

## 確率系解析の水溫予測への適用

### STOCHASTIC SYSTEM ANALYSIS OF AIR AND WATER TEMPERATURES FOR PREDICTING WATER RESOURCES TEMPERATURE

大野 俊 夫\*・渡 辺 與 作\*\*

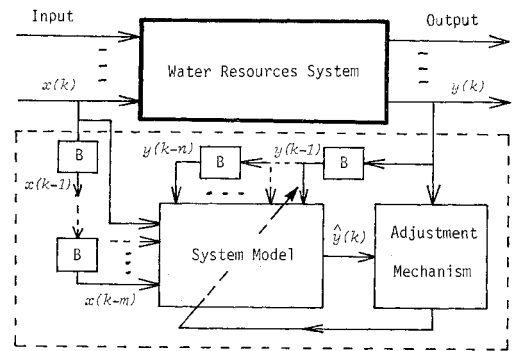
By Toshio OHONO and Yosaku WATANABE

#### 1. ま え が き

水溫は水の理化学的性質の中で重要な物理量の一つである。河川、湖沼、貯水池などの水資源系の水溫は上下水道、かんがい系の化学的性質や生物分布など多くの分野に影響を与える<sup>1)~4)</sup>。たとえば、飲料水の立場からは 9~12°C がもっともよく、5°C 以下になれば健康上好ましくなく、15°C 以上になるとまずい。また、水溫は水稻の發育上大きな要素であり農業用貯水池では水溫を考慮してできるだけ暖かい表層水を取水して利用することが必要である。したがって、その水溫の挙動と予測の研究は生活、産業上重要な意義をもち、貯水池の水の挙動の研究やその総合的調査はこの問題への重要なアプローチである<sup>5), 6)</sup>。

本論文では、少し立場を変えて、水資源系を水溫に関しては確率系(確率システム)としてとらえ、そのモデリングとモデルを使っての水溫予測に関する基礎実験および貯水池への適用例について検討する。

水資源系は地球という広大な自然システムの中のサブシステムの一つとして太陽からの輻射、空気との接触、流入・流出などによって環境との間でたえず物質とエネルギーとを不規則に交換する確率システムとしてとらえる立場に立つことにする。このシステムは物質とエネルギーを一時的に貯えることができるのでシステムの内部状態の水位、水溫などの出力は現在の環境からの入力ばかりではなく過去の入力の影響をも受けて入出力の間で遅れを生じる。ここにこれらの量の予測という問題が生じる。水資源系の水位にも関係する流出解析<sup>7)~9)</sup>および水質に關係する解析<sup>10)</sup>は近年活発であるがシステムの水溫に関する動特性推定の例は少ない<sup>11)</sup>。そこで不規則に変動する入力の一つである気温と出力としての水溫の確



図一 システムのモデリング(同定)

率的特性を時系列解析<sup>12)~18)</sup>を行ってとらえ、それからシステムの同定をし水溫予測を行う。システム同定法の文献<sup>19)~20)</sup>は多いが、本論文での同定(Identification)とは対象としているシステムの挙動に等価な数学モデルを入力と出力の観測時系列のみを基にして動特性を推定し数学モデルを確定する(モデリング)ことに限定する(図一)。

正確には水溫予測は多入力で多出力の同定問題となるが単純化して、システムへの入力信号は気温、集中化(lumping)した代表点の水溫を出力とした場合がこの問題の第1近似であるとして、システムのインパルス応答とパルス伝達関数を観測データを基にして推定する。

システムのモデルをつくる正統的な方法はシステムの物理的、化学的、生物学的知識をベースにして理論的にモデル(たとえば熱収支方程式モデルなど)を構成していくことであろう。しかし現実の規模のシステムでは、理論的展開と同時にあるいは先立って観測データの時系列からシステムの動特性をうるのが適切なアプローチであろう。このような手法をとる理由は現実のシステムをある条件の環境におくことは物理的にほとんど不可能であり動特性を推定するための試験信号を加えて応答を測定する方法は水溫については適用できないので、特に試

\* 正会員 豊田工業高等専門学校教授

\*\* 正会員 豊田工業高等専門学校助教授

験入力を加えず実際のシステムの観測データのみからシステムの動特性を推定せざるをえないからである。

実験室での水槽を利用した模型による基礎的実験を解析した後に、水温を一点で集中化できると認められた貯水池についての同定および水温予測を行った適用例を示す。

## 2. 気温と水温の時系列解析

### (1) 自己回帰モデル (AR モデル)

気温  $x(t)$  と水温  $y(t)$  の変化には日周期および年周期が存在する。しかし、この周期以外に不規則に変動する因子が存在し、これらの和として水温は不規則な変動を示す時系列をなしている。すなわち対象としているシステムは統計的に変動しているので、このシステムを統計的ダイナミックシステム (確率システム) として検討することは重要である。そこで気温と水温についてそれぞれの時系列構造を把握するため相関係数の計算とスペクトル推定を行う。離散時刻  $t_0, t_0+d, \dots, t_0+(N-1)d$  における気温を  $x(t_0), x(t_0+d), \dots, x(t_0+(N-1)d)$  また水温をそれぞれ  $y(t_0), y(t_0+d), \dots, y(t_0+(N-1)d)$  と記す。一定時間  $d$  はサンプリング時間、 $N$  は観測データ数とする。簡便のため、 $x(k)=x(t_0+k \cdot d), y(k)=y(t_0+k \cdot d)$  と記すと観測された時系列はそれぞれ  $\{x(k); k=0, 1, \dots, N-1\}$  および  $\{y(k); k=0, 1, \dots, N-1\}$  と書くことができる。システムの観測値の切片 (標本時系列)  $\{x(k)\}$  を生成する確率過程の数学モデルとして式 (1) で定義する AR モデルを利用して時系列解析をする。

$$\begin{aligned} \hat{x}(k) &= a_1 \hat{x}(k-1) + a_2 \hat{x}(k-2) + \dots \\ &+ a_p \hat{x}(k-p) + w(k) \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(k) &\triangleq x(k) - \bar{x}, \quad \bar{x} \triangleq E[x(k)], \\ E[\hat{x}(k) \cdot w(k')] &= \delta_{kk'} \end{aligned}$$

ここに、式 (1) の  $p$  は AR モデルの次数、 $w(k)$  は時刻  $t_0+k \cdot d$  における不規則因子で  $\hat{x}(k)$  とは無相関な確率変数である。次数  $p$  とシステムパラメーター  $\{a_i; i=1, 2, \dots, p\}$  は一般には未知であるので標本時系列  $\{x(k)\}$  を基にして以下のように推定する。

### (2) 自己回帰モデルのあてはめとスペクトル推定

式 (1) で定義される確率過程から生成される標本時系列  $\{x(k)\}$  の自己共分散  $C_{xx}$  と自己相関係数  $R_{xx}$  は式 (2) と (3) によって推定できる。

$$\begin{aligned} \hat{C}_{xx}(\tau) &\triangleq E[\hat{x}(k) \hat{x}(k+\tau)] \\ &= (1/N) \sum_{k=1}^{N-|\tau|} (x(k) - \bar{x})(x(k+\tau) - \bar{x}) \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{xx}(\tau) &\triangleq \hat{C}_{xx}(\tau) / \hat{C}_{xx}(0) \\ &(\tau=0, 1, 2, \dots, L) \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

