

縦および横方向に補剛された板の座屈強度解析

ANALYSIS OF BUCKLING STRENGTH OF PLATES WITH
LONGITUDINAL AND TRANSVERSE STIFFNERS

吉 田 博*・前 川 幸 次**
By Hiroshi Yoshida and Kouji Maegawa

1. 緒 言

最近、溶接工法の進歩により、吊橋のタワー、トラス、アーチ、箱桁等に軽量で合理的な薄肉構造が多用されるようになってきた。

構造部材が曲げモーメント、軸方向圧縮力または曲げモーメントと軸方向圧縮力の組合せ荷重を受けるとき、部材は部材全体から定まる不安定現象に対して安全であるばかりでなく、それを構成する板要素の局部的不安定性に対しても安全であるように設計されねばならない。しかし、部材全体の不安定性と局部的不安定性に対しては、部材断面構成上相反するところがあるが、縦および横方向に適当に補剛材を配置した板要素からなる断面部材は、力学的にきわめて合理的な断面構造形式と考えられる。しかし、溶接により軽量かつ合理的な断面構成が可能になった反面、溶接により生ずる残留応力や初期たわみなどのいわゆる初期不整を避けることはできない^{4), 5)}。残留応力が板要素の局部座屈に及ぼす影響についてはすでに多くの研究があり^{10), 19), 23)}、さらに、縦補剛材を有する板についても、理想化された残留応力分布について、座屈強度に及ぼす残留応力の影響が検討されている^{1), 8), 16), 17)}。これらの一連の研究³⁾によれば、非弾性域において、縦補剛材に存在する残留応力が補剛板の座屈強度を著しく低下させることを指摘している。

通常、補剛板には縦方向のみならず横方向にも補剛材が配置されている⁶⁾。縦および横方向に補剛材を有する板の座屈係数については、各種の荷重状態について文献¹⁸⁾に網羅されているが、弾性座屈のみに限定されている上に、縦および横補剛材のねじり剛性の影響および残留応力の影響が考慮されていない。

本研究においては、縦および横方向に補剛された板の

強度の1つの指標として、初期たわみを無視した座屈強度を用い、この座屈強度に及ぼす横補剛材の効果について検討をおこなうとするものである。解析には、Cheung¹⁴⁾によって初めて板の曲げの解析のために開発された有限帶板要素法を用いることとする。有限帶板要素法による板の座屈解析は、最初、文献¹¹⁾によってなされ、縦補剛材を有する一平面板の座屈解析へと拡張されている^{1), 8), 20)}。さらに、任意に組合せられた板要素からなる部材の弾性および非弾性局部座屈および全体座屈の解析にまで適用されている¹⁰⁾。また、縦および横方向に補剛された板の曲げの解析¹²⁾も行われている。本研究においては、文献¹²⁾の手法を座屈解析に適用し、縦および横方向に補剛された板要素からなる任意断面部材が、その両端で対称な応力分布の外力を受ける一般的な場合の弾性および非弾性座屈解析法を示す。非弾性座屈解析法は、その詳細が記述されている文献¹⁹⁾に準じた。これを用いて一平面補剛板のいくつかの単純化されたモデルを用いて、弾性および非弾性域での横補剛材の補剛効果について、縦および横補剛材のねじり剛性および残留応力を考慮した実際的な場合の検討を行う。

2. 解 析 法

解析の対象としたものは、図-1に示すように縦方向および横方向の補剛材により、任意の本数および任意の位置で補剛された板要素からなる任意断面部材に、その長さ方向の両端で長さ方向に、両端で対称に圧縮力が作用する場合である。解析は補剛板を有限個の長さ方向の帶板要素に分割する有限帶板要素法¹⁴⁾を用い、板の載荷辺は単純支持であるが非載荷辺の境界条件は任意である。

(1) 仮 定

解析に用いる基礎的な仮定は次のようなものである。

* 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 国立石川工業高等専門学校助手 土木工学科

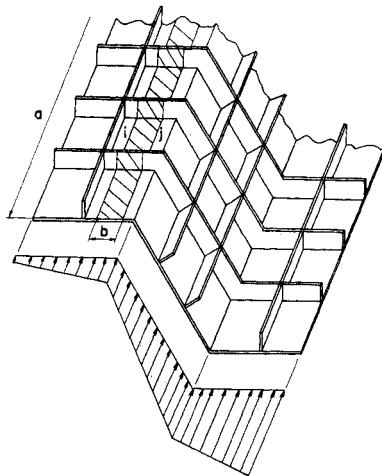


図-1 縦および横方向に補剛された板要素からなる断面部材

- Ⓐ 板および補剛材の材質は等しくかつ完全弾塑性体とし、ひずみ硬化は考えない。
- Ⓑ 板および補剛材は初期変形ではなく、座屈するまで板は一平面内にあり、補剛材は真直ぐである。
- Ⓒ 板および縦補剛材には溶接による残留応力が補剛板の長さ方向の直応力として存在し、その応力分布は板および縦補剛材の長さ方向および厚さ方向に一様である。横補剛材および板の幅方向の残留応力は無視する。
- Ⓓ 座屈時にはひずみの反転は起こらないものとし、塑性域では Bijlaard の塑性変形理論¹³⁾を用いる。
- Ⓔ 補剛材の断面変形は考えない。
- Ⓕ 縦補剛材は板の分割節線上にあるものとする。
- Ⓖ 横補剛材の応力は無視し、全断面弾性である。
- Ⓗ 補剛材と板の接合点でのそりによる軸変位は微少とする。

- Ⓘ 非弾性域における補剛材の曲げ剛度および曲げねじり剛度は弾性域のみを有効とする接線係数理論によるものとし、St. Venant のねじり剛度は、塑性変形理論¹³⁾

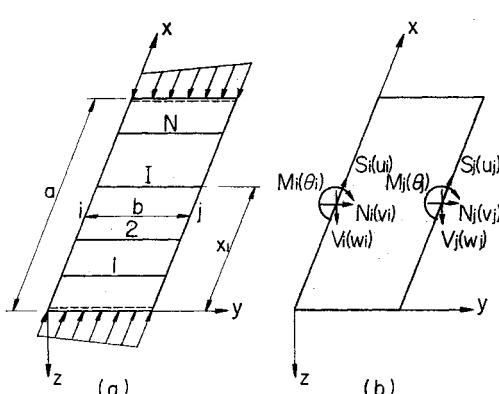


図-2 帯板要素と節線力および節線変位

によるものとする。

(2) 帯板要素の剛性行列および安定係数行列

図-1 の長さ a の補剛板の、板の任意位置から斜線で示したような要素 ij を取り出し、この要素の幅を b として、座標軸を図-2 のようにとる。この要素 ij の横補剛材を取り除いた板要素に対して、力と変形の関係を示す剛性方程式を次のように得ることができる。

剛性行列の誘導は通常の板の弾性解析^{11), 12)}のものと同様であるが、非弾性域でのモーメントと曲率の関係^{13), 19), 23)}

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Et^3}{12} \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & 0 \\ \kappa_2 & \kappa_3 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [\kappa] \{ \lambda \} \quad (1)$$

を用いて非弾性域まで拡張できる。ここに、 E は材料のヤング率、 t は板の厚さ、 w は板のたわみであり、 $\kappa_1 \sim \kappa_4$ は完全弾塑性体の場合、

$$\left. \begin{array}{l} \kappa_1 = 1/\beta, \kappa_2 = 2/\beta \\ \kappa_3 = 4/\beta, \kappa_4 = 1/(2 + 2\nu' + 3e) \end{array} \right\} \quad (2)$$

であり、 $\beta = 5 - 4\nu' + 3e$ 、 $e = \epsilon_p/\epsilon_Y$ で与えられる。ここに、 ϵ_p はひずみの塑性成分、 ϵ_Y は降伏ひずみであり、 ν' は文献 13) では弾性域のポアソン比 ν に等しく、文献 21) では塑性域のポアソン比 0.5 を用いている。本研究の数値計算では前者を用いた。また、非弾性域における平面応力状態での応力-ひずみ関係は、

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = [d_p] \{ \epsilon \} \quad (3)$$

にて与えられる。ここに、係数 $d_1 \sim d_4$ は文献 9) に詳述されている。

補剛材を有しない板、または、横補剛材を有せず、縦補剛材のみを有する板で、載荷辺が単純支持の場合、板の座屈に伴う面内および面外変位は三角関数の半波長のみで表わすことができるが、横補剛材を有する板では、三角関数の半波長のみでは表現できず、三角級数で表わす必要がある。したがって、分割された板要素の座屈変形に伴う面外変位 w 、 x 方向および y 方向の面内変位 u 、 v (図-2 参照) の変位関数を次のように仮定する¹²⁾

$$\left. \begin{array}{l} w(x, y) = b_0 \sum_{m=1}^{\infty} \langle N_1(\eta) \rangle \cdot \{ \bar{W}_m \} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ u(x, y) = b_0 \sum_{m=1}^{\infty} \langle N_2(\eta) \rangle \cdot \{ \bar{W}_m \} \cos \frac{m\pi x}{a} \\ v(x, y) = b_0 \sum_{m=1}^{\infty} \langle N_3(\eta) \rangle \cdot \{ \bar{W}_m \} \sin \frac{m\pi x}{a} \end{array} \right\} \quad (4)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \langle N_1(\eta) \rangle &= \langle \xi(\eta - 2\eta^2 + \eta^3), (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3), \\ &\quad 0, 0, \xi(-\eta^2 + \eta^3), (3\eta^2 - 2\eta^3), \\ &\quad 0, 0 \rangle \\ \langle N_2(\eta) \rangle &= \langle 0, 0, (1-\eta), 0, 0, 0, \eta, 0 \rangle \\ \langle N_3(\eta) \rangle &= \langle 0, 0, 0, (1-\eta), 0, 0, 0, \eta \rangle \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

および、

$$\{\bar{W}_m\}^T = \langle \bar{\theta}_{im}, \bar{w}_{im}/b_0, \bar{u}_{im}/b_0, \bar{v}_{im}/b_0, \bar{\theta}_{jm}, \bar{w}_{jm}/b_0, \bar{u}_{jm}/b_0, \bar{v}_{jm}/b_0 \rangle \quad (6)$$

式(4)および(5)において、 b は板要素の幅、 b_0 は板の基準幅であり、 a は補剛板の長さ、 $\xi = b/b_0$ 、 $\eta = y/b$ である。式(6)における $\bar{\theta}_{im}$ 、 \bar{w}_{im} 、 \bar{u}_{im} 、 \bar{v}_{im} 、 $\bar{\theta}_{jm}$ 、 \bar{w}_{jm} 、 \bar{u}_{jm} および \bar{v}_{jm} はそれぞれ節線*i*および*j*における*m*次の半波数に対するy方向のたわみ角成分、面外変位成分およびx、y方向の面内変位成分の最大値である。

