-\nu)D}{x^2 \sin^2 \alpha} \right\}$$

$$a_{83} = -\frac{2n^2(1-\nu)D \cot \alpha}{x^3 \sin^2 \alpha}$$

$$a_{84} = \frac{n(1-\nu^2)D \cot \alpha}{x^3 \sin \alpha}$$

$$a_{86} = -\frac{2n(1-\nu)D \cot \alpha}{x^2 G' \sin \alpha}$$

程式に変換できることが示された。式 (30) と式 (61) の相違点は係数マトリックス $A^{(n)}$ が定数か否かである。従来、この形にもちこまれた方程式は、Runge-Kutta 法¹⁶⁾、予測子-修正子法¹⁸⁾などで初期値問題に変換して解かれたり、伝達マトリックス法あるいは部分的に伝達マトリックス法を用いた方法^{17), 18), 19)}により解かれていた。しかし、その場合に長くなると計算精度を維持できなくなることが知られている。H. Kraus は維持できる限界長 l を円筒殻について次式で与えた¹⁸⁾。

$$\mu l \leq 3 \dots\dots\dots (63)$$

ここで、

$$\mu^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{(rh)^2} \dots\dots\dots (64)$$

(ただし、 r : 断面半径、 h : 板厚、 ν : ポアソン比)

式 (64) は、式 (68)~(71) に示すとおり、 $n=0$ の場合の $A^{(0)}$ の固有値 (実部あるいは虚部) に一致している。

仮に $r/h=10$ を式 (63), (64) へ代入すれば、 $l=0.75 r$ 程度である。式 (63) の 3 という数値は、有効桁数を増して計算することにより若干大きくできるものと思われるが、いずれにしても l をそれほど長くすることはできない。このような理由は文献 14) に述べた係数マトリックス $A^{(n)}$ の特性によるものと考えられる。そこで、等断面部 (円筒殻) については $A^{(n)}$ の固有値解析に基づく数値計算法を提案し、 $A^{(n)}$ が定数マトリックスでない変断面部 (円錐殻) には数値積分を併用した計算法を提案し、最後に等断面部と変断面部を結合して解を得る方法について述べる。

(1) 等断面部 (円筒殻) の一般解を数値的に求める方法

係数マトリックス $A^{(n)}$ が、Jordan 標準形を $D^{(n)}$ とし、次式に分解されるので、

$$A^{(n)} = R^{(n)} D^{(n)} R^{(n)-1} \dots\dots\dots (65)$$

式 (30) の境界値問題の一般解 $Y^{(n)}$ は次のように表わされる。

$$Y^{(n)}(x) = R^{(n)} e^{D^{(n)}x} d^{(n)} + R^{(n)} \int_0^x e^{-D^{(n)}s} R^{(n)-1} \{P^{(n)}(s) + T^{(n)}(s)\} ds \dots\dots\dots (66)$$

ここで、 $d^{(n)}$ は任意定数ベクトルであり、 $D^{(n)}$, $R^{(n)}$ はそれぞれ $A^{(n)}$ の固有値を対角成分にもつ (8×8) のマトリックス、対応する固有ベクトルおよび主要ベクトルを列成分にもつ (8×8) のマトリックスである。

右、左固有ベクトル、主要ベクトル、縮重する固有値を持つ場合の Jordan 標準形など、文献 14), 20) に従い表-1 のマトリックス $A^{(n)}$ を検討すれば、 $D^{(n)}$, $R^{(n)}$ は次のようになる。

a) $n=0$ の場合

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{(0)} & & & & & & & \\ & \lambda_2^{(0)} & & & & & & \\ & & \lambda_3^{(0)} & & & & & \\ & & & \lambda_4^{(0)} & & & & \\ & & & & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & & & & & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix} & & \\ 0 & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \dots\dots (67)$$

ここで、 $j = \sqrt{-1}$ とすれば

$$\lambda_1^{(0)} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}(1-\nu^2)}{hr}} + j\sqrt{\frac{\sqrt{3}(1-\nu^2)}{hr}} \dots\dots (68)$$

$$\lambda_2^{(0)} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}(1-\nu^2)}{hr}} - j\sqrt{\frac{\sqrt{3}(1-\nu^2)}{hr}} \dots\dots (69)$$

$$\lambda_3^{(0)} = -\sqrt{\frac{\sqrt{3}(1-\nu^2)}{hr}} + j\sqrt{\frac{\sqrt{3}(1-\nu^2)}{hr}} \dots\dots (70)$$

$$\lambda_4^{(0)} = -\sqrt{\frac{\sqrt{3}(1-\nu^2)}{hr}} - j\sqrt{\frac{\sqrt{3}(1-\nu^2)}{hr}} \dots\dots (71)$$

であり、

$$R^{(0)} = [x_1^{(0)} x_2^{(0)} x_3^{(0)} x_4^{(0)} x_5^{(0)} x_6^{(0)} x_7^{(0)} x_8^{(0)}] \dots\dots\dots (72)$$

と置けば

$$x_i^{(0)T} = [1 \ \lambda_i^{(0)} \ -\frac{\nu}{r\lambda_i^{(0)}} \ 0 \ 0 \ 0 \ -D\lambda_i^{(0)*} \ -D\lambda_i^{(0)*}] \dots\dots$$

(ただし $i=1, 2, 3, 4$) \dots\dots\dots (73)

$x_5^{(0)}$, $x_7^{(0)}$ および $x_6^{(0)}$, $x_8^{(0)}$ は、表-5 に示したとおり、縮重固有値 0 に対する固有ベクトルとそれに従属する主要ベクトルである。

b) $n=1$ の場合

(式 (74) 次ページ参照)

