

## 遅い中間流出・地下水流出の非線形性について

### ON THE NON-LINEARITY OF SUB-SURFACE AND GROUNDWATER-RUNOFF

高木 不折\*・松林 宇一郎\*\*

By Fusetsu TAKAGI and Uichiro MATSUBAYASHI

#### 1. 緒 言

流出現象は非線形であるといわれて久しい。非線形性の取り扱い方については、これまでも種々論議されてきているが、多くはいわゆる lumped system としての扱いについてであって、流域内部で起こる現象の詳細との関連で考察したものは少ない。すなわち、降雨条件いかによって lumped system としての変換特性にどのような非線形性が現われるかといった議論<sup>1)~4)</sup>あるいは非線形性を生む要因についての定性的説明<sup>5)~7)</sup>などがされてきたが、流域内部での雨水流出過程にあって、非線形要因が場所的、時間的にどのように消長し、それに応じて lumped system にどのような形式で非線形性が現われるかという事柄にはあまり触れられていなかったといえてよい。本研究は、著者らが現在進めている一連の研究の一部として、以上の問題について考察したものである。

物理系として流域を見ると、流域は山腹斜面、中間層、地下水帯、河道などからなっており、これらの部分系による種々の変換の結果として流出現象が起こっている。したがって、流出過程における非線形機構を考察するには、これらの個々の部分系について、かつ分布系としての取扱いが必要となる。分布系としての取扱いについて、著者らは流域水系全体としての挙動に関する変分原理を基礎とした解析法の実用化を試みており、これまでに、河川と地下水帯、河川と斜面の結合系についての一応の計算が可能となっている<sup>8)</sup>。この変分原理によって解析するが、これまでの解析によって、山岳地域における降雨から流出への変換は、遅い中間流出と地下水流出を対象とすると、河道は斜面からの流出を下流へ伝達する役割を果たすが、流出特性を形成するという点で

はむしろ表層ないしは地下水帯内部における変換が主要な役割を果たすことが明らかになっている<sup>9),10)</sup>。そこで、ここでは特に、表層ないしは地下水層を取り上げ、この流域特性と降雨特性によって流出形態を分類するとともに、どのような形式で非線形性が現われるかを検討する。

非線形性の評価は容易ではないが、分布系としての非線形性は基礎方程式の非線形項の時間空間分布によって考えることにし、集中系としては、降雨と流出ハイドログラフの間の線形性（単位図法における比例仮定、累加仮定）に対する誤差で検討することにした。非線形性消長の構造、機構をみるためには前者が優れており、一方、実際問題としての非線形誤差の定量的評価には、後者が便利である。以下前述の流出形態の分類を基礎に、この両者の対応を検討しつつ考察する。

#### 2. 飽和浸透流の基礎式と無次元化

傾斜した透水層内の不圧一次元飽和浸透流の基礎方程式は、流速ベクトルが浸透断面内で一様であるという Dupuit-Forchheimer の仮定のもとで、一次元流について、

$$r \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ kh \frac{\partial (h+z)}{\partial x} \right\} - r = 0 \quad \dots\dots (1)$$

と表わされる。以下では Fig. 1 に示す表層ないしは地

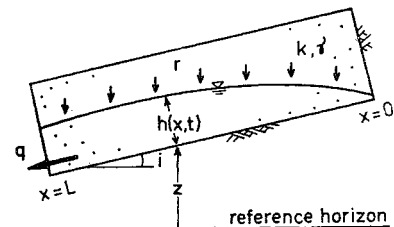


Fig. 1 Schematic representation of inclined unconfined aquifer

\* 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学教室

\*\* 学生会員 工修 名古屋大学大学院博士課程

下水帯を代表する単純な透水層内の流れを対象とする。すなわち、透水層の勾配は一定  $i(=-\partial z/\partial x)$  で、斜面長を  $L$ 、また間隙率  $r$ 、透水係数  $k$  は一様とする。また、降雨による透水層内浸透流への水供給強度  $r$  は一定で、継続時間  $t_r$  の間続くものとする\*。

種々の条件の透水層を考察するために、式 (1) を式 (2) のように無次元化する。

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} + \alpha \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ h' \left( 1 - \beta \frac{\partial h'}{\partial x'} \right) \right\} - 1 = 0 \dots\dots (2)$$

ただし、降雨終了後（地下水帯への水供給がない状態）では左辺第3項の  $-1$  は当然  $0$  となる。上式中、 $h'$ 、 $t'$ 、 $x'$  はそれぞれ水深  $h$ 、時間  $t$ 、距離  $x$  の無次元量で、

$$h = h' \cdot \frac{rt_r}{r}, t = t' \cdot t_r, x = x' L \dots\dots (3)$$

である。水深に関する無次元化の基準量として、中間流の議論などでは表層厚が取られているが、地下水を対象とすると層厚はあまり意味をもたない。そこで、本研究では、「水深で表わされた総降雨量（水供給量） $rt_r/r$ 」を基準量としている。時間に関する基準量としては水供給（降雨）の継続時間  $t_r$  を選んでいるが、これは流出パターンを明瞭にするためである。

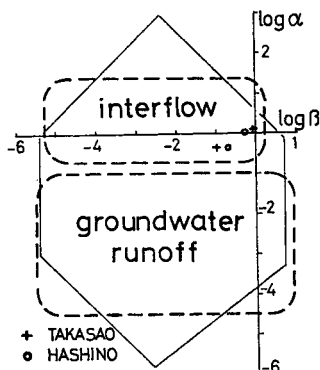
式 (2) の  $\alpha, \beta$  は、無次元化によって導かれた現象を支配する無次元パラメーターであり、次式で与えられる。

$$\alpha = \frac{ki t_r}{rL}, \beta = \frac{rt_r}{rLi} \dots\dots (4)$$

これら2つのパラメーター  $\alpha, \beta$  の物理的意義を明らかにするため、式 (4) を書き直して、

$$\alpha = \frac{t_r}{rL/ki}, \beta = \frac{rt_r/rL}{i}$$

と記そう。まず、この  $\alpha$  をみると、分母は斜面勾配のみによる移流の流達時間であり、分子は水供給（降雨）継続時間であるから、 $\alpha$  は流出の相対的速やかさを表わすパラメーター



+ TAKASAO  
 o HASHINO  
 k : 0.01 - 10 cm/sec  
 i : 0.001 - 0.5  
 $t_r$  : 1 - 12 hrs  
 $r$  : 0.05 - 0.5  
 $r$  : 10 - 50 mm/day  
 L : 100 - 500 m

Fig. 2 Domain of parameters ( $\alpha, \beta$ ) corresponding to runoff components

\* 本論文では表面流は扱っていないので、降雨強度やその継続時間という用語は適切ではないが、それぞれ降雨による表層ないしは地下水帯への水供給強度とその継続時間を意味するものと解釈されたい。

であるということができる。

$\beta$  についてみれば、分子は、水深で表わされた総降雨量を斜面長で割ったものであり、水深勾配を特徴づけるものである。一方、分母は斜面勾配であるから、 $\beta$  は水深勾配の斜面勾配に対する卓越度、いいかえれば、移流に対する拡散の卓越度を表現するパラメーターである。