これより、節線*i*および*j*での節線変位および節線力は、

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\theta}_{im} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad \theta_j = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\theta}_{jm} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ w_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{w}_{im} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad w_j = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{w}_{jm} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ u_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{u}_{im} \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad u_j = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{u}_{jm} \cos \frac{m\pi x}{a} \\ v_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{v}_{im} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad v_j = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{v}_{jm} \sin \frac{m\pi x}{a} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

および、

$$\left. \begin{aligned} M_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{M}_{im} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad M_j = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{M}_{jm} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ V_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{V}_{im} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad V_j = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{V}_{jm} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ S_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{S}_{im} \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad S_j = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{S}_{jm} \cos \frac{m\pi x}{a} \\ N_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{N}_{im} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad N_j = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{N}_{jm} \sin \frac{m\pi x}{a} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに、 M 、 V 、 S および N はそれぞれの辺上における単位長さ当たりの曲げモーメント、せん断力およびx、y方向の面内力を示す(図-2)。

座屈直前にx方向に作用している残留応力を含めた軸方向圧縮力を σ とすれば、帶板要素*ij*に対する仮想仕事の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} &\int_0^b \int_0^a \langle M_x, M_y, M_{xy} \rangle \{ \delta x \} dx dy \\ &+ t \int_0^b \int_0^a \langle \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \rangle \{ \delta \epsilon \} dx dy \\ &- t \int_0^b \int_0^a \sigma \left\langle \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle \\ &\cdot \left\{ \frac{\partial (\delta w)}{\partial x}, \frac{\partial (\delta u)}{\partial x}, \frac{\partial (\delta v)}{\partial x} \right\} dx dy \end{aligned}$$

$$= b_0 \int_0^a \langle F \rangle \{ \delta W \} dx \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

ここに、 t は帶板要素の厚さであり、 $\langle F \rangle$ および $\{W\}$ は次式により表される節線力ベクトルおよび節線変位ベクトルである。

$$\left. \begin{aligned} \langle F \rangle &= \langle F_1, F_2, \dots, F_m, \dots \rangle \\ \{W\}^T &= \langle W_1, W_2, \dots, W_m, \dots \rangle \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \langle F_m \rangle &= \langle M_{im}/b_0, V_{im}, S_{im}, N_{im}, \\ &\quad M_{jm}/b_0, V_{jm}, S_{jm}, N_{jm} \rangle \\ \langle W_m \rangle &= \langle \theta_{im}, w_{im}/b_0, u_{im}/b_0, v_{im}/b_0, \\ &\quad \theta_{jm}, w_{jm}/b_0, u_{jm}/b_0, v_{jm}/b_0 \rangle \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

である。面外変位と面内変位の連成のない場合は、面外変位のみを考えて、

$$\left. \begin{aligned} \langle F_m \rangle &= \langle M_{im}/b_0, V_{im}, M_{jm}/b_0, V_{jm} \rangle \\ \langle W_m \rangle &= \langle \theta_{im}, w_{im}/b_0, \theta_{jm}, w_{jm}/b_0 \rangle \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (12)$$

となる。

式(1)～(8)の関係を式(9)に用いて、次に示すような帶板要素の剛性方程式が得られる。

$$\{\bar{F}\} = \frac{D_0 \pi^4}{b_0^2 \alpha^2} ([a] - \lambda^2 [a']) \{\bar{W}\} \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

ここに、

$$\lambda = \frac{b_0}{t_0} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}}, \quad \alpha = \frac{a}{b_0}, \quad D_0 = \frac{E t_0^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

であり、 t_0 は基準板厚であり、 α はアスペクト比、 σ_Y は降伏応力である。また、 $[a]$ および $[a']$ は帶板要素の無次元化された剛性行列および安定係数行列であり、 $\{\bar{F}\}$ および $\{\bar{W}\}$ は次式により表わされる節線力および節線変位に関するベクトルである。

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{F}\}^T &= \langle \bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_m, \dots \rangle \\ \{\bar{W}\}^T &= \langle \bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_m, \dots \rangle \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \langle \bar{F}_m \rangle &= \langle \bar{M}_{im}/b_0, \bar{V}_{im}, \bar{S}_{im}, \bar{N}_{im}, \\ &\quad \bar{M}_{jm}/b_0, \bar{V}_{jm}, \bar{S}_{jm}, \bar{N}_{jm} \rangle \\ \langle \bar{W}_m \rangle &= \langle \bar{\theta}_{im}, \bar{w}_{im}/b_0, \bar{u}_{im}/b_0, \bar{v}_{im}/b_0, \\ &\quad \bar{\theta}_{jm}, \bar{w}_{jm}/b_0, \bar{u}_{jm}/b_0, \bar{v}_{jm}/b_0 \rangle \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

であり、面外変位と面内変位の連成のない場合は、

$$\left. \begin{aligned} \langle \bar{F}_m \rangle &= \langle \bar{M}_{im}/b_0, \bar{V}_{im}, \bar{M}_{jm}/b_0, \bar{V}_{jm} \rangle \\ \langle \bar{W}_m \rangle &= \langle \bar{\theta}_{im}, \bar{w}_{im}/b_0, \bar{\theta}_{jm}, \bar{w}_{jm}/b_0 \rangle \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (17)$$

である。

(3) 縦補剛材の剛性行列および安定係数行列

縦補剛材の塑性領域を除外した弾性領域のせん断中心*S*を原点とし、主軸方向に一致する直交座標軸を図-3のようとする。*G*は縦補剛材の弾性領域の団心であり、*P*は縦補剛材と板の接合点を示している。

解析の仮定②より、補剛材は断面変形しないと考え、図-3のような座標系をとると、縦補剛材断面上の任意点での変位は次のように与えられる。

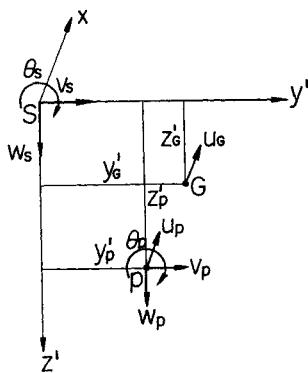


図-3 縦補剛材の接合点、せん断中心および図心

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_S, w = w_S + y' \theta, v = v_S - z' \theta \\ u &= -(z' - z'_G) \frac{dw_S}{dx} - (y' - y'_G) \frac{dv_S}{dx} \\ &\quad + u_G + \frac{d\theta}{dx} \omega \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

ここに、 θ は縦補剛材のねじり角、 ω はそり関数であり、 u, v および w はそれぞれ x, y' および z' 方向の変位、サフィックス S および G はそれぞれせん断中心および図心に関する量であることを表わしている。

点 P でのそりによる軸変位を小とし、 θ, u_G, v_S および w_S を接合点 P における θ_P, u_P, v_P および w_P で表わすと、

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_P, w_S = w_P - y'_P \theta_P, v_S = v_P + z'_P \theta_P \\ u_G &= u_P + (z'_P - z'_G) \left(\frac{dw_P}{dx} - y'_P \frac{d\theta_P}{dx} \right) \\ &\quad + (y'_P - y'_G) \left(\frac{dv_P}{dx} + z'_P \frac{d\theta_P}{dx} \right) \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

となり接合点 P での補剛材と板の変位が同じであることから、式 (19) における θ_P, u_P, v_P および w_P は次式で表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_P &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\theta}_{Pm} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ w_P &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{w}_{Pm} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ &\quad \cdot \cos \varphi_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{v}_{Pm} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \varphi_0 \\ u_P &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{u}_{Pm} \cos \frac{m\pi x}{a} \\ v_P &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{w}_{Pm} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ &\quad \cdot \sin \varphi_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{v}_{Pm} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \varphi_0 \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

ここに、 $\bar{\theta}_{Pm}, \bar{w}_{Pm}, \bar{u}_{Pm}$ および \bar{v}_{Pm} は式 (7) で定義した $\bar{\theta}_{im}, \bar{w}_{im}, \bar{u}_{im}$ および \bar{v}_{im} と同一量であり、 φ_0 は補剛材が接合されている帯板要素の座標系 ($y-z$ 座標系) から補剛材の座標系 ($y'-z'$ 座標系) への時計まわりの

回転角である。

縦補剛材の塑性領域を除外した弾性領域について、断面積を A 、図心を通り y' および z' 軸に平行な軸まわりの曲げ剛性を EI_y および EI_z 、曲げねじり剛性を EI_ω 、St. Venant のねじり剛性を GK_T とし、 σ を縦補剛材に作用する残留応力を含めた軸圧縮応力とすると、節線 P に接合されている縦補剛材の仮想仕事の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} &\int_0^a \left\{ EA \frac{du_G}{dx} \frac{d(\delta u_G)}{dx} + EI_y \frac{d^2 w_S}{dx^2} \frac{d^2(\delta w_S)}{dx^2} \right. \\ &\quad \left. + EI_z \frac{d^2 v_P}{dx^2} \frac{d^2(\delta v_P)}{dx^2} + GK_T \frac{d\theta_S}{dx} \frac{d(\delta\theta_S)}{dx} \right. \\ &\quad \left. + EI_\omega \frac{d^2\theta_S}{dx^2} \frac{d^2(\delta\theta_S)}{dx^2} \right\} dx \\ &- \int_0^a \int A_0 \sigma \left\langle \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{dw}{dx} \right\rangle \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{d(\delta u)}{dx}, \frac{d(\delta v)}{dx}, \frac{d(\delta w)}{dx} \right\} dA_0 dx \\ &= b_0 \int_0^a \langle F_P \rangle \{ \delta W_P \} dx \dots (21) \end{aligned}$$

ここに、 A_0 は縦補剛材の断面全体を意味し、 $\langle F_P \rangle$ および $\{W_P\}$ は次式により表わされる節線力ベクトルおよび節線変位ベクトルである。

$$\left. \begin{aligned} \langle F_P \rangle &= \langle F_{P1}, F_{P2}, \dots, F_{Pm}, \dots \rangle \\ \{W_P\} &= \langle W_{P1}, W_{P2}, \dots, W_{Pm}, \dots \rangle \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \langle F_{Pm} \rangle &= \langle M_{Pm}/b_0, V_{Pm}, S_{Pm}, N_{Pm} \rangle \\ \langle W_{Pm} \rangle &= \langle \theta_{Pm}, w_{Pm}/b_0, u_{Pm}/b_0, S_{Pm}/b_0 \rangle \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

である。長方形断面補剛材が平板に垂直に接合され、面外変位と面内変位の連成がない場合は、 $u_P = v_P = 0$ となり式 (23) は、

$$\left. \begin{aligned} \langle F_{Pm} \rangle &= \langle M_{Pm}/b_0, V_{Pm} \rangle \\ \langle W_{Pm} \rangle &= \langle \theta_{Pm}, w_{Pm}/b_0 \rangle \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

