

## 等期間降水量の比の統計的特性とその雨量予測への適用

### STOCHASTIC PROPERTIES OF RATIO BETWEEN SUCCESSION RAINFALL AMOUNTS OF EQUAL DURATION AND ITS PREDICTIONAL APPLICATION FOR HEAVY RAINFALL

長尾 正志\*・梶間 津洋志\*\*

By Masashi NAGAO and Tsuyoshi KAJIMA

#### 1. 降水量の統計的予測

統計的予測は、確率的予測 (probabilistic prediction) と時系列的予測 (stochastic prediction) に大別できよう。前者は先験的情報なしに行う予測で、水工問題ではたとえば貯水池・ポンプなどの建設・配置などの基礎となる。後者は降雨観測の資料がある程度集積した後に、それに基づいて以後の予測を行う場合で、通常短期間かつ動態的なものである。具体的には、貯水池のゲート操作・排水ポンプの稼動などに対する基礎を与える。

さて、ここで対象とするのは後者の場合で、これにおいては、降水以外の気象要因をも含んだ時系列間の自己相関・相互相関が、予測の有効性に対する鍵となる。したがって、いわゆる多変数統計の理論が予測理論の基盤として重要である。しかし、一般的に、相関を考慮した多変数統計の基礎となる二変数理論にしても、正規理論以外では、理論面ならびに応用面に関して不満な点が少なくない。

降水量を含めて水文量全般で、有用性の高い非対称連続な二変数分布として、二変数ガンマ分布またはその特別な場合の二変数指数分布が挙げられる。これら二変数ガンマ分布を降水量時系列に採用して予測に役立てようとする試みは長尾・角屋<sup>1)</sup>によって行われてきたが、ここでは比の分布導出を通じて実用面への適用をはかることにする。

さて、以後雨量予測とは、ある単位期間における降水量が既知の際、それ以前の降水量時系列の情報を用いて将来値を統計的に推定することと広く解釈しておく。これには、まず直前の観測降水量から継続時点での推定が基本となる。その場合の推定には、前後の降水量の偏差を議論の対象とすることもあるが、むしろ経験的には比

の形をとって相対的表示をした方が統計的特性が明確になることが、種々の降雨強度式の表示などで活用されている知見である。

そこで、時系列としての比の分布特性がわかり、条件付変量としての比の平均値や最頻値が判明すれば、これはある確定値としての予測を行ったことになるし、またある許容範囲をもって予測するには、比の累積分布がわかればよい。しかも、この比の分布に関しては従来ほとんど経験的にしか取り扱えなかった。もし、この法則性がわかり定式的に表現できれば、それがより精密な予測に連なることはいうまでもあるまい。

このことは、たとえば検定論において、いわゆる non-parametric な推測より parametric な推測の方がずっと精度が高く、また点推定より区間推定の方が一般性があるという事実裏付けられよう。具体的には、この時系列としての比の特性を使って、時々刻々入手される観測時系列から母数推定の修正を逐次行い、以後の降雨時系列の生起する可能性のある範囲を順次推定していく手法にまで発展できるであろう。以上の意味から、比の分布を既知の理論分布族によって明確に示すことが、予測問題の理論的解明への第一段階と考えている。

#### (1) ガンマ型変量の比に関する従来の研究

ガンマ分布の水文統計上の重要性については種々の報告がある<sup>2)</sup>。一方、降水量時系列は、その差をとって相互関係を探るよりも、比の形で議論した方が整理しやすいことも経験的に知られている。そこで、二変数ガンマ型変量の比の分布が理論的に明確になれば、降雨予測への有力な手掛りとなるはずである。

さて、ガンマ分布に従う統計量の比の分布については幾つかの研究があるので概要を紹介しておく。

まず、Fisher (1924) は、二つの独立な二変数正規母集団よりランダムに抽出された二つの標本分散 (これらの分散がガンマ分布に従うことは既知である) の比の密

\* 正会員 工博 名古屋工業大学教授 土木工学科

\*\* 学生会員 名古屋工業大学工学研究科

度分布を導出し、若干の変形の後に、これが Euler の式に帰着できることを示した<sup>3)</sup>。

ついで、Bose (1935) は、相関のある二変数正規母集団の場合にも、上記の理論が拡張できることを示し、具体的な密度分布の表示、および数値実験による妥当性の検証を行った<sup>4)</sup>。

また、Finney (1938) は、Bose の理論結果を別の方法で検証し、その超過確率が不完全ベータ関数の数表から求められることを示した。さらに、身体形質について理論の適用を試み、検定としての理論の有用性を明らかにした<sup>5)</sup>。

### (2) 本研究の目的と概要

ところで、これら分散比の分布特性の研究は、分散がガンマ分布に従うことが既知であっても、きわめて間接的であって、具体的な二変数ガンマ分布の結合分布特性(すなわち形状母数、尺度母数および相関母数の特性)とどう関連付けられるかは全く不明であった。すなわち、二変数ガンマ分布で降水量時系列を近似するにしても、標本資料の統計量と比の理論分布の対応が不明確であった。そこで、以下では二変数ガンマ分布の結合分布の定義式から出発して、比の分布との直接的な関連性を明確にしようとした。以下にその内容の要約を記述しておく。

まず、2. では、形状母数の等しい二変数ガンマ型変量の比の密度分布を、その結合分布の定義式より誘導している。ついで、これを代表的な形状母数や相関母数について算出し、解析的特性を明らかにした。3. では上記密度分布がベータ分布で表示されることから、その積分を行い、若干の変換の後に、比の累積分布が一般に不完全ベータ関数比で表現できることを示し、さらに他の分布形との関連も議論した。最後に、4. で名古屋の豪雨時系列に関して、等期間降水量の比の経験分布を算出し、上記の理論分布との対応から、理論の有用性を検証した。

## 2. 二変数ガンマ型変量の比の密度分布

### (1) 比の密度分布の誘導

いま、取り扱いの対象を、降雨ピークをはさんだ後・前のある等期間内の降水量時系列を  $x_1, x_2$  のように採ると、これらは近似的に定常時系列とみなすことができる。そこで、理論の出発点を形状母数・尺度母数の等しい(共通な)二変数ガンマ分布におく。また、以下の議論は、すべて比で行うから、二変数  $x_1, x_2$  はその規準化変量  $\xi = x_1/\beta_1, \eta = x_2/\beta_2$  ( $\beta_1, \beta_2$ : 変量  $x_1, x_2$  の尺度母数) で代行して差しつかえない。これら規準化二変数

ガンマ分布の結合密度分布は次式で与えられる<sup>6)</sup>。

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\Gamma(\nu)(1-\rho)\rho^{(\nu-1)/2}} \exp\left(-\frac{\xi+\eta}{1-\rho}\right) \cdot (\xi\eta)^{(\nu-1)/2} \cdot I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{\xi\eta}\right) \dots (1)$$