$\alpha, \beta$  は式 (4) で示すように、斜面特性、降雨特性を表わす諸量で表現されており、それら諸量  $k, i, r, L, r, t_r$  の範囲が与えられると、 $\beta$ - $\alpha$  座標で  $\alpha, \beta$  の存在範囲が示される。Fig. 2 は諸量相互の独立性を仮定して考えられた  $\alpha, \beta$  の存在範囲の一例である。この存在範囲は図中に示した諸量を基に示したので、現実には、 $\alpha, \beta$  はこれよりさらに限られた範囲しか存在しないことも考えられる。ちなみに、これまでに行われた高棹らの実験例<sup>(4),(13)</sup> についての、 $\alpha, \beta$  の値を Fig. 2 に並記した。そのプロットは ( $\alpha, \beta$ ) 平面のごく限られた領域に対応していることがわかる。これらのプロットはおもに中間流出を対象としたものである。これらの実験例および、 $\alpha, \beta$  のもつ意味をもとにして、中間流出および地下水流出の起こる範囲を概念的に示したのが Fig. 2 の破線である。

### 3. 計算手法

ここで用いた手法は、流域水の挙動に関する変分原理を基礎としている。これは河川と地下水帯を一体としてとらえ、相互の干渉も含めて流域内の水の流れを変分原理で表現したものである<sup>(9),(10)</sup>。前報ではその具体的な計算手法を、いくつかの代表的な例について示した。その結果をふまえて、今回は斜面（傾斜透水層）のみを取り上げ、汎関数の地下水帯に関する部分のみを対象として計算した。斜面は1次元として扱うので、汎関数は次式に示すようになる。

$$v = \int_G \left[ r \frac{\partial H_g^*}{\partial t} (H_g + z) + \frac{1}{2} k H_g^* \times \left\{ \frac{\partial (H_g + z)}{\partial x} \right\}^2 - r (H_g + z) \right] dx - [q_c (H_g + z)] \dots\dots (5)$$

上式中、 $q_c$  は傾斜透水層末端における流量、 $H_g$  は水深である。上式右辺最後の項は境界項であり、境界条件として  $q_c, H_g$  のいずれかを指定してしまうか、 $q_c$  と  $H_g$  の間になんらかの関係を与えなければならない。また、 $H_g^*$  は実際に起こる水深であり、変分に際しては定数とみなされるものである。

変分原理は、この汎関数  $v$  を用いて、

$$\delta v = 0 \dots\dots (6)$$

と表わされ、さらに変分の後に補助条件、 $H_g \equiv H_g^*$  を

用いるものとする。実際に式 (6) を実行すると, Euler-Lagrange の方程式として, 基礎式 (1) が導かれるが, 変分法の利点は, むしろ, 未知関数  $H_g$  をいくつかの未知数を含む試験関数として表現しておき, 式 (6) を実行することによって未知数を決定し, 近似解を求めることにある。ここで  $H_g$  の試験関数は有限要素近似し, 次のように置いた。

$$H_g = \frac{h_{i+1}(x-x_i) + h_i(x_{i+1}-x)}{x_{i+1}-x_i}, \left. \begin{array}{l} \\ x_i < x < x_{i+1}, i=1, \dots, M-1 \end{array} \right\} \dots\dots (7)$$

ここに,  $i$  は各要素間の節点番号である。

計算の手順は, まず式 (7) を式 (5) に代入し,  $h_i, h_i^*$  ( $i=1, \dots, M$ ) を未知数とする汎関数  $\psi$  を得る。式 (6) の停留化条件は, 次の  $M$  個の連立方程式で表わされる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial h_j} = \varphi_j(h_i, h_i^*, i=1 \dots, M) = 0, j=1, \dots, M \dots\dots\dots (8)$$

これに補助条件を入れ,  $h_i$  を  $h_i^*$  で置き換えると式 (8) は,

$$\psi_j(h_i^*, i=1, \dots, M) = 0, j=1, \dots, M \dots\dots (9)$$

となる。これが解くべき連立方程式であるが, 最初に述べた無次元化は, この段階で行っている。

また, 以上は非定常, 非線形の問題となるが, これらの扱いは前報と同じく, それぞれ差分法, Newton-Raphson 法<sup>13)</sup>を用いている。特に差分法における計算上の時間間隔  $\Delta t'$  については, パラメーター  $\alpha$  によって現象のスピードが異なるので, それに応じて  $\Delta t' = 10^{-3} \sim 10^0$  の範囲で選んで用いている。

境界条件については, 先に述べた下流端条件の与え方に従って, 表-1 に示す 2 種の場合を行った。

Case (I) は, 式 (4) において  $q_c$  と  $H_g^*$  の間に,

$$q_c = -kH_g^* \left. \frac{\partial(H_g^* + z)}{\partial x} \right|_{x=L} \dots\dots\dots (10)$$

の関係を与えるものであり, 半無限斜面として取扱っていることに相当する。Case (II) は下流端の水位を境界条件として与えるものである。実際の計算では無次元水深で  $h' = 0.2$  としたが, このように

水位を規定すると Case (I) の場合と比較して, 下流端付近で水面形の変化が急激となり, 水面勾配の計

算の精度が著しく低下する。この欠点は, 下流端近傍における要素の大きさを小さく取ることによって補った。ところでこのように水面形が下流端で急変すると, Dupuit-Forchheimer 仮定の成立が怪しくなるが, 特に, 水深分布の誤差については, Childs らの研究<sup>12)</sup>があり, 誤差は下流端ごく近傍だけに限られることが示されている。流量は水深と水面勾配との積に比例するが, 水深を小さくするような誤差は逆に水面勾配を大きくするように働き, 両者の誤差は互いに逆の向きをもっているから, 流量の誤差としては比較的小さいことが予想される。

さて, ここで示した数値計算法の実際への適用性をみるために, これまでに行われている実験結果によって検討しておこう。

まず, Fig. 3 は, 水深分布について高棒による実験値(○印)<sup>14)</sup>とそれに対応する計算値(実線)を示したものであり, Fig. 3 (1), (2) はそれぞれ上流端に現われる特異点が nodal point, spiral point の例である。

表-1 境界条件

$x=L$	
Case (I)	$q_c = -kH_g^* \frac{\partial(H_g^* + z)}{\partial x}$
Case (II)	一定水深

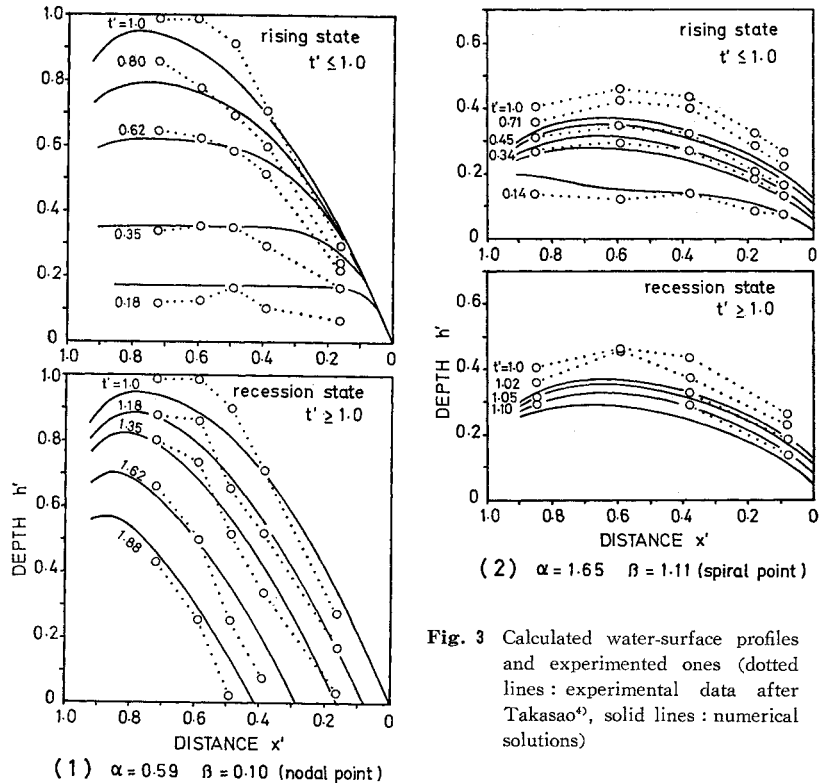


Fig. 3 Calculated water-surface profiles and experimented ones (dotted lines: experimental data after Takasao<sup>14)</sup>, solid lines: numerical solutions)