となる。

式 (18), (19) および (20) の関係を式 (21) に用いて、次に示すような縦補剛材の剛性方程式が得られる。

$$\{\bar{F}_L\} = \frac{D_0 \pi^4}{b_0^2 a^2} ([a_L] - \lambda^2 [a_L']) \{\bar{W}_L\} \dots (25)$$

ここに、 $[a_L]$ および $[a_L']$ は縦補剛材の無次元化された剛性行列および安定係数行列であり、 $\{\bar{F}_L\}$ および $\{\bar{W}_L\}$ は式 (15) および (16) または (17) で与えられる、同様の節線 P での節線力および節線変位に関するベクトルである。

(4) 横補剛材の剛性行列および安定係数行列

図-2 に示した N 本の横補剛材を有する要素 ij の第 I 番目の横補剛材のせん断中心、 S' を原点とする直交座標軸を 図-4 のように断面の主軸方向にとる。 G' は

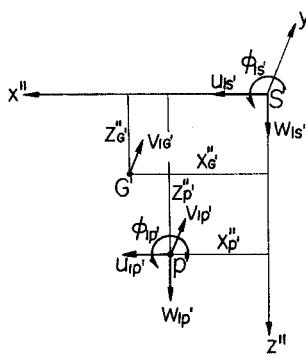


図-4 横補剛材の接合点、せん断中心および図心

横補剛材の図心であり、 P' は横補剛材と板要素の接合点を示している。

式 (18) および (19) と同様に、横補剛材の座標系 ($x''-y-z''$ 座標系) に関する変位、 ϕ_I , $v_{IG'}$, $u_{IS'}$ やび $w_{IS'}$ を接合点 P' における変位 $\phi_{IP'}$, $v_{IP'}$, $u_{IP'}$ やび $w_{IP'}$ で表わす。

$$\left. \begin{aligned} \phi_I &= \phi_{IP'}, \quad w_{IS'} = w_{IP'} - x''_{P'} \phi_{IP'} \\ u_{IS'} &= u_{IP'} + z''_{P'} \phi_{IP'} \\ v_{IG'} &= v_{IP'} + (z''_{P'} - z''_{G'}) \left(\frac{dw_{IP'}}{dy} - x''_{P'} \frac{d\phi_{IP'}}{dy} \right) \\ &\quad + (x''_{P'} - x''_{G'}) \left(\frac{du_{IP'}}{dy} + z''_{P'} \frac{d\phi_{IP'}}{dy} \right) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ここに、 ϕ は横補剛材のねじれ角である。接合点 P' での補剛材と板の変位は同じであることから、式 (26) における $\phi_{IP'}$, $w_{IP'}$, $u_{IP'}$ やび $v_{IP'}$ は式 (4) を用いて、

$$\left. \begin{aligned} \phi_{IP'} &= b_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \langle N_1(\eta) \rangle \{ \bar{W}_m \} \cos \frac{m\pi x_I}{a} \\ w_{IP'} &= b_0 \sum_{m=1}^{\infty} \langle N_1(\eta) \rangle \{ \bar{W}_m \} \sin \frac{m\pi x_I}{a} \cos \varphi_0' \\ &\quad + b_0 \sum_{m=1}^{\infty} \langle N_2(\eta) \rangle \{ \bar{W}_m \} \cos \frac{m\pi x_I}{a} \sin \varphi_0' \\ u_{IP'} &= b_0 \sum_{m=1}^{\infty} \langle N_2(\eta) \rangle \{ \bar{W}_m \} \cos \frac{m\pi x_I}{a} \cos \varphi_0' \\ &\quad - b_0 \sum_{m=1}^{\infty} \langle N_1(\eta) \rangle \{ \bar{W}_m \} \sin \frac{m\pi x_I}{a} \sin \varphi_0' \\ v_{IP'} &= b_0 \sum_{m=1}^{\infty} \langle N_3(\eta) \rangle \{ \bar{W}_m \} \sin \frac{m\pi x_I}{a} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

となる。ここに、 x_I は第 I 番目の横補剛材の取り付け点 P' の帶板要素の座標系における x 座標であり、 φ_0' は板要素 ij の座標系 ($x-z$ 座標系) から横補剛材の座標系 ($x''-z''$ 座標系) への時計まわりの回転角である。

第 I 番目の横補剛材の断面積を A'_I , 図心を通り x'' やび z'' 軸に平行な軸まわりの曲げ剛度を EI'_{xI} やび EI'_{zI} , 曲げねじり剛度を EI'_{wI} , St. Venant のねじり

剛度を GK'_{TI} とすると、仮定 ② より横補剛材には応力が作用していないので、節線 P' に接合されている第 I 番目の横補剛材の内力の仮想仕事は次のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} A U_{TI} = & \int_0^b \left\{ EA'_I \frac{dv_{IG'}}{dy} \frac{d(\delta v_{IG'})}{dy} \right. \\ & + EI'_{xI} \frac{d^2 w_{IS'}}{dy^2} \frac{d^2(\delta w_{IS'})}{dy^2} \\ & + EI'_{zI} \frac{d^2 u_{IS'}}{dy^2} \frac{d^2(\delta u_{IS'})}{dy^2} \\ & + GK'_{TI} \frac{d\phi_{IS'}}{dy} \frac{d(\delta\phi_{IS'})}{dy} \\ & \left. + EI'_{wI} \frac{d^2\phi_{IS'}}{dy^2} \frac{d^2(\delta\phi_{IS'})}{dy^2} \right\} dy \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

これより、 N 本の横補剛材を有する帶板要素の仮想仕事は、式 (9) の左辺に $\sum_{I=1}^N A U_{TI}$ を加えて得ることができる。第 I 番目の横補剛材のみの剛性方程式は分離して求めることができる。

式 (26) および (27) の関係を式 (28) に用いて次に示すような第 I 番目の横補剛材の剛性方程式が得られる。

$$\{ \bar{F} \} = \frac{D_0 \pi^4}{b_0^2 \alpha^2} [a_{TI}] \{ \bar{W} \} \quad \dots \dots \dots \quad (29)$$

ここに、 $[a_{TI}]$ は第 I 番目の横補剛材の無次元化された剛性行列であり、横補剛材全体の剛性行列は、横補剛材の本数を N とすると、

$$[a_T] = \sum_{I=1}^N [a_{TI}] \quad \dots \dots \dots \quad (30)$$

にて与えられる。

(5) 全体剛性行列および全体安定係数行列

図-2 に示した N 本の横補剛材を有する要素 ij の剛性行列は式 (13) で与えられる帶板要素の剛性行列 $[a]$ と式 (30) で与えられる N 本の横補剛材の剛性行列 $[a_T]$ を加え合わせて次のような剛性方程式を得ることができる。

$$\{ \bar{F} \} = \frac{D_0 \pi^4}{b_0^2 \alpha^2} \{ ([a] + [a_T]) - \lambda^2 [a'] \} \{ \bar{W} \} \quad \dots \dots \dots \quad (31)$$

図-1 に示すような、縦および横補剛材で補剛された板要素からなる断面部材の全体剛性行列および安定係数行列は局所座標系で求められた横補剛材を有する板要素の剛性行列、安定係数行列および縦補剛材の剛性行列、安定係数行列を全体座標系に変換して組み合わせることにより、次式のように得られる。

$$\{ \bar{F}_0 \} = \frac{D_0 \pi^4}{b_0^2 \alpha^2} ([K] - \lambda^2 [K']) \{ \bar{W}_0 \} \quad \dots \dots \dots \quad (32)$$

ここに、 $\{ \bar{F}_0 \}$ は全節線の節線力に関するベクトルであり、 $\{ \bar{W}_0 \}$ は全節線での節線変位に関するベクトルである。また、 $[K]$ やび $[K']$ は無次元化された全体剛性行列および全体安定係数行列である。非載荷辺での境界条件を考慮して、補剛板要素からなる断面部材の座屈

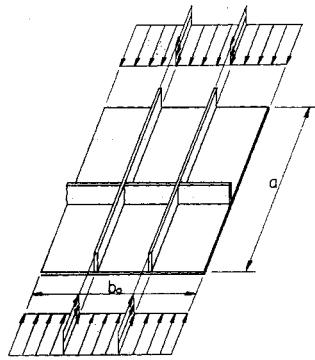


図-5 縦および横方向に補剛された平面補剛板

条件式は次式により与えられる。

$$[K] - \lambda^2 [K'] = 0 \quad \dots \dots \dots (33)$$

3. 数値計算方法

本研究における数値計算の対象は図-5に示すような縦および横補剛材により補剛された一平面補剛板とする。また、作用外力による応力は一様であるとする。さらに、解析に用いた仮定のほかに、次の仮定を追加する。

- Ⓐ 座屈に伴う面内変位の影響は考慮せず、面外変位のみを取り扱う。
- Ⓑ 補剛材は長方形断面で片側配置とする。
- Ⓒ 補剛材は縦および横方向にそれぞれに等しい断面のものを用いる。

板の幅および厚さを基準幅 b_0 および基準厚さ t_0 とし、長方形補剛材に対する剛性および安定係数行列は、次のように定義されるパラメーターで表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{E}{b_0 D_0} \left\{ b_s t_s \left(\frac{b_s}{2} \right)^2 + I_y \right\}, \quad \delta = \frac{b_s t_s}{b_0 t_0} \\ r_\omega &= \frac{EI_\omega}{b_0^3 D_0}, \quad r_z = \frac{EI_z b_s^2}{b_0^3 D_0}, \quad r_t = \frac{G K_T}{b_0 D_0} \\ r_p &= \left(\frac{b_s}{b_0} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

ここに、 r は曲げ剛比、 δ は面積比、 r_ω はそりのねじり剛比、 r_z は弱軸まわりの曲げ剛比、 r_t は St. Venant のねじり剛比、 r_p は極 2 次半径比であり、 b_s および t_s は補剛材の幅と厚さである。これらの比は板に対する 1 つの補剛材の比であり、直接的な意味のない無次元量パラメーターも含まれている。式 (34)において、'(Prime)' を付けると横補剛材に関するものを示すことにし、' を付けない縦補剛材のものと区別することにする。

式 (34) は補剛材が長方形断面であることを考慮し、式 (14) を用いると次式のように δ 、 r および λ のみで表現される。

$$\left. \begin{aligned} r &= 4(1-\nu^2)\delta^3 \left(\frac{t_0}{t_s} \right)^2 \frac{\lambda^2}{\epsilon_Y}, \quad r_\omega = \frac{1-\nu^2}{12} \delta^3 \\ r_z &= (1-\nu^2)\delta^3, \quad r_t = 8(1-\nu^2)(1-\nu)\delta^4 \frac{\lambda^2}{r \epsilon_Y} \\ r_p &= \frac{r}{4(1-\nu^2)} \frac{\epsilon_Y}{\delta \lambda^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