$\Gamma(\nu)$ : ガンマ関数

$I_{\nu-1}(x)$ : 第一種変形ベッセル関数

$\nu$ : 形状母数

$\rho$ : 相関母数

さて、 $\xi, \eta$  の比  $\zeta = \xi/\eta$  の密度分布は、 $\xi$  や  $\eta$  が非負で定義されていることに注意すれば、次式で計算される。

$$f(\zeta) = \int_0^\infty \eta \cdot f(\zeta\eta, \eta) d\eta = \frac{\zeta^{(\nu-1)/2}}{\Gamma(\nu)(1-\rho)\rho^{(\nu-1)/2}} \int_0^\infty \eta^\nu \cdot \exp\left(-\frac{\zeta+1}{1-\rho}\eta\right) \cdot I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho\zeta}}{1-\rho}\eta\right) d\eta \dots (2)$$

ここで上式の積分を計算するのに、変形ベッセル関数のベッセル関数への変換  $I_\nu(z) = i^{-\nu} \cdot J_\nu(iz)$  ( $i$ : 虚数,  $J_\nu(z)$ : ベッセル関数)、積分公式

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cdot J_\mu(\beta x) \cdot x^{\mu+1} dx = 2\alpha(2\beta)^\mu \Gamma(\mu+3/2) / \{\sqrt{\pi}(\alpha^2+\beta^2)^{\mu+3/2}\} \quad [\text{Re } \mu > -1, \text{Re } \alpha > |\text{Im } \beta|]$$

および

$$\Gamma(2\nu) = 2^{2\nu-1} \Gamma(\nu) \cdot \Gamma(\nu+1/2) / \sqrt{\pi}$$

を使って整理すると、結局以下のようになる。

$$f(\zeta) = \frac{\Gamma(2\nu)}{\{\Gamma(\nu)\}^2} (1-\rho)^\nu \frac{\zeta^{\nu-1}(\zeta+1)}{\{(\zeta+1)^2 - 4\rho\zeta\}^{\nu+1/2}} = \frac{(1-\rho)^\nu}{B(\nu, \nu)} \frac{\zeta^{\nu-1}}{(1+\zeta)^{2\nu}} \left\{ 1 - \frac{4\rho\zeta}{(1+\zeta)^2} \right\}^{-\nu-1/2} \dots (3)$$

ただし、 $B(\nu, \nu) = \{\Gamma(\nu)\}^2 / \Gamma(2\nu)$  はベータ関数である。

ついで念のために、式(3)が密度分布となる条件を満たすことを述べる。それには、I.  $f(\zeta) \geq 0$ , II.  $F(\infty) \equiv \int_0^\infty f(\zeta) d\zeta = 1$  が成り立てばよい。I. は、 $0 \leq \rho \leq 1, \nu > 0, \zeta \geq 0$  を考えれば自明で、II. の証明の手順のみを簡単に記す。

(i)  $\rho = 0$  のとき

$$F(\infty) = \frac{1}{B(\nu, \nu)} \int_0^\infty \frac{\zeta^{\nu-1}}{(1+\zeta)^{2\nu}} d\zeta = B(\nu, \nu)^{-1} \cdot B(\nu, \nu) = 1$$

ii)  $\rho \neq 0$  のとき

$$F(\infty) = \frac{(1-\rho)^\nu}{B(\nu, \nu)} \left[ \int_0^\infty \frac{\zeta^\nu}{\{(\zeta+1)^2 - 4\rho\zeta\}^{\nu+1/2}} d\zeta + \int_0^\infty \frac{\zeta^{\nu-1}}{\{(\zeta+1)^2 - 4\rho\zeta\}^{\nu+1/2}} d\zeta \right]$$

ここで、第一種 Legendre の陪関数  $P_\nu^\mu(x)$  を含む積

分公式<sup>7)</sup>

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}}{(1+2x \cos t + x^2)^{\nu}} dx = 2^{\nu-1} (\sin t)^{-\nu+1/2} \cdot \Gamma(\nu+1/2) \times B(\mu, 2\nu-\mu) \cdot P_{\nu-1/2}^{\mu-1/2}(\cos t)$$

[Re 2ν > Re μ > 0]

や

$$P_{-1}^{\mu}(x) = P_0^{\mu}(x)$$

$$P_0^{\mu}(\cos \varphi) = \Gamma(1-\mu)^{-1} \{\cot(\varphi/2)\}^{\mu}$$

などを利用すれば、 $F(\infty)=1$  が誘導され、確かに密度分布となる条件は満足される。

なお、前提としては規準化ガンマ型変量の比が $\zeta$ であったから、次式

$$\zeta = \xi/\eta = (x_1/\beta_1)/(x_2/\beta_2)$$

から、規準化さえしておけば、必ずしも二変数  $x_1, x_2$  の尺度母数  $\beta_1, \beta_2$  は等しくなくても、上述の関係が成り立つことは明らかである。

(2) 比の密度分布の理論特性の解析

上述の比の密度分布  $f(\zeta)$  は、形状母数  $\nu$  と相関母数  $\rho$  の関数である。そこで、これら母数の代表的な値について理論特性を解析することは、以後の一般的な議論に有益と考えられる。ところで、ガンマ分布は形状母数  $\nu=1$  (指数分布) を境界として、 $0 < \nu < 1$  なら単調減少の形状、 $\nu > 1$  なら唯一の最頻値をもつ量の大きい方に尾を引いた形状と大きく相違する。したがって、以下ではそれぞれを代表して、 $\nu=1/2, 1, 2$  について具体的な密度分布の解析を行った。なお、形状母数を明示する必要があれば、 $f(\zeta) = f(\zeta; \nu)$ 、これに対して、成分分布を  $f_v(\xi)$  などと記すことにする。

(i)  $\nu=1/2$  (指数分布以上の至んだ分布) の場合  
式 (3) で  $\nu=1/2$  とおいた密度分布は次式となる。

$$f(\zeta, 1/2) = \frac{1}{\pi} (1-\rho)^{1/2} \frac{\zeta^{-1/2}(\zeta+1)}{(\zeta+1)^2 - 4\rho\zeta} \dots (4)$$

これを、 $\rho=0.0(0.1)0.9$  および  $\zeta=0.0(0.1)5.0$  で計算した概要を 図-1 に示す。図より以下のことが分かる。

1) 相関母数  $\rho$  が小さい場合には、 $f(\zeta; 1/2)$  は単調減少する。一般に  $\zeta$  が小さい ( $\zeta \ll 1$ ) と、この減少傾向はもとの成分分布のそれと相似となる。この理由は、まず式 (4) で  $\zeta \rightarrow 0$  とおくと、

$$f(\zeta; 1/2) \rightarrow (1/\pi)\zeta^{-1/2} \propto \zeta^{-1/2}$$

一方、成分分布は  $f_{1/2}(\xi) \propto \xi^{-1/2}e^{-\xi}$  であるから、 $\xi \rightarrow 0$  のとき  $f_{1/2}(\xi) \propto \xi^{-1/2}$ 、したがって  $f(\zeta; 1/2)$  と  $f_{1/2}(\xi)$  とは相似となる。

このことを降水量時系列に直して考えれば、相関が小さいと、現在の単位期間降水量に対比して、次の単位期間ではそれ以下の降水量が出現しやすく、とくに無降水量に近い状態が頻発することを意味する。