ここで、 $j = \sqrt{-1}$ とすれば

表-5 $n=0$ の場合の固有値 0 に対する左固有ベクトル $y_6^{(0)}$, $y_7^{(0)}$ と右固有ベクトル $x_5^{(0)}$, $x_7^{(0)}$ および主要ベクトル $x_6^{(0)}$, $x_8^{(0)}$

$$y_6^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_5^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_7^{(0)} = \begin{bmatrix} -\nu r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (1-\nu^2)K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_7^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_6^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_8^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ G' \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\int_{x_0}^{s_1} \mathbf{A}^{(n)}(s_2) \int_{x_0}^{s_2} \mathbf{A}^{(n)}(s_3) ds_3 ds_2 ds_1 + \dots (102)$$

である。

式 (102) は多重積分を右边各項に含んでいる。計算機で数値積分して解くとしても，項数が上がり，積分の多重度が増すほど計算量は多くなる。そこで，全区間を細分割し，各微小区間では式 (102) 右边第 3 項以後が無視し得る場合を考える。\$l\$ 個に細分割された \$x\$ 座標を \$x_0, x_1, x_2, \dots, x_l\$ とし，

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Q}^{(n)}(x_1, x_0) &= \exp \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{A}^{(n)}(s) ds \right\}, \\ \mathcal{Q}^{(n)}(x_2, x_1) &= \exp \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{A}^{(n)}(s) ds \right\}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (103)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}^{(n)}(x_1, x_0) &= \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{A}^{(n)}(s) ds, \\ \mathbf{A}^{(n)}(x_2, x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{A}^{(n)}(s) ds, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (104)$$

と置きなおせば，

$$\mathcal{Q}^{(n)}(x_1, x_0) = \mathbf{I} + \mathbf{A}^{(n)}(x_1, x_0) \dots (105)$$

$$\mathcal{Q}^{(n)}(x_2, x_1) = \mathbf{I} + \mathbf{A}^{(n)}(x_2, x_1) \dots (106)$$

.....
.....

$$\mathcal{Q}^{(n)}(x_l, x_{l-1}) = \mathbf{I} + \mathbf{A}^{(n)}(x_l, x_{l-1}) \dots (107)$$

となる場合を考えるわけである。

式 (103)~(107) を用い，式 (100) を漸化式の形に直せば，

$$\mathbf{Y}^{(n)}(x_{m+1}) = \mathcal{Q}^{(n)}(x_{m+1}, x_m) \mathbf{Y}^{(n)}(x_m) + \mathbf{F}^{(n)}(x_{m+1}, x_m) \dots (108)$$

$$\mathbf{F}^{(n)}(x_{m+1}, x_m) = \mathcal{Q}^{(n)}(x_{m+1}, x_m) \cdot \int_{x_m}^{x_{m+1}} \{ \mathbf{I} - \mathbf{A}^{(n)}(\xi, x_m) \} \{ \mathbf{P}^{(n)}(\xi) + \mathbf{T}^{(n)}(\xi) \} d\xi \dots (109)$$

であるから，もし \$\mathbf{A}^{(n)}(x_1, x_0), \mathbf{A}^{(n)}(x_2, x_1), \dots, \mathbf{A}^{(n)}(x_l, x_{l-1})\$ が各微小区間の両端 \$x\$ 座標値の関数として求められていれば，漸化式 (108), (109) が適用できることになる。表-7 は微小区間の両端 \$x\$ 座標を \$x_1, x_0\$ とし