Fig. 3 (1) の場合は計算値の方が上流側でやや大きめ、下流側で小さめになっているが、全体としてほぼ一致しているといつてよい。

一方、Fig. 3 (2) については水位上昇の後期および低減の初期において計算値が実測値を下まわるといふ結果を得ている。この原因としては、毛管帯での不飽和現象の影響、下流端条件、下流水深急変部に Dupuit の仮定を用いたことが考えられるが、これらについては別途実験的に検討中である。

次に、Fig. 4 はハイドログラフについてみたものである。(実験値・印)<sup>13)</sup>と計算値(実線)を比較すると、ともに、計算値はピーク部で実測値を下まわり、低減部で上まわるといふ傾向がみられるが全体としてほぼ合っているといつてよい。

の基礎式をその境界条件のもとに数値解析的に解くと、無次元化された水深  $h'(x')$  および、下流端における無次元ハイドログラフ  $q'(t')$  が求まる。一方、水深分布

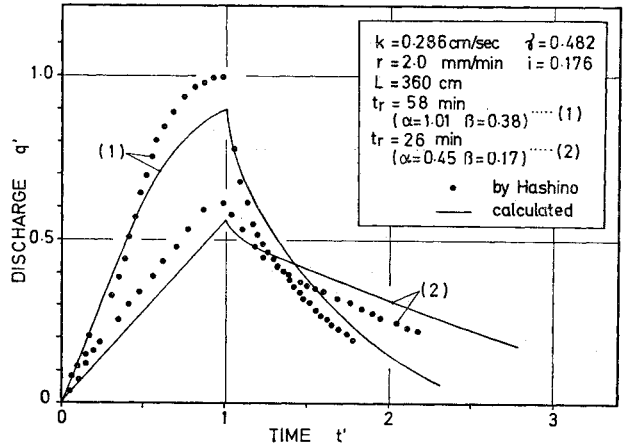


Fig. 4 Comparisons of calculated hydrographs with experimented ones<sup>13)</sup>

#### 4. 水深分布と基礎式の非線形項

前節で示した手法を用いて、斜面内飽和浸透流

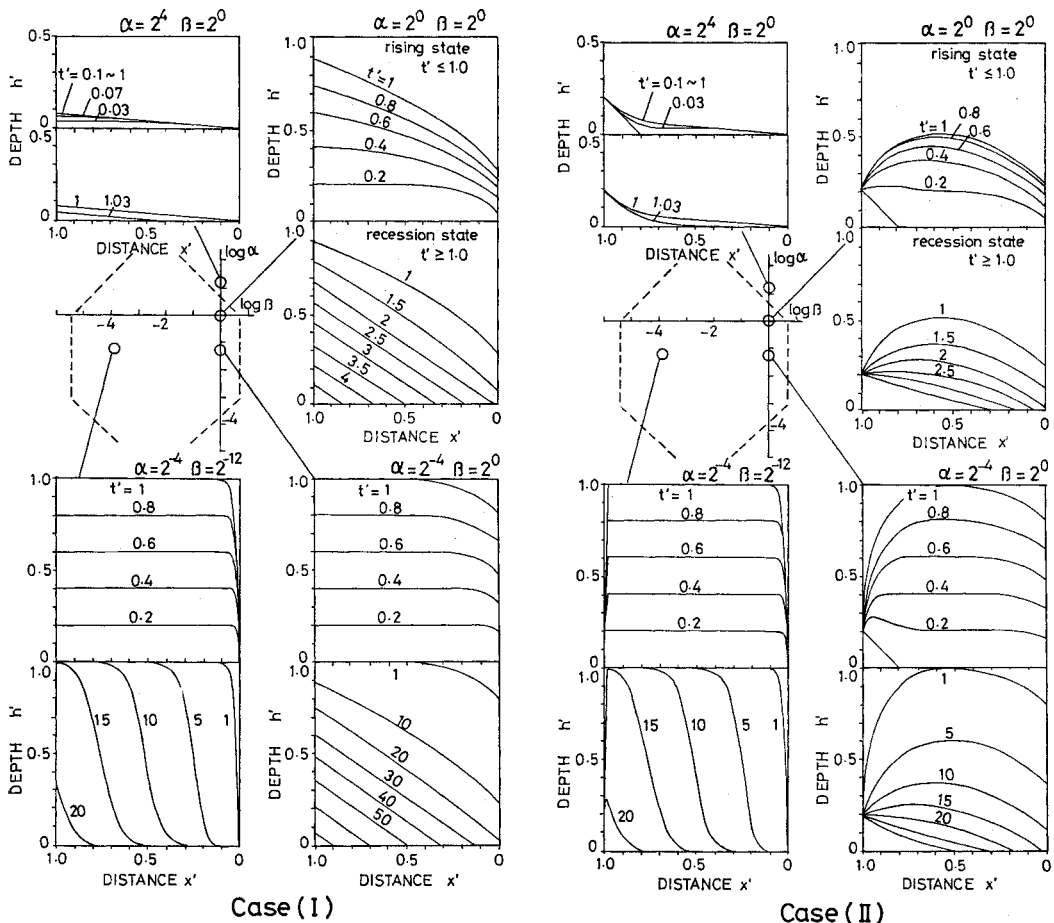


Fig. 5 Water-surface profiles for various values of  $\alpha$  and  $\beta$  (Case (I) : for the free down-stream end condition, Case (II) : for specified down-stream end depth)

の時間変化が求まると、基礎式の各項も計算される。ここでは、特に水深分布の空間的および時間的变化に、基礎式の非線形性がどのような影響を与えるかを考察する。

(1) 水深分布

水深分布は、いうまでもなくパラメーター  $(\alpha, \beta)$  によって大きく左右されるが、境界条件によってもかなり異なる。Fig. 5 は、これらの全体像を明らかにするため、いくつかの  $(\alpha, \beta)$  に対して、前述の2種類の境界条件 (Case (I), Case (II)) のもとでの水深分布を示したものである。

これらは大きくは  $\alpha$  によって特徴づけられ、Case (I) の境界条件の場合についてみると次のとおりである。

$\alpha > 1$  の場合 (例,  $\alpha = 2^4, \beta = 2^0$ ) : この場合の特徴は斜面上流端水深が零で三角形的な水面形になることである。また、降雨継続期間  $t_r$  内に定常状態に達するが、定常になるまでの時間は、 $\alpha$  が大きくなるほど早い。ここに示した例では  $t_r = 0.1$  ですでに定常となっている。

$\alpha < 1$  の場合 (例,  $\alpha = 2^{-4}, \beta = 2^{-4}$ ) : この場合の水深は、その上昇時において、上流端付近を除くと斜面に平行に上昇し、降雨終了後は拡散効果も受けるが、おもに移流によって流下している。

$\beta$  の影響は  $\alpha$  と比較すると確かに2次的ではあるが、後で述べるように非線形性を議論する上では重要となる。さて、 $\beta$  と水面形の関係をみると、 $\alpha \gg 1$  の範囲では  $\beta$  による変化はほとんどみられない。これに対し、 $\alpha < 1$  では大きく2つの特徴がある。1つは、水面の曲率に関するもので、 $\beta$  が小さい場合には、局部的に曲率の大きな部分があり、 $\beta$  が大きいと、全体的になめらかな曲線となっている。これは後で述べる拡散効果によるものである。いま1つの特徴は、移流流速に関するもので、 $\beta$  が大きくなるにつれて、水面の移動が小さくなっている。以上の原因は基礎式から出てくるものであり後に詳述する。