2) 相関が大きくなるにつれて、単調減少から次第に極大値が生ずるように移行していく。一方、先述のように  $\zeta$  が 0 に近い領域では、密度分布は  $\zeta^{-1/2}$  に比例するから単調減少である。そこで、 $\zeta$  の増加に伴って極小値を経て極大値に至るが、この極大値の発生し始める条件は、これら極小値と極大値の合致条件で、この合致点は当然変曲点でもある。したがって、これに対する  $\rho, \zeta$  は  $f'(\zeta) = f''(\zeta) = 0$  を連立させて解けばよい。具体的には、次の連立方程式の解で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} 3\zeta^3 + (7-4\rho)\zeta^2 + (5-12\rho)\zeta + 1 &= 0 \\ 9\zeta^2 + 2(7-4\rho)\zeta + 5-12\rho &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

これを解くと、 $\rho=0.793$ 、 $\zeta=0.401$  を得るが、以後これら数値を  $\rho_c, \zeta_c$  と記す。

すなわち、 $\rho > \rho_c$  で密度分布は極大値をもち、対応する比の値は  $\zeta > \zeta_c$  となり、この値は  $\rho \rightarrow 1$  で 1 に漸近する。また  $\rho_c$  以上の  $\rho$  に対する極大点を与える  $\zeta$  は、式 (5) の上式に対して、 $\zeta_c < \zeta < 1$  を満たす解として求められる。

降水量時系列にもどしていうと、 $\rho_c$  以上の  $\rho$  について初期降水量に比して継続期間降水量では、必ずしも少ない量が出現しやすいとは限らず、極大値付近の出現確率が、 $\rho$  の増加に伴って、増

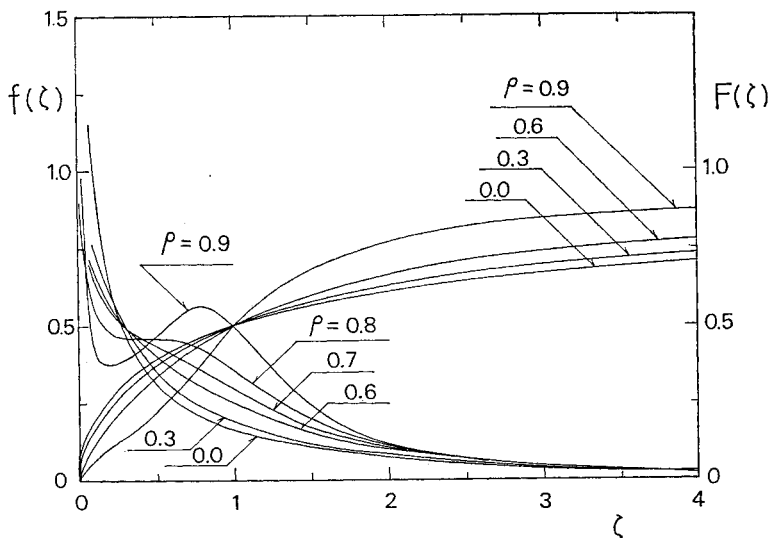


図-1 比の密度分布と累積分布 ( $\nu=1/2$  の場合)

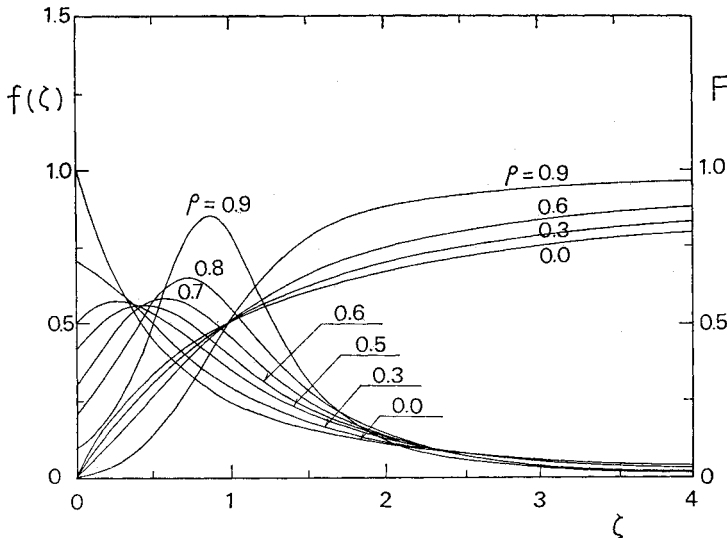


図-2 比の密度分布と累積分布 (ν=1 の場合)

大していくことを意味する。

(ii) ν=1 (指数分布) の場合

密度分布は次式のとおりで、その概要は、図-2 のようである。

$$f(\zeta; 1) = (1-\rho) \frac{\zeta+1}{(\zeta+1)^2 - 4\rho\zeta} \dots\dots\dots (6)$$

図より指数分布の場合も ν=1/2 とほぼ類似の傾向がみられる。この場合極大値を発生し始める境界の相関母数と比の値は、同様にして、ρ<sub>c</sub>=1/3, ζ<sub>c</sub>=0 となる。すなわち ν=1/2 に比べて、極大値を生ずる相関母数の範囲が拡大し、極大値の値も大きい。

次に、ν ≤ 1 と総合して、極大値の発生条件を求める。前と同様に、f'(ζ) = f''(ζ) = 0 を式 (3) に用いると、

$$\left. \begin{aligned} &(\nu+1)\zeta^3 + (\nu-3-2\rho)\zeta^2 \\ &\quad - (\nu-3+6\rho)\zeta - (\nu-1) \\ &= 0 \\ &3(\nu+1)\zeta^2 + 2(\nu-3-2\rho)\zeta \\ &\quad - (\nu-3+6\rho) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

これより限界値 ζ<sub>c</sub> を求めるには、ρ を消去して、

$$P(\zeta) \equiv (\nu+1)\zeta^4 + 6(\nu+1)\zeta^3 + 2(2\nu+3)\zeta^2 + 2(\nu-1)\zeta + 3(\nu-1) = 0 \dots\dots\dots (8)$$

の4次方程式の正根で与えられる。ζ<sub>c</sub> が (0, 1) の範囲にあることは、

$$P(0) \cdot P(1) = 3(\nu-1) \cdot 8(2+1) \leq 0$$

より明らかで、ζ<sub>c</sub>=1 は ρ=1 で

成り立つことも分かる。さらに、ζ<sub>c</sub> が既知となれば、式 (7) の下式に代入して、ρ<sub>c</sub> が次式

$$\rho_c = \{3(\nu+1)\zeta_c^2 + 2(\nu-3)\zeta_c - (\nu-3)\} / \{2(2\zeta_c+3)\} \dots\dots\dots (9)$$

で求められる。

(iii) ν=2 (唯一の極大値をもつ分布) の場合

一般に、変量が小さければ比の分布と成分分布が相似となるから、比の密度分布形が、ζ の小さい所で増加し、また唯一の極大(最頻)値をもつ様子は、図-3 より明らかである。