表-7 マトリックス \$\mathbf{A}^{(n)}(x_1, x_0)\$

$\mathbf{A}^{(n)}(x_1, x_0) =$	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>0</td> <td>$(x_1 - x_0)$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>b_{21}</td> <td>$-\nu \ln \frac{x_1}{x_0}$</td> <td>0</td> <td>b_{24}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$-\frac{1}{D}(x_1 - x_0)$</td> </tr> <tr> <td>$-\nu \cot \alpha \ln \frac{x_1}{x_0}$</td> <td>0</td> <td>$-\nu \ln \frac{x_1}{x_0}$</td> <td>$-\frac{n\nu}{\sin \alpha} \ln \frac{x_1}{x_0}$</td> <td>$\frac{1}{K}(x_1 - x_0)$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>b_{41}</td> <td>b_{42}</td> <td>$\frac{n}{\sin \alpha} \ln \frac{x_1}{x_0}$</td> <td>$\ln \frac{x_1}{x_0}$</td> <td>0</td> <td>$\frac{1}{G'}(x_1 - x_0)$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>b_{51}</td> <td>b_{52}</td> <td>b_{53}</td> <td>b_{54}</td> <td>$-(1-\nu) \ln \frac{x_1}{x_0}$</td> <td>$-\frac{n}{\sin \alpha} \ln \frac{x_1}{x_0}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>b_{61}</td> <td>b_{62}</td> <td>b_{63}</td> <td>b_{64}</td> <td>$\frac{n\nu}{\sin \alpha} \ln \frac{x_1}{x_0}$</td> <td>$b_{65}$</td> <td>0</td> <td>$b_{68}$</td> <td>$b_{68}$</td> </tr> <tr> <td>$b_{71}$</td> <td>$b_{72}$</td> <td>$b_{73}$</td> <td>$b_{74}$</td> <td>$\nu \cot \alpha \ln \frac{x_1}{x_0}$</td> <td>$b_{76}$</td> <td>$-\ln \frac{x_1}{x_0}$</td> <td>$b_{78}$</td> <td>$b_{78}$</td> </tr> <tr> <td>$b_{81}$</td> <td>$b_{82}$</td> <td>$b_{83}$</td> <td>$b_{84}$</td> <td>0</td> <td>$b_{86}$</td> <td>$(x_1 - x_0)$</td> <td>$-(1-\nu) \ln \frac{x_1}{x_0}$</td> <td>$b_{88}$</td> </tr> </table>	0	$(x_1 - x_0)$	0	0	0	0	0	0	0	b_{21}	$-\nu \ln \frac{x_1}{x_0}$	0	b_{24}	0	0	0	0	$-\frac{1}{D}(x_1 - x_0)$	$-\nu \cot \alpha \ln \frac{x_1}{x_0}$	0	$-\nu \ln \frac{x_1}{x_0}$	$-\frac{n\nu}{\sin \alpha} \ln \frac{x_1}{x_0}$	$\frac{1}{K}(x_1 - x_0)$	0	0	0	0	b_{41}	b_{42}	$\frac{n}{\sin \alpha} \ln \frac{x_1}{x_0}$	$\ln \frac{x_1}{x_0}$	0	$\frac{1}{G'}(x_1 - x_0)$	0	0	0	b_{51}	b_{52}	b_{53}	b_{54}	$-(1-\nu) \ln \frac{x_1}{x_0}$	$-\frac{n}{\sin \alpha} \ln \frac{x_1}{x_0}$	0	0	0	b_{61}	b_{62}	b_{63}	b_{64}	$\frac{n\nu}{\sin \alpha} \ln \frac{x_1}{x_0}$	b_{65}	0	b_{68}	b_{68}	b_{71}	b_{72}	b_{73}	b_{74}	$\nu \cot \alpha \ln \frac{x_1}{x_0}$	b_{76}	$-\ln \frac{x_1}{x_0}$	b_{78}	b_{78}	b_{81}	b_{82}	b_{83}	b_{84}	0	b_{86}	$(x_1 - x_0)$	$-(1-\nu) \ln \frac{x_1}{x_0}$	b_{88}
0	$(x_1 - x_0)$	0	0	0	0	0	0	0																																																																	
b_{21}	$-\nu \ln \frac{x_1}{x_0}$	0	b_{24}	0	0	0	0	$-\frac{1}{D}(x_1 - x_0)$																																																																	
$-\nu \cot \alpha \ln \frac{x_1}{x_0}$	0	$-\nu \ln \frac{x_1}{x_0}$	$-\frac{n\nu}{\sin \alpha} \ln \frac{x_1}{x_0}$	$\frac{1}{K}(x_1 - x_0)$	0	0	0	0																																																																	
b_{41}	b_{42}	$\frac{n}{\sin \alpha} \ln \frac{x_1}{x_0}$	$\ln \frac{x_1}{x_0}$	0	$\frac{1}{G'}(x_1 - x_0)$	0	0	0																																																																	
b_{51}	b_{52}	b_{53}	b_{54}	$-(1-\nu) \ln \frac{x_1}{x_0}$	$-\frac{n}{\sin \alpha} \ln \frac{x_1}{x_0}$	0	0	0																																																																	
b_{61}	b_{62}	b_{63}	b_{64}	$\frac{n\nu}{\sin \alpha} \ln \frac{x_1}{x_0}$	b_{65}	0	b_{68}	b_{68}																																																																	
b_{71}	b_{72}	b_{73}	b_{74}	$\nu \cot \alpha \ln \frac{x_1}{x_0}$	b_{76}	$-\ln \frac{x_1}{x_0}$	b_{78}	b_{78}																																																																	
b_{81}	b_{82}	b_{83}	b_{84}	0	b_{86}	$(x_1 - x_0)$	$-(1-\nu) \ln \frac{x_1}{x_0}$	b_{88}																																																																	
$b_{21} = -\frac{n^2\nu}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right)$	$b_{24} = -\frac{n\nu \cot \alpha}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right)$	$b_{41} = -\frac{n(1-\nu)D \cot \alpha}{2G' \sin \alpha} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_0^2} \right)$	$b_{42} = \frac{n(1-\nu)D \cot \alpha}{G' \sin \alpha} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right)$	$b_{51} = -(1-\nu^2)K \cot \alpha \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right) + \frac{n^2(1-\nu)D \cot \alpha}{3 \sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{x_1^3} - \frac{1}{x_0^3} \right)$	$b_{52} = -\frac{n^2(1-\nu)D \cot \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_0^2} \right)$	$b_{53} = -(1-\nu^2)K \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right) - \frac{n^2(1-\nu)D \cot^2 \alpha}{3 \sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{x_1^3} - \frac{1}{x_0^3} \right)$	$b_{54} = -\frac{n(1-\nu^2)K}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right)$	$b_{51} = -\frac{n(1-\nu^2)K \cot \alpha}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right) - \left(\frac{n(1-\nu)D \cot \alpha}{3 \sin \alpha} + \frac{n^2(1-\nu^2)D \cot \alpha}{3 \sin^2 \alpha} \right) \left(\frac{1}{x_1^3} - \frac{1}{x_0^3} \right)$																																																																	
$b_{62} = \frac{n(1-\nu)D \cot \alpha}{2 \sin \alpha} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_0^2} \right) + \frac{n(1-\nu^2)D \cot \alpha}{2 \sin \alpha} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_0^2} \right)$	$b_{63} = -\frac{n(1-\nu^2)K}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right) + \frac{n(1-\nu)D \cot^2 \alpha}{3 \sin \alpha} \left(\frac{1}{x_1^3} - \frac{1}{x_0^3} \right)$	$b_{64} = -\frac{n^2(1-\nu^2)K}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right) - \frac{n^2(1-\nu^2)D \cot^2 \alpha}{3 \sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{x_1^3} - \frac{1}{x_0^3} \right)$	$b_{68} = -2 \ln \frac{x_1}{x_0} + \frac{(1-\nu)D \cot^2 \alpha}{2G'} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_0^2} \right)$	$b_{68} = -\frac{n\nu \cot \alpha}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right)$	$b_{71} = -(1-\nu^2)K \cot^2 \alpha \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right) - \left(\frac{2n^2(1-\nu)D}{3 \sin^2 \alpha} + \frac{n^2(1-\nu^2)D}{3 \sin^4 \alpha} \right) \left(\frac{1}{x_1^3} - \frac{1}{x_0^3} \right)$	$b_{72} = \frac{n^2(1-\nu)D}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_0^2} \right) + \frac{n^2(1-\nu^2)D}{2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_0^2} \right)$	$b_{73} = -(1-\nu^2)K \cot \alpha \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right) + \frac{2n^2(1-\nu)D \cot \alpha}{3 \sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{x_1^3} - \frac{1}{x_0^3} \right)$	$b_{74} = -\frac{n(1-\nu^2)K \cot \alpha}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right) - \frac{n^2(1-\nu^2)D \cot \alpha}{3 \sin^3 \alpha} \left(\frac{1}{x_1^3} - \frac{1}{x_0^3} \right)$																																																																	
$b_{76} = \frac{n(1-\nu)D \cot \alpha}{G' \sin \alpha} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_0^2} \right)$	$b_{78} = -\frac{n^2\nu}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right)$	$b_{81} = -\frac{n^2(1-\nu^2)D}{2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_0^2} \right) - \frac{n^2(1-\nu)D}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_0^2} \right)$	$b_{82} = (1-\nu^2)D \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right) + \frac{2n^2(1-\nu)D}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right)$	$b_{83} = \frac{n^2(1-\nu)D \cot \alpha}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_0^2} \right)$	$b_{84} = -\frac{n(1-\nu^2)D \cot \alpha}{2 \sin \alpha} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_0^2} \right)$	$b_{86} = \frac{2n(1-\nu)D \cot \alpha}{G' \sin \alpha} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right)$	$b_{88} = \frac{2n(1-\nu)D \cot \alpha}{G' \sin \alpha} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right)$																																																																		

