

せん断変形を考慮した薄肉断面直線ばりの理論

THIN-WALLED BEAMS WITH SHEAR DEFORMATION

稼 農 知 徳*・薄 木 征 三**・堀 江 保***
By Tomonori KANO, Seizo USUKI and Yasusi HORIE

1. まえがき

軸方向力、曲げモーメントおよびねじれモーメントを受ける薄肉断面直線材に関する理論は 17 世紀頃から著名な研究者らにより研究され、偉大な業績の蓄積によってほぼ体系化されている。これらの偉大な研究業績を示すのは枚挙にいとまがないが、そのもっとも基本的ななりの古典曲げ理論にもいくつかの問題点を含んでいるといわれる。この問題点の一つにせん断変形に対する理論的矛盾を指摘することができる。古典曲げ理論は横荷重に対するせん断ひずみ零の仮定より出発して、変位場を決め、軸方向応力を求めており、ところが実際にはせん断応力が存在するのでその分布をやむをえず応力のつり合い式より求めて修正している。したがって、変位場を求める段階では応力のつり合いを満たしていないという矛盾した結果を生みだしている。

せん断変形の影響は一般的には小さいが、断面寸法に比べ長さが短いはりや固定端のように断面拘束の強い部分では無視しえないほど大きな量となる。曲げを受けるはりのせん断変形の影響を考慮したはり理論には、いわゆる Timoshenko はり理論¹⁾がある。Timoshenko の基本的な仮定は平面保持の仮定である。すなわち、せん断ひずみは断面内で一様に分布するとしている。その後、Timoshenko のせん断補正係数について多くの研究があるが、Cowper²⁾は 3 次元弾性論よりそのせん断補正係数をより精確に求めている。また、ねじれを受けるはりの理論には Saint-Venant のねじれ理論がある。これは Saint-Venant のねじれ問題といわれ、Semi-inverse Method によって厳密解が求められている。そして、Saint-Venant のねじれ理論を拡張したはりの曲げねじ

れ理論^{3)~5)}においては Saint-Venant のねじれによるせん断変形のみが考慮されている。さらに Saint-Venant のねじれ以外のせん断応力によるせん断変形の影響を考慮した薄肉材の理論に発展しているがこれまでにも多くの研究報告がある^{6)~13)}。

これらの研究は文献 12)でも指摘しているように本質的にはせん断変形としてせん断応力によるひずみエネルギーと等価になるようなせん断ひずみを用いており、誘導過程に差があるだけで Timoshenko はり理論の拡張といえよう。

一方、薄肉箱形ばかりの Shear-lag に関する論文に、E. Reissner の研究^{14), 15)}がある。これは従来のはり理論では得られない Shear-lag 効果を考慮した実情に近い直応力を計算する方法であり箱形ばかりの直応力分布を 2 次曲線と仮定しエネルギー最小の原理により解析している。

3 次元せん断変形解析としては、川井・藤谷の研究¹⁶⁾がある。これは構造物理想化の原理に基づき有限要素法によるはりの精密なせん断変形解析を行ったものである。しかし、結果的にはその解析はかなり複雑化していることは否めない事実である。

ここでは薄肉断面直線材を対象とし、せん断変形を考慮したはり理論の基礎方程式を変位場を求める段階において応力のつり合いをより精確に満足するように補正し仮想仕事の原理から求めることができたので報告する。この報告の理論体系はある仮定されたひずみ分布を用いて変位場を決定し、これをもとにはり理論の基礎式を求めるが結果として得られるひずみ分布は依然として応力のつり合いを完全には満足していないので、さらにひずみ分布の補正をしなければならない、いわゆる逐次近似理論である。しかし、後述するように、古典曲げ理論を第 1 近似理論とすれば第 2 近似理論の結果として得られる変位とせん断ひずみ分布は、第 3 近似理論のそれにはほとんど収束していることがわかった。したがって、ここ

* 正会員 工博 秋田大学教授 鉱山学部土木工学科

** 正会員 秋田大学助教授 鉱山学部土木工学科

*** 正会員 工修 秋田工業高等専門学校助手 土木工学科

では第2近似理論で十分であるとして基礎式を求める理論を示したものである。また、本報告の一つの特徴としてあくまでもはり理論を保持した上でせん断変形を考慮することを原則としているが、断面内応力分布を求める式において、Shear-lag効果を評価できることがあげられる。これについては一軸曲げに関してその誘導過程とともに得られた式が上述のE. Reissnerの求めた式と形式上はまったく一致することを示す。

2. ひずみ-変位関係式

(1) 座標系と仮定

薄肉直線材の解析に必要な部材上の点を表わすために次の2つの座標系を用いる。その一つは、任意の点Dを原点とする座標系(x, y, z)であり、直交デカルト座標を構成する。他の一つは板厚中心線上の任意の点Cを原点とする座標系(s, n, z)であり、直交曲線座標である。ここで、 s は断面の板厚中心線に沿ってとった座標であり、 n はこれに垂直な座標である。両座標系に共通な z 座標を部材軸に平行に選び、両座標系はともに右手系の座標とする(Fig. 1 参照)。

変位場を求めるためにひずみ分布に対して次の仮定をおく。

- [I] 断面形は変形しない(断面不变の仮定)。
- [II] 板厚中心面に垂直で部材軸線に平行な面内でのせん断ひずみは無視する。

(2) ひずみと変位

一般的に、ひずみ-変位関係は式(1)のように表わされる。

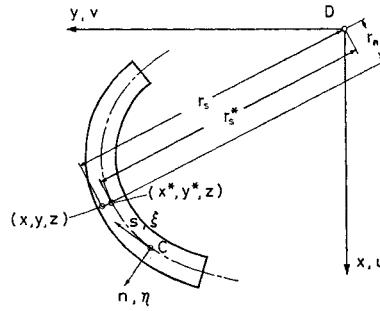
$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1)_{a-f}$$