Case (II) の場合の特徴は、当然ながら下流端近傍にある。 $\alpha$  による水面形の変化の様子は Case (I) で述べた事柄とほとんど同様である。下流端の影響は特に  $\beta$  に関して顕著であり、その特徴は Case (I) で述べたものとよく対応している。すなわち、 $\alpha \gg 1$  では下流端の影響は  $\beta$  のいかんであまり変わらず、しかも下流端近傍に限られている。 $\alpha < 1$  でも、Case (I) の場合について述べた2点に対応して、曲率に関しては、下流端境界近傍に曲率の大きなところが生ずるが、 $\beta$  が大きいほど曲率が小さく、下流端の影響が上流まで広がっている。移流速度については Case (I) とは逆に  $\beta$  が大きいほど速くなるのが指摘できる。

(2) 基礎式各項の時・空間分布と水深変化

さて、これまでは水面形について、現象のみを  $(\alpha, \beta)$  との関係で述べてきたが、元来、水深分布の様相は、基礎式の特徴が水深という形で表われたものであり、基礎式各項の時・空間的分布を知ることによってその特徴が

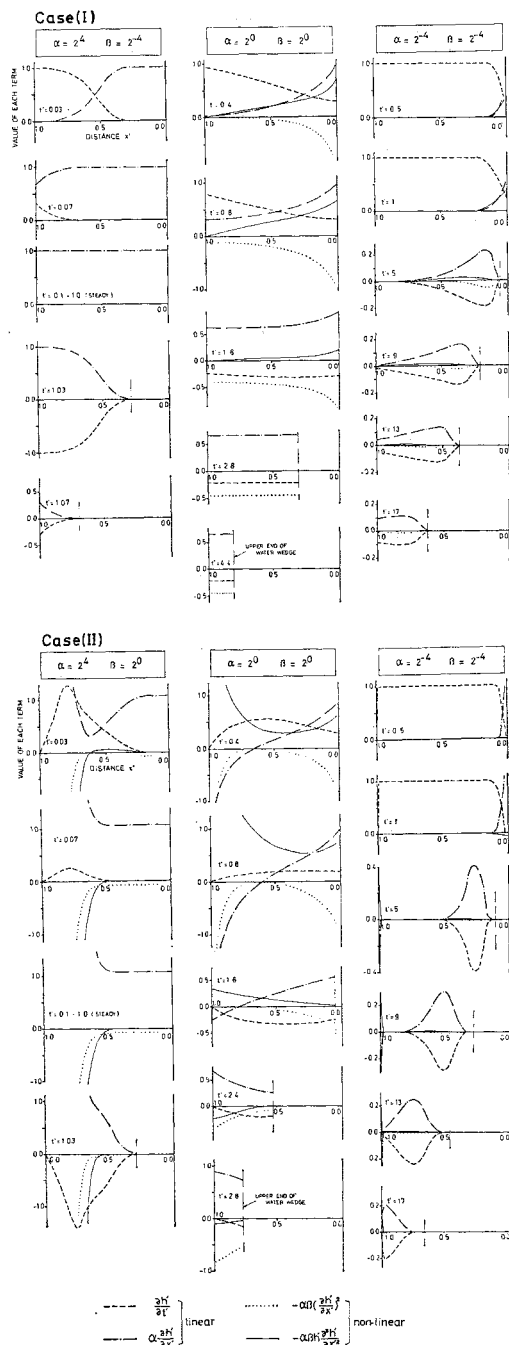


Fig. 6 Time- and spatial-distributions of the each term in the fundamental equation

明らかにされよう。また、同時に非線形項が、水深分布へどのような影響を与えているかも明らかになる。

そこで、ここでは基礎式各項の時間的・空間的分布を調べ、水面形との対応を考えよう。まず、式(2)を展開すると次式を得る。

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} + \alpha \frac{\partial h'}{\partial x'} - \alpha \beta \left( \frac{\partial h'}{\partial x'} \right)^2 - \alpha \beta h' \frac{\partial^2 h'}{\partial x'^2} - 1 = 0$$

.....(11)

上式において、第1, 第2項が線形項、第3, 第4項が非線形項であり、特に第2項は移流項、第4項は拡散項とよばれる。ここで、 $\beta$ が非線形項のみに掛っていることは注意すべきである。すなわち、先述したとおり $\beta$ は非線形性にとって重要なパラメーターなのである。

さて、Fig. 6は式(11)各項の分布の時間的遷移をCase (I), Case (II)の例についてみたものである。各項と線の関係は図中に示すとおりである。それぞれの特徴および水面形との関係は次のようにまとめられよう。

i)  $\alpha > 1$  の場合 ( $\alpha = 2^4, \beta = 2^0$ ) には、非線形項が非常に小さいことがもっとも大きな特徴である。水深分布でみたとおり、現象は降雨開始直後と終了直後を除いて直線的な水面形を示す定常状態が続くことに対応して  $-\alpha\beta(\partial h'/\partial x')^2$  は一様に分布するが値は小さい。  $-\alpha\beta h' \times \partial^2 h'/\partial x'^2$  は短い非定常時の水面の湾曲部にわずかに現われるにすぎない。このように、非線形項が、線形項と比較して非常に小さいため、前述のように現象は $\beta$ によって変化しないのである。また、線形項について、特に定常時をみると  $\alpha(\partial h'/\partial x')$  のみであり、現象が移流的であることがわかる。

ii)  $\alpha < 1$  の場合 ( $\alpha = 2^{-4}, \beta = 2^{-4}$ ) の非線形項は線形項と比較して全体的には小さい。水深の上昇時  $t' < 1.0$  では上流端を除いて  $\partial h'/\partial t'$  のみが現われる。これは、水深が場所的に一様に増加することを示している。降雨終了後の各項は斜面内の水塊の上流端付近、水深急変部を中心に分布しており、時間の経過とともに下流へ移動していく。非線形項についてみると、  $-\alpha\beta h'(\partial^2 h'/\partial x'^2)$  は時間とともに範囲を広げながら値は小さくなりやがて消えてしまうが、これを水面形でみると、水深の湾曲部における曲率が小さくなるとともにその範囲が広がるという形で残ることになる。この傾向は、 $\beta$ が大きくなるにしたがって顕著になっている。これは、基礎式で拡散項に $\beta$ が含まれていることや、また、実際基礎式各項の分布の時間変化を観察すればうなずけよう。以上のように、水面形について述べた $\beta$ による2つの特徴のうち、曲率に関しては、その構造が明らかになった。ところで、この項  $-\alpha\beta h'(\partial^2 h'/\partial x'^2)$  は非線形形の拡散項である。これを純粋な拡散効果と非線形効果とに分離することはむずかしいが、拡散が強ければ非線形性も強いということは肯定でき、この非線形効果が、水深分布の湾

曲部に現われているわけである。

次に、 $\beta$ の違いが移流速度にどのような影響を及ぼすか、その構造を考えよう。いま、  $-\alpha\beta(\partial h'/\partial x'^2)$  の項についてみると、この項は上述の拡散効果によって平滑化はされるが消滅してしまうことはない。特に $\beta$ が大きい場合には斜面に一樣に分布している。この項は、式(11)において移流項と一緒にするとわかるように、元來、

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} + \alpha \frac{\partial h'}{\partial x'} \left( 1 - \beta \frac{\partial h'}{\partial x'} \right) - \alpha \beta h' \frac{\partial^2 h'}{\partial x'^2} - 1 = 0$$

.....(12)