式(113)~(116)の $d_1^{(n)}$ と $d_2^{(n)}$ は 図-3 (a) の境界条件に合わせて決められる。そこで，

$$[K^{(0)}] \begin{Bmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{Bmatrix} = \{\text{特解}^{(0)}\} \dots\dots\dots(117)$$

$$[K^{(n)}] \begin{Bmatrix} d_1^{(n)} \\ d_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \{\text{特解}^{(n)}\} \dots\dots\dots(118)$$

(ただし, $n=1, 2, 3, \dots$)

を解くことになる。ここで, $[K^{(0)}], [K^{(n)}]$ は 図-3 (b), (c) に示す形の複素マトリックスであり, サイズは(要素数 $\times 8$)である。{特解⁽⁰⁾}, {特解⁽ⁿ⁾}は式(113)~(116)の特解を組み合わせて得られる。 $n=0$ と $n=1$ 以上を分けて示したのは, 剛体変位を許容する条件を与えて $[K^{(0)}], [K^{(1)}]$ が特異マトリックスになるのを避けるためである。

図-4 (a) の第2の例の場合, 全体を3要素に分ければ, 要素1, 2, 3で次式が成り立つ。記号はこれまで用いてきたとおりであり, 添字の1, 2, 3は要素番号を意味している。

$$Y_1^{(n)}(0) = R_1^{(n)} e^{D_1^{(n)} \cdot 0} d_1^{(n)} + (\text{特解}_1(0)) \dots(119)$$

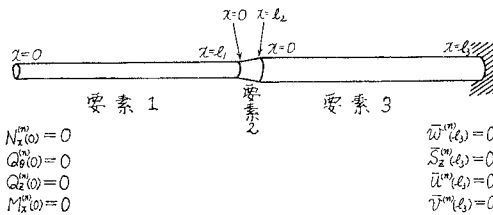
$$Y_1^{(n)}(l_1) = R_1^{(n)} e^{D_1^{(n)} l_1} d_1^{(n)} + (\text{特解}_1(l_1)) \dots(120)$$

$$Y_2^{(n)}(l_2) = Q^{(n)}(l_2, 0) Y_2^{(n)}(0) + (\text{特解}_2(l_2, 0)) \dots\dots\dots(121)$$

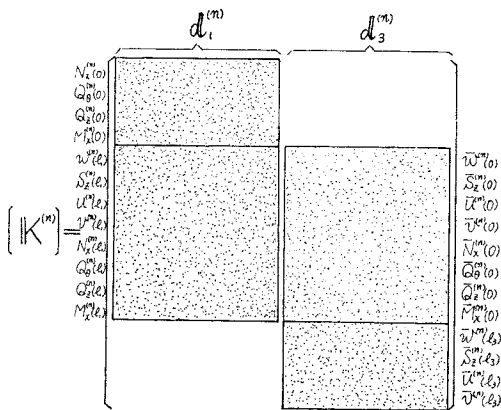
$$Y_3^{(n)}(0) = R_3^{(n)} e^{D_3^{(n)} \cdot 0} d_3^{(n)} + (\text{特解}_3(0)) \dots(122)$$

$$Y_3^{(n)}(l_3) = R_3^{(n)} e^{D_3^{(n)} l_3} d_3^{(n)} + (\text{特解}_3(l_3)) \dots(123)$$

式(121)は円錐殻に関する式であるから, 座標変換



(a) 境界条件



(b) $[K^{(n)}]$ マトリックス

図-4 変断面部を有する管路モデル

し,

$$\hat{Y}_2^{(n)}(l_2) = t Y_2^{(n)}(l_2) \dots\dots\dots(124)$$

$$\hat{Y}_2^{(n)}(0) = t Y_2^{(n)}(0) \dots\dots\dots(125)$$

とすれば, 式(121)は

$$\hat{Y}_2^{(n)}(l_2) = t^T Q^{(n)}(l_2, 0) t \hat{Y}_2^{(n)}(0) + t^T (\text{特解}_2(l_2, 0)) \dots\dots\dots(126)$$