このように、密度分布は、ν ≤ 1 と ν > 1 で全く異なる形状を示す。

極大点の座標を、一般的な ν に関して表わすと、f'(ζ) = 0 より、

$$Q(\zeta) \equiv (\nu+1)\zeta^3 + (\nu+3-2\rho)\zeta^2 - (\nu-3+6\rho)\zeta - (\nu-1) = 0 \dots\dots\dots (10)$$

を満たす正根として求められる。

これより、ν=2 のときは、極大値の ζ は

$$3\zeta^2 + (5-2\rho)\zeta^2 + (1-6\rho)\zeta - 1 = 0$$

の根である。

なお、極大値の ζ が (0, 1) の範囲にあることは、ν > 1 では、

$$Q(0) \cdot Q(1) = -(\nu-1) \cdot 8(1-\rho) < 0$$

より明らかである。さらに、ν < 1 でも、極大値があれば、それは1以下であることは、図などより分かる。

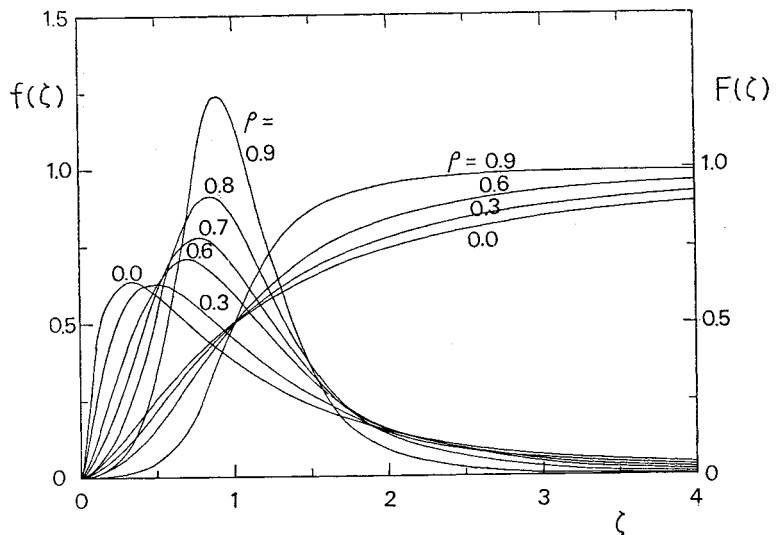


図-3 比の密度分布と累積分布 (ν=2 の場合)

### 3. 比の累積分布の不完全ベータ関数比による表示

#### (1) 密度分布のベータ分布による表示

以下、密度分布を変形していくと、一般にベータ分布の形に帰着することを示す。前出の式(3)を整理した次式から議論を始める。

$$f(\zeta) = \frac{(1-\rho)^\nu}{B(\nu, \nu)} \frac{\zeta+1}{\zeta^{3/2}(\zeta+\zeta^{-1}+2-4\rho)^{\nu+1/2}} \dots\dots\dots(11)$$

まず、 $y = \sqrt{\zeta}$  とおくと、  
 $dy = (1/2\sqrt{\zeta})d\zeta = d\zeta/2y$  ( $y \geq 0$ )

よって、 $f(\zeta)$  は次式となる。

$$f(y) = \frac{2(1-\rho)^\nu}{B(\nu, \nu)} \frac{y+y^{-1}}{y(y^2+y^{-2}+2-4\rho)^{\nu+1/2}} \dots\dots\dots(12)$$

さらに、 $t = (y-y^{-1})/(y^2+y^{-2}+2-4\rho)^{1/2}$  とおくと、若干の演算によって、

$$dt = 4(1-\rho)(1+y^{-2})\{(y-y^{-1})^2+4(1-\rho)\}^{-3/2}dy$$

また、 $t$  の変域は  $-1 \leq t \leq 1$  ( $t=+1, -1$  はそれぞれ  $y=0, \infty$  に対応) である。次に、 $t$  を二乗して整理すると、

$$y^2+y^{-2}+2-4\rho = 4(1-\rho)/(1-t^2)$$

これを式(12)に代入し、 $dt$  をも考慮して変形すると、

$$f(y)dy = \frac{1}{2^{2\nu-1}B(\nu, \nu)} (1-t^2)^{\nu-1} dt \dots\dots\dots(13)$$

すなわち、次式となる。

$$f(t) = \frac{1}{2^{2\nu-1}B(\nu, \nu)} (1-t^2)^{\nu-1} \quad (-1 \leq t \leq 1) \dots\dots\dots(14)$$

最後に、 $u = (1-t)/2$  ( $0 \leq u \leq 1$ )

とおけば、上式より

$$\begin{aligned} f(t)dt &= \frac{1}{2^{2\nu-1}B(\nu, \nu)} \\ &\cdot \{1-(1-2u)^2\}^{\nu-1} \\ &\cdot (-2du) \\ &= \frac{1}{B(\nu, \nu)} u^{\nu-1} \\ &\cdot (1-u)^{\nu-1} du \\ &\quad (0 \leq u \leq 1) \dots\dots(15) \end{aligned}$$

すなわち、上式の意味するところは、 $u$  の密度分布  $f_u(u)$  は、母数  $p, q$  をもつベータ分布の基準形

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} \\ &\cdot (1-x)^{q-1} \\ &\quad (0 \leq x \leq 1) \dots\dots(16) \end{aligned}$$

で  $p=q$  とおいた場合に相当している。

なお、 $u$  の密度分布の性質としては、 $u=1/2$  に関して対称である。また、一般に  $y=1/x$  とすれば、確率変数  $x, y$  の密度分布の間には、

$$f_y(y) = (1/y^2) \cdot f_x(1/y) \dots\dots\dots(17)$$

の関係がある。そこで、 $x=\zeta, y=1/\zeta$  と考えると、 $\zeta \leq 1$  の  $f_\zeta(\zeta)$  さえ分かれば、 $\zeta > 1$  の場合が上式で容易に求められる。

#### (2) 累積分布の不完全ベータ関数比による表示

式(15)を、 $0 \leq u \leq x$  で積分した累積分布は、

$$F_x(x; \nu) = \frac{1}{B(\nu, \nu)} \int_0^x u^{\nu-1}(1-u)^{\nu-1} du \dots\dots(18)$$

となる。上式の右辺の積分項は不完全ベータ関数と呼ばれ、以後これを次の慣用的表現に従うことにする。

$$B_x(p, q) = \int_0^x u^{p-1}(1-u)^{q-1} du \quad (0 \leq x \leq 1) \dots\dots\dots(19)$$

すなわち、ランダム変数  $u$  を  $x$  と書き直すと、累積分布は

$$F_x(x; \nu) = B_x(\nu, \nu)/B(\nu, \nu) \equiv I_x(\nu, \nu) \dots\dots(20)$$

となり、いわゆる不完全ベータ関数比  $I_x(\nu, \nu)$  で一般的に表示できる。以上のベータ関数、不完全ベータ関数、不完全ベータ関数比については詳細な数表<sup>9), 10)</sup>が準備されている。ここで、式(18)の積分上限  $x$  をもとの変数  $\zeta$  で表記すると、以下のとおりである。

$$x = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\sqrt{\zeta} - (\sqrt{\zeta})^{-1}}{\{(\sqrt{\zeta} + (\sqrt{\zeta})^{-1})^2 - 4\rho\}^{1/2}} \right] \dots\dots(21)$$