の移流項から出てきたものである。したがって、  $\partial h'/\partial x' > 0$  であれば、移流速度は、斜面勾配のみから出てくる移流速度 $\alpha$ より小さくなる。また、Case (II)の場合の下流端のように、  $\partial h'/\partial x' < 0$  では逆に移流速度は $\alpha$ より大きくなる。以上の事柄は、「移流速度に及ぼす $\beta$ の影響」の構造を示している。このように、  $-\alpha\beta(\partial h'/\partial x'^2)$  は移流現象を通じて流出に非線形性を与えているのである。また、この項は普通の解析においては微小として無視されているが、ここで示した例のように無視できない場合もあることは注意すべきである。

$\alpha, \beta$ との関係で付け加えると、基礎式の非線形項は、今回の計算範囲では、  $\alpha = 1 \sim 1/2, \beta = 1$ 、付近でもっとも大きく、全体的に他の線形項と比較し得るほどの大きさとなっている。

Case (II)について水面形でみた特徴についても、Case (I)で考えた構造によって矛盾なく説明することができる。ここではその他の特徴について触れておこう。すなわち、下流端近傍における水面形と基礎式各項、特に時間微分項との関係である。 $\alpha < 1$ の領域で $\beta = 1$ では、下流端の影響は上流の方まで伝播し、  $\partial h'/\partial t'$  は低減時に下流端近傍で零とはならない。したがって、低減の全時間にわたって、水深あるいは水面勾配の時間的変化がみられる。これに対して、 $\beta < 1$ では、降雨終了後の下流端の影響は下流端近傍のみに限られ、水面形は下流端に急変部が生じるが、上流へ少し離れるとCase (I)と同様に斜面にほぼ平行な水深分布となる。ここで $\beta = 1$ の場合と異なるのは、  $\partial h'/\partial t'$  が下流端近傍でも零であることである。すなわち、下流端に急変部は生ずるがその形は時間的に変化しないということである。これらのことは後に述べるCase IIのハイドログラフをみるうえで1つの重要な点である。

## 5. 集中定数系としての非線形性

斜面下流端からの流出は斜面における変換の結果であり、前節でみた基礎式の非線形性によっても複雑な影響を受けている。ここではハイドログラフに現われた集中定数系としての非線形性を単位図法の仮定に対する誤差

で評価し、基礎式の性質あるいは水深分布の特性と比較することによって、ハイドログラフに非線形の現われる構造について検討する。

(1) 流出ハイドログラフ

本論に入る前に、まずパラメーター  $(\alpha, \beta)$  に対するハイドログラフの全体像を明らかにする。ここで取り扱うハイドログラフは、前述の水深分布  $h'$  から次式によって計算される無次元元ハイドログラフ  $q'(t')$  である。

$$\begin{aligned}
 q(t) &= \left[ -kh \frac{\partial(h+x)}{\partial x} \right]_{x=L} \\
 &= rL \left[ ah' \left( 1 - \beta \frac{\partial h'}{\partial x'} \right) \right]_{x'=1} \\
 &= rLq'(t') \dots\dots\dots (13)
 \end{aligned}$$

Fig. 7 は、こうして得られる無次元元ハイドログラフ  $q'(t')$  を Case (I), Case (II) について、それぞれ  $(\alpha, \beta)$  と対応させてみたものである。また、これらのハイドログラフでは、 $0 \leq t' \leq 1$  の期間に降雨による水供給が続いているものとしている。

これらの流出ハイドログラフの概略的な特徴はパラメーター  $\alpha$  によって決まっている。まず Case (I) についてみると、 $\alpha > 1$  の場合には、水深分布でみた定常状態に対応して、降雨継続期間内に定常値  $q'=1$  に達する。立ち上りおよび低減は速やかでありその勾配は  $\alpha$  である。このことはすでに述べた  $\alpha$  の物理的意味とよく対応している。前節で述べた非線形性はちょうどこの立ち上り部最後と低減の末尾の部分に対応し、このためにこれらの部分でハイドログラフが弯曲している。

$\alpha < 1$  の場合、水深が上流端を除いて斜面に平行に一定速度で上昇することに対応し、ハイドログラフの立ち上りは直線的で降雨終了時にピーク値  $q'=\alpha$  に達する。降雨終了後は、一樣水深の水面形が移流によって流下するので、ハイドログラフではみかけ上、定常状態  $q'=\alpha$  がほぼ  $1/\alpha$  の間続いている。基礎式の非線形拡散項の影響は、その影響を受けた水面形が下流端に到達した時に現

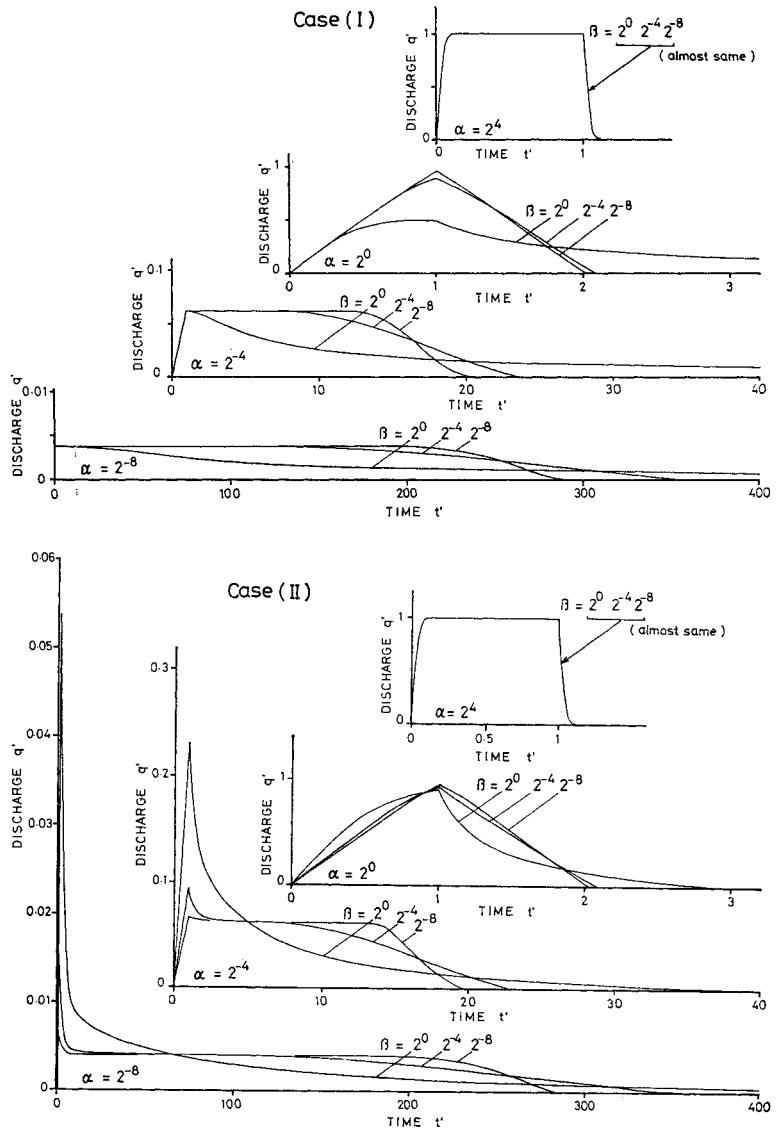


Fig. 7 Discharge hydrographs for various values of the parameters  $\alpha$  and  $\beta$

われる。すなわち流出最後の低減部に現われる。この効果は、 $\alpha, \beta$  ともに小さい領域では値自身が小さいことに加えて、その範囲が局所的であることから、ハイドログラフにはさらに小さな影響しか与えない。また、前述した  $\partial h'/\partial x'$  による移流流速の減少に伴う非線形効果は、流出強度の減少と流出時間の長期化として現われる。これらの効果は、 $\beta$  についてみると、 $\beta$  が大きくなるとともに増加し、前述の水面形および基礎式各項の特性とよく対応している。