ここで、 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ はひずみ成分であり、 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ はそれぞれ薄肉断面上の任意の点P(x, y, z)の x, y, z 方向への変位である。

仮定[I]を用いると、式(2)のように表わされる。

$$\epsilon_x = 0, \epsilon_y = 0, \gamma_{xy} = 0 \quad (2)$$

式(1)_{a,b,d}と式(2)から、断面上の任意の点Pの変



$$\begin{aligned} y &= y^* + ln \\ x &= x^* - mn \\ r_s &= r_s^* + n \\ r_n &= r_n^* \end{aligned}$$

Fig. 1 Coordinates

位 \bar{u}, \bar{v} は原点Dの変位 u, v と断面の回転 φ によって式(3)のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= u - y\varphi \\ \bar{v} &= v + x\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3)_{a,b}$$

方向余弦 l, m を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos(s, x) \\ m &= \cos(s, y) \end{aligned} \right\} \quad (4)_{a,b}$$

式(4)を用いると、 s, n 方向への変位 ξ, η は式(5)のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= l\bar{u} + m\bar{v} = lu + mv + r_s\varphi \\ \eta &= m\bar{u} - l\bar{v} = mu - lv + r_n\varphi \end{aligned} \right\} \quad (5)_{a,b}$$

ここに、

$$r_s = mx - ly, \quad r_n = -lx - my \quad (6)_{a,b}$$

式(1)_{e,f}のせん断ひずみを曲線座標(s, n, z)で表わすと、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{sz} &= m\gamma_{yz} + l\gamma_{zx} \\ &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} + u' \frac{\partial x}{\partial s} + v' \frac{\partial y}{\partial s} + r_s\varphi' \\ \gamma_{nz} &= -l\gamma_{yz} + m\gamma_{zx} \\ &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} + u' \frac{\partial x}{\partial n} + v' \frac{\partial y}{\partial n} + r_n\varphi' \end{aligned} \right\} \quad (7)_{a,b}$$

式(7)のように表わされると、せん断ひずみに関する仮定が適用しやすい。 $(\)'$ は z に関する微分を表わす。

さて、仮定[II]は、

$$\gamma_{nz} = 0 \quad (8)$$

であるから、式(7)_bに適用し、 n について積分すると、

$$\bar{w} = \bar{w}^* - (x - x^*)u' - (y - y^*)v' - r_n n \varphi' \quad (9)$$

ここで、 $(\)^*$ は薄肉中心線上($n=0$)での値である(Fig. 1 参照)。

一方、微小要素 $tdsdz$ の応力のつり合いを考えると、

$$\frac{\partial(\gamma_{sz}^* t)}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_z dn \right\} + \int_{-t/2}^{t/2} \bar{p}_{zd} dn = 0 \quad (10)$$

ここで t は板厚であり、 \bar{p}_{zd} は部材軸方向の単位体積当

せん断変形を考慮した薄肉断面直線ばかりの理論

りの分布外力である。分布外力はないものとして、式(10)を s について積分し、せん断弾性係数 G で除すると、

$$r_{sz^*} = \frac{q}{Gt} - \frac{1}{Gt} \int_{s_1}^s \left[\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_z dn \right\} \right] ds \quad (11)$$

ここで、 $q = (r_{sz^*} \cdot t)_{s=s_1}$ は積分定数であり、 s_1 は板厚中心線上の任意の点の s 座標である。

従来の薄肉断面部材に関する理論では式(11)の右辺第2項は小さいものとして無視しているが、ここではなんらかの形で考慮しようとするわけである。しかし、はり理論として断面不变をとにかく保持しようとするのであるから近似的に付加する形で修正することになる。したがって、第1近似値として、式(11)の右辺第2項を無視して得られる変位量に添字1を付しておき、第1近似変位量から得られる直応力 σ_z を式(11)に用いて、繰り返し変位量を求めて、これらの変位量に添字2を付して区別する。このような繰り返し、修正する方法では解の収束が問題となるが¹⁰⁾、後述の新しい独立変数の導入とあいまって第2近似まで十分であることが確認された(6. 参照)。したがって、式(11)において第2項を無視して、

$$r_{sz^*} = \frac{q_1}{Gt} \quad (12)$$

式(12)では曲げせん断およびそり拘束ねじりに伴うせん断応力によるせん断変形は考慮されていない。式(7)_aの変位を第1近似の変位で表わし、式(12)に代入すると、

$$\frac{\partial \bar{w}_1^*}{\partial s} = \frac{q_1}{Gt} - u_1' \frac{\partial x^*}{\partial s} - v_1' \frac{\partial y^*}{\partial s} - r_s^* \varphi_1' \quad (13)$$

q_1 は変位 \bar{w}_1^* の連続条件 $\oint \frac{\partial \bar{w}_1^*}{\partial s} ds = 0$ より式(14)のように求められる。

$$q_1 = G \frac{\oint r_s^* ds}{\oint \frac{1}{t} ds} \varphi_1' \quad (14)$$

式(13)を s について積分し、式(14)を代入すると、式(15)となる。

$$\begin{aligned} \bar{w}_1^* &= c_1(z) - (x^* - x_0^*) u_1' \\ &\quad - (y^* - y_0^*) v_1' - \varrho^* \varphi_1' \end{aligned} \quad (15)$$