この変換の性質を調べておく。まず、極限的な相関母数  $\rho$  に対して、

$$\rho \rightarrow 0 \text{ のとき } x = 1/(\zeta+1)$$

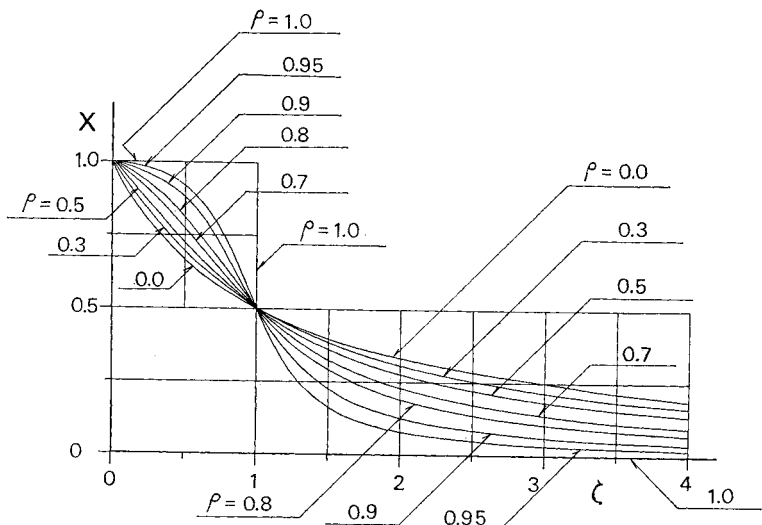


図-4 比  $\zeta$  のベータ分布変数  $x$  への変換

$$\rho \rightarrow 1 \text{ のとき } x = \begin{cases} 1, & (\zeta \leq 1) \\ 0, & (\zeta > 1) \end{cases}$$

また、 $\rho$  の値にかかわらず、 $\zeta=1, x=0.5$  を通る。これらの概要は 図-4 のとおりである。

次に、以上の変換を通して、 $x$  の累積分布  $F_x(x; \nu)$  と比の累積分布  $F_\zeta(\zeta; \nu)$  の対応をみる。とくにランダム変数は区別して太字で、また指定値は普通の字体で示す。

$$\begin{aligned} F_x(x; \nu) &= P_r\{0 \leq x \leq x\} = P_r\{t \leq t \leq 1\} \\ &= P_r\{y \leq y \leq +\infty\} = P_r\{\zeta \leq \zeta \leq +\infty\} \\ &= 1 - F_\zeta(\zeta; \nu) \dots \dots \dots (22) \end{aligned}$$

ここで、外は自明であるので、 $t$  と  $y$  の関係のみを述べる。 $t \sim y$  の関係より、 $y \geq 0, \rho \leq 1$  を考慮すると、 $dt/dy \geq 0$ 、よって  $t$  は  $y$  の単調非減少関数となり成立が示される。すなわち、 $x$  の累積分布と  $\zeta$  のそれとは、補足的な関係にある。

さて、以上の諸関係を利用すれば、任意の形状母数、相関母数をもつガンマ型変量の比の分布が理論的に明らかとなるが、実用的には、既知の不完全ベータ関数比の数表や諸特性<sup>10)</sup>を利用すれば計算は容易である。

(3) 代表的な形状母数に対する累積分布

まず、具体的に  $\nu=1/2, 1, 2$  の累積分布の式を求めらる。

(i)  $\nu=1/2$  の場合

式 (20) に  $\nu=1/2$  を代入するが、 $B(1/2, 1/2) = \pi$  に注意すれば、累積分布は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} F_x(x; 1/2) &= \pi^{-1} B_x(1/2, 1/2) \\ B_x(1/2, 1/2) &= \int_0^x \frac{du}{\sqrt{(1/4) - (u-1/2)^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

変数  $u$  を、 $u-1/2 = \sin \theta/2$  ( $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ) とおくと、 $du = \cos \theta \cdot d\theta/2$ 、また変域は、 $u=0, x$  に対して  $\theta = -\pi/2, \sin^{-1}(2x-1) \equiv \theta'$ 、よって積分項  $B_x$  は

$$\begin{aligned} B_x &= \int_{-\pi/2}^{\theta'} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\theta'} \frac{\cos \theta}{\cos \theta} d\theta \\ &= [\theta]_{-\pi/2}^{\theta'} = \sin^{-1}(2x-1) + \pi/2 \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

次に、式 (21) より、 $x$  を  $\zeta$  に変換する。

$$2x-1 = -(\zeta-1)/\sqrt{(\zeta+1)^2 - 4\rho\zeta} \dots \dots \dots (25)$$

これを式 (24) に代入し、整理する。

$$\begin{aligned} B_x &= \sin^{-1} \left( -\frac{\zeta-1}{\sqrt{(\zeta+1)^2 - 4\rho\zeta}} \right) + \frac{\pi}{2} \\ F_x(x; 1/2) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \left( -\frac{\zeta-1}{\sqrt{(\zeta+1)^2 - 4\rho\zeta}} \right) \end{aligned}$$

結局、比の累積分布は次式で与えられる。

$$F_\zeta(\zeta; 1/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \left( -\frac{\zeta-1}{\sqrt{(\zeta+1)^2 - 4\rho\zeta}} \right) \dots \dots \dots (26)$$

(ii)  $\nu=1$  の場合

式 (18) および (21) より、 $B(1, 1) = 1$  であるから、

$$F_x(x; 1) = 1 \cdot x = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1-\zeta}{\sqrt{(\zeta+1)^2 - 4\rho\zeta}} \right]$$

よって、累積分布は次式となる。

$$F_\zeta(\zeta; 1) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1-\zeta}{\sqrt{(\zeta+1)^2 - 4\rho\zeta}} \right] \dots \dots \dots (27)$$

(iii)  $\nu=2$  の場合

同様に、 $B(2, 2) = (1!)^2/3! = 1/6$  であるから、

$$\begin{aligned} F_x(x; 2) &= \frac{1}{6} \int_0^x u(1-u) du \\ &= \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{3} u^3 \right]_0^x = \frac{1}{36} x^2(3-2x) \end{aligned}$$

上式の  $x$  に式 (21) を代入し、整理すると、次式となる。

$$F_\zeta(\zeta; 2) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{(\zeta+1)(\zeta^2 - 4\zeta - 6\rho\zeta + 1)}{\{(\zeta+1)^2 - 4\rho\zeta\}^{3/2}} \right] \dots \dots \dots (28)$$

もちろん、これら累積分布は、対応する密度分布を直接積分しても導出できる。以上の結果を、主要な相関母数について、計算したものが前出の 図-1~3 に併記してある。

(4) 累積分布の漸近的性質

以上、要するに比の累積分布は、式 (20) の不完全ベータ関数比および式 (21) の変換で特徴づけられる。したがって、変数変換  $x = x(\zeta)$  が、仮に線形的であれば、ベータ分布の漸近的性質 (たとえば形状母数  $\nu$  の大きいときのガンマ分布あるいは正規分布による近似<sup>10)</sup>) が成立する。しかし、実際には 図-4 に示したように、 $x(\zeta)$  は線形的とはいえない複雑な変換である。もちろん、部分的には線形近似が許容される範囲もあるから、その範囲では上述の漸近近似も可能であろう。