であり, 明らかに

$$Y_1^{(n)}(l_1) = \hat{Y}_2^{(n)}(0) \dots\dots\dots(127)$$

$$\hat{Y}_2^{(n)}(l_2) = Y_3^{(n)}(0) \dots\dots\dots(128)$$

であるから, 式(126)は式(120)あるいは式(122)に組み込むことができる。式(128)も用いて, 式(120)に組み込めば,

$$Y_3^{(n)}(0) = t^T Q^{(n)}(l_2, 0) t R_1^{(n)} e^{D_1^{(n)} l_1} d_1^{(n)} + t^T Q^{(n)}(l_2, 0) t (\text{特解}_1(l_1)) + t^T (\text{特解}_2(l_2, 0)) \dots\dots\dots(129)$$

となる。

式(119), (129), (122), (123)より, 図-4 (a) の境界条件に合わせて $d_1^{(n)}, d_3^{(n)}$ を決めればよいが, それには次式を解けばよい。

$$[K^{(n)}] \begin{Bmatrix} d_1^{(n)} \\ d_3^{(n)} \end{Bmatrix} = \{\text{特解}^{(n)}\} \dots\dots\dots(130)$$

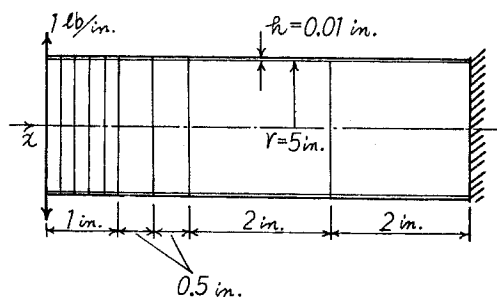
$[K^{(n)}]$ は 図-4 (b) に示す形をした複素マトリックスであり, この場合のサイズは16である。{特解⁽ⁿ⁾}は式(119)~(123)の特解を組み合わせて得られる。

4. 数値計算例

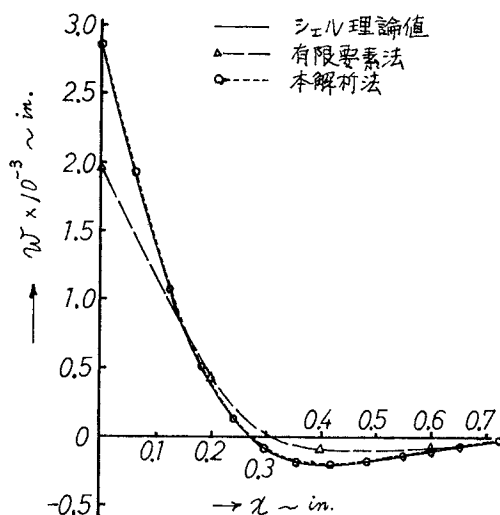
(1) Grafton と Strome の計算結果⁶⁾との比較

図-5 (a) に示す計算モデルに対して, 本論文で提案した方法を適用した。一端自由, 他端固定の等断面円筒殻で自由端には周方向一様の半径方向集中荷重が作用している。Grafton らは自由端から 1 inch 以内を 5, 10, 20 要素分割した例を示しているが, ここでは 5 要素分割の結果のみ図示した。本解析法では強いていえば全体 1 要素分割である。ヤング率は $E=10^7$ psi, ポアソン比は $\nu=0.30$ とした。

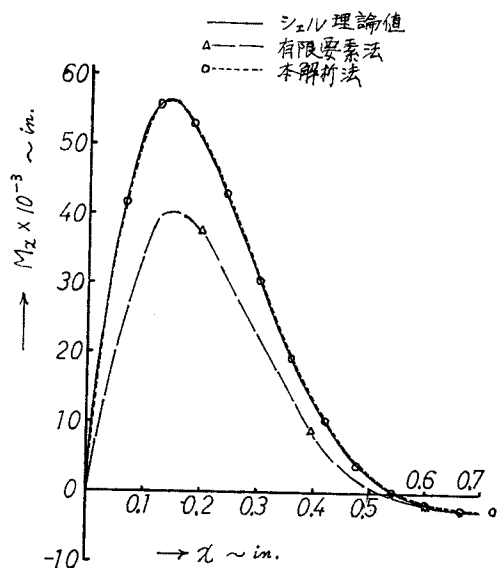
半径方向変位 w と 図-1 に示した単位幅当り曲げモーメント M_x についての計算結果は 図-5 (b), (c) のとおりである。本解析法の結果はいずれもシェル理論値と完全に一致している。Grafton らは自由端から 1 inch 以内を 20 要素分割して, ほぼ理論値に一致することを示しており, Gould らは高次の内挿関数を用いて応力集中に対して追従性のよい要素開発を行っているが, いずれの場合も計算量はかなり多くなる。本解析法は等断面 1 スパンであれば, 長さに関係なく 1 要素, 8 元のマトリックスを処理するだけでよい。



(a) 計算モデルと Grafton らの要素分割、本解析法では全体 1 要素



(b) 半径方向変位 w



(c) 曲げモーメント M_x

図-5 Grafton らの計算結果との比較

(2) 鶴戸口・加納の計算結果²⁴⁾との比較

図-6 (a) に示す計算モデルは、古く Bijlaard が、Timoshenko の基礎方程式をもとに 2重 Fourier 級数解法で解いたものである。鶴戸口・加納は Flügge の式をもとに 2重 Fourier 級数解法 (円周方向波数 84, 軸方向波数 121 まで) で同じモデルを解き、無次元表示で図示した。