一方、Case (II) の特徴の1つはそのピークにある。すなわち、下流端境界の水深勾配が  $\partial h'/\partial x' \ll 0$  であるので、水面形について述べた移流速度の議論と同じ理由でピーク値が大きくなる。このとき  $\beta$  が小さいと、前章で

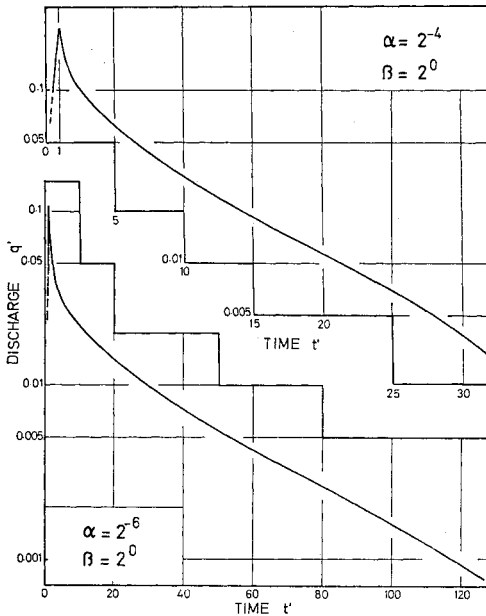


Fig. 8 Exponential recession limbs

述べたように、下流端で  $\partial h' / \partial t' = 0$  となり、水面形は定常分布となる。このことは、流量でみると下流端の流量は少し上流の点における流量と等しくなることを示しているが、この部分は先述のように Case (I) と同じ一様水深分布であり、結局  $\beta \ll 1$  の場合には、降雨終了後速やかに Case (I) と同様のハイドログラフとなる。 $\beta \approx 1$  の場合や大きな  $\beta$  に対しては拡散効果が上流まで及び、全体的に  $-\alpha\beta h(\partial^2 h' / \partial x'^2)$  の項の影響が現われ、また、下流端においても水深勾配は時間的に変化する。このような場合には指数的低減がみられることになる。その一例を示したのが Fig. 8 である。

他方、 $\alpha > 1$  の場合で下流端境界の効果があまり顕著でないのは水深分布で述べたと同じく、非線形項自体が小さいためと考えられる。

ところで、Fig. 8 のハイドログラフの末部において、その傾きが逆に増加しているが、これは流出末期に、拡散項の卓越する状態から移流項が無視しえなくなる状態へと流出機構が変化し、外見上、指数低減から直線的低減へと漸変するためである。

(2) 集中定数系としての非線形性

以上の結果、基礎式における非線形項がハイドログラフにど

のように影響しているかはだいたいつかめた。ところで、従来から行われている流出解析においては系を集中定数系として扱うものが多く、この場合の非線形性は、いわゆる単位図法に対する誤差と考えられている。そこで、ここでは、無次元ハイドログラフを用いて、この意味での非線形性を定量的に評価するとともに、基礎式からみた非線形項との対応を検討する。

一般に、線形集中定数系論<sup>14)</sup>によると、線形であるとは重ね合せの原理が適用できることであり、式 (5) で表わされる流量  $q(t)$  を用いると、

$$q(t, cr(t)) = c \cdot q(t, r(t)) \dots\dots\dots(14 \cdot a)$$

$$q'(t, r_1(t) + r_2(t)) = q(t, r_1(t)) + q(t, r_2(t)) \dots\dots\dots(14 \cdot b)$$

と表現される。ここで、(a) は単位図法における「比例仮定」、(b) は「累加仮定」に相当する。非線形の程度は式 (14) の両辺の差によって評価される。

i) 比例仮定に対する誤差：この場合、式 (4) において降雨強度  $r$  が  $\beta$  のみに含まれていることを考慮すると、式 (14 \cdot a) で  $c=2$  の場合には、

$$q(t, 2r) \sim 2q(t, r) = 2rLq'(t', 2\beta) \sim 2rLq'(t', \beta) \dots\dots\dots(15)$$

となり、無次元ハイドログラフ  $q'$  についての二乗誤差、

$$\epsilon_{a2}^2 = \int_0^\infty \{q'(t', \alpha, 2\beta) - q'(t', \alpha, \beta)\}^2 dt' \dots\dots(16)$$

で非線形性を評価した。

ii) 累加仮定に対する誤差：これは、降雨継続時間が変化する場合であり、 $t_r$  が  $\alpha, \beta$  に共通して入っていることを考慮すると  $t_r$  が 2 倍になったときの誤差は、(i) の場合と同様にして、

$$\epsilon_{b2}^2 = \int_0^\infty \{q'(t'; 2\alpha, 2\beta) - q'(2t'; \alpha\beta) - q'(2t'-1; \alpha, \beta)\}^2 dt' \dots\dots\dots(17)$$

によって評価した。

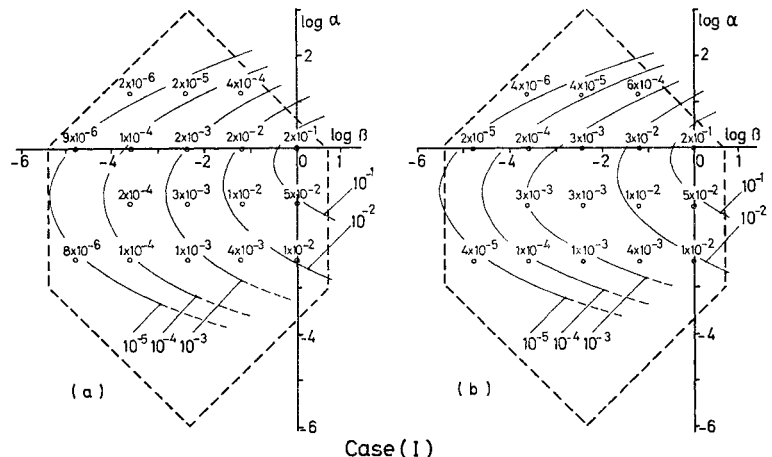


Fig. 9 Error distribution due to non-linearity for Case (I) (a:  $\epsilon_{a2}$ , b:  $\epsilon_{b2}$ )



これら2つの仮定に対する集中定数系としての非線形性に基づく誤差  $\epsilon_{a2}$ ,  $\epsilon_{b2}$  を, Case (I) についてそれぞれ,  $\beta$ - $\alpha$  座標上に示したものが Fig. 9 (a), (b) である.