ここで $c_1(z)$ は積分定数であり、 x_0^* , y_0^* はC点($s=0$)の x , y 座標、 ϱ^* は次式で表わされる。

$$\varrho^* = \int_0^s \left\{ r_s^* - \frac{1}{t} \frac{\oint r_s^* ds}{\oint \frac{1}{t} ds} \right\} ds \quad (16)$$

積分定数 $c_1(z)$ は文献17)の仮想薄板の方法を用いて決定する。原点Dの軸方向変位 $w_D = w(x=0, y=0, z)$ と表わすと、

$$c_1(z) = w_1 - x_0^* u_1' - y_0^* v_1' + \varrho_D^* \varphi_1' \quad (17)$$

ここで、 ϱ_D^* は原点Dでの ϱ^* であり、次のように表わされる。

$$\varrho_D^* = \int_0^{s_c} r_s^* ds \quad (18)$$

s_c は原点Dの仮想薄板に沿ってはかられる s 座標である。

式(9), (15)および(17)から第1近似の軸方向変位 \bar{w}_1 として次のように与えられる。

$$\bar{w}_1 = w_1 - xu_1' - yv_1' - \omega\varphi_1' \quad (19)$$

ここで、

$$\varrho = \varrho^* + r_n \cdot n - \varrho_D^* \quad (20)$$

式(19)より直ひずみ ε_z と変位の関係は、

$$\varepsilon_z = w_1' - xu_1'' - yv_1'' - \omega\varphi_1'' \quad (21)$$

応力-ひずみ関係の仮定(4. 参照)から、

$$\sigma_z = E\varepsilon_z \quad (41)$$

ここで、 E は弾性係数である。

次に、式(41)を式(11)の応力のつり合い式に代入して、以下同様な手順を繰り返すことによって第2近似変位量を求めるこにする。

式(11)は次のようにになる。

$$r_{sz^*} = \frac{q_2}{Gt} - \frac{E}{Gt} \int_{s_1}^s (x^* u_1''' + y^* v_1''' + \omega^* \varphi_1''') t ds \quad (22)$$

式(22)では、式(21)における右辺第1項は無視している。

式(7)_aの変位を第2近似の変位で表わし、式(22)に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}_2^*}{\partial s} &= \frac{q_2}{Gt} - u_2' \frac{\partial x^*}{\partial s} - v_2' \frac{\partial y^*}{\partial s} - r_s^* \varphi_2' \\ &\quad + \frac{E}{Gt} (s_{x0} u_1''' + s_{y0} v_1''' + s_{\omega0} \varphi_1''') \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、

$$s_{x0} = \int_{s_1}^s x^* t ds, \quad s_{y0} = \int_{s_1}^s y^* t ds, \quad s_{\omega0} = \int_{s_1}^s \omega^* t ds \quad (24)_{a-c}$$

q_2 は変位の連続条件 $\oint \frac{\partial \bar{w}_2^*}{\partial s} ds = 0$ より次のように求まる。

$$q_2 = G \frac{\oint r_s^* ds}{\oint \frac{1}{t} ds} \varphi_2' - E (s_{x1} u_1''' + s_{y1} v_1''' + s_{\omega1} \varphi_1''') \quad (25)$$

ここで、

$$s_{x1} = \frac{\oint s_{x0} ds}{\oint \frac{1}{t} ds}, \quad s_{y1} = \frac{\oint s_{y0} ds}{\oint \frac{1}{t} ds}, \quad s_{\omega1} = \frac{\oint s_{\omega0} ds}{\oint \frac{1}{t} ds} \quad (26)_{a-c}$$

式(23)を s について積分し、式(25)を代入すると、式(27)となる。

$$\begin{aligned}\bar{w}_2^* &= c_2(z) - (x^* - x_0^*) u_2' - (y^* - y_0^*) v_2' - \varphi_2' \\ &+ \frac{E}{G} (B_x u_1''' + B_y v_1''' + B_\omega \varphi_1''')\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(27)$$

ここで、 $c_2(z)$ は積分定数であり、 B_x, B_y および B_ω は次のように定義されている。

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \int_{s_1}^s \frac{s_x}{t} ds, \quad B_y = \int_{s_1}^s \frac{s_y}{t} ds, \quad B_\omega = \int_{s_1}^s \frac{s_\omega}{t} ds \\ s_x &= s_{x0} - s_{x1}, \quad s_y = s_{y0} - s_{y1}, \quad s_\omega = s_{\omega0} - s_{\omega1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(28)_{a-f}$$

積分定数 $c_2(z)$ は仮想薄板の方法を用いて次のように表わされる。

$$c_2(z) = w_2 - x_0^* u_2' - y_0^* v_2' - \varphi_D^* \varphi_2' \quad \dots\dots\dots(29)$$

式(9)、(27)および(29)から第2近似の軸方向変位 w_2 が次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\bar{w}_2 &= w_2 - x u_2' - y v_2' - \omega \varphi_2' \\ &+ \frac{E}{G} (B_x u_1''' + B_y v_1''' + B_\omega \varphi_1''')\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(30)$$

式(30)には w_2, u_2, v_2 および φ_2 のほかに u_1, v_1 および φ_1 なる独立な変位成分が含まれている。本報告では、せん断ひずみを新しく独立な自由度として選ぶことを考え、式(30)における u_1, v_1 および φ_1 の3次導関数を式(31)のように置換する。これにより式の展開の煩雑さも免かれ、解の形も簡単になる。

$$U(z) \equiv u_1'''(z), \quad V(z) \equiv v_1'''(z), \quad \phi(z) \equiv \varphi_1'''(z) \quad \dots\dots\dots(31)_{a-c}$$