同様に式 (4) と (5) も定義する。

$$\hat{C}_{yy}(\tau) \triangleq E[\hat{y}(k) \hat{y}(k+\tau)] \dots \dots \dots (4)$$

$$\hat{C}_{xy}(\tau) \triangleq E[\hat{x}(k) \hat{y}(k+\tau)] \dots \dots \dots (5)$$

式 (1) の両辺に  $\hat{x}(k-\tau)$  をかけて平均をとり、式 (2) を考慮すると、

$$\begin{aligned} \hat{C}_{xx}(\tau) &= a_1 \hat{C}_{xx}(\tau-1) + a_2 \hat{C}_{xx}(\tau-2) + \dots \\ &+ a_p \hat{C}_{xx}(\tau-p) \\ &(\tau=1, 2, \dots, p) \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

を得る。これは  $\{a_i; i=1, 2, \dots, p\}$  を未知数とする  $p$  元一次連立方程式 (Yule-Walker 方程式) で、式 (6) を解いてシステムパラメーターの推定値  $\{\hat{a}_i; i=1, 2, \dots, p\}$  を求める。

システムの次数  $p$  の決定法は多く提案されているが、本文では次の予測誤差の 2 乗平均 (FPE)

$$FPE(\tau) \triangleq E[\{\hat{x}(k) - \sum_{i=1}^{\tau} \hat{a}_i \hat{x}(k-i)\}^2] \dots \dots (7)$$

を最小とする  $\tau$  を最良の次数  $p$  とする<sup>13)</sup>。次数  $\tau$  の AR モデルの FPE( $\tau$ ) の推定値は式 (8) を使う。

$$FPE(\tau) = \hat{S}_\tau^2 \cdot (N+\tau-1) / (N-\tau-1) \dots \dots (8)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_\tau^2 &\triangleq (1/N) \sum_{k=1}^N \{\hat{x}(k) - \sum_{i=1}^{\tau} \hat{a}_i \hat{x}(k-i)\}^2 \\ &= \hat{C}_{xx}(0) - \sum_{i=1}^{\tau} \hat{a}_i \hat{C}_{xx}(i) \\ &(\tau=0, 1, \dots, p, \dots, L) \dots \dots (9) \end{aligned}$$

この最良次数  $p$  の場合の式 (6) を解いて得た  $\{\hat{a}_i; i=1, 2, \dots, p\}$  を用いてスペクトル密度の推定値  $\hat{P}_{xx}$  を式 (10) を使って推定できる。

$$\begin{aligned} \hat{P}_{xx}(f) &= 2 \hat{S}_p^2 / |1 - \sum_{i=1}^p \hat{a}_i \exp(-j 2 \pi i f)|^2 \\ &(0 \leq f \leq 1/2) \dots \dots (10) \end{aligned}$$

式 (1) の AR モデルを使った  $d$  時間先の予測器として式 (11) の予測器を使用する。

$$\begin{aligned} \hat{x}(k) &= \hat{a}_1 \hat{x}(k-1) + \hat{a}_2 \hat{x}(k-2) + \dots + \hat{a}_p \hat{x}(k-p) \\ &\dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

### (3) システムの特性方程式と周期成分<sup>15)</sup>

システムのモデル式 (1) は推移演算子  $B: x(k-1) = Bx(k), x(k-2) = B^2x(k), \dots$  を導入すると式 (12) となる。

$$\left. \begin{aligned} \phi(B)x(k) &= w(k) \\ \phi(B) &\triangleq 1 - a_1 B - a_2 B^2 - \dots - a_p B^p \\ &= \prod_{j=2k+1}^p (1 - G_j B) \prod_{j=1}^k (1 - G_j B) (1 - G_j^* B) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

方程式  $\phi(B)=0$  をシステムの特性方程式といい、その根が単位円の外部に全部あるときシステムは定常である。ここに、 $G^*$  は  $G$  と共役な複素数で、自己相関係数  $R_{xx}$

の中で次の式 (13) のような減衰する振動成分となる.

$$A_j d_j^l \sin(2\pi f_j l + \theta_j) \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $d_j$  は  $j$  番目の減衰定数で  $d_j=1$  のとき減衰しない正弦波となる. これらの定数はそれぞれ

$$d_j = \sqrt{-a_{2j}}, \quad f_j = (1/2\pi) \cdot \cos^{-1}(a_{1j}/2d_j) \dots\dots\dots (14)$$

を使って計算できる. ただし、 $a_{1j}, a_{2j}$  は  $(1-G_j^*B)(1-G_jB) = (1-a_{1j}B - a_{2j}B^2)$  の関係を満足するものである.

### 3. システムのインパルス応答と水温予測

#### (1) 相関法によるシステムの同定

システムへの入力(気温)を  $x(k)$ , 同時刻の出力(水温)を  $y(k)$  とする. システムの数学モデルとして,

$$y(k) = \sum_{m=0}^n g(m) \cdot x(k-m) + w(k) \\ = [g(0) + g(1)B + \dots + g(n)B^n]x(k) + w(k) \\ = G(B)x(k) + w(k) \dots\dots\dots (15)$$

の線形の入出力関係を仮定する. ここに、 $g(m)$  ( $m=0, 1, 2, \dots, n$ ) はシステムのインパルス応答で未知、 $w(k)$  はレムナントと称する出力成分で  $x(k)$  とは無関係である. 式 (15) を連立方程式にして直接に  $g(m)$  を定めることも可能であるが誤差が入りやすいので、相関係数を使って  $w(k)$  の影響を平均化して  $x$  による応答成分のみ  $g(m)$  の形で抽出する相関法による同定法がすぐれている. すなわち、Winer-Hopf の積分方程式を離散値化した  $n+1$  元連立一次方程式 (16) を解いて  $\hat{g}(m)$  ( $m=0, 1, \dots, n$ ) を推定する.

$$\hat{C}_{xy}(k) = \sum_{m=0}^n \hat{g}(m) \hat{C}_{xx}(k-m) \quad (k=0, 1, \dots, n) \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 $\hat{C}_{xx}$  と  $\hat{C}_{xy}$  はそれぞれ式 (2) と (5) を使って観測データ  $x$  と  $y$  から推定できる.  $n$  の値はインパルス応答が十分に整定するまでの時間 ( $n \cdot \Delta$ ) 程度に大きく選ぶ.

これは 図-1 で水温  $y$  の回帰をしないモデルで、本文ではこの数式モデルをインパルス応答モデルという.