まず図をみると, (a), (b) とともに同様の分布をしている. このことについては別に必然性があるわけではない. ただ (a), (b) 図すなわち比例仮定, 累加仮定につ

いては, とともに同一の  $(\alpha, \beta)$  点では降雨総量は等しくなっている. 基礎式の非線形性と比較すると, 上記の誤差は定量的にはともかくも定性的には同様の分布傾向を示している. すなわち,  $\alpha > 1$  あるいは  $\alpha < 1$  の領域では非線形性は小さい. また,  $\beta$  については  $\beta$  が大きくなるほど非線形効果は増加し,  $\alpha=1 \sim 1/2, \beta=1$  付近でもっとも大きくなっている. さらに, いくつかの  $(\alpha, \beta)$

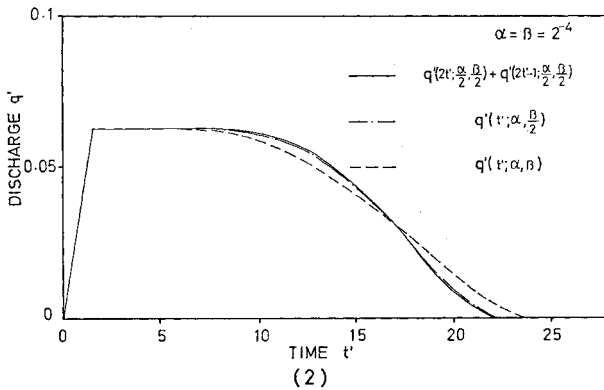
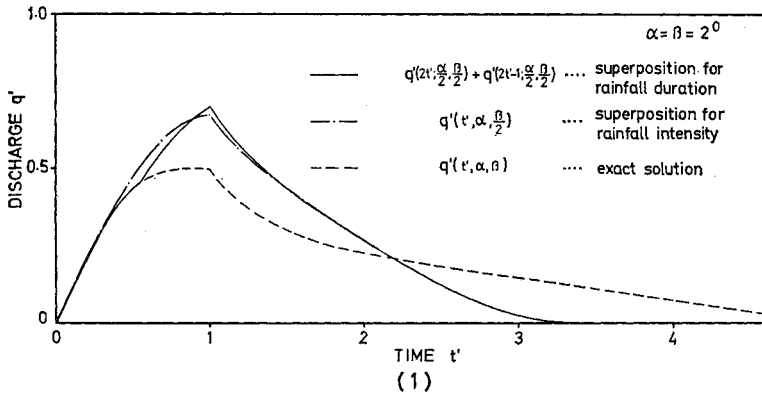


Fig. 10 Comparison of the exact hydrographs and the estimated ones according to the linearity assumption

に対して, 誤差を求めた式 (14-a, b) の両辺のハイドログラフを比較し, 誤差の原因となっている部分を比較したものが Fig. 10 である. これをみても, 確かに, ハイドログラフで基礎式の非線形性が影響している部分で誤差が生じていることがわかる.

次に Case (II) の場合について非線形効果による誤差を示したものは Fig. 11 である. この場合の誤差の分布の状態は Case (I) とほぼ同様であり, 定量的にも同程度である. 前章の議論では基礎式の非線形項は明らかに, 少なくとも下流端の影響の分だけ Case II の方が大である. にもかかわらず, 線形定数形としての非線形効果は Case I と Case II でほとんど同程度であり, かつ  $(\alpha, \beta)$  の領域によっては, かえって Case II の方が誤差が小さくなっていることもある. この理由を考えるにあたり注意しなければならないのは, ここで集中定数系としての非線形性を評価するために用いた無次元ハイドログラフにはすでに非線形効果が一部含まれていることである. すなわち, 式 (a), (b) でみると, 重ね合せの基礎になる右辺の  $q'$  がすでに非線形の影響を受けている. いいかえれば, ここで示した非線形性は, すでにそれ自身にも非線形を含んだハイドログラフを基準として, 重ね合せがどの程度可能かということ論議していることになる.

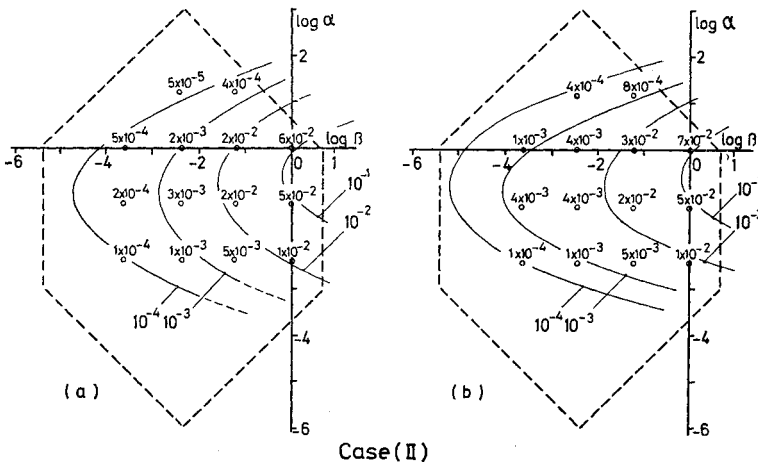


Fig. 11 Error distributions due to non-linearity for Case (II) (a:  $\epsilon_{a2}$ , b:  $\epsilon_{b2}$ )

(3) 線形仮定に伴う誤差の上昇

以上では  $r$  あるいは  $t_r$  を単に 2 倍した場合の誤差を論じた。ここでは、降雨強度、ならびに継続時間が基準の  $c$  倍になった一般の場合の誤差を考える。この場合に対する誤差  $\epsilon_{ac}$ ,  $\epsilon_{bc}$  は  $c=2$  の場合の誤差  $\epsilon_{a2}$ ,  $\epsilon_{b2}$  をもとにして以下のように評価される。

まず、「比例の仮定」を例にとり、基準の  $(\alpha_0, \beta_0)$  に対するハイドログラフから、比例仮定により、 $(\alpha_0, c\beta_0)$  なるパラメーターに対するハイドログラフを求めたときの誤差  $\epsilon_{ac}$  を考えよう。 $\beta_0 \sim c\beta_0$  間を  $n$  分割し、 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n (=c\beta_0)$  とすると  $\epsilon_{ac}$  は  $\alpha_0$  を省略すると、

$$\begin{aligned} \epsilon_{ac}^2 &= \int_0^\infty \{q'(\beta_0) - q'(c\beta_0)\}^2 dt \\ &= \int_0^\infty \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} q'(\beta_i) - q'(\beta_{i+1}) \right\}^2 dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^\infty \{q'(\beta_i) - q'(\beta_{i+1})\}^2 dt \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\infty \{q'(\beta_i) - q'(\beta_{j+1})\} \\ &\quad \times \{q'(\beta_j) - q'(\beta_{j+1})\} dt \leq \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \\ &\quad \sqrt{\int_0^\infty \{q'(\beta_i) - q'(\beta_{i+1})\}^2 dt} \\ &\quad \times \sqrt{\int_0^\infty \{q'(\beta_j) - q'(\beta_{j+1})\}^2 dt} \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{\epsilon_i^2 \cdot \epsilon_j^2} \end{aligned}$$

(ただし  $\epsilon_i^2 = \int_0^\infty \{q'(\beta_i) - q'(\beta_{i+1})\}^2 dt$ )

$$\leq \left( \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i \right)^2 \dots\dots\dots(18)$$

$$\therefore \epsilon_{ac} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i \dots\dots\dots(19)$$

ここで  $n \rightarrow \infty$  とすると、

$$\epsilon_{ac} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i = \int_{\beta_0}^{c\beta_0} \rho_a(\alpha_0, \beta) d\beta \dots\dots\dots(20)$$

と評価される。ここに  $\rho_a(\alpha, \beta)$  は線形仮定に基づく誤差の密度分布である。この  $\rho_a(\alpha, \beta)$  は  $\epsilon_{a2}$  を用いて近似的に、

$$\rho_a(\alpha, \beta) = \frac{\epsilon_{a2}(\alpha, \beta)}{\log 2} \dots\dots\dots(21)$$

と表わされる。すなわち、式 (20) の右辺は降雨強度が  $c$  倍となる一般的な場合についての線形仮定に基づく誤差の上界を示しているのである。

以上の事柄は「累加仮定」の場合についても、ほぼ同様であり、

$$\rho_b(\alpha, \beta) = \frac{\epsilon_{b2}}{\log 2} \dots\dots\dots(22)$$

として誤差密度分布  $\rho_b(\alpha, \beta)$  が定義され、それによっ

て、一般の場合についての誤差の上界が評価される。さらに比例仮定、累加仮定の両者の組合せとしての、もっとも一般的な場合についても誤差の上界は Fig. 9

ないしは、Fig. 11 を基礎にして、Fig. 12 に示す経路積分によって評価でき

る。すなわち、たとえば、重ね合せの基準となる  $\alpha$ - $\beta$  平面上、図中  $P$  点のハイドログラフをもとにして、 $r, t_r$  がそれぞれ任意数倍された流出、(図中  $Q$  点の流出) を算定したとき生ずる誤差は、Path 1, Path 2 という 2 つの経路に沿った誤差 (比例仮定、累加仮定の誤差の和) のうちその大きい方として求められる。