したがって、式(30)は式(31)を考慮し、第2近似変位量の添字を省略して表わすと、断面上の任意点 $P(x, y, z)$ の軸方向変位 \bar{w} が次のように得られる。

$$\begin{aligned}\bar{w} &= w - x u' - y v' - \omega \varphi' \\ &+ \frac{E}{G} (B_x U + B_y V + B_\omega \phi)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(32)$$

式(32)を式(1)cおよび(7)aに代入すると、

$$\left. \begin{aligned}\epsilon_z &= w' - x u'' - y v'' - \omega \varphi'' \\ &+ \frac{E}{G} (B_x U' + B_y V' + B_\omega \phi')\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots(33)_{a,b}$$

$$\tau_{sz} = \theta \varphi' + \frac{E}{G} \left(\frac{s_x}{t} U + \frac{s_y}{t} V + \frac{s_\omega}{t} \phi \right)$$

ここで、

$$\theta = 2n + \frac{1}{t} \frac{\oint r_s * ds}{\oint \frac{1}{t} ds} \quad \dots\dots\dots(34)$$

式(33)bに示すせん断ひずみ τ_{sz} のうち第1項はSt. Venantのねじれによるせん断ひずみ、第2, 3項が曲げせん断のせん断変形によるせん断ひずみ、そして第4項がそり拘束ねじれに伴うせん断変形によるせん断ひずみを表わしている。したがって、前述の新しい独立な変位

成分はせん断ひずみを独立な自由度にとっていることがわかる。以上により変位場に対して式(2), (8)で表わされる仮定のもとでより精確に応力場をも満足させ、かつ上の仮定を満足する変位場は式(5), (32)で表わされ、ひずみ成分は式(33)で表わされる。

3. つり合い式と境界条件

一般に、ひずみ成分が表示されると、エネルギー変分原理を適用することによって変形を支配する基礎微分方程式と境界条件が得られる。薄肉直線材が分布して作用する外力とその両端に外的に作用する表面力を受けて空間でつり合っているとき、仮想仕事の原理は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}&\int_{z_1}^{z_2} \int_F [\sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{sz} \delta \tau_{sz}] dF \cdot dz \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \int_F [p_{xd} \delta \bar{u} + p_{yd} \delta \bar{v} + p_{zd} \delta \bar{w}] dF \cdot dz \\ &+ \left[\int_F (\bar{\sigma}_z \delta \bar{w} + \bar{\tau}_{sz} \delta \zeta + \bar{\tau}_{nz} \delta \eta) dF \right]_{z_1}^{z_2} \quad \dots\dots\dots(35)\end{aligned}$$

式(35)の右辺第1項は分布外力 p_d の x, y, z 軸成分のつくるエネルギーで、第2項は両端断面 $z=z_1$ および $z=z_2$ に作用する表面力の z, s, n 成分のつくるエネルギーである。式(35)に(3), (5), (32)および(33)を代入し部分積分すると、

$$\begin{aligned}&\int_{z_1}^{z_2} \left[N_z' + p_z \right] \delta w dz + \left[(\bar{N}_z - N_z) \delta w \right]_{z_1}^{z_2} \\ &+ \int_{z_1}^{z_2} [M_y'' + p_x + m_y'] \delta u dz \\ &+ \left[(\bar{Q}_x - M_y' - m_y) \delta u + (M_y - \bar{M}_y) \delta u' \right]_{z_1}^{z_2} \\ &+ \int_{z_1}^{z_2} [M_x'' + p_y + m_x'] \delta v dz \\ &+ \left[(\bar{Q}_y - M_x' - m_x) \delta v + (M_x - \bar{M}_x) \delta v' \right]_{z_1}^{z_2} \\ &+ \int_{z_1}^{z_2} [M_w'' + T_s' + m_z + m_w'] \delta \varphi dz \\ &- \left[(\bar{T}_z - M_w' - T_s - m_w) \delta \varphi + (M_w - \bar{M}_w) \delta \varphi' \right]_{z_1}^{z_2} \\ &+ \int_{z_1}^{z_2} [H_y' - T_x + h_y] \delta U dz \\ &+ \left[(\bar{H}_y - H_y) \delta U \right]_{z_1}^{z_2} + \int_{z_1}^{z_2} [H_x' - T_y + h_x] \delta V dz \\ &+ \left[(\bar{H}_x - H_x) \delta V \right]_{z_1}^{z_2} + \int_{z_1}^{z_2} [H_w' - T_\varphi + h_w] \delta \varphi dz \\ &+ \left[(\bar{H}_w - H_w) \delta \varphi \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \quad \dots\dots\dots(36)\end{aligned}$$