システムのステップ応答  $R(k)$  を式 (17) で定義する.

$$\hat{R}(k) = \sum_{m=0}^k \hat{g}(m) / \sum_{m=0}^n \hat{g}(m) \quad (k=0, 1, \dots, n) \dots\dots\dots (17)$$

#### (2) インパルス応答モデルによる水温予測

式 (16) はモデルの式 (15) の予測誤差

$$d_y(k) \triangleq y(k) - \sum_{m=0}^k \hat{g}(m) \cdot x(k-m)$$

の2乗平均値を最小にするように  $\hat{g}$  を決定するという汎関数の極値問題の解を与える. よってシステムの同定の結果  $\hat{g}$  を使ってシステムの時刻  $k$  から  $l$  単位先の未来値  $\hat{y}(k+l)$  を  $k$  までの観測値  $x(k), x(k-1), \dots, x(k-n)$  を使って推定する予測器として式 (18) を採用する.

$$\hat{y}(k+l) = x(k) \sum_{m=0}^{l-1} \hat{g}(m) + \sum_{m=l}^{l+n} \hat{g}(m) x(k+l-m) \dots\dots\dots (18)$$

予測誤差の評価関数として式 (19) を使う.

$$V(l) = \sum_{k=n+1}^{N-1} [y(k+l) - \hat{y}(k+l)]^2 / (N-n-1) \quad (l=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (19)$$

### 4. パルス伝達関数モデルと水温予測

#### (1) システムの逐次同定(カルマン・フィルター法)

インパルス応答モデルを一般化したモデルとして次の定差方程式 (20) を考える<sup>21), 22)</sup>.

$$\left. \begin{aligned} y(k) &= - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) \\ &\quad + \sum_{i=0}^m b_i x(k-i) + w(k-1) \\ C(B)y(k) &= D(B)x(k) + w(k-1) \\ C(B) &\triangleq 1 + a_1 B + \dots + a_n B^n \\ D(B) &\triangleq b_0 + b_1 B + \dots + b_m B^m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

これをパルス伝達関数モデルという. このシステムパラメーター  $\{a_i\}, \{b_i\}$  を推定するのに式 (20) を以下のようにベクトル形に変形する.

$$\mathbf{M}(k-1) \triangleq [y(k-n) \dots y(k-1) | x(k-m) \dots x(k)] \\ \mathbf{h}^T(k-1) \triangleq [-a_n \dots -a_1 | b_m \dots b_0]$$

$k$  を  $k+1$  と置換し  $z(k) = y(k+1)$  とおくと式 (20) はベクトル形の式 (21) と書ける. また、システムのパラメータ  $\mathbf{h}$  の遷移方程式はシステムが定常なら式 (22) となる.

$$z(k) = \mathbf{M}(k) \mathbf{h}(k) + w(k) \dots\dots\dots (21)$$

$$\mathbf{h}(k+1) = \mathbf{h}(k) + \mathbf{v}(k) \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 $\mathbf{v}(k)$  はシステムのパラメーター  $\mathbf{h}$  の逐次修正項で、予測式 (21) による推定値と観測値との誤差の2乗平均を最小にするように  $\mathbf{v}(k)$  を定めることができる(カルマン・フィルター). そこでカルマン・フィルターのアルゴリズムを式 (21) および (22) に適用し、システムの最適なパラメーター  $\mathbf{h}$  を逐次推定する. すなわちシステムの同定ができるので以下にそのアルゴリズムを記す<sup>8), 22), 23)</sup>. 式 (23) の右辺の第2項が  $\mathbf{v}(k)$  を計算する式である.

$$\hat{\mathbf{h}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{h}}(k|k) + \mathbf{K}(k+1) [z(k+1)$$

$$-M(k+1)\hat{h}(k|k] \\ (k=0, 1, 2, \dots) \dots \dots (23)$$

$$K(k+1) \triangleq P(k+1|k)M^T(k+1) \\ \cdot [M(k+1)P(k+1|k)M^T(k+1) \\ + Q(k+1)]^{-1} \dots \dots \dots (24)$$

$$P(k+1|k) \triangleq \text{cov}[h(k+1) - \hat{h}(k+1|k)] \\ = P(k|k) + R(k) \dots \dots \dots (25)$$

$$P(k+1|k+1) \triangleq \text{cov}[h(k+1) - \hat{h}(k+1|k+1)] \\ = [I - K(k+1)M(k+1)]P(k+1|k) \\ \dots \dots \dots (26)$$

ここに、 $I$  は単位行列、

$$Q(k) \triangleq \text{cov}[w(k)], \quad R(k) \triangleq \text{cov}[v(k)]$$

である。繰り返し式 (23) の  $\hat{h}(k|j)$   $k \geq j$  は測定値  $z(j), \dots, z(1)$  が与えられたときの  $h(k)$  の最適推定値を表わしている。すなわち、

$$\hat{h}(k|j) \triangleq E[h(k)|z(j), \dots, z(1)]$$

計算開始時には  $\hat{h}(0|0)$  と  $P(0|0)$  は与えなくてはならない。

(2) 水温の予測とシステムの次数

システム・パラメーター  $\hat{h}$  の推定ができると、次のようにシステムの水温予測ができる。

$$\hat{y}(k+1) = M(k)\hat{h}(k) \\ = -\sum_{i=1}^n \hat{a}_i y(k-i) + \sum_{i=0}^m \hat{b}_i x(k-i) \\ \dots \dots \dots (27)$$

予測の評価には式 (19) の形を採用する。この予測式は次数  $n$  と  $m$  の値によってその精度は変化する。その理由は  $n$  と  $m$  が真の値より大きくなると  $a_i$  と  $b_i$  の偶然誤差を増加させるので必要最小限の  $n$  と  $m$  をそれぞれ決定する問題が残る。ここでは式 (19) を評価関数として、 $n$  と  $m$  を変化させ、 $V(n, m)$  を最小にする  $n$  と  $m$  を最良の次数とする。

5. データの集録

(1) 矢作川水系の概要

矢作川は、愛知県下の三大河川の一つに数えられる大河川で、その最上流部支流上村川は中央アルプスの南端大川入山 (標高 1908 m) に源を発し、長野県下伊那郡地方から岐阜県恵那郡を経て、愛知県北設楽郡との境に達し、両県境を西に流れ西加茂郡から愛知県に入り、南下して豊田市、岡崎市、西尾市を経て三河湾に注いでいる。

川の性状は非常におだやかで、沿岸平野部は古くから

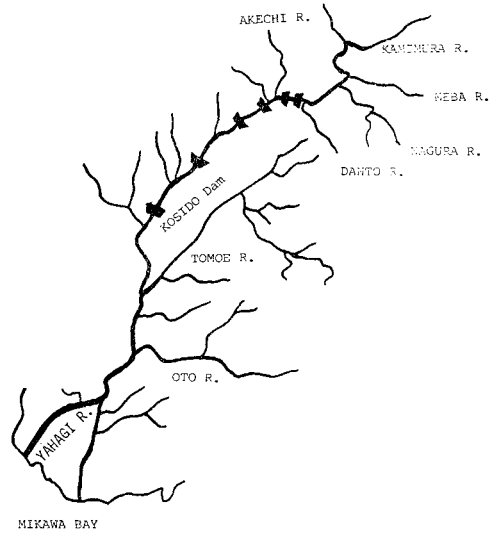


図-2 矢作川水系略図

農業に利用され、約 17 000 ha が矢作川によってかんがいされている。図-2 に矢作川水系の略図を示す。

幹川の全長は 123 km で、支流には根羽川、名倉川、段戸川、巴川、乙川などがあり、明治用水の供給河川としても知られている。西尾市の北部で旧本流の矢作古川が分かれているが、現在の本流は水運の便のため 1605 年 (慶長 10 年) ここから碧海台地を開削して新河道を作ったものである。舟運は、碧南市内の大浜港から岡崎城下を経て越戸まで通じていたが、陸上交通の発達で消滅した。