本解析法をあてはめた場合も、Bijlaard, 鶴戸口・加納の結果とほとんどよく一致したが、その一部を 図-6 (b) に示す。計算条件は半径 a に対して、長さ $8a$, 板厚 $a/10$, $a/30$, 分布荷重強度 1, 分布荷重領域はスパン中央 $2a\beta \times 2a\beta$, したがって、全荷重 $P=4a^2\beta^2$, ポアソン比 0.3 である。 M_x は計算例 (1) と同じものであり、シェルに生じた最大値をとっている。

なお、本方法では周方向波数を 80 まで取り、計算例 (1) と同様に 8 元のマトリックスを扱ったのみである。

(3) Yuan らの計算結果²⁵⁾との比較

円筒殻のもっとも簡略化された Donnell の式は、古くからその計算精度が検討されている。その結果、多くの場合他の厳密な理論値と大差ないことが明らかになったが、特殊な載荷条件では精度の失われることも見出された。図-7 (a) はその典型的な例であり、Yuan らが指摘したものである。

載荷点の半径方向変位とスパン長との関係を計算し検討して、図-7 (b) のように無次元量で図示した。ポアソン比は 0.3 とし、円周方向波数 30 まで、両端単純支持として計算している。

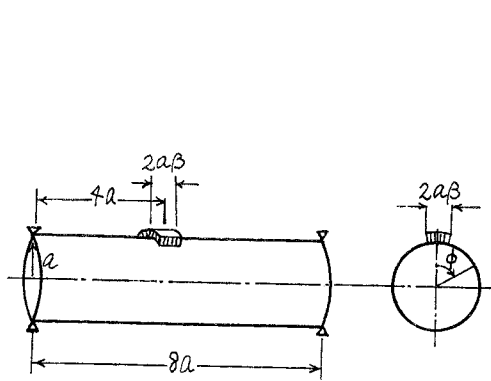
Flügge の解と Novozhilov の理論式に基づく本解析法による解は、スパン長に無関係にここでも完全に一致することが確認された。Donnell の解は Flügge の解に対し、かなり小さな値を与えている。

(4) Chang および Clark らの計算結果²⁶⁾との比較

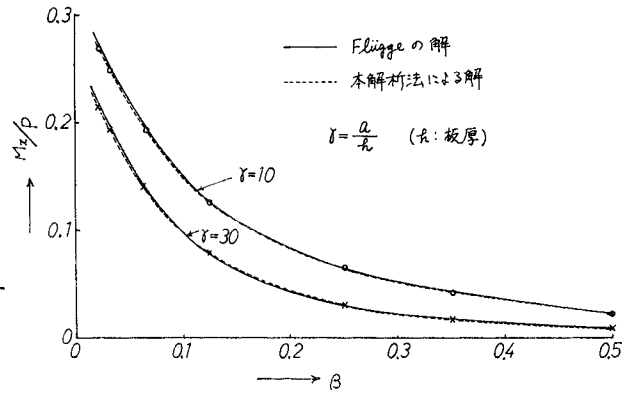
円錐殻の理論解はそれほど多く発表されていない。ここでは Chang による漸近解および Clark らによる Bessel 関数解と本論文で提案した方法による解を比較する。なお、3 者に相違がみられたので、有限要素法¹⁰⁾ (数値積分は Newton-Cotes の 7 点公式を用いた) でも計算したが、端部境界付近の応力値にかなりの乱れが生じた。

計算モデルは 図-8 (a) に示したものである。ここで、 ν (ポアソン比) = 0.3

$$\frac{h}{R} = \frac{1}{40}, \quad \tan \alpha = \frac{4}{3}, \quad \frac{L_1}{L} = \frac{5}{8}$$