以下では、相関母数の小さい範囲 (たとえば、 $\nu=1/2 \sim 2$  では  $\rho$  がほぼ 0.3 以下) の対数正規分布による近似について述べる。まず、 $\nu=1/2, 1, 2$  の際、 $F(\zeta)$  の対数正規確率紙上への表示を 図-5 に示す。このように、 $\rho$  が小さいと、累積分布  $F(\zeta)$  が対数正規分布で近似できることが、他の  $\nu$  についても、認められる。この理由は以下のように説明できる。

まず、式 (3) で  $\rho \ll 1$  とおくと、

$$f(\zeta) = B(\nu, \nu)^{-1} \cdot \zeta^{\nu-1} (\zeta+1)^{-2\nu}$$

対数をとって、 $\zeta$  で微分して整理すると次式となる。

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{-(\nu+1)\zeta + (\nu-1)}{\zeta(\zeta+1)} \dots \dots \dots (29)$$

他方、 $\zeta$  の対数をとって規準正規変数  $t$  に変換可能であれば、次式が成立するはずである。

$$t = t(\zeta) = k \log \zeta + q \quad (k, q: \text{定数})$$

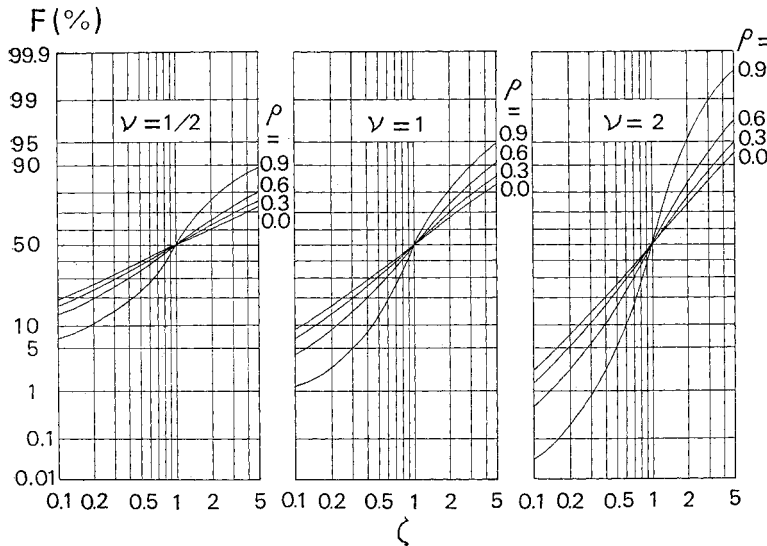


図-5 対数正規確率紙上への  $F(\zeta)$  の図示

ばよいから、このような対数正規近似は一般的に可能である。

#### 4. 理論の短期間豪雨予測への適用

##### (1) 適用への基礎仮定

前述の理論は各種の等期間降水量の比分布に適用できようが、ここでは短時間豪雨量予測の問題として取り扱うことにする。

標本の抽出に先立って、以下の前提が要求される。

(i) 対象とする雨量時系列の継続した変量組が二変数ガン

マ分布に従う結合統計量であると想定できるように選択する必要がある。

(ii) しかも、二変量の結合量は、定常かつ等質な二変数ガンマ分布でなければならない。たとえば、ある期間降雨量を  $x_1$ 、それに先行する等期間降雨量を  $x_2$  とし、 $x_1$  と  $x_2$  がそれぞれ形状母数  $\nu_1, \nu_2$ 、尺度母数  $\beta_1, \beta_2$  および相関母数  $\rho$  に従えば、これら諸母数の定常性と等質性 ( $\nu_1 = \nu_2, \beta_1 = \beta_2$ ) が要求される。等質性のうち、尺度母数への要求は必ずしも必要でないが、形状母数への要求は理論の本質にかかわるから、慎重に考慮すべきである。

$$f(t) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-t^2/2)$$

であるから、これを  $\zeta$  に関する密度分布に書き直す。

$$g(\zeta) = f(t(\zeta)) \cdot |dt(\zeta)/d\zeta|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(k \log \zeta + q)^2\right\} \cdot \frac{k}{\zeta}$$

前と同様に、対数をとって微分する。

$$\frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} = -(k \log \zeta + q) \cdot \frac{k}{\zeta} - \frac{1}{\zeta}$$

$$= -k^2 \frac{\log \zeta}{\zeta} - \frac{kq+1}{\zeta}$$

ところで、 $\log \zeta$  の無限級数展開

$$\log \zeta = 2 \left[ \frac{\zeta-1}{\zeta+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right)^5 + \dots \right] \quad (0 < \zeta)$$

こにおいて、 $\zeta$  が 1 (平均値) よりあまり大きく離れていなければ、上式の右辺第 2 項以下は無視できて、

$$\log \zeta \approx 2(\zeta-1)/(\zeta+1)$$

よって、若干の変形の後次に次式が成り立つ。

$$\frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} = \frac{-(2k^2 + qk + 1)\zeta + (2k^2 - qk - 1)}{\zeta(\zeta + 1)} \quad \dots \dots \dots (30)$$

さて、 $f$  と  $g$  が等しければ

$$f'(\zeta)/f(\zeta) = g'(\zeta)/g(\zeta)$$

すなわち、次式が満たされるように、 $k, q$  をとればよい。

$$\nu + 1 = 2k^2 + qk + 1, \quad \nu - 1 = 2k^2 - qk - 1$$

これより

$$k = \sqrt{\nu/2}, \quad q = 0 \quad \dots \dots \dots (31)$$

したがって、規準正規変換には、 $t = \sqrt{\nu/2} \log \zeta$  を行え

る。ここでは、それを雨量と継続時間の両面で規定する。また、豪雨を気象原因を考慮した場合と一括した場合について検討している。さらに、定常性の観点から、 $x_1, x_2$  を豪雨ピークの後・前という取り扱いをする。

(iii) したがって、豪雨標本をある基準以上に限定する。ここでは、それを雨量と継続時間の両面で規定する。また、豪雨を気象原因を考慮した場合と一括した場合について検討している。さらに、定常性の観点から、 $x_1, x_2$  を豪雨ピークの後・前という取り扱いをする。

##### (2) 標本の抽出方法

具体的な標本の抽出法は、以下のものである。

- (i) 1939 年～1968 年の 30 年間で、比較的多雨な暖候期 5 月～10 月における名古屋地方気象台の時間雨量記録によった。
- (ii) 豪雨基準として、2 時間最大雨量が 15 mm 以上、かつ 6 時間以上連続するものを採用する。これを、後・前 1 時間ごとに分けた雨量を  $x_1, x_2$  とした。
- (iii) 抽出した標本総数は 173 個であった。これを気象原因別に分類した内訳は、梅雨 61、台風 50、寒冷・温暖前線 33、雷雨 19、原因不明 10 であった。
- (iv) 東海地方では、豪雨対象として梅雨と台風が重要であり、他の場合は標本数も少ないので、以後の記述