(1) 残留応力がなく弾性座屈する場合

板および縦補剛材に残留応力がなく、補剛板が弾性範囲内で座屈する場合は、次のようにして直接座屈応力を求めることができる。

弾性範囲内では式 (1) の $\kappa_1 \sim \kappa_4$ は定数であるから、式 (13) の帶板要素の剛性行列 $[a]$ の計算において数値積分の必要がなく、直接求めることができる。 $[a]$ は α のみの関数である。式 (13) の安定係数行列 $[a']$ は σ_{cr}/σ_Y を被積分関数として含むが、一様圧縮で弾性範囲であるので、

$$[a'] = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2} \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_Y} [\bar{a}'] \dots \dots \dots (36)$$

と表わすことができ、 $[\bar{a}']$ の各要素は定数である。

式 (25) の縦補剛材の剛性行列 $[a_L]$ および安定係数行列 $[a_L']$ もまったく同様の形で表現することができる。また、座屈係数は、

$$k = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2} \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_Y} \lambda^2 \dots \dots \dots (37)$$

と表わされるので、式 (33) の座屈条件式は、

$$[K] - k [\bar{K}'] = 0 \dots \dots \dots (38)$$

となり、座屈係数 k を固有値として求めることができる。この場合、座屈係数は α 、 δ 、 r および λ の関数であり、また、補剛材のねじり剛性を考慮しない場合は $r_t = r_\omega = 0$ となり、パラメーター λ が r_p のみに含まれる。しかし、 r_p の座屈強度に及ぼす影響は小さいので無視すると、座屈係数は α 、 δ および r のみの関数となり、また、降伏ひずみ ϵ_Y を含んでいない。したがって、ねじり剛性を考慮しない場合、近似的に材質に関して無次元化した解を得ることができる。

(2) 残留応力を有し、弾性または非弾性座屈する場合

残留応力がなく、一様圧縮の場合は固有値として座屈係数 k が求まることを示したが、圧縮応力が断面内で複雑に分布する場合、残留応力が存在する場合、さらに、断面の一部が非弾性となる場合は、座屈条件式は式 (38) の形で k を固有値として直接求めることができず、式 (33) によらねばならない。

弹性域においては帶板要素の剛性行列 $[a]$ は α のみの関数であり、縦および横補剛材の剛性行列 $[a_L]$ 、 $[a_T]$

縦および横方向に補剛された板の座屈強度解析

は α, δ, τ および λ の関数であり、帯板要素の安定係数行列 $[a']$ は σ_{cr}/σ_Y すなわち軸ひずみ ϵ_{cr}/ϵ_Y のみの関数であり、縦補剛材の安定係数行列 $[a_L']$ は σ_{cr}/σ_Y すなわち軸ひずみ ϵ_{cr}/ϵ_Y と α, δ, τ および λ の関数である。さらに、非弾性域においては、帯板要素の剛性行列は $\epsilon_1 \sim \epsilon_4$ の関数であり、 $\epsilon_1 \sim \epsilon_4$ および縦補剛材の剛性行列の各種剛性は軸ひずみの関数となっている。

式(33)において、 $[K]$ および $[K']$ には λ が含まれており、 λ^2 を固有値とする一般的な固有値問題とは異なり、したがって、次の2通りの解法を考えられる。

a) α, δ, τ および λ が与えられた場合

式(33)を満足する軸ひずみ ϵ/ϵ_Y を試行錯誤法で求める。 ϵ/ϵ_Y には残留応力による残留ひずみと作用圧縮力によるひずみが含まれる。

b) α, δ, τ および σ_{cr}/σ_Y (または ϵ_{cr}/ϵ_Y) が与えられた場合

式(33)を満足する λ を試行錯誤法で求める。 σ_{cr}/σ_Y が一定値であるので $[a]$, $[a']$ は一定であるが、 $[a_L]$, $[a_L']$ および $[a_T]$ は λ の関数となっている。しかし、補剛材がねじれない場合または補剛材のねじり剛性を考慮しない場合はこれらに及ぼす λ の影響は無視できる。

本研究の数値計算においては a) の ϵ/ϵ_Y を試作錯誤法で求める方法によった。なお、剛性行列および安定係数行列の要素を求めるための積分は Simpson の方法による数値積分によった。また、座屈強度の表現法として、補剛板の弾性座屈に対しては、

$$\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_Y}\right)_{av} = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)\lambda^2} k \quad (39)$$

で表わされる座屈係数 k を用い、非弾性座屈に対しては $(\sigma_{cr}/\sigma_Y)_{av}$ を用いることとする。ただし、 $(\sigma_{cr}/\sigma_Y)_{av}$ は補剛板全断面の座屈時の平均作用応力である。

(3) 数値計算

数値計算にあたっては以下のようないくつかの配慮を行った。

1) 座屈半波長の数 m を大きくとると節点ベクトルの次数が大きくなり、大次元マトリックスを解かねばならない。横補剛材が対称的位置に配置されている場合は座屈変形は長さ方向に対称または逆対称であるので、座屈半波長の数 m は奇数項または偶数項のみを用い、両方の座屈係数のうち小さい値を解とする。

2) 座屈モードの計算における節点変位ベクトルの収束計算には共役傾斜法⁹⁾を用いる。

3) 補剛材の幅厚比 b_s/t_s は式(35)より、

$$\frac{b_s}{t_s} = \frac{r\sqrt{\epsilon_Y}}{4(1-\nu^2)\delta^2\lambda} \quad (40)$$

となり、 r, δ および λ の関数となる。与えられる λ に対して、補剛材の幅厚比が現実性をもつように δ および r の組合せを考える。

4. 数値計算結果および考察

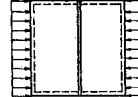
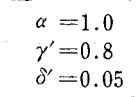
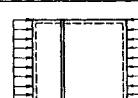
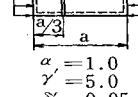
(1) 解の収束状態

縦補剛材のみを有する補剛板の座屈強度の有限要素法による解の収束性については、すでに文献 1) および 8) で論じられているので、ここでは横補剛材のみを有する補剛板の解の収束性について調べることにする。縦補剛材のみを有する板の解の収束性は、主として幅方向の分割数に対する収束性が問題であるのに対し、横補剛材を有する板の場合の収束性は、幅方向の分割数とともに、長さ方向の三角関数の半波長の数 m が問題となる。したがって、ここでは 1 本の横補剛材を有する周辺単純支持正方形板の一様圧縮座屈を対象として、ねじり剛性を考慮しない場合について、分割要素数および三角関数の半波長の数 m と数値計算精度の関係を表-1 に示す。

板の長さの中央に $r'=0.8, \delta'=0.05$ の横補剛材が 1 本配置されている場合と、板の長さの 3 分の 1 点に $r'=5.0, \delta'=0.05$ の横補剛材が 1 本配置されている場合の座屈係数が示されており、文献 22) による厳密解と比較されている。

これらの結果および文献 1), 8) および 10) より、縦補剛材で区切られたサブパネルの分割数は 2 以上で十分な精度があると思われる。本研究の数値計算においては、

表-1 分割数および項数と計算精度

補剛板	項数 m	分割数 n	座屈係数 k	
			計算値	文献 22)
 $\alpha = 1.0$ $\gamma' = 0.8$ $\delta' = 0.05$	2	1	6.335	6.25
		2	6.253	
		3	6.251	
		4	6.251	
 $\alpha = 1.0$ $\gamma' = 0.8$ $\delta' = 0.05$	1 + 2	1	6.147	5.55
		2	5.571	
		3	5.554	
		4	5.552	
 $a/3$ a $\alpha = 1.0$ $\gamma' = 5.0$ $\delta' = 0.05$	1 + 2 + 3 + 4	1	5.853	5.69
		2	5.706	
		3	5.702	
		4	5.701	
 $\alpha = 1.0$ $\gamma' = 5.0$ $\delta' = 0.05$	1 + 2 + 3 + 4	1	5.849	
		2	5.701	
		3	5.697	
		4	5.697	

ては、縦補剛材がなく、残留応力が存在しない場合は、補剛板の全幅に対して $n=4$ を、残留応力を有する場合は残留応力の分布形状に応じて $n=4$ 以上を、縦補剛材があり、残留応力が存在しない場合はサブパネルに対して $n=2$ を、残留応力を有する場合は $n=3$ を用いた。残留応力を有する場合、さらに非弾性域が存在する場合の各分割要素内の数値積分間隔^{8),10)}は、要素の分割数とつり合う程度の間隔にそのつど調整した。また、用いた座屈半波長の数 m の項数は、横補剛材が板の長さの中央に 1 本の場合、対称変形に対する奇数次および逆対称変形に対する偶数次に対して各 3 項を、横補剛材が板の中央にない場合は 4 項までとした。

(2) 補剛板の弾性座屈

図-6 は板の長さの中央に横補剛材を有する周辺単純支持板の座屈係数とアスペクト比の関係を示している。曲線 ①, ②, ③ および ④, ⑤, ⑥ は $r'=1.0, 3.0$ および 5.0 に対し、それぞれ、残留応力を有しない場合および図中に示されるような残留応力分布 $\sigma_{rc}=\sigma_{rt}=0.3 \sigma_y$ を有する場合に対する座屈係数の変化を示している。いずれの場合も $\delta'=0.05$ で一定である。図-6 中の破線は横補剛材のねじり剛性を無視したものであり、実線はねじり剛性を考慮したものである。

各曲線とも、アスペクト比 α の増加とともに 1 次のモード、2 次のモード、…のように奇数次と偶数次のモードが交互に変化する。曲線 ① の ①～⑩ に対するこれらの座屈モードの変化を 図-7 に示す。