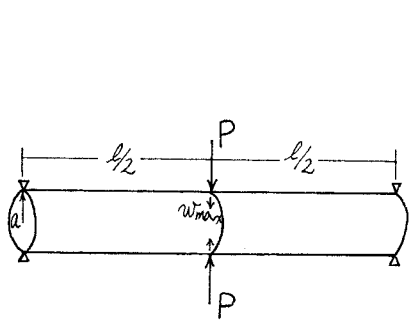


(a) 計算モデル

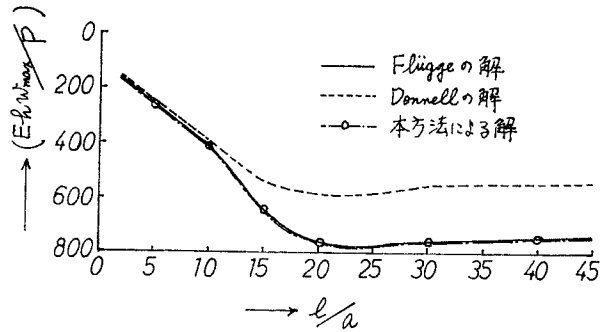


(b) 分布荷重領域とシェルに生じる曲げモーメント M_x の最大値の関係

図-6 鶴戸らの計算結果との比較

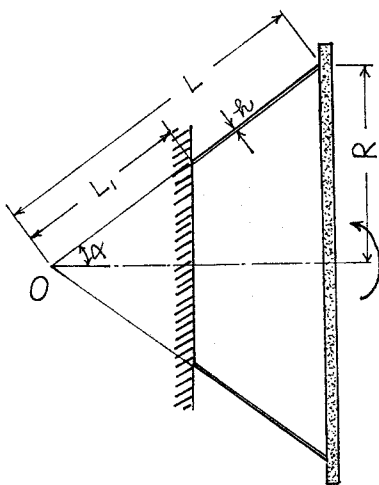


(a) 計算モデル

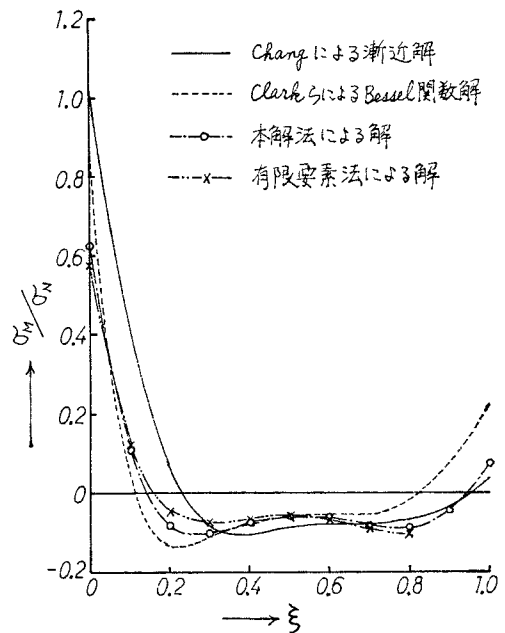


(b) スパン長と半径方向最大変位の関係

図-7 Yuan らの計算結果との比較



(a) 計算モデル



(b) ξ と σ_M/σ_N の関係

図-8 Chang および Clark らの計算結果との比較

とする。左端は固定、右端には剛な板がつけられ、水平軸まわりにモーメントを作用させる。

結果は図-8 (b) のとおりであるが、横軸、縦軸の ξ , σ_M , σ_N は次式で与えられる量としている。

$$\xi = \frac{(x/L - L_1/L)}{(1 - L_1/L)}$$

(x は図-8 (a) の O を原点とする母線方向座標)

$$\sigma_M = \frac{6 M_x}{h^2}, \quad \sigma_N = \left[\frac{N_x}{h} \right]_{\max}$$

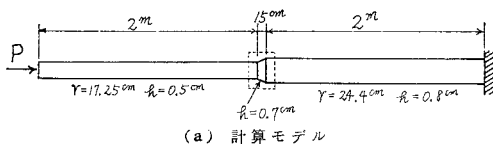
ここで、 M_x , N_x は図-2 に示したものと同じであり、1つの断面ではその最大値をとるものとする。

Chang と Clark らの解には相違がみられ、本解析法および有限要素解はほぼ両者の間に入っている。有限要素解は 10 要素分割で計算してあるが、 $\xi=0.9, 1.0$ で非常に大きな値となり、スケールアウトするため $\xi=0.8$ まで示してある。Chang, Clark らの方法と本解析法、有限要素法の間には境界条件の与え方に若干の相違もあり、どの解法が最良とは断定的にいえないが、本解析法（ここでは全区間を 20 分割）は円錐殻の挙動を把握するのに有効と思われる。

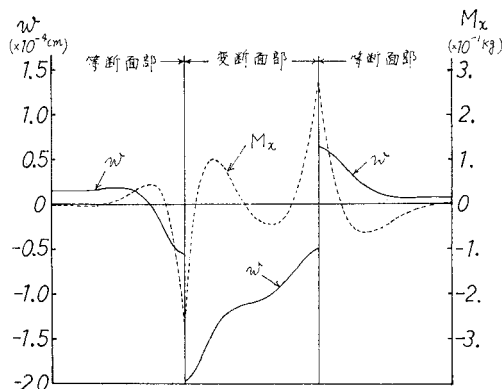
(5) 変断面部をもつ管路が軸力を受ける場合

図-9 (a) に示すモデルを計算し、変断面部付近の法線方向変位 w と曲げモーメント M_x を図-9 (b) に示した。

細い管の半径 17.25 cm, 板厚 0.5 cm, 長さ 2 m であり、太い管の半径 24.4 cm, 板厚 0.8 cm, 長さ 2 m である。変断面部は板厚 0.7 cm, 長さ 15 cm とした。ヤング率は 700 000 kg/cm², ポアソン比は 0.3 である。自由端にかかる軸方向の全荷重は $2\pi r(r=17.25)$ kg とし、



(a) 計算モデル



(b) 変断面部と近傍の法線方向変位および曲げモーメント

図-9 変断面部を有する管路に軸力が作用する場合

全周一様に分布させた。

長い直管部はほとんど一様であるため、図-9 (a) 内の変断面部近傍のみの挙動を示したが、かなり急激な w および M_x の変化を生じていることが理解できる。このような現象を数値的に把握しておくことは、実際の設計にあたって重要であろう。

なお、本計算で処理したマトリックスのサイズは 16 である。

5. 結 び

本研究では、従来、2次元あるいは3次元のはり要素を用いて解かれていた長い管路構造物をシェルとして解く方法について検討した。特に、土木の分野で用いられる大口徑、薄肉の長大管路を対象に考え、Novozhilovの基礎方程式に基づいて理論構成したが、薄肉円筒殻に関する正規形常微分方程式の係数マトリックスの固有値解析に重点が置かれた。周方向波数 $n=0, 1$ の場合の係数マトリックスが退化しており、対角型に相似でないことを指摘し、 $n=0, 1$ については係数マトリックスの全固有値と全固有ベクトル、主要ベクトルを示したが、これはシェル理論の立場からみても興味あるものと思われる。

変断面部（円錐殻）の正規形常微分方程式の係数マトリックスはもはや定数ではない。そこで、漸化式による解法を提案したが、積分範囲の長くなることに対する精度欠落に対して、全区間数要素分割などの対策は必要である。ただ、変断面部はそれほど長くないのが普通であり、精度が問題になることは少ないであろう。

等断面部（円筒殻）と変断面部（円錐殻）は未知量の取り方に違いはあるが、両者は容易に接合される。

以上の解析法をいくつかの計算モデルに適用した結果、理論構成上留意した点はすべて満足されていることが確認された。

従来、土木構造物に多くみられる管路に対しては適した解法が少なく、はりとして解く限り軸方向応力のみしか求まらず、計算例に示したようなシェル特有の応力分布を必ずしも十分にとらえられなかった。本方法を適用することにより、大口徑長大管路のシェルとしての解析が容易に行えるものと考えられる。