はこれらの場合と総合した場合のみに限定した。

(3) 母数推定法と推定結果

さて、二変数ガンマ分布の母数推定には、積率解と最尤解がある<sup>11)</sup>が、ここではそれほど精度は必要でないと考え、計算の簡便な全標本とみなした積率解によった。

計算に必要な母数は形状母数と相関母数であるが、これに尺度母数を加えて、形状母数が等しい ( $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ) 場合の積率解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{\nu} &= \frac{(\bar{x}_1)^2}{(x_1)^2 - (\bar{x}_1)^2} \text{ または } \frac{(\bar{x}_2)^2}{(x_2)^2 - (\bar{x}_2)^2} \quad (a) \\ \hat{\beta}_i &= \frac{(\bar{x}_i)^3 - (\bar{x}_i)^2}{\bar{x}_i}, \quad (i=1, 2) \quad (b) \\ \hat{\rho} &= \frac{\bar{x}_1 \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \bar{x}_2}{\sqrt{(x_1)^2 - (\bar{x}_1)^2} \sqrt{(x_2)^2 - (\bar{x}_2)^2}} \equiv r \quad (c) \end{aligned}$$

.....(32)

ここに、 $\bar{x}$ :  $x$  の標本平均

$r$ : 標本相関係数

である。

(i) 形状母数と相関母数

ところで、形状母数  $\nu_1 = \nu_2$  が必ず成り立つとは限らない。そこで形状母数の異なる場合の解

$$\hat{\nu}_i = \frac{(\bar{x}_i)^2}{(x_i)^2 - (\bar{x}_i)^2} \quad (i=1, 2) \dots (33)$$

で  $\nu_i$  を推定し、その平均

$$\hat{\nu} = (\nu_1 + \nu_2) / 2$$

を形状母数  $\nu$  として採用することにした。

一方、相関母数は、形状母数が異なる場合には、

$$\begin{aligned} \max(\nu_1, \nu_2) &= n + m \\ \min(\nu_1, \nu_2) &= n \end{aligned}$$

とにおいて、

$$\hat{\rho} = \sqrt{(n+m)/n} \cdot r$$

であるが、一般にいまのような標本抽出では  $m/n \ll 1$  と考えてよいから、 $\hat{\rho} \approx r$ 、すなわち式 (32) の (c) によることにした。

(ii) 尺度母数

以後の計算には直接必要ではないが、 $x_1, x_2$  の周辺分布の相違を知るために、式 (32) (b) で算定しておいた。

さて、以上の計算結果を表1に示す。さらに、これら3ヶ

表-1 母数の標本推定値

分類	$\hat{\nu}_1$	$\hat{\nu}_2$	$\hat{\nu}$	$\hat{\rho}$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	標本比
総合	3.01	2.32	2.67	0.24	4.35	5.82	100%
台風	3.85	2.18	3.02	0.48	3.78	6.70	28.9
梅雨	2.44	2.53	2.48	0.31	5.49	5.84	35.2

ースに対する雨量階層別の相対頻度としての経験分布(ヒストグラム)と、ガンマ分布としての理論分布(曲線)を、図-6に示す。図中の(a), (b), (c)はそれぞれ総合、台風、梅雨に対応しており、以下同様に表わす。図より、ガンマ分布近似の妥当性および  $x_1, x_2$  の対称性がほぼ満足されているといえる。

(4) 比の経験分布と理論分布の対比と考察

(i) 比の密度分布

雨量比  $\zeta$  について 0.2 の階級分けをした場合の経験

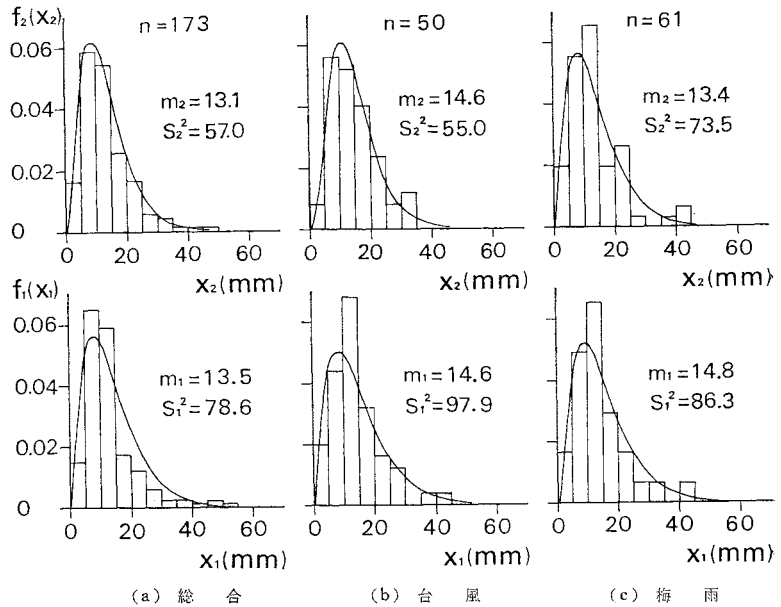


図-6 周辺分布の経験分布と理論分布の比較

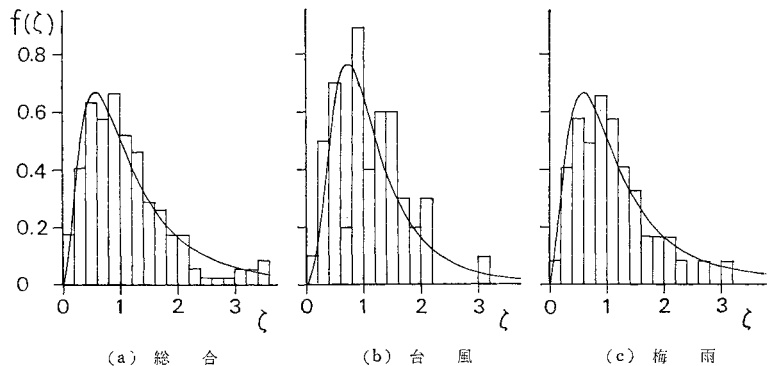


図-7 比の密度分布に対する経験分布と理論分布の比較



分布（ヒストグラム）と、また、これに式(3)を適合させた理論分布（曲線）を図-7に示す。標本数の少ない台風では若干の相違がある外は、非常に良好な合致を示している。なお図中の  $m, s^2$  は平均、分散である。

(ii) 比の累積分布

次に、図-7を積分すれば累積分布が得られるが、経験分布をできるだけ忠実に再現するために、Plotting Position の手法を利用する。すなわち、比の値  $\zeta$  を小さい方から順に、 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  と記すと、 $i$  番目順序統計量  $\zeta_i (i=1, 2, \dots, n)$  に対する非超過確率（累積分布値）を次式の Thomas plot で表記する。

$$F(\zeta_i) = i/(n+1) \quad (i=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (34)$$

これに対応する理論分布は、所与の母数  $\nu, \rho$  について数表などから求められる。たとえば気象原因を分けない総合の場合で説明すると、以下のようである。