本水系の流域面積は、約 1 906 km<sup>2</sup> で全体として北東から南西に菱形に長く、上流は花崗岩系の地質からなり、風化した砂が推積して下流では天井川になっている。年間降水量は、中部地方としては比較的少なく、下流部で 1 500 mm、上流部で 2 000 mm 内外であり、計画高水流量は岡崎市で 4 800 m<sup>3</sup>/s である。そのため降水をむだなく利用するため要所にダムが設けられている。

本論文の測定値を得た越戸ダムは、重力式コンクリートダムで、頂長 120.2 m、高さ 18.3 m、テンターゲート 12 門があり測定期間内の平均流量は 16.0 m<sup>3</sup>/s、同平均水深は 3.2 m、同利用水深は 0.5 m、貯留量は 5.08 × 10<sup>9</sup> m<sup>3</sup> であった。図-3 に越戸ダム貯水池横断面を示す。

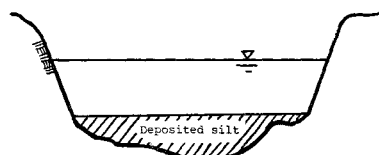


図-3 越戸ダム貯水池横断面図

(2) サーミスタ式温度記録計

気温と水温の連続記録にはサーミスタ式温度記録計を使用した。これは 12 点の温度センサーを接続でき、順次切換スイッチ操作により温度を連続記録できる。その許容差はフルスケールで 0.3% であり、 $\pm 0.12^{\circ}\text{C}$  以内の精度である。使用前に標準温度計を使って温度記録計の校正をしてからセットした。このサーミスタセンサーの時定数は水中で約 10 秒、空気中で数分であったので今回の実験の温度計としては十分の即応性をもっている。

(3) サンプリング時間とデータ数

測定データのもっている本来の性質を失うことなく、システムの特性を正確に把握するにはデータのサンプリング時間  $\Delta$  とデータ数  $N$  を正しく決める必要がある。たとえば水槽実験や小河川の水温はその時定数は比較的小さいので  $\Delta$  は小さく、また、大河川や貯水池は時定数が大きいと予想されるので  $\Delta$  は大きくとるべきことは直観的に理解できる。

記録されたデータは不規則であるが日周期も認められることから 1 日を周期とする周期成分が最高の周波数であることが推察される。そこで、その周期を  $T_1$ 、振幅を  $x_0$  とすると入力の変動成分は式 (28) と書ける。

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \theta), \quad \omega = 2\pi/T_1 \dots\dots\dots (28)$$

この自己相関係数  $R_{xx}(\tau)$  は式 (29) である。

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_0 \sin(\omega t + \theta) \cdot x_0 \sin(\omega(t+\tau) + \theta) dt \\ &= (x_0^2/2) \cos \omega\tau - [(x_0^2/4) \omega T \cdot \sin 2\omega T \cdot \cos(\omega\tau + 2\theta)] \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

$T$  が有限の場合はかっこ内の誤差が入ってくるのでこれを  $\epsilon$  とかくと、 $\epsilon \leq x_0^2/4 \omega T$  であるので  $R_{xx}(\tau)$  の 1 周期  $2\pi/\omega$  ごとに  $1/2 \omega T$  の相対誤差が入ってくる。それを 5% 以下にするためのデータ長  $T$  を求めてみると、 $1/2 \omega T \leq 0.05$  であればよいので、 $T \geq 1.6 T_1$  とすればよい。サンプリング時間  $\Delta$  はシステムの整定時間  $T_s = n \cdot \Delta$  の  $1/20$  程度にとれば十分であるので、 $T_s$  が 4 時間なら  $\Delta = 10$  分程度、 $T_s$  が 60 時間なら  $\Delta = 3$  時間程度にサンプリングすればよい。

6. 水槽模型実験と貯水池における実験の結果

実際の貯水池のシステム同定を実施する前に、水槽実験を行った。以下に水槽実験によって上述した解析法を確認し、そして越戸ダムでのシステム同定と水温予測を

表-1 水槽によるモデル実験と条件

実験 No.	水量 (kg)	水深 (cm)	実験日数	備考
A-0	3.5	2.8	1	屋内でステップ応答を測定
A-1	3.5	2.8	5	屋内実験
A-2	3.5	2.8	32	屋外実験 (5月28日~6月29日)
B-0	72.5	29.0	2	屋内でステップ応答を測定
B-1	72.5	29.0	32	屋外実験 (A-2と同じ条件)

行うことにする。水資源系にみためた水槽 A と B の水温および気温を測定した。水槽 A, B とも硬質塩化ビニール製でそれぞれ  $38 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} \times 13 \text{ cm}$  と  $50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$  の大きさである。水槽実験は表-1 に示した 5 種類について行った。水槽 B は水槽内に温度差があることも予想されたので 5 点の水温を記録させたがその差は最大でも  $0.2^{\circ}\text{C}$  と小さく、ほとんど差は認められず一点で代表してもよいことがわかった。越戸ダムでの測定点は取水口で行った。観測時期は昭和 52 年 5 月 28 日から 6 月 29 日までの 1 か月であった。一般には夏・秋に水温躍層が生じると考えられる。そこで、測定前にダムの上流 50 m と 100 m で各 3 点ずつ計 6 点の水深方向の温度を測定したがその差はほとんど認めることはできず、最大の差は  $0.5^{\circ}\text{C}$  であった。よってシステムの水温を 1 点で代表させることにした。

(1) 気温と水温の時系列解析結果と予測結果

図-4 に水槽実験 B-1 の記録時系列の一部を示す。これから気温はだいたい 1 日を周期とする基本波成分に不規則成分が重なってランダムに変動し、これに少し遅れて水温が追従して変動していることがわかる。これを詳細にみるために気温と水温の時系列解析の結果を以下に記す。図-5 と 図-6 には気温と水温の自己相関係数  $\hat{R}_{xx}$ ,  $\hat{R}_{yy}$  と相互相関係数  $\hat{R}_{xy}$  の例を示す。気温と水温は日周期をそれぞれ示し、水温は気温に比べ数時間の遅れを保っていることがわかる。式 (12) の特性方程式を解いて求めた周期  $T_j = 1/f_j$  も表-2 に示したように  $T_1 \approx 24$  時間となっている。これ以外に、 $T_2 \approx 1$  週間