任意の降雨強度、降雨継続時間の場合についての線形性の誤差は上述のように評価されるが、式 (21), (22) にも示したように、その場合の誤差の密度分布が  $c=2$  の Fig. 9, 11 に示したものを基準として示されるのは興味深い。したがって、ここで議論した集中定数系としての非線形性は、 $(\alpha, \beta)$  平面、Fig. 9, 11 の原点に近い領域で大きくなり、現象が原点より離れるほど線形近似が許されうようになる。また、このような傾向の物理的な原因構造は、4. の論議で明らかにされたとおりである。特に、系が非線形性を包含している場合には、単位降雨によるハイドログラフにも非線形性が含まれていること、実際の流出ハイドログラフから算出される単位図も種々の非線形効果も含んだ平均量として得られているという事実は、流出の線形性の物理的解釈に際して留意しておくべきであろう。

6. 結 語

遅い中間流出および地下水流出を対象として、流域内単位斜面からの流出特性の分類と、非線形性について、その発生機構の把握および非線形性による誤差の定量的評価を試みた。その結果をまとめると以下に示すとおりである。

(1) 流域を構成する単位斜面の流出特性は、斜面の地形地質特性および降雨特性から導かれる 2 つの無次元パラメーター  $\alpha, \beta$  によって特徴づけられる。ここに  $\alpha$  は流出の速やかさを表現し、 $\beta$  は水深勾配の斜面勾配に対する卓越度を表わすパラメーターである。

(2) 水深分布の特徴は以下のようにまとめられる。

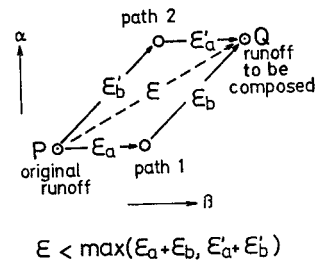


Fig. 12 Explanation of the error-evaluation for the linearity assumption (general cases)

表一に示した Case I の境界条件の場合、 $\alpha \geq 1$  に対しては、降雨継続期間中に定常状態に達し上流水深を零とする三角形分布となる。低減も速やかに移流的な現象が卓越している。 $\alpha < 1$  の場合、上流を除いて上昇時は水面形は斜面に平行で、水深低減時はおもに移流による現象となる。このとき  $\beta$  が大きいと、移流速度が小さくなり、水面の曲率がゆるやかになる。

Case II の境界については、下流端に急変部が生じ、その影響は  $\beta$  が大きいほど上流側へ伝わる。また、移流速度も速くなる。

(3) 基礎式の非線形項が水面形に影響を及ぼす構造は 2 つある。1 つは、 $-\alpha\beta h'(\alpha^2 h'/\partial x^2)$  の拡散項により、水塊上流端部、および Case II では下流端に生ずる彎曲部で曲率が小さくなり、彎曲の範囲が斜面全体に広がることによるものである。いま 1 つは  $-\alpha\beta(\partial h'/\partial x)^2$  により、移流速度が小さくなることである。両者とも  $\beta$  が大きくなるとともにそれらの傾向は顕著となる。

(4) ハイドログラフの様相は次のとおりである。Case I について、 $\alpha \geq 1$  では降雨継続中にピーク値 1 に達し、終了まで続いた後立上り時と同じ傾き（時間的変化率）で速やかに低減する。 $\alpha < 1$  の場合は、降雨終了時にピーク値  $\alpha$  に達し、その後約  $1/\alpha$  の間ピーク値が維持された後低減する。このとき  $\beta$  が大きいと、水面形の変化状態に対応して、流出強度は小さく流出の尾が長びく。

Case II の場合のハイドログラフの特徴は  $\alpha < 1$  におけるピーク付近に現われる。すなわち、Case I の場合より大きな流量となり、 $\beta \ll 1$  ではすぐに Case I と同じハイドログラフに漸近するが、 $\beta$  が大きい場合には指数低減的に減少し、かえって Case I より早く流出が終る。

(5) ハイドログラフへの基礎式非線形項の影響は水深分布を通じて伝えられ、集中定数系の非線形性を示すものとして求めた単位図法に対する誤差の分布は、基礎式の非線形項の分布と定性的に一致した。

(6) さらに、単位図法に対する非線形の誤差を定量的に評価し、基礎式の非線形項がハイドログラフに非線形を引き起す構造については定性的に示すことができた。

実際の流域にあっては種々複雑な要因が介在し、地形

地質的にも大きな多様性をもっている。本研究では、単一の性質の地域を対象としたのであるが、複雑な流域では、ここでは扱わなかった確率統計的な平均化過程に伴う線形化傾向も存在しうるのであろう。ここで得られた結果を複雑な実際の流域での線形性、非線形性の議論に結びつけるためには、確率統計的な要因をも導入する必要が生まれるが、こうした問題については現在検討を進めている。

#### 参 考 文 献

- 1) 石原藤次郎・金丸昭治：降雨条件の変動による単位図の変化について，土木学会論文集，第 32 号，pp. 50~56，昭和 31 年 3 月。
- 2) 石原藤次郎・高棟琢馬：単位図法とその適用に関する基礎的研究，土木学会論文集，第 60 号，別冊 (3-3)，昭和 34 年 3 月。
- 3) 岩垣雄一・高棟琢馬：降雨および流域特性が流出関係に及ぼす効果について，京大防災研創立 5 周年記念論文集，pp. 191~200，昭和 31 年 11 月。
- 4) 高棟琢馬：洪水流出系の分析と総合に関する基礎的研究，京都大学学位論文，昭和 46 年。
- 5) 日野幹雄：情報理論的水文学の一手法，第 12 回水理講演会講演集，pp. 113~118，昭和 43 年 2 月。
- 6) 日野幹雄：情報理論的水文学の一手法 (II) 非線形流出への適用，第 13 回水理講演会講演集，pp. 103~108，昭和 44 年 2 月。
- 7) 日野幹雄：流出の非線形性について—一流出現象の質的理解への寄与，第 16 回水理講演会講演集，pp. 105~115，昭和 47 年 2 月。
- 8) 高木不折・松林宇一郎：流域水の挙動に関する変分原理の実用化とその問題点，土木学会論文報告集，pp. 31~40，昭和 53 年 6 月。
- 9) Takagi, F.: A study on the behavior of basin water by means of variational technique, Proc. JSCE, Vol. 185, pp. 71~81, Jan. 1971.
- 10) 高木不折：流域水の挙動に関する変分原理の物理的意義，土木学会論文報告集，第 227 号，pp. 27~32，1974.7.
- 11) O.C. ツィエーンキヴィッツ著，吉織雅夫・山田嘉昭監訳：基礎工学におけるマトリックス有限要素法，培風館昭和 50 年。
- 12) Childs, E.C.: Drainage of groundwater resting on a sloping bed, Water Resources Research, Vol. 7, No. 5, pp. 1256~1263, Oct. 1971.
- 13) 端野道夫：流域貯留特性に対する降雨条件の影響に関する実験的研究，第 18 回水理講演会講演集，昭和 49 年 2 月。
- 14) 高橋秀俊：線形集中定数系論，岩波講座基礎工学 6，岩波書店，昭和 45 年。

(1978.4.28・受付)