まず、 $\rho=0.24$  に対して、式(21)より  $x=0.0(0.01)$  1.0 に対する  $\zeta$  を逆算する。他方、 $\nu$  に対する  $I_x(\nu, \nu)$  は、上述の  $x$  の値に対して数表化されている<sup>9)</sup>が、所与の  $\nu=2.67$  に丁度対するものは見当らない。そこで、適当な多点補間を用いることにし、この例では、 $\nu=2.0(0.5)3.5$  の4点等間隔 Lagrange 補間<sup>12)</sup>を採用した。注意すべきは、ここで得られた  $I_x(\nu, \nu)$  は、式(22)に示すように、

$$F_\zeta(\zeta; \nu) = 1 - F_x(x; \nu) = 1 - I_x(\nu, \nu) \dots\dots\dots (35)$$

の補足的な関係にあることである。

計算結果を図-8(a)に、同様に台風、梅雨に対する

ものを、同図の(b), (c)に示す。図より理論は経験分布ときわめて良く合致し、しかも、この理論分布の特徴である ( $\zeta=1, F=0.5$ ) をほぼ通ることが確認される。

したがって、計算対象となる豪雨の適切な選択・抽出（下限値の設定や気象原因による類別）が行われ、周辺分布の特性や相関特性が明確になれば、これを先験情報の下での統計的予測に利用することは十分可能と考えられる。

さらに、こうした成果は、降雨の標本期間長が変わっても、あるいは広く一般的に、ガンマ分布に従う変量ならば、他の水水量にも適用できるわけである。したがって、従来こうした方面で、経験的にしか対処されなかった統計的予測に理論的根拠が示唆されたという意味で、有用性は大きいと考えられる。

5. む す び

降雨時系列の統計的予測に対して、本研究は最近の多変数非対称分布理論の成果を活用して、理論的解明を試みたもので、得られた成果を要約すると以下のようになる。

(1) 降雨量時系列はガンマ分布に従う変量で近似できるので、これを定常・従属時系列と想定し、継続した時系列に、形状母数の等しい二変数ガンマ分布の理論を適用した。したがって、時系列間の自己相関性は相関母数で、確率的特性は形状母数、尺度母数で導入できた。

(2) 形状母数の等しい二変数ガンマ変量の比の密度分布を、ついでその積分として累積分布を理論的に誘導した。その結果、累積分布が、相関母数や形状母数などの如何にかかわらず、不完全ベータ関数比で表現できることを示した。したがって、市販の数表などによって比の生起の統計的予測が可能となった。

(3) さらに、比の密度分布および累積分布の理論的特性を相関母数および形状母数の代表的な値に対して計算・図化し、その性質の詳細を明確にした。たとえば、相関が小さければ、比の分布は、加定数が零の対数正規分布で近似できることなどを示した。

(4) 以上の理論を、名古屋の30年間の短時間豪雨時系列に適用した。標本期間を1時間とし、

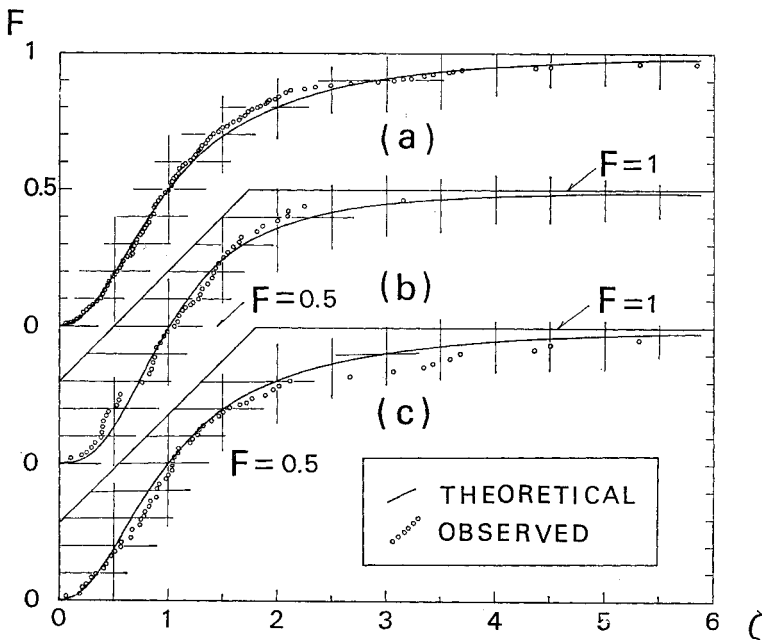


図-8 比の累積分布に対する経験分布と理論分布の比較  
(a) 総合, (b) 台風, (c) 梅雨

豪雨ピーク 2 時間を 2 等分し、母数推定は積率解によつた。理論の適合性の検討を、気象原因を考えない総合的な場合と、気象原因が台風、梅雨の場合について行い、密度分布、累積分布に関してきわめて良好な合致をみた。

もちろん、残された問題も多く、なかでも定常性・等質性の許容されるような標本抽出法、最尤推定法のような効率の高い母数推定法の採用、さらに豪雨ピークの判定、標本期間長の変更に伴う予測精度の検討など種々考えられる。これらについては、今後さらに検討を続ける予定である。

最後に、計算や図面の作製に名古屋工業大学 大学院 生、池田吉隆君に種々助力を得たことを謝しておく。

#### 参 考 文 献

- 1) 長尾正志：確率雨量配分率曲線の理論的推定，土木学会論文報告集，第 243 号，pp. 33~46, 1975.
- 2) 鈴木栄一：Gamma 分布に関する統計的理論とその応用について（降水量に関する統計的研究，第 5 報），研究時報，8 巻 9 号，pp. 552~559, 1956.
- 3) Fisher, R.A. : On a Distribution Yielding the Error Function of several well-known Statistics, Proc. of International Mathematical Congress, Tronte, pp. 805~813, 1924.
- 4) Bose, S. : On the distribution of the ratio of variances of two samples drawn from a given normal bivariate correlated population, SANKHYA, The Indian Journal of Statistics, Vol. 2, pp. 65~72, 1935.
- 5) Finney, D.J. : The Distribution of the Ratio of Estimates of the Two Variances in a Sample from a Normal Bi-variate Population, Biometrika, Vol. 30, pp. 190~192, 1938.
- 6) 長尾正志・角屋 睦：二変数ガンマ分布とその適用に関する研究（1）—二変数指数分布の基礎理論—，京大防災研年報，第 13 号 B, p. 106, 1970.
- 7) Gradshteyn, I.S. & I.M. Ryzhik : Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, p. 297, 1965.
- 8) 春日屋伸昌編：ガンマ関数表・ベータ関数表，実用数表大系，技報堂，1972.
- 9) 日本規格協会：統計数値表，JSA-1972, pp. 178~179, 1972.
- 10) 同上，解説 pp. 98~99.
- 11) 長尾正志・角屋 睦：二変数ガンマ分布とその適用に関する研究（2）—二変数ガンマ分布の母数推定法—，京大防災研年報，第 14 号 B, 1971.
- 12) 林 圭一著，森口繁一増補：高等函数表第 2 版，岩波書店，p. 377, 1963.

(1978.4.10・受付)