なお、数値計算はすべて電力中央研究所非線形シミュレーター室の HITAC-8500 を用い、倍精度で行ったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 栗原千鶴子・桜井彰雄・矢島 浩：超高压地中電線路埋設管路の熱応力，電力中央研究所 技術第二研究所報告，70015，昭和 45 年。
栗原千鶴子・桜井彰雄：埋設管路の熱応力，地震時応力

- のてい減方法についての一考察, 電力中央研究所技術第二研究所報告, 72005, 昭和47年.
- 2) Donnell, L.H. : Stability of Thin-Walled Tubes under Torsion, NACA, TR 479, 1933.
 - 3) Novozhilov, V.V. : Thin Shell Theory, P. Noordhoff, 1964.
 - 4) Flugge, W. : Stresses in Shells, Springer-Verlag, 1973.
 - 5) Bijlaard, P.P. : Stresses from Radial Loads in Cylindrical Pressure Vessels, Welding Research, 1954, Dec. pp. 615~623.
Bijlaard, P.P. : Stresses from Radial Loads and External Moments in Cylindrical Pressure Vessels, Welding Research, 1955, Dec. pp. 608~617.
 - 6) Budiansky, B. and Radkowski, P.P. : Numerical Analysis of Unsymmetrical Bending of Shells of Revolution, AIAA, Vol. 1, No. 8, 1963, pp. 1833~1842.
 - 7) Klosner, J.M. : The Elasticity Solution of a Long Circular Cylindrical Shell Subjected to a Uniform, Circumferential Radial Line Load, Journal of the Aerospace Science, 1962, July, pp. 834~841.
 - 8) Grafton, P.E. and Strome, D.R. : Analysis of Axisymmetrical Shells by the Direct Stiffness Method, AIAA, Vol. 1, No. 10, 1963, Oct. pp. 2342~2347.
 - 9) Percy, J.H., Pian, T.H.H., Klein, S. and Navaratna, R. : Application of Matrix Displacement Method to Linear Elastic Analysis of Shells of Revolution, AIAA, Vol. 3, No. 11, 1965, pp. 2138~2145.
 - 10) 千葉敏郎・塩屋繁松・川股重也 : 有限要素法による回転殻の応力解析, 日本鋼構造協会第3回大会研究集会マトリックス構造解析講演論文集, 1969, pp. 128~135.
 - 11) Sen, S.K. and Gould, P.L. : Criteria for Finite Element Discretization of Shells of Revolution, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 6, 1973, pp. 265~274.
 - 12) 塩尻弘雄 : 軸対称シェルの動的解析と自然通風冷却塔への応用, 電力中央研究所技術第二研究所報告, 71547, 1971年3月.
塩尻弘雄 : 自然通風冷却塔の動的解析, 電力中央研究所技術第二研究所報告, 72585, 1973年6月.
 - 13) 浜島良吉 : 任意荷重が作用する場合の薄肉円筒シェルの一解析法, 土木学会論文報告集, No. 245, 1976.
 - 14) 中村秀治 : 管路, 薄肉はりなどを対象とした線形常微分方程式の一般値解析法について, 日本鋼構造協会第11回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集, 1977年6月.
中村秀治 : 管路, 薄肉はりなどの線形常微分方程式の一般値解析法, 土木学会論文報告集, No. 271, 1978.
 - 15) Reissner, E. : A New Derivation of the Equations for the Deformation of Elastic Shells, American Journal of Mathematics, Vol. 63, 1941, pp. 177~184.
 - 16) Kalnins, A. : Analysis of Shells of Revolution Subjected to Symmetrical and Nonsymmetrical Loads, Journal of Applied Mechanics, 1964, pp. 467~476.
 - 17) Goldberg, J.E. and Bogdanoff, J.L. : Static and Dynamic Analysis of Nonuniform Conical Shells under Symmetrical and Unsymmetrical Conditions, Proc. 6th Symp. on Ballistic Missile and Aerospace Technology, Academic Press, 1961.
 - 18) Kraus, H. : Thin Elastic Shells, John Wiley & Sons, 1967, pp. 419~430.
 - 19) Ramaswamy, G.S. and Singh, K. : Application of Matrix Progression to the Analysis of Cylindrical Shells, Bulletin of the International Association for Shell Structures, 38, 1968.
 - 20) Zurmühl, R. : Matrizen und ihre Technischen Anwendungen, Springer-Verlag, 1964, 邦訳, 瀬川富士・高市成方共訳 : マトリックスの理論と応用, プレイン図書, 1972.
 - 21) Wilkinson, J.H. : The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, 1965, pp. 587.
 - 22) Smith, B.T., Boyle, J.M., Dongarra, J.J., Garbow, B.S., Ikebe, Y., Klema, V.C. and Moler, C.B. : Matrix Eigensystem Routines-EISPACK Guide, 2nd ed., Springer-Verlag, 1976.
 - 23) Pestel, E.C. and Leckie, F.A. : Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, 1963.
 - 24) 鶴戸口英善・加納 巖 : 円筒殻の局所荷重による応力と変形について, 高圧力, Vol. 9, No. 1, 1971, pp. 2229~2249.
 - 25) Yuan, S.W. and Ting, L. : On Radial Deflections of a Cylinder Subjected to Equal and Opposite Concentrated Radial Loads, Journal of Applied Mechanics, 1957, June, pp. 270~281.
 - 26) Chang, C.H. : An Asymptotic Solution of Conical Shells of Constant Thickness, AIAA, Vol. 5, No. 11, pp. 2028~2033.

(1978.2.17・受付)