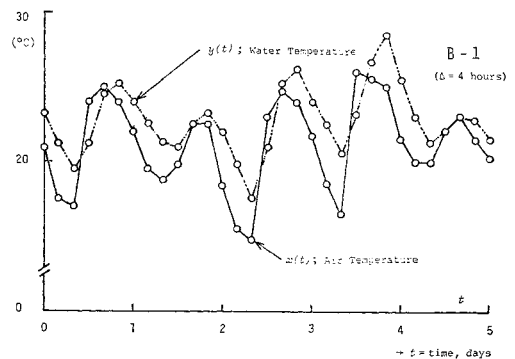


図-4 気温と水温の時系列 (B-1)

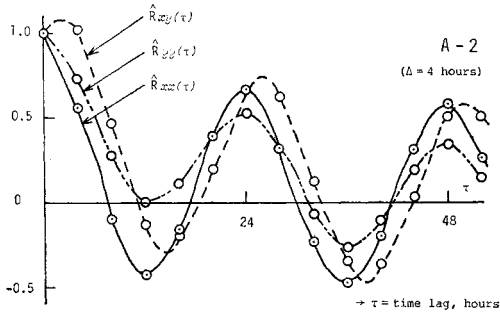


図-5 気温と水温の相関係数 (A-2)

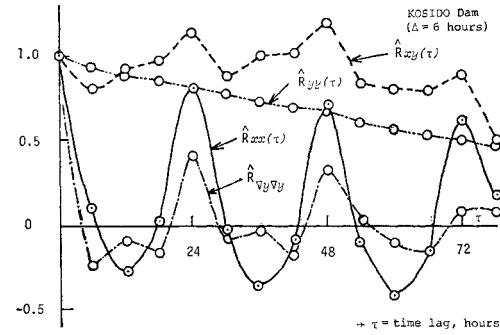


図-6 気温と水温の相関係数 (越戸ダム)

の周期も認められた。

表-2 に自己回帰モデルのあてはめの結果の一部をまとめた。たとえば実験 A-2 で、サンプリング周期  $\Delta$  を 2 時間としてあてはめを行った場合にシステムの次数  $p$  が 13 次ということは、水温が  $2 \times 13 = 26$  時間前までの水温の回帰関係で説明されることを示している。この関係は  $\Delta$  を 6 時間とした場合もほぼ同じ ( $5 \times 6 = 30$  時間) である。また、 $FPE(p)$  の平方根としてえた AR モデルの予測誤差は、A-2 の実験 ( $\Delta = 2$  時間) では、 $1.13$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) である。

予測法が一番簡便なのは、予測値  $\hat{x}(k)$  が現在値  $x(k-1)$  と同じであるとする方法であろう。この予測法の予測誤差  $\delta$  を式 (19) と同様の次式で評価して AR モデルのそれと比較してみる。

表-2 自己回帰モデルのあてはめと予測結果

時系列	気 温		水 温		水 温	
	A-2	A-2	B-1	B-1	気 温	水 温
$\Delta$ (時間)	2	2	6	2	6	6
$N$	382	382	127	382	127	95
平均値 ( $^{\circ}\text{C}$ )	21.84	22.81	22.81	23.79	23.79	12.78
標準偏差 ( $^{\circ}\text{C}$ )	3.75	3.66	3.73	3.10	3.21	4.23
次 数 $p$	11	13	5	14	5	9
$T_1$ (時間)	23.91	23.79	23.85	23.89	23.97	23.99
$d_1$	0.97	0.98	0.96	0.98	0.94	0.98
$T_2$ (時間)	5.54	6.00	166.8	122.5	125.8	170.0
$d_2$	0.82	0.87	0.70	0.92	0.79	0.80
$\sqrt{FPE(p)}$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	2.32	1.13	2.49	0.71	1.86	2.62
$\sqrt{FPE(p)_f}$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	2.33	1.11	2.17	0.65	1.90	2.73
$\delta$	2.85	1.95	4.79	1.22	3.31	4.56

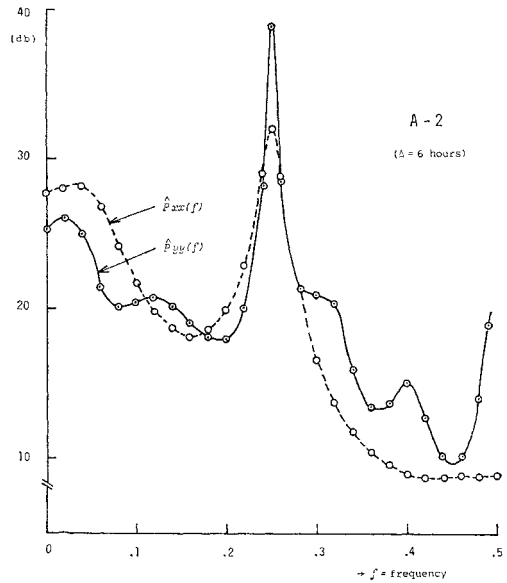


図-7 気温と水温のパワースペクトル (A-2)

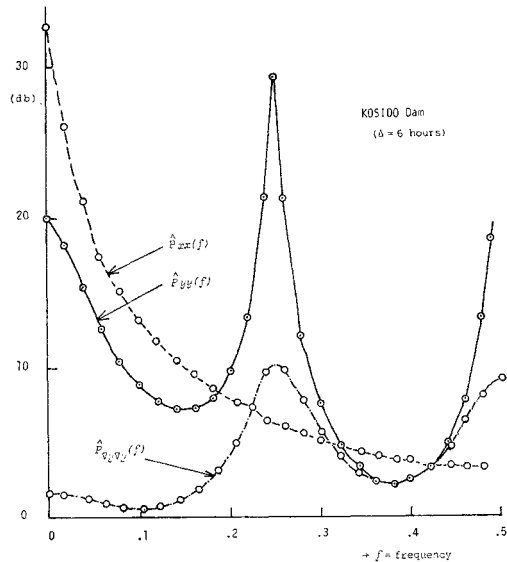


図-8 気温と水温のパワースペクトル (越戸ダム)

$$\begin{aligned} \delta^2 &\triangleq E[\{x(k) - \hat{x}(k)\}^2] \\ &= \sum_{k=p+1}^{N-p} \{x(k) - x(k-1)\}^2 / (N-p-1) \\ &\dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

この A-2 の実験では  $\delta = 1.95^{\circ}\text{C}$  であった。AR モデルの予測誤差はこれより小さい  $1.13$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) であるので、その予測の効果を認めることができる。これらの関係は他の実験の場合にも認められる (表-2)。