ここで、

$$N_z = \int_F \sigma_z dF, \quad M_x = \int_F \sigma_z y dF, \quad M_y = \int_F \sigma_z x dF \quad \dots\dots\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} M_w = \int_F \sigma_z \omega dF, Q_x = \int_F \tau_{sz} l dF, Q_y = \int_F \tau_{sz} m dF \\ T_s = \int_F \tau_{sz} \theta dF, T_z = \int_F \tau_{sz} r_s dF \\ H_x = \int_F \sigma_z \frac{E}{G} B_y dF, H_y = \int_F \sigma_z \frac{E}{G} B_x dF \\ H_w = \int_F \sigma_z \frac{E}{G} B_w dF, T_x = \int_F \tau_{sz} \frac{E}{G} \frac{s_x}{t} dF \\ T_y = \int_F \tau_{sz} \frac{E}{G} \frac{s_y}{t} dF, T_\varphi = \int_F \tau_{sz} \frac{E}{G} \frac{s_w}{t} dF \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (37)_{a-k}$$

$$\left. \begin{array}{l} p_x = \int_F p_{xd} dF, p_y = \int_F p_{yd} dF, p_z = \int_F p_{zd} dF \\ m_x = \int_F p_{zd} y dF, m_y = \int_F p_{zd} x dF \\ m_w = \int_F p_{zd} \omega dF, m_z = \int_F (p_{yd} x - p_{xd} y) dF \\ h_x = \int_F p_{zd} \frac{E}{G} B_y dF, h_y = \int_F p_{zd} \frac{E}{G} B_x dF \\ h_w = \int_F p_{zd} \frac{E}{G} B_w dF \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (38)_{a-j}$$

上付の棒は、両端断面での表面力による端部外力を表わす。

任意の仮想変位に対して、式(36)よりつり合い方程式と境界条件を求めることができる。

つり合い方程式：

$$\left. \begin{array}{l} N_z' + p_z = 0 \\ M_y'' + p_x + m_y' = 0 \\ M_x'' + p_y + m_x' = 0 \\ M_w'' + T_s' + m_z + m_w' = 0 \\ H_y' - T_x + h_y = 0 \\ H_x' - T_y + h_x = 0 \\ H_w' - T_\varphi + h_w = 0 \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (39)_{a-g}$$

$z=z_1$ および $z=z_2$ における境界条件：

$$\left. \begin{array}{l} w=c_1 \text{ または } \bar{N}_z = N_z \\ u=c_2 \text{ または } \bar{Q}_x = M_y' + m_y \\ u'=c_3 \text{ または } \bar{M}_y = M_y \\ v=c_4 \text{ または } \bar{Q}_y = M_x' + m_x \\ v'=c_5 \text{ または } \bar{M}_x = M_x \\ \varphi=c_6 \text{ または } \bar{T}_z = M_w' + T_s + m_w \\ \varphi'=c_7 \text{ または } \bar{M}_w = M_w \\ U=c_8 \text{ または } \bar{H}_y = H_y \\ V=c_9 \text{ または } \bar{H}_x = H_x \\ \Phi=c_{10} \text{ または } \bar{H}_w = H_w \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (40)_{a-j}$$

ここに、 $c_1 \sim c_{10}$ は定数である。

4. 断面力-変位関係式

はり理論では軸方向直応力 σ_z が他の応力成分より大きいと考えることができるので、この応力に対応するひ

ずみ ϵ_z との関係はヤング率 E で結ばれるものとする。
 $\sigma_z = E \epsilon_z, \tau_{sz} = G \gamma_{sz} \dots \dots \dots \dots \dots \quad (41)_{a,b}$

式(33), (41)を式(37)に代入すると、式(37)の断面力-変位関係式は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} N_z &= EF\omega' - EZ_x v'' - EZ_y u'' - EZ_w \varphi'' \\ &\quad + E_g K_{fx} V' + E_g K_{fy} U' + E_g K_{fw} \Phi' \\ M_x &= EZ_x w' - EJ_x v'' - EJ_{xy} u'' - EC_x \varphi'' \\ &\quad + E_g K_{xx} V' + E_g K_{xy} U' + E_g K_{xw} \Phi' \\ M_y &= EZ_y w' - EJ_{xy} v'' - EJ_y u'' - EC_y \varphi'' \\ &\quad + E_g K_{xy} V' + E_g K_{yy} U' + E_g K_{yw} \Phi' \\ M_w &= EZ_w w' - EC_x v'' - EC_y u'' - EJ_w \varphi'' \\ &\quad + E_g K_{xw} V' + E_g K_{yw} U' + E_g K_{ww} \Phi' \\ Q_x &= GZ_x \varphi' + EC_{tx} V + EC_{ty} U + EC_{tw} \Phi \\ Q_y &= GZ_y \varphi' + EC_{mx} V + EC_{my} U + EC_{mw} \Phi \\ T_s &= GJ_z \varphi' + ED_{sx} V + ED_{sy} U + ED_{sw} \Phi \\ T_y &= ED_{sx} \varphi' + E_g D_{xx} V + E_g D_{xy} U + E_g D_{xw} \Phi \\ T_x &= ED_{sy} \varphi' + E_g D_{xy} V + E_g D_{yy} U + E_g D_{yw} \Phi \\ T_\varphi &= ED_{sw} \varphi' + E_g D_{xw} V + E_g D_{yw} U + E_g D_{ww} \Phi \\ H_x &= E_g K_{fx} w' - E_g K_{xx} v'' - E_g K_{xy} u'' \\ &\quad - E_g K_{xw} \varphi'' + E_{gg} R_{xx} V' + E_{gg} R_{xy} U' \\ &\quad + E_{gg} R_{xw} \Phi' \\ H_y &= E_g K_{fy} w' - E_g K_{xy} v'' - E_g K_{yy} u'' \\ &\quad - E_g K_{yw} \varphi'' + E_{gg} R_{xy} V' + E_{gg} R_{yy} U' \\ &\quad + E_{gg} R_{yw} \Phi' \\ H_w &= E_g K_{fw} w' - E_g K_{xw} v'' - E_g K_{yw} u'' \\ &\quad - E_g K_{ww} \varphi'' + E_{gg} R_{xw} V' + E_{gg} R_{yw} U' \\ &\quad + E_{gg} R_{ww} \Phi' \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (42)_{a-m}$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} F &= \int_F dF, Z_x = \int_F y dF, Z_y = \int_F x dF \\ Z_w &= \int_F \omega dF, J_x = \int_F y^2 dF, J_y = \int_F x^2 dF \\ J_{xy} &= \int_F xy dF, C_x = \int_F y \omega dF, C_y = \int_F x \omega dF \\ J_w &= \int_F \omega^2 dF, J_z = \int_F \Theta^2 dF, K_{fx} = \int_F B_y dF \\ K_{fy} &= \int_F B_x dF, K_{fw} = \int_F B_w dF, K_{xx} = \int_F y B_y dF \\ K_{xy} &= \int_F y B_x dF = \int_F x B_y dF, K_{yy} = \int_F x B_x dF \\ K_{xw} &= \int_F y B_w dF = \int_F \omega B_y dF \\ K_{yw} &= \int_F x B_w dF = \int_F \omega B_x dF, K_{ww} = \int_F \omega B_w dF \\ Z_t &= \int_F \Theta l dF, C_{ly} = \int_F \frac{s_x}{t} l dF, C_{lx} = \int_F \frac{s_y}{t} l dF \\ C_{lw} &= \int_F \frac{s_w}{t} l dF, Z_m = \int_F \Theta m dF \\ C_{my} &= \int_F \frac{s_x}{t} m dF, C_{mx} = \int_F \frac{s_y}{t} m dF \\ C_{mw} &= \int_F \frac{s_w}{t} m dF, D_{sy} = \int_F \Theta \frac{s_x}{t} dF \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
D_{sx} &= \int_F \Theta \frac{s_y}{t} dF, \quad D_{sw} = \int_F \Theta \frac{s_w}{t} dF \\
D_{yy} &= \int_F \frac{s_y^2}{t^2} dF, \quad D_{xy} = \int_F \frac{s_x s_y}{t^2} dF \\
D_{xx} &= \int_F \frac{s_x^2}{t^2} dF, \quad D_{yw} = \int_F \frac{s_x s_w}{t^2} dF \\
D_{xw} &= \int_F \frac{s_y s_w}{t^2} dF, \quad D_{ww} = \int_F \frac{s_w^2}{t^2} dF \\
R_{xz} &= \int_F B_y^2 dF, \quad R_{xy} = \int_F B_y B_x dF \\
R_{yy} &= \int_F B_x^2 dF, \quad R_{xw} = \int_F B_y B_w dF \\
R_{yw} &= \int_F B_x B_w dF, \quad R_{ww} = \int_F B_w^2 dF, \quad E_g = \frac{E^2}{G} \\
E_{gg} &= \frac{E^3}{G^2}
\end{aligned} \tag{43}$$