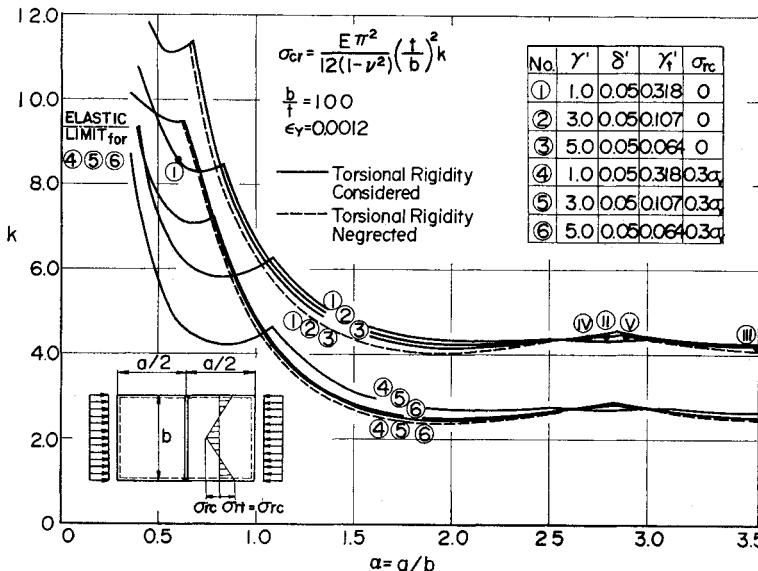


図-6 中央に横補剛材を有する周辺単純支持板の座屈係数とアスペクト比

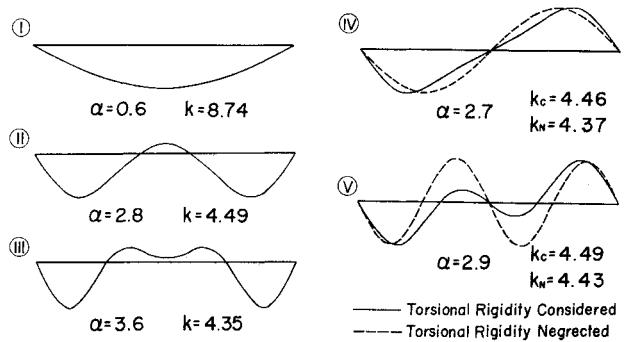


図-7 アスペクト比と長さ方向の座屈モード

座屈係数 k の値は奇数次のモードでは r' の増加とともに増加するが、偶数次のモードでは逆に r' の増加とともに減少する。これは、 δ' が一定であるので、 r' の増加とともに r' が減少し、偶数次のモードでは横補剛材位置が節となり、補剛材のねじり剛性のみが有効に作用するためであり、ねじり剛性を無視した場合、 r' に無関係な曲線（破線）が得られる。また、奇数次のモードでは横補剛材にはねじりが生ぜず、ねじり剛性の影響は表われない。アスペクト比が小さい 1 次のモードでの曲げ剛比 r_t' の効果に比べれば、2 次のモードのねじり剛比 r_t の効果は微小である。残留応力による座屈係数の低下は、いずれの場合も k の値で 1.7 程度である。

図-8 は、板の中央に縦および横方向にそれぞれ 1 本の補剛材を配置した周辺単純支持正方形板の種々の補剛材剛比と座屈係数の関係を示している。縦軸には座屈係数が、横軸には縦補剛材の剛比がとられている。図中、実線で示される曲線 ①～⑦ は板の幅厚比 $b/t=200$ に対するものであり、曲線 ⑧～⑭ は $b/t=300$ に対するものである。なお、曲線 ①～⑭ に対する横補剛材の曲げ剛比およびねじり剛比は図中の表に示されている。曲線 ⑦ および ⑭ は縦補剛材のみを有する場合であり、文献 6) および 15) によると、最適剛比 $\bar{r}=6.8$, $r^*=7.85$ であり、これに對応する座屈係数は $\bar{k}=14.5$, $k^*=16.0$ である。 τ について誤差が生ずるのは文献 6) における τ の誘導の際に、1 次の項のみを用いた近似を行っているため、 $\alpha < 2.0$ では精度がよくないことが指摘されている²²⁾。図-8 のすべての曲線の座屈係数の最大値は、縦補剛材のねじり剛性を無視した $r_t=r_w=0$

とするものである。曲線 ⑧～⑭ は $b/t=300$ に対するものである。なお、曲線 ①～⑭ に対する横補剛材の曲げ剛比およびねじり剛比は図中の表に示されている。曲線 ⑦ および ⑭ は縦補剛材のみを有する場合であり、文献 6) および 15) によると、最適剛比 $\bar{r}=6.8$, $r^*=7.85$ であり、これに對応する座屈係数は $\bar{k}=14.5$, $k^*=16.0$ である。 τ について誤差が生ずるのは文献 6) における τ の誘導の際に、1 次の項のみを用いた近似を行っているため、 $\alpha < 2.0$ では精度がよくないことが指摘されている²²⁾。図-8 のすべての曲線の座屈係数の最大値は、縦補剛材のねじり剛性を無視した $r_t=r_w=0$

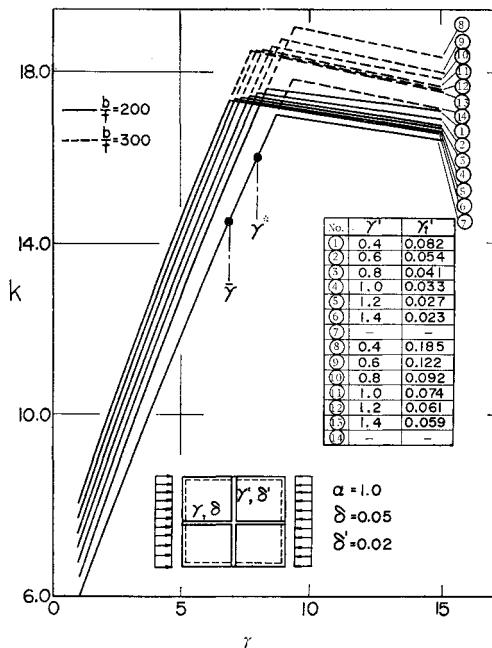
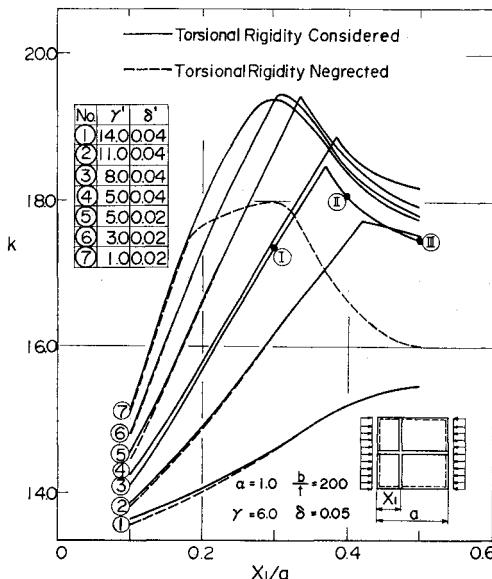
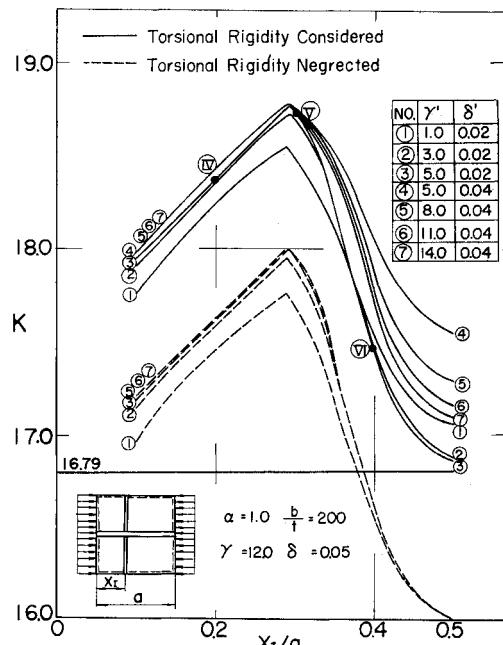


図-8 中央に縦および横補剛材を有する正方形板の補剛材剛比と座屈係数

の場合の縦補剛材位置が節となる座屈係数 $k=16$ 以上を示している。これは縦補剛材および横補剛材のねじり剛性の効果を示すものである。また、ねじり剛性の効果が現われる範囲では、 b/t の変化により座屈係数に差が生じる。これは δ を固定し、 r が同じであれば、式(35)より r_t が λ に比例することから、ねじり剛性の差による影響であると判断される。

縦補剛材の曲げ剛比 r が小さく、縦補剛材位置が節にならない1次の座屈モード（座屈係数が r の増加とともに大きくなる範囲）では、曲線① ($r'=0.4$) よりも曲線⑥ ($r'=1.4$) が上側に位置することからわかるように、横補剛材の曲げ剛比 r' の座屈係数に及ぼす効果は大きく、逆に縦補剛材位置が節となる縦補剛材の曲げ剛比 r が大きい場合（座屈係数が r の増加とともに小さくなる範囲）、曲線⑥ ($r_t=0.023$) よりも曲線① ($r_t=0.082$) が上側に位置することからわかるように、横補剛材のねじり剛比 r_t の効果が現われている。座屈係数が最大値に達し、曲線が急角度で変化した後は、縦補剛材位置が節になっているので、 r を大きくしても座屈係数は上昇せず、逆に式(35)からも明らかなように r の増加とともに縦補剛材のねじり剛比 r_t が減少するため、座屈係数は減少している⁸⁾。

図-9 および図-10 は周辺単純支持正方形板の横補剛材位置と座屈係数の関係を示している。図-9 は縦補剛材が曲げ剛比 $r=6.0$ 、断面積比 $\delta=0.05$ の場合で、横補剛材がない場合、縦補剛材位置が節となる幅方向に2次のモードで座屈し、 $k=16.8$ (ねじり剛性を無視すると $k=16.0$) に対するものである。図-9 および 10 はともに、 $b/t=200$ に対するもので、実線はねじり剛性を考慮した場合、破線はねじり剛性を無視した場合について示されている。

図-9 中央に縦補剛材を有する正方形板の横補剛材位置と座屈係数 ($\gamma=6.0$)図-10 中央に縦補剛材を有する正方形板の横補剛材位置と座屈係数 ($\gamma=12.0$)

座屈係数が $k=13.4$ に対するものであり、図-10 は縦補剛材が $r=12.0$ 、 $\delta=0.05$ の場合で、横補剛材がない場合、縦補剛材位置が節となる幅方向に2次のモードで座屈し、 $k=16.8$ (ねじり剛性を無視すると $k=16.0$) に対するものである。図-9 および 10 はともに、 $b/t=200$ に対するもので、実線はねじり剛性を考慮した場合、破線はねじり剛性を無視した場合について示されている。

図-9において、横補剛材の曲げ剛比 r' が小さい場合、座屈係数の最大値を示す横補剛材位置は板の長さの約3分の1付近であるが、 r' が大きくなるにしたがって横補剛材位置は板の中央に近づいている。しかし、図-10においては r' の大きさに関係なく、座屈係数が最大値を示す横補剛材位置は板の長さの約0.29倍の位置である。横補剛材の曲げ剛比 $r'=5.0$ 、面積比 $\delta'=0.02$ に対する図-9の曲線上の点 ①, ⑩, ⑪ および図-10の曲線上の点 ⑩, ⑪, ⑫ に対応する各々の座屈モードを図-11に示している。これらの図よりわかるように、横補剛材を板の長さの中央付近に配置すると、板の長さ方向および幅方向ともに2次のモードで座屈するが、板の長さの0.3倍付近に配置した場合、横補剛材位置が固定端に近い状態となり、座屈係数の上昇が認められる。