図-7 と図-8 には、AR モデルのパラメーター  $\{a_i\}$  を使い式 (10) で計算したスペクトル密度を、気温と水温時系列についてそれぞれ

示す。図-7を検討すると、気温および水温とも表-2の特性方程式から計算した周期  $T_i$  に一致したピーク 23.97 と 125.8 時間) をもって変化していることがわかる。また、空気とシステムとの間のエネルギー移動という観点からみると、水システムは気温の周期成分のうち短い時間の周期成分は低減させ長い周期成分は低減しにくい低周波フィルター(平滑化フィルター)の特性を示している。図-8の越戸ダムの場合も同様の変化を示しているが、水温の時系列のスペクトルは日周期成分を示さない。しかし、式(31)の差分  $\nabla y(k)$  をとってからのスペクトルを  $P_{\nabla y \nabla y}(f)$  と記すと、これは日周期(24.01時間)を示すことがわかった。

$$\nabla y(k) = y(k) - y(k-1) \dots \dots \dots (31)$$

このことは式(31)のデジタルフィルターを通してから  $R_{yy}$  を推定した場合にもいえることで、図-6に示したように日周期の存在を示している。これは、システムの容量が比較的大きいため長周期の変動成分におさえられていたのが低周波カットされて、日周期成分の存在が強調されたためである。ここに系列の差分  $\nabla y$  をとることはトレンド(長期的変化傾向)を除去することを意味しているので、図-8の  $\hat{P}_{\nabla y \nabla y}$  に示すように長期周期成分のパワーはもちろん低減している。このような場合には差分に対しARモデルを適用した方が良好な予測結果を得た。たとえば越戸ダムの場合、差分をとらないときの予測誤差  $\sqrt{FPE(\hat{p})}$  は  $0.66^\circ\text{C}$ 、差分をとってからの適用の予測誤差  $\sqrt{FPE(\hat{p})}_p$  は  $0.39^\circ\text{C}$  となった(表-2)。

(2) インパルス応答の推定結果と水温予測

図-9に水槽実験 A-2 の場合のインパルス応答  $g(t)$  を式(16)によって推定した結果を示す。この  $\hat{g}(t)$  の形は式(32)の一次遅れ系のインパルス応答の形と似ている。

$$g(t) = (K/T_a) \cdot \exp(-t/T_a) \dots \dots \dots (32)$$

ここに、 $T_a$  はシステムの時定数である。そこで図-9の関係を片対数グラフにしてみると、図-10に示すように直線となるので  $\hat{g}(t)$  は式(32)の形であると考えてよいであろう。この直線の勾配から時定数  $T_a$  を推定してみると  $T_a=70$  分となった。図-9には水槽実験 A-1 の結果も示してある。この結果  $\hat{g}$  は  $T=5$  日のデータを用いてえたのでばらつきは大きいですが、式(32)の形は同じで、この  $T_a$  は  $T_a=75$  分であった。

図-11にはステップ応答  $R(t)$  の推定を式(17)で行った結果を示す。ここに実験 A-0 は水槽 A を使って  $R(t)$  を恒温実験室で測定した結果で、理論との比較に便利な規格化:  $\hat{R}(t) = R(t)/R(\infty)$  を行ったものである。この恒温実験室の気温は  $17 \pm 0.2^\circ\text{C}$  に制御されてい

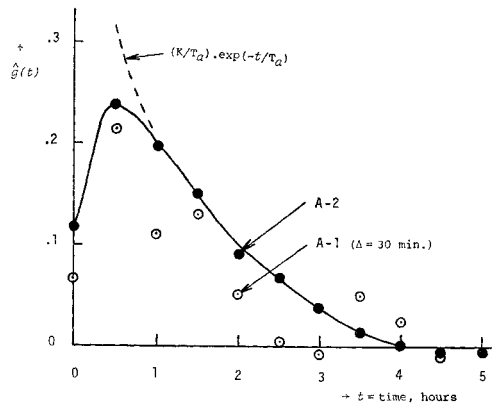


図-9 水槽モデル A のインパルス応答

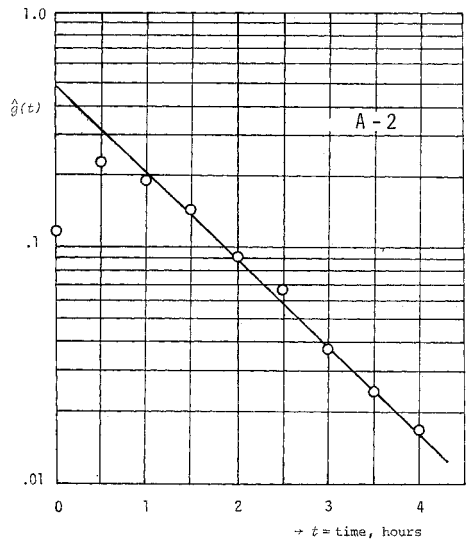


図-10 水槽モデル A のインパルス応答

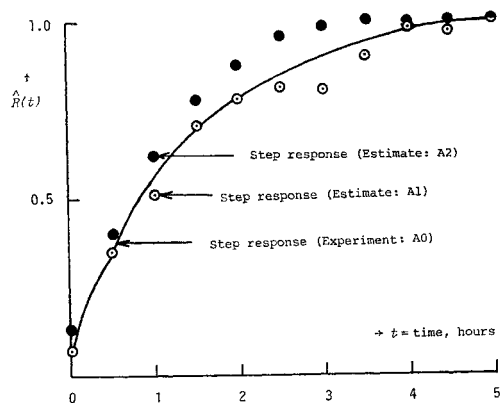


図-11 水槽モデル A のステップ応答

た。この室内へ水槽 A (水温  $2.5^\circ\text{C}$ ) を入れて水温が  $17^\circ\text{C}$  の一定値になるまで水温を記録したので、 $14.5^\circ\text{C}$  の温度ステップを水槽に加えたときのステップ応答を測定したことになる。この実験から計算した時定数は  $T_a =$

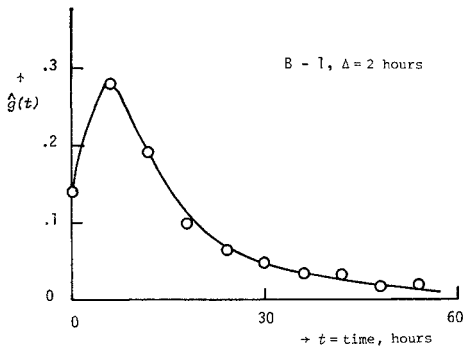


図-12 水槽モデル B のインパルス応答

75 分となった。

屋外実験 (A-2) の  $T_a$  が短い理由は、気温以外の要因、たとえば太陽の輻射がシステムに加わるため、屋内実験 (A-1) の場合は空気のみがおもにシステムとエネルギー交換を行うのでステップ応答測定 の  $T_a$  と一致したものと考えられる。

これらの事実から、ステップ信号など試験人力を用いない相関法による同定法でも水システムの動特性を正しく推定していることを確認できたといえる。

図-12 にはこの同定法を水槽 B-1 (屋外) の場合に適用した結果  $\hat{g}(t)$  を示す。水槽 A と同様の結果であるが、水槽内の水量は水槽 B の方が A より 21 倍多いので、整定時間は A が 3 時間程度であったのに比べ B は 25 時間程度と大きいことが異なる。なお実験 B-1 の測定期間は昭和 52 年 5 月 28 日から 6 月 29 日の約 1 か月であったので若干のトレンドが存在することも予想されたので直線近似をしてトレンドを除去してから同定を行った。データ長  $T$  は 32 日であるので 5. (3) で検討した  $T > 1.6 T_1$  と  $T > 1.6 T_2$  を満足しているので図-12 の同定結果  $\hat{g}(t)$  はばらつきも小さく良好な同定が行われたことを示している。ここに  $T_1$  と  $T_2$  は表-2 に示した周期である。図-13 にインパルス応答関数  $\hat{g}(t)$  による水温の予測を式 (18) を適用して行った結果を示す (水槽モデル B-1)。