5. 断面内の応力分布

説明のための解式の煩雑さを避けるために、 $x-z$ 面内の一軸曲げのみに注目した断面内応力分布を求めるこにしよう。

式 (42)_{c, l} を式 (33)_{a, b} に代入し式 (41) の関係式を用いると、仮定した変位場に対応した断面内の直応力分布が式 (44) のように表わされる。

$$\sigma_z = n \frac{M_y}{J_y} \left(x - \frac{K_{yy}}{R_{yy}} B_x \right) - n \frac{G}{E} \frac{H_y}{R_{yy}} \left(\frac{K_{yy}}{J_y} x - B_x \right) \tag{44}$$

式 (44) とともに断面内のせん断応力分布も式 (41) の関係式から求めることができるが、依然として一般微小要素のつり合い式を満足してはいない。そこで一般的に行われているように、はり理論では垂直応力がもっとも実際の応力をよく表わしているとしているので、一般微小要素のつり合い式からせん断応力分布を修正して求めることにする。

z 方向の応力のつり合い式は式 (10) で表わされる。板厚 t を一定として、分布軸方向荷重はないものとする。

$$\frac{\partial}{\partial s} (\tau_{sz} * t) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_z t) = 0 \tag{10}'$$

式 (10)' に式 (44) を代入し、 s について積分すると、

$$\begin{aligned}
\tau_{sz} * &= \frac{q}{t} - \frac{1}{t} \left[n \frac{M_y'}{J_y} \left(s_{x0} - \frac{K_{yy}}{R_{yy}} A_{x0} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{G}{E} \frac{H_y'}{R_{yy}} \left(\frac{K_{yy}}{J_y} s_{x0} - A_{x0} \right) \right] \\
&= \frac{q}{t} + \tau_a *
\end{aligned} \tag{45}$$

q は $\tau_{sz} * t$ の $s=s_1$ における積分定数であり、不静定せん断流とよばれる。この積分定数は軸方向変位の連続の

条件 $\oint \frac{\partial w^*}{\partial s} ds = 0$ によって決定される。式 (45) をせん断弾性係数 G で除して求めたせん断ひずみと式 (7)_a のせん断ひずみとを等しいとおいて連続の条件式に代入すると、

$$q = - \frac{\oint \tau_a * ds}{\oint \frac{1}{t} ds} \tag{46}$$

を得る。

したがって、断面内のせん断応力分布は式 (47) のように表わされる。

$$\begin{aligned}
\tau_{sz} &= -n \frac{M_y'}{J_y t} \left(s_x - \frac{K_{yy}}{R_{yy}} A_x \right) \\
&\quad + n \frac{H_y'}{R_{yy} t} \frac{G}{E} \left(\frac{K_{yy}}{J_y} s_x - A_x \right)
\end{aligned} \tag{47}$$