(3) 補剛板の非弾性座屈

縦補剛材のみを有する補剛板の残留応力分布についてわが国でも測定結果が報告されているが^{4), 5)}、本研究では板および縦補剛材の溶接による長さ方向の残留応力分布をそれぞれ図-12(a)および(b)のように仮定し⁶⁾、

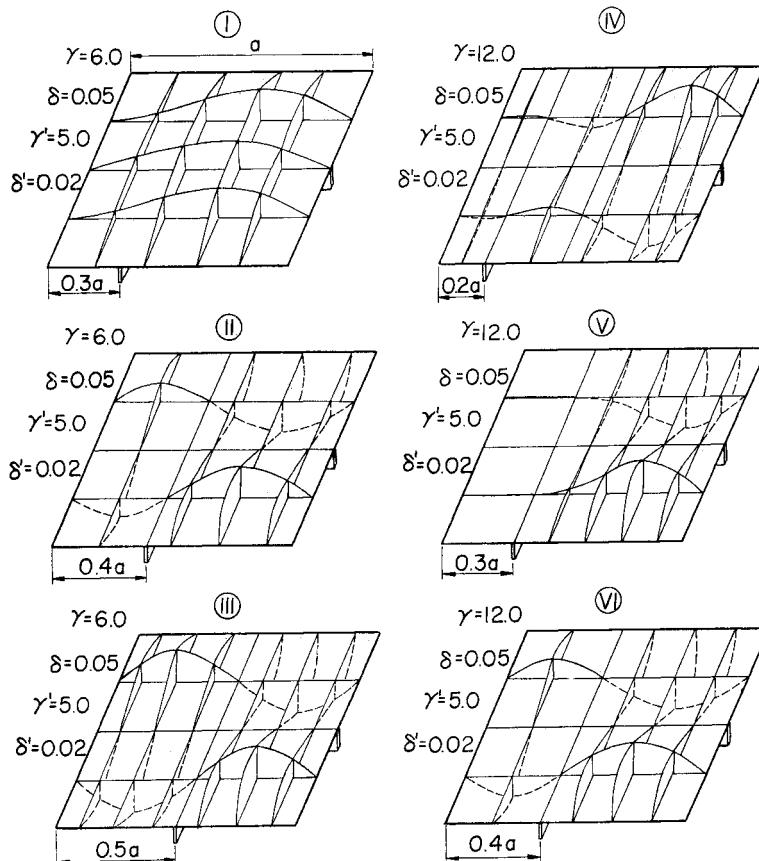


図-11 横補剛材位置と座屈モード

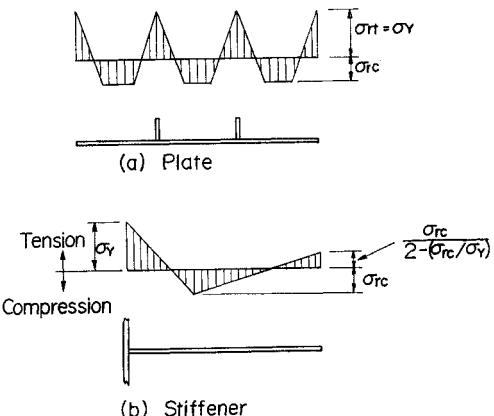


図-12 仮定した板および補剛材の残留応力分布

各サブパネルおよび縦補剛材断面内でつり合っているものとする。なお、横補剛材には溶接等による残留応力は存在しないものとし、本計算例では、 $\sigma_Y=3200 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_{rc}=0.5 \sigma_Y$ および $\sigma_{rt}=\sigma_Y$ を仮定する。

縦補剛材の曲げ剛度およびねじり剛度は、非弾性域 ($\sigma_{rc}/\sigma_Y=0.5$ の場合、作用軸ひずみ比 $\epsilon/\epsilon_Y \geq 0.5$) では作用軸ひずみの関数となり、作用軸ひずみの増加とともに減少する。非弾性域における各種剛度の算定は文献 8) によった。

補剛板の幅厚比を表わす一般的なパラメーターとして等価幅厚比 R を定義する。

$$R = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E} \cdot \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 k_0}} \\ = \frac{0.5259}{n} \lambda \dots\dots\dots (41)$$

ここに、 n は縦補剛材により分割されたサブパネル数であり、 k_0 は縦補剛材のみを有する補剛板の補剛材のねじり剛性を無視したときの補剛板の座屈係数の上限値であり、板がサブパネル間で単独座屈するときの最小座屈係数である。

$$k_0 = 4 n^2 \dots\dots\dots (42)$$

図-13はDIN 4114¹⁵⁾にしたがった最小剛比を有する縦および横補剛材がそれぞれ正方形板の中央に1本ずつ配置された場合の座屈曲線を示している。縦軸には降伏応力 σ_Y で無次元化された平均座屈応力が、横軸には式(41)で与えられる等価

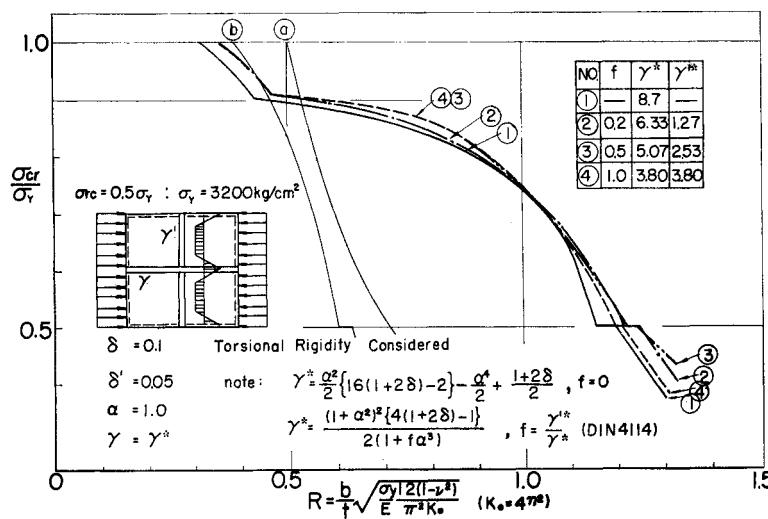


図-13 中央に縦および横補剛材を有する正方形板の座屈曲線

表-2 弾性座屈強度に及ぼすねじり剛性および残留応力の影響

$$f=1.0, R=1.3$$

ねじり剛性	残留応力	k	σ_{cr}/σ_y	モード	
				長さ方向	副方向
無視	無視	16.05	0.59	逆対称	逆対称
		15.23	0.56	対称	対称
考慮	無視	18.50	0.68	逆対称	対称
		15.23	0.56	対称	対称
無視	考慮	0.68	0.25	逆対称	逆対称
		10.11	0.37	対称	逆対称
考慮	考慮	10.35	0.38	逆対称	対称
		11.39	0.42	対称	対称

幅厚比がとられている。図中、曲線①は縦補剛材のみを有する場合、曲線②、③および④は横補剛材と縦補剛材の曲げ剛度の比 f がそれぞれ 0.2, 0.5 および 1.0 の場合に対するものであり、縦および横補剛材の断面積比はそれぞれ、 $\delta=0.1$ および $\delta'=0.05$ に固定されており、ねじり剛性の影響が考慮されている。さらに曲線⑤は残留応力を考慮しない弾性座屈曲線であり、曲線⑥は図中に示されるような残留応力分布を考慮した周辺純支持無補剛板注)の座屈曲線であり、比較のために $n=2$ に対する k が用いられている。

表-2 は縦補剛材と横補剛材の曲げ剛比が等しい図-13 の曲線④ ($f=1.0$) に相当する場合で、弾性座屈する $R=1.3$ での座屈係数（座屈応力）を、補剛材のねじり剛性および残留応力をそれぞれ無視した場合と考慮し

注) 縦補剛材がない場合、実際には図のような残留応力分布とはならない。

た場合の組合せについて座屈モードとともに示したものである。ねじり剛性および残留応力をともに無視した場合のサブパネルでの単独座屈に相当する長さ方向および幅方向とともに逆対称変形の場合の座屈係数は $k=16.05$ で厳密解 $k=16.0$ にほぼ等しいが、長さ方向に対称変形する場合、幅方向にも対称変形し、このときの座屈係数は $k=15.23$ であり、DIN 4114 の縦および横補剛材の最小剛比ではサブパネルで単独座屈するには不十分であることがわかる。また、表-2 より、座屈強度に及ぼす補剛材のねじり剛性および残留応力の影響が著しいことがわかる。

図-13において、座屈応力 σ_{cr} が $0.5 < \sigma_{cr}/\sigma_y < 0.7$ ($0.5 < \epsilon_{cr}/\epsilon_y < 0.8$) の範囲においては、縦補剛材の剛性の低下は小さいが、 $0.7 < \sigma_{cr}/\sigma_y < 0.9$ ($0.8 < \epsilon_{cr}/\epsilon_y < 1.35$) の範囲では縦補剛材の曲げ剛度は著しく低下し、もはや縦補剛材の位置で節となる座屈モードにはならない。横補剛材を有する補剛板においては、この範囲において横補剛材の影響が認められるが、しかし、大きな効果は期待できない。さらに、 $0.9 < \sigma_{cr}/\sigma_y < 1.0$ ($1.35 < \epsilon_{cr}/\epsilon_y < 2.0$) の範囲では、縦補剛材の曲げ剛度はほとんど零に等しく⁸⁾、縦方向に無補剛の状態となる。このことは、この範囲で曲線①と⑥

がほぼ一致することからも理解できる。

図-14 は DIN 4114 にしたがった最小剛比 $r^*=15.03$ を有する縦補剛材 2 本と横補剛材がない場合（曲線①）、曲げ剛比が $0.2r^*$, $0.5r^*$ および $1.0r^*$ の横補剛材 1 本を有する場合（曲線②, ③ および ④）と、 $0.5r^*$ の曲げ剛比を有する縦補剛材 2 本と曲げ剛比が $0.1r^*$, $0.25r^*$ および $0.5r^*$ の横補剛材 1 本を有する場合（曲線⑤, ⑥ および ⑦）についての正方形補剛板の座屈曲線を図-13 と同様に示している。ここに、縦および横補剛材の断面積比はそれぞれ $\delta=0.1$ および $\delta'=0.05$ に固定されており、ねじり剛性の影響が考慮されている。さらに曲線⑧および⑨は図-13 のものと同様のものである。