これは  $\Delta=2$  時間先の水温を気温から予測させたもので、 $n=10$  とした場合であるが、システムの水温変化の基本をとらえていることがわかる。図-14 に越戸ダム貯水池の  $\hat{g}(t)$  を示す。この  $\hat{g}(t)$  の形は水槽実験と同様であるが整定時間  $T_s$  は 70 時間程度と大きく、水温が長期的変動を示すことを裏付けている。サンプリング時間  $\Delta$  を 6 時間としたが、このほかに  $\Delta$  を

2, 4, 8 時間にして同定した結果も同様であった。しかし、 $\Delta$  を小さくすると、 $n \cdot \Delta$  が整定時間  $T_s$  に等しい条件があるので  $n$  が大きくなって式 (16) を解くことも大変となり好ましくない。図-15 に  $\hat{g}(t)$  を使って 6 時間先の水温の予測を行った結果を示す。予測はよく基本変化をとらえている。予測誤差は  $0.41^\circ\text{C}$  であった。

貯水池の  $\hat{g}(t)$  の形はゆるやかに立上がり、なだらかな山形をして一次遅れ系の形とは異なる。この特性は一次遅れ系を直列接続した高次系の  $\hat{g}(t)$  の形に近い。

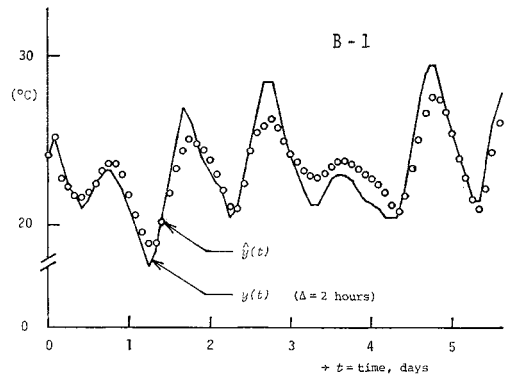


図-13 インパルス応答モデルの水温予測値と実測値の比較 (B-1)

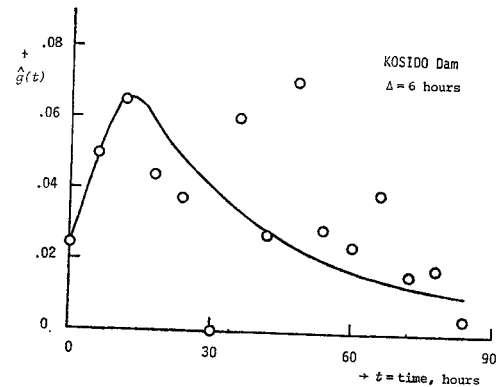


図-14 越戸ダム貯水池のインパルス応答

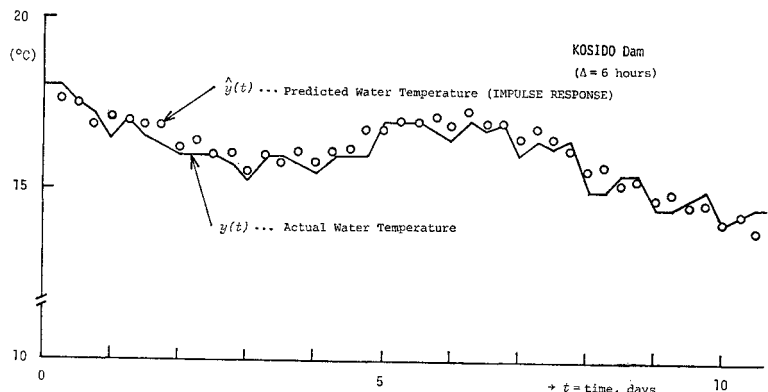


図-15 インパルス応答モデルの水温予測値と実測値の比較 (越戸ダム)



### (3) カルマン・フィルタによる水温予測

パルス伝達関数モデル式 (20) のシステムパラメータ  $h(k)$  をカルマン・フィルタのアルゴリズムで逐次推定し、式 (27) で水温予測を行った。なお先験情報はなかったので、 $\hat{h}(0|0)=0$ 、 $\hat{P}(0|0)=0$  として計算を始めた。モデル式 (20) の次数  $n$  と  $m$  は不明であるのでこの値を次の方法で決定した。上述の (1) と (2) の解析結果から  $4$ 、 $n$ 、 $m$  の値はおおよその値は決めることができる。しかし、詳細に決めるには  $n$  と  $m$  をパラメータにして同定しその予測誤差の分散  $V(n, m)$  を最小とする  $n$  と  $m$  を最良の次数とする。図-16 に越戸ダムの場合の  $V(n, m)$  を例示した。これから最良の次数は  $n=4$ 、 $m=4$  で  $V(4, 4)=0.132$  となった。図-16 は

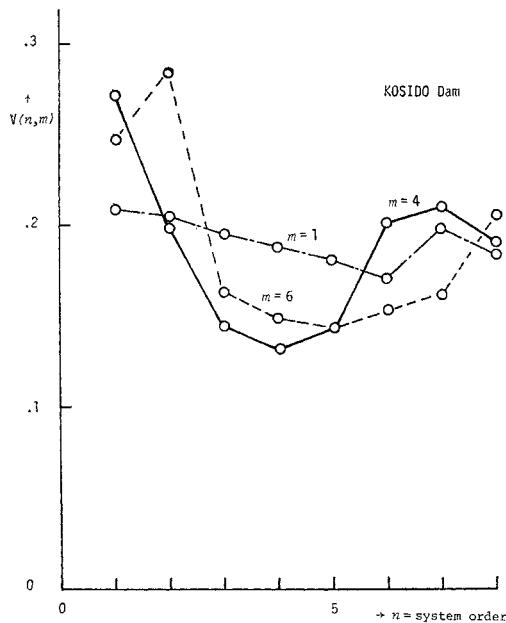


図-16 パルス伝達関数モデルの最良次数の決定

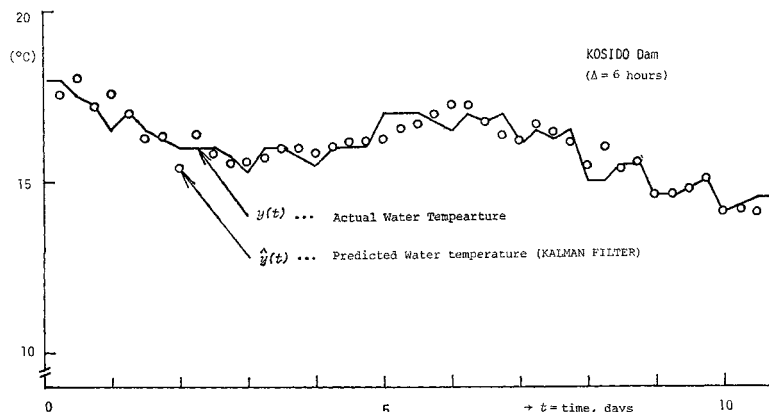


図-17 パルス伝達関数モデルの水温予測値と実測値の比較 (越戸ダム)