式 (44)～(47) にあらわれる記号は式 (24), (26), (28) で定義されているもののほかに、次のように定義していく。

$$\left. \begin{aligned}
n &= \frac{1}{1 - \frac{K_{yy}^2}{J_y R_{yy}}}, \quad A_x = A_{x0} - A_{x1} \\
A_{x0} &= \int_{s_1}^s B_x t ds, \quad A_{x1} = \frac{\oint \frac{A_{x0}}{t} ds}{\oint \frac{1}{t} ds}
\end{aligned} \right\} \tag{48}_{a-d}$$

6. 解の収束性

本報告の理論体系はせん断ひずみを零と仮定し展開するはり理論を第1近似理論とし、この解から得られるせん断ひずみを用いて第2近似理論を展開する逐次近似理論である。したがって、いうまでもなく、上の操作を繰り返し実行する過程で結果として得られる解はある解に収束する必要がある。ここではその解の収束性を確認するために第3近似理論のひずみ-変位関係式を求め、前章までに求められた第2近似理論との比較を示すこととする。

(1) 第3近似理論のひずみ-変位関係式

式 (33)_a, (41)_a から得られる σ_z を式 (11) の応力のつり合い式に代入し、第2近似理論と同一の手順をへて、次のようなひずみ-変位関係式を得ることができる。

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_z &= w' - x u'' - y v'' - \omega \varphi'' \\
&\quad + \frac{E}{G} (B_x U'_2 + B_y V'_2 + B_w \Phi'_2) \\
&\quad - \frac{E^2}{G^2} (\Gamma_x U'_3 + \Gamma_y V'_3 + \Gamma_w \Phi'_3) \\
\tau_{sz} &= \Theta \varphi' + \frac{E}{G} \left(\frac{s_x}{t} U_2 + \frac{s_y}{t} V_2 + \frac{s_w}{t} \Phi_2 \right) \\
&\quad - \frac{E^2}{G^2} \left(\frac{A_x}{t} U_3 + \frac{A_y}{t} V_3 + \frac{A_w}{t} \Phi_3 \right)
\end{aligned} \right\} \tag{49}_{a,b}$$

ここで新しく定義された諸量は次のようにある。

$$\left. \begin{aligned} A_{x0} &= \int_{s_1}^s B_x t ds, \quad A_{y0} = \int_{s_1}^s B_y t ds, \quad A_{w0} = \int_{s_1}^s B_w t ds \\ A_{x1} &= \frac{\oint \frac{A_{x0}}{t} ds}{\oint \frac{1}{t} ds}, \quad A_{y1} = \frac{\oint \frac{A_{y0}}{t} ds}{\oint \frac{1}{t} ds}, \quad A_{w1} = \frac{\oint \frac{A_{w0}}{t} ds}{\oint \frac{1}{t} ds} \\ A_x &= A_{x0} - A_{x1}, \quad A_y = A_{y0} - A_{y1}, \quad A_w = A_{w0} - A_{w1} \\ \Gamma_x &= \int_{s_1}^s \frac{A_x}{t} ds, \quad \Gamma_y = \int_{s_1}^s \frac{A_y}{t} ds, \quad \Gamma_w = \int_{s_1}^s \frac{A_w}{t} ds \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad (50)_{a-t}$$

式(49)においては、さらに新しく独立な自由度としてより高次せん断ひずみ成分が選ばれている。

(2) 数値解による収束の確認

3.における過程を再び繰り返すことにより、すなわち式(49)を式(35)に代入することにより、つり合い式と境界条件を求めることができる。しかし、いたずらに連立高階微分方程式が得られ煩雑になるために実用的な意味がない。したがって、ここでは解の収束性を確認することだけにとどめ、有限要素法の手法による剛性マトリックスを誘導し数値解による解の収束性を示すことにする。

$x-z$ 面内の曲げのみに注目した剛性方程式を第2近似

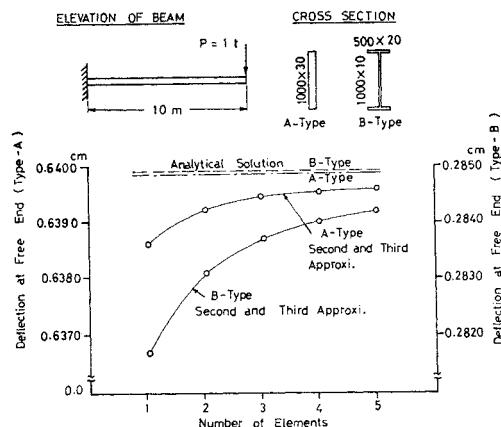


Fig. 2 Comparison of Second and Third Order Approximation of Present Theory

Table 1 Cross-Sectional Properties

	矩形断面	I形断面
J_y [cm ⁴]	2.5000×10^6	5.8333×10^6
D_{yy} [cm ⁶]	2.5000×10^6	3.5208×10^6
K_{yy} [cm ⁶]	-2.5000×10^6	-3.5208×10^6
R_{yy} [cm ⁸]	2.5298×10^{11}	2.1256×10^{13}
W_{yy} [cm ⁸]	2.5298×10^{11}	2.1256×10^{13}
\bar{W}_{yy} [cm ⁸]	-2.5298×10^{11}	-2.1256×10^{13}
L_{yy} [cm ¹⁰]	2.5628×10^{14}	1.2833×10^{17}
\bar{L}_{yy} [cm ¹⁰]	-2.5628×10^{14}	-1.2833×10^{17}
T_{yy} [cm ¹²]	2.5967×10^{17}	7.7476×10^{20}