図において、曲線②, ③ および ④ は、 $0.5 < \sigma_{cr}/\sigma_y < 0.9$ の範囲において、曲線①より大きい座屈強度を示しており、これは明らかに横補剛材の効果である。しか

し、 $\sigma_{cr}/\sigma_Y > 0.9$ の範囲では縦補剛材の曲げ剛度が零に近づき、横補剛材の効果も小さくなる。また、たとえば、曲線③と⑦は $R < 0.65$ ($\sigma_{cr}/\sigma_Y > 0.88$) の範囲では一致し、縦補剛材の曲げ剛度の影響も消失する。

図-15(a)および(b)は、 $R=1.3$ での曲線②と曲線④の座屈モードを示したもので、いずれの場合も弹性範囲内の座屈である。曲線②に対する座屈モードでは、縦補剛材の位置で完全に節になっているが、横補剛材の位置では完全な節にならない。しかし、小さい横補剛材の曲げ剛比を有する曲線②の方が大きい横補剛材の曲げ剛比を有する曲線④より大きい座屈応力を示すのは、横補剛材のねじり剛度の影響である。

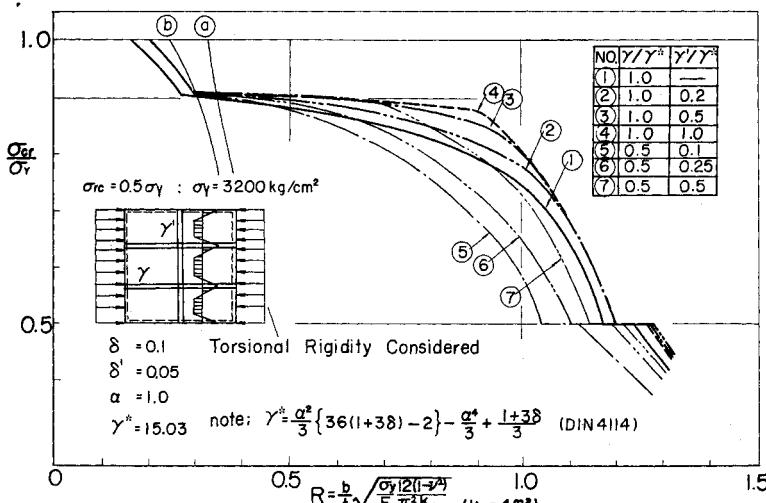


図-14 2本の縦補剛材と中央に横補剛材を有する正方形板の座屈曲線

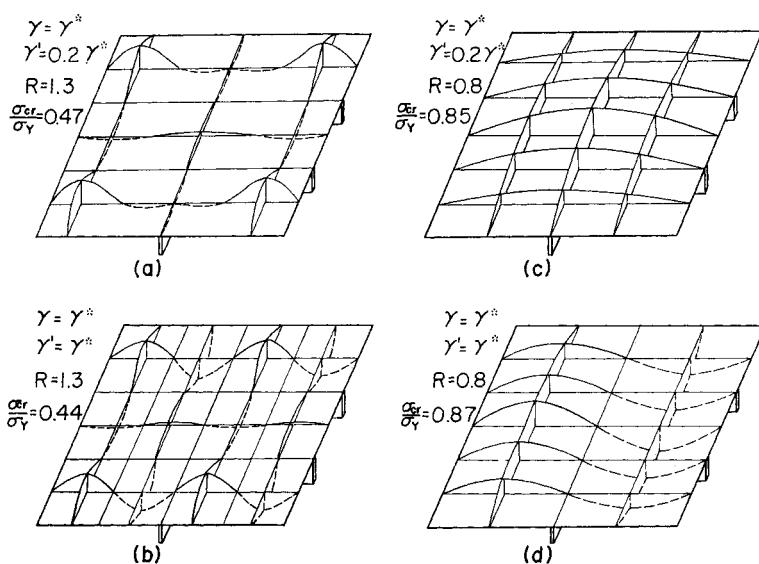


図-15 弾性および非弾性域での横補剛材剛比と座屈モード

り剛度の影響である。図-15(c)および(d)は $R=0.8$ での曲線②と曲線④の座屈モードを示したもので、いずれの場合も非弾性域での座屈である。曲線②の場合、補剛板の長さ方向および幅方向ともに対称変形であるが、曲線④の場合、幅方向には対称であるが長さ方向には逆対称変形で、横補剛材位置が節になっている。 $R=0.8$ では $R=1.3$ の場合とは逆に、横補剛材の曲げ剛度が座屈応力を高めるために有効であることがわかる。

(4) 横補剛材の補剛効果

図-16は板の中央に縦および横方向にそれぞれ1本の補剛材を配置した周辺単純支持正方形板の縦横補剛材

剛度の相関関係を示したものである。すなわち、縦補剛材のみを有する板が、縦補剛材位置が節となる座屈応力と同じ座屈応力を保持するために必要な、縦補剛材剛度と横補剛材剛度の関係を示したものである。縦軸には実際に用いられる縦補剛材の曲げ剛比 r ($\leq r^*$) と縦補剛材のみを有する場合のDIN 4114に規定される r^* の比がとられており、横軸には横補剛材の曲げ剛比 r' と縦補剛材の曲げ剛比 r の比 f がとられている。図中、曲線①は、縦および横方向にそれぞれ1本の補剛材を有する板に対するDIN 4114に規定されている相関曲線である。当然、残留応力および補剛材のねじり剛性は考慮されておらず、弹性範囲に対するものである。曲線②は、 $\alpha=1.0$ 、 $\delta=0.1$ の場合の縦補剛材のみを有するときの必要剛比 $r^*=8.7$ に對して、これと同じ座屈応力(座屈係数 $k=16.0$)を保持するために必要な横補剛材剛比の数値計算より得られた相関曲線であり、曲線①と同じ条件に対するものである。曲線③および④は、残留応力($\sigma_{rc}=0.5 \sigma_Y$)を考慮し、 $R=1.3$ (弹性座屈)および $R=1.0$ (非弹性座屈)に対するもので、縦補

剛材のみを有する場合、縦補剛材位置が節となる座屈応力 ($\sigma_{cr}/\sigma_y = 0.245$ ($R=1.3$)、および $\sigma_{cr}/\sigma_y = 0.653$ ($R=1.0$)) を保持するために必要な縦横補剛材剛比の相関曲線である。いずれの数値計算においても、縦補剛材のねじり剛性は無視されており、板の長さ方向の半波数は第4項までとられている。

曲線①において $f=0$ とおいた場合、 $r=0.874 r^*$ となり、さらに、計算された f の範囲においても、常に曲線①は曲線②の下側に位置し、先にも指摘したとおり、DIN 4114 に規定される縦および横補剛材の最小剛比ではサブパネルで単独座屈するには不十分であるといえる。図-16 中に示したような残留応力が分布する場合、縦補剛材のみを有するときに、縦補剛材位置が

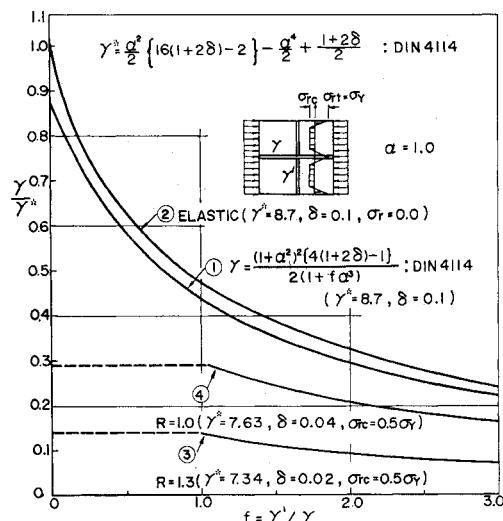


図-16 縦横補剛材剛度の相関関係

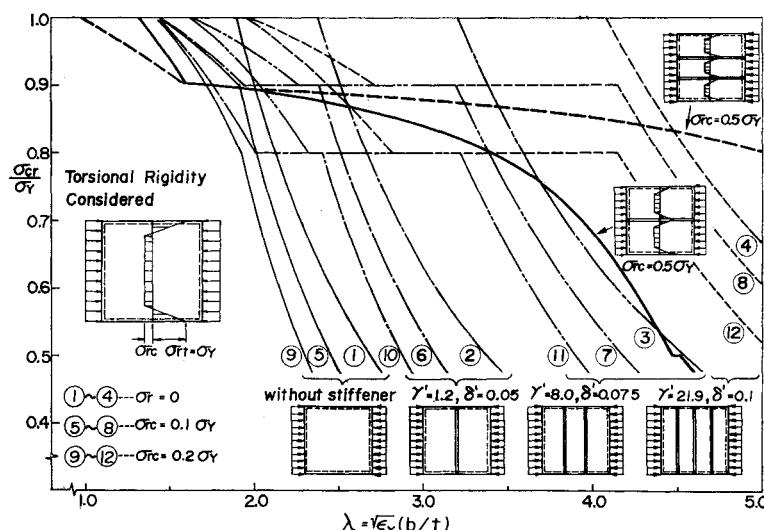


図-17 各種補剛板の座屈曲線

節となるために必要な縦補剛材剛比は $r=0.14 r^*$ ($R=1.3$) および $r=0.29 r^*$ ($R=1.0$) であり、残留応力を有しないものよりかなり小さい縦補剛材の曲げ剛比で節となる。これらの場合、 $0 < f < 1.0$ の範囲（曲線③および④の破線）では、横補剛材の効果がほとんどないことがわかる。なお、本計算例よりさらに小さい R の範囲では、縦補剛材のみを配置したとき、縦補剛材位置を節とするためには、非常に大きな補剛材の剛度を必要とし、実際的ではない。

図-17 は縦補剛材のみを有する補剛板と横補剛材のみを有する補剛板の座屈曲線を比較したものである。縦軸には平均座屈応力を降伏応力で無次元化したものが、横軸には、各座屈曲線を直接比較できるように λ がとられている。図中、太い実線および破線は、 $r=r^*$ の縦補剛材を 1 本または 2 本有し、図中に示される残留応力分布に対する座屈曲線で、図-13 および 14 の曲線①と同様のものである。また、細い実線、1 点鎖線、2 点鎖線および破線は無補剛板および 1 本、2 本および 3 本の横補剛材が等間隔に配置されている場合の座屈曲線である。各場合に対し、残留応力を無視した場合、図中左側に示されるような非載荷辺が溶断されている場合を想定した $\sigma_{rc}=0.1\sigma_y$ および $0.2\sigma_y$ ⁽¹⁹⁾ について、それぞれ座屈曲線が示されている。数値計算においては、補剛材のねじり剛性が考慮されており、横補剛材の曲げ剛度として、ねじり剛性を無視した場合、横補剛材位置が節となる最小剛比⁽²⁰⁾を、また、面積比 δ として、図中の λ の範囲において補剛材断面として著しく不適当とならないものを用いた。板の長さ方向の半波数は最大第7項までとられている。