モデルのパラメーターを必要以上に多く仮定して予測を行うとかえって予測誤差は大きくなることを示し、最良の次数の決定も大切であることを示している。図-17 に、この最良次数  $n=4$ 、 $m=4$  を使って越戸ダムの水温の予測を、 $\Delta=6$  時間として行った結果を示す。この結果は良好な予測を行っているといえる。この予測誤差は  $0.36^{\circ}\text{C}$  であった。

以上をまとめて、越戸ダム貯水池の水温予測について 6 時間先の予測誤差を比較してみると、(1) の自己回帰モデルで  $0.39^{\circ}\text{C}$ 、(2) のインパルス応答モデルで  $0.41^{\circ}\text{C}$ 、(3) のパルス伝達関数モデルでは  $0.36^{\circ}\text{C}$  となった。予測の (3) 方法が逐次同定と精度の点からは良好な予測方法と考えられる。

## 7. 結 論

貯水池の水温を予測するにあたって、それが環境との間でたえず物質とエネルギーを不規則に交換している確率系 (stochastic system) であると認めて、システムの確率的特性を時系列解析とインパルス応答モデルなどの方法で明確にしてから水温予測法について検討を加えた。それらを要約すると次のとおりである。

(1) 空気と接しエネルギーを交換する水槽と貯水池は長時間の周期成分を通過させ、短い時間の周期成分は低減させる平滑化フィルタの特性を示す。

(2) 気温をシステムへの入力信号、水温を出力信号とするときのシステムのインパルス応答は水槽実験では一次遅れ系の形であるのに対し、貯水池の場合には高次系のインパルス応答の特性を示した。応答の整定時間は規模によって変化し、大きいと長い。

(3) システムの水温予測を自己回帰モデル、インパルス応答モデルとパルス伝達関数モデルの 3 種の方法で行った結果はいずれも良好であったが、パルス伝達関数モデルにカルマン・フィルタのアルゴリズムを適用し逐次同定して予測を行う方法が精度もよく水温予測の方法としてすぐれている。

このようなシステムの同定問題と予測法は実際のシステムを対象とした問題であるので一般論ではなく具体的なシステムの解析を意図するこの種の研究は必要で、本文では集中化 (lumping) できる規模と条件のシステムに限定したが同定結果と予測結果の良好なことなどからシ

システムの基本的特徴を実験的にとらえたと思われる。

本論文では気温と水温の基礎的關係についておもに検討した。今後このほかに考慮すべき情報には各種の気象条件（太陽輻射，風波など）と水資源系の空間的条件（幾何学的形状，貯水量，流入流出量など）に関するものが考えられる。これらの情報を考慮した場合はその予測精度の向上を期待できる。これは多入力，多出力のシステムの同定問題となる。しかしながら，解析的な制約があるので実際の水温予測への適用は限定されたものとなる。また，今回検討した貯水池の規模では入出力を集中化しても解析結果と観測結果との差異は生じなかった。

今後の研究課題としては，入出力を集中化して取扱える現象の大きさと適用範囲の検討および上記の問題となる。

なお，本文中の計算は名古屋大学大型計算機センター FACOM 230-75 と豊田高専データステーションによって行った。

謝 辞：本研究については，岐阜大学土木工学科の河村三郎教授に多くの有益なご助言をいただいた。なお，トヨタ財団の昭和 52 年度研究助成「ダム群建設に伴う自然環境の変化とその予測に関する研究（代表者，河村三郎教授）」の補助を受けた。ここに付記して謝意を表します。

#### 参 考 文 献

- 1) 吉村信吉：湖沼学（増補版），生産技術センター，昭和 51 年。
- 2) 新井 正・西沢利栄：水温論，共立出版，1974。
- 3) 合田 健・海老瀬潜一：ダム貯水池の富栄養化とシミュレーション，土木学会論文報告集，第 263 号，pp. 49～61，1977。
- 4) 安芸周一・秋元 保・志賀陽一・下田 修：貯水池水質の総合調査，第 21 回水理講演会論文集，1977。
- 5) 吉川秀夫・山本晃一：貯水池の水の挙動に関する研究，土木学会論文報告集，第 186 号，pp. 39～54，1971。
- 6) 石橋 毅・秋元 保・白砂孝夫・石川晴雄・斉藤 茂・宮永洋一：成層型貯水池内の流れと熱収支の現地観測，第 21 回水理講演会論文集，1977。
- 7) 日野幹雄：洪水予測における同定問題と適応制御について，第 15 回水理講演会講演集，1971。
- 8) 日野幹雄：水文流出系予測へのカルマン・フィルター理論の適用，土木学会論文報告集，第 221 号，pp. 39～47，1974。
- 9) 高埴琢馬・池淵周一：分布線形応答モデルによる長期流出予測，第 20 回水理講演会論文集，1976。
- 10) 市川 新：水質ハイドログラフに関する研究，第 19 回水理講演会論文集，1975。
- 11) 大野俊夫・渡辺興作：水温予測への統計的制御理論の適用，第 21 回水理講演会論文集，1977。
- 12) 森田優三：経済変動の統計分析法，岩波全書，昭和 42 年（第 9 刷）。
- 13) 赤池弘次・中川東一郎：ダイナミックシステムの統計的解析と制御，サイエンス社，昭和 47 年。
- 14) Kendall, M.G. : Time-Series. Charles Griffin, 1973.
- 15) Box, G.E.P. and G.M. Jenkins : Time Series Analysis, Holden-Day, 1969.
- 16) 中溝高好：不規則データの数学モデルと計算処理，計測と制御，14 巻 1 号，pp. 114～123，昭和 50 年。
- 17) 岸 力：線形確率過程の解析と予測，水工学シリーズ A, pp. A-6-1～27, 1975.
- 18) 長谷部正彦：Box & Jenkins の理論による非定常降水時系列の解析と予測について，土木学会論文報告集，第 261 号，pp. 59～66，1977。
- 19) 磯部 孝編：相関関数およびスペクトル，東京大学出版会，昭和 42 年。
- 20) 榎木義一・添田 喬・中溝高好：統計的自動制御理論，コロナ社，昭和 41 年。
- 21) 鈴木 胖・藤井克彦：プロセス同定問題への最小 2 乗推定法の応用，計測と制御，10 巻 8 号，pp. 563～578，昭和 46 年。
- 22) 相良節夫：同定問題，計測と制御，8 巻 4 号，pp. 268～280，昭和 44 年。
- 23) Eykhoff, P. : System Identification, John-Wiley, 1974.
- 24) Levin, M.J. : Optimum estimation of impulse response in the presence of noise, IRE. Trans. CT-7-1, pp. 50～56, 1960.
- 25) Åström, K.J. and P. Eykhoff : System identification-a survey, Automatica, Vol. 7, pp. 123～162, 1971.
- 26) 藤田睦博：線形系の解析，水工学シリーズ A, pp. A-7-1～23, 1975.

(1978.5.1・受付)