理論と第3近似理論について付録に示す。第2近似理論と第3近似理論との比較はもっとも簡単な片持ばかりについて示すが他の形式のはりについても同様であることはいうまでもない。薄肉断面部材形状は矩形断面とI形断面の開断面を対象とし、はりの形状寸法と横断面形をFig. 2に示す。断面諸量はTable 1に示すとおりである。

Fig. 2は片持ばかり自由端のたわみの要素分割数による解の収束性を示したものである。剛性マトリックス法による解は理論解へ急速に収束していることがわかる。

Fig. 2には同時に第2近似理論と第3近似理論による数値結果も示しているがTable 2で示されるように2つの曲線は完全に一致しているため、その差は現われていない。

さて、第2近似理論と第3近似理論との比較を明確にするためにTable 2を作成した。分割要素数を1~5要素とし、矩形断面とI形断面についてのたわみを表わしたものである。第2近似理論と第3近似理論とは小数

Table 2 Deflections of Cantilever Beam with Concentrated Load, in Comparison of Second and Third Order Approximation of Present Theory

単位: cm

NODE No.		1	2	3	4	5		
要素 素 数 1	矩形 断面	第2近似	0.0	0.6386				
	第3近似	0.0	0.6386					
	I形 断面	第2近似	0.0	0.2817				
	第3近似	0.0	0.2817					
NODE No.		1	2	3	4	5		
要素 素 数 2	矩形 断面	第2近似	0.0	0.2000	0.6392			
	第3近似	0.0	0.2000	0.6392				
	I形 断面	第2近似	0.0	0.0892	0.2831			
	第3近似	0.0	0.0892	0.2831				
NODE No.		1	2	3	4	5		
要素 素 数 3	矩形 断面	第2近似	0.0	0.0951	0.3321	0.6394		
	第3近似	0.0	0.0951	0.3321	0.6394			
	I形 断面	第2近似	0.0	0.0430	0.1485	0.2837		
	第3近似	0.0	0.0430	0.1485	0.2837			
NODE No.		1	2	3	4	5		
要素 素 数 4	矩形 断面	第2近似	0.0	0.0554	0.2006	0.4051	0.6395	
	第3近似	0.0	0.0554	0.2006	0.4051	0.6395		
	I形 断面	第2近似	0.0	0.0254	0.0906	0.1809	0.2840	
	第3近似	0.0	0.0254	0.0906	0.1809	0.2840		
NODE No.		1	2	3	4	5		
要素 素 数 5	矩形 断面	第2近似	0.0	0.0362	0.1338	0.2770	0.4507	0.6396
	第3近似	0.0	0.0362	0.1338	0.2770	0.4507	0.6396	
	I形 断面	第2近似	0.0	0.0169	0.0610	0.1245	0.2011	0.2842
	第3近似	0.0	0.0169	0.0610	0.1245	0.2011	0.2842	
NODE No.		1	2	3	4	5	6	

点以下 4 衍まで完全に一致していることがわかる。この結果、変位に関しては完全に収束しているものと思われる。さらに、第 2 近似理論と第 3 近似理論とのせん断応力に関する収束性については 8. (Shear-lag について) における箱形断面のはりに関する数値計算例に示されている。Fig. 6~9 からわかるように古典曲げ理論での修正せん断応力分布と式 (47) から得られるせん断応力分布とはほとんど一致している。すなわち第 2 近似理論から得られるせん断応力分布は第 3 近似理論から得られるせん断応力分布に一致していることになる。以上の議論の結果、第 2 近似理論の解は収束しているものと判定される。

7. 二、三の既往の研究との比較

(1) E. REISSNER との比較

E. REISSNER は 1941 年と 1946 年に薄肉箱形はりの Shear-lag に関する報告^{14), 15)}を行っている。この報告は従来のはり理論では得られない Shear-lag 効果を考慮した直応力分布を求めているものであり、はり理論をさらに一步進めた画期的な論文であるといわれている。ここでは E. Reissner の Shear-lag 解析と著者の理論とを比較するために、 $x-z$ 面内の曲げのみに注目した基礎微分方程式と境界条件を示すことにする。 $x-z$ 面内の曲げのみに注目した時のひずみ成分は、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= -xu'' + \frac{E}{G} B_x U' \\ r_{sz} &= \frac{E}{G} \frac{s_x}{t} U \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (51)_a, b$$

部材に作用する外力を $\bar{M}(z)$ の曲げモーメントとするとき、仮想仕事の原理は次のように表わされる。

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_F [\sigma_z \cdot \delta \varepsilon_z + r_{sz} \cdot \delta r_{sz}] dF \cdot dz + \int_{z_1}^{z_2} \bar{M}(z) \delta u'' dz = 0 \quad \dots\dots\dots (52)$$

式 (51) を式 (52) に代入し、部分積分をすると基礎微分方程式と境界条件が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} EJ_y u'' - E_g K_{yy} U' + \bar{M}(z) &= 0 \\ E_g K_{yy} u''' - E_{gg} R_{yy} U' + E_g D_{yy} U &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (53)_a, b$$

$z=z_1$ および $z=z_2$ において、

$$U=0 \text{ または } -E_g K_{yy} u'' + E_{gg} R_{yy} U'=0 \quad \dots\dots\dots (54)$$

さらに修正された基本式を求めるために、独立変数 U を消去すると、式 (55) の微分方程式と式 (56) の境界条件が得られる。

$$u'' - \frac{1}{k^2} u''' = -\frac{\bar{M}(z)}{E J_y} + \frac{n}{k^2} \cdot \frac{1}{E J_y} \bar{M}''(z) \quad \dots\dots\dots (55)$$

$z=z_1$ および $z=z_2$ において、

$$u''' = -n \frac{\bar{M}'