図-17において、横補剛材のみを有する板の座屈強度を縦補剛材のみを有する板のものと比較すると次のことがいえる。

(1) 残留応力が小さい場合、横補剛材の本数および剛度を増すことにより、座屈応力を増加させることができる。

(2) 残留応力を有する場合でも、縦補剛材のみを有する板より λ の比較的大きい範囲で降伏応力に近い座屈応力を得ることができる。

しかし、横補剛材は直接荷重を分担しないのに反し、縦補剛材はたとえ降伏して剛性を失っても荷重を分担することができること、さらに本数値計算にお

いては横補剛材の溶接による残留応力分布を慮考していないことに注意を要する。

5. 結 言

本研究においては、まず、有限帶板要素法による縦方向および横方向に補剛された板要素からなる断面部材の両端で圧縮力を受ける場合の弾性および非弾性座屈解析法および数値計算法を示した。次に、これを用いて、横補剛材または縦および横補剛材で補剛された平面補剛板に対して、弾性および非弾性座屈強度に対する横補剛材の効果についての検討を行った。数値計算より得られたおもな結果は以下のとおりである。

(1) 解析法は比較的少ない分割数および長さ方向の半波長の数で十分な精度が得られる。

(2) 補剛材で仕切られたサブパネルのアスペクト比の小さい板（横補剛材間隔が密な場合）では横補剛材の効果が大きい。アスペクト比の大きい板で横補剛材の効果を期待するためには横補剛材のねじり剛性を大きくする必要がある。

(3) 横補剛材の剛度だけでなく、横補剛材の位置によっても座屈強度の上昇が期待できる。

(4) 残留応力および補剛材のねじり剛性の考慮の有無により、座屈強度のみならず、座屈モードの著しい変化が認められる。

(5) 残留応力を有する板の弾性および非弾性域での縦補剛材位置が節となるための必要剛度は、残留応力を有しないものより小さい。降伏応力に近い応力で、縦補剛材位置を節とすることはほとんど不可能である。

(6) 縦補剛材位置が節となる座屈応力と同一の座屈応力を保持するために必要な横補剛材剛度と縦補剛材剛度の相関関係は、残留応力の有無、弾性座屈か非弾性座屈かによって大きく変化する。

(7) 座屈強度に及ぼす縦補剛材および横補剛材の効果は弾性域と非弾性域で異なる。弾性域においては縦補剛材の効果が顕著であるが、縦補剛材の剛性が失われる降伏応力に近い応力では、横補剛材の効果が期待できる。しかし、解析においては、横補剛材の溶接による残留応力の影響を無視しているので、今後さらにこの点の検討を要するものと思われる。

本研究の数値計算には、東京大学大型計算機センターの HITAC 8800/8700、金沢大学計算機センターの FACOM 230-35、M 160、および石川工業高等専門学校の HI-TAC 8250 を使用した。

記 号

A, A' =縦、横補剛材の断面積

a =板の長さ

$[a]$, $[a']$ =板要素の無次元化された剛性行列、安定係数行列

$[a_L], [a_L']$ =縦補剛材の無次元化された剛性行列、安定係数行列

$[a_T]$ =横補剛材の無次元化された剛性行列

b =板要素の幅

b_0 =板の基準幅、板の幅

D_0 =板の曲げ剛性 ($=Et_0^3/12(1-\nu^2)$)

E =ヤング率

e =ひずみの塑性成分の降伏ひずみに対する比 ($=\epsilon_p/\epsilon_Y$)

$\langle F \rangle$ =節線力ベクトル

$\langle F_o \rangle$ =全節線の節線力に関するベクトル

G =せん断弾性係数

I_y, I_z =縦補剛材の図心を通り、 y', z' 軸に平行な軸まわりの断面2次モーメント

I_x', I_z' =横補剛材の図心を通り、 x'', z'' 軸に平行な軸まわりの断面2次モーメント

I_w, I_w' =縦、横補剛材のそり2次モーメント

$[K], [K']$ =全体剛性行列、全体安定係数行列

$K_T, K_{T'}$ =縦、横補剛材の St. Venant のねじり定数

k =座屈係数

k_0 =サブパネル間で単独座屈するときの最小座屈係数

$M_i, M_j=i, j$ 辺上の単位長さ当りの曲げモーメント

$N_i, N_j=i, j$ 辺上の単位長さ当りの y 方向の面内力

n =サブパネル数

R =等価幅厚比

$S_i, S_j=i, j$ 辺上の単位長さ当りの x 方向の面内力

t =板の厚さ

t_0 =板の基準厚さ

t_s =補剛材の厚さ

$u(x, y)$ = x 方向の面内変位関数

$u_i, u_j=i, j$ 辺上の x 方向の面内変位

$V_i, V_j=i, j$ 辺上の単位長さ当りのせん断力

$v(x, y)$ = y 方向の面内変位関数

$v_i, v_j=i, j$ 辺上の y 方向の面内変位

$w(x, y)$ = z 方向の面内変位関数

$w_i, w_j=i, j$ 辺上の z 方向の面内変位

α =アスペクト比 ($=a/b$)

r, r' =縦、横補剛材の曲げ剛比

r^* =DIN 4114 による補剛材の最小剛比

- τ =道路橋示方書による必要剛比
 τ_z =弱軸まわりの曲げ剛比
 $\tau_w, \tau_{w'}$ =縦、横補剛材のそりねじり剛比
 $\tau_t, \tau_{t'}$ =縦、横補剛材の St. Venant のねじり剛比
 $\tau_p, \tau_{p'}$ =縦、横補剛材の極 2 次半径比
 δ, δ' =縦、横補剛材の面積比
 ε_Y =降伏ひずみ
 $\eta = y/b$
 θ =縦補剛材のねじり角
 $\theta_i, \theta_j = i, j$ 辺上の y 方向のたわみ角
 λ =板の幅厚比を表わす無次元量 ($= \sqrt{\varepsilon_Y \cdot b_0/t_0}$)
 ν, ν' =弾性、非弾性域でのポアソン比
 $\xi = b/b_0$
 σ =残留応力を含めた軸方向圧縮応力
 σ_{cr} =座屈応力
 σ_{rc}, σ_{rt} =残留応力の圧縮、引張の最大値
 σ_Y =降伏応力
 ϕ =横補剛材のねじり角
 φ_0, φ_0' =帶板要素の座標系と縦、横補剛材主軸座標系のなす角

参考文献

- 1) 長谷川彰夫・大田孝二・西野文雄：補剛された板要素の座屈強度に関する二、三の考察、土木学会論文報告集、No. 232, pp. 1~15, 1974 年 12 月。
- 2) 長谷川彰夫・西野文雄：宇佐美 勉：“補剛材つき板の著性ならびに非弾性圧縮座屈強度”への討議、土木学会論文報告集、No. 243, pp. 125~129, 1975 年 11 月。
- 3) 本州四国連絡橋上部構造研究小委員会・座屈分科会：補剛材つき圧縮板の設計要領(案)、本州四国連絡橋上部構造に関する調査研究報告書、別冊 1, 1974 年 3 月。
- 4) 小松定夫・牛島正之・北田俊行：補剛材を有する圧縮板の極限強度に関する実験的研究、土木学会論文報告集、No. 255, pp. 47~61, 1976 年 11 月。
- 5) 小松定夫・牛島正之・北田俊行：補剛板の溶接残留応力および初期たわみに関する実験的研究、土木学会論文報告集、No. 265, pp. 25~35, 1977 年 9 月。
- 6) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説、1973 年 2 月。
- 7) 信原泰夫・桜井達美・吉村信敏：有限要素法のプログラム・デザイン、コンピューターによる構造工学講座、II-
- 2-B, 日本鋼構造協会編、培風館、1972 年。
- 8) 宇佐美 勉：補剛材つき板の弾性ならびに非弾性圧縮座屈強度、土木学会論文報告集、No. 228, pp. 13~28, 1974 年 8 月。
- 9) 山田嘉昭：塑性・粘弾性、コンピューターによる構造工学講座、II-2-A, 日本鋼構造協会編、培風館、1972 年。
- 10) 吉田 博：H 型鋼柱の局部座屈と曲げ座屈の連成座屈強度、土木学会論文報告集、No. 243, pp. 19~32, 1975 年 11 月。
- 11) 吉田宏一郎：帯板要素による平板構造の座屈解析、日本造船学会論文集、No. 130, pp. 161~171, 1972 年。
- 12) 吉田宏一郎・岡 徳昭：帯板要素による平板構造の曲げ解析、日本造船学会論文集、No. 132, pp. 289~298, 1972 年。
- 13) Bijlaard, P.P. : Theory and Tests on the Plastic Stability of Plates and Shells, Jour. Aero. Sci., Vol. 16, No. 9, pp. 529~541, Sept., 1949.
- 14) Cheung, Y.K. : Finite Strip Method of Analysis of Elastic Slabs, Proc. of ASCE, Vol. 94, No. EM 6, pp. 1365~1378.
- 15) DIN 4114, Blatt 2, : Stahlbau, Stabilitätfalle (Knickung, Kippung, Beulung), Berechnungsgrundlagen, Richtlinien Feb., 1953.
- 16) Fukumoto, Y., Usami, T., and Okamoto, Y., : Ultimate Compressive Strength of Stiffened Plates, ASCE Specialty Conference on Metal Bridges, Nov., 1974.
- 17) Fukumoto, Y., Usami, T., and Yamaguchi, K., : Inelastic Buckling Strength of Stiffened plates in Compression, IABSE Proc., P-8/77, 1977.
- 18) Klöppel, K., and Möller, K.H., : Beulwerte ausgesteifter Rechteckplatten, II. Band, Verlag Ernst & Sohn, 1968.
- 19) Nishino, F., : Buckling Strength of Columns and Their Component Plates, Ph. D. Dissertation, Lehigh Univ., 1964.
- 20) Przemienicki, J.S., : Matrix Analysis of Local Instability of Plates, Stiffened Panels and Columns, Int. Jour. for Numerical Methods in Engrg., Vol. 5, pp. 209~216, 1972.
- 21) Stowell, E.Z., : A Unified Theory of Plastic Buckling of Columns and Plates, NACA Rep. 898, 1948.
- 22) Timoshenko, S.P., abd Gere, J.M., : Theory of Elastic Stability, Second Edition, McGraw-Hill, 1961.
- 23) Ueda, Y., : Elastic, Elastic-Plastic and Plastic Buckling of Plates with Residual Stresses, Ph. D. Dissertation, Lehigh Univ., 1961.
- 24) Washizu, K., : Variational Method in Elasticity and Plasticity, Pergamon-Press, 1968.

(1977.12.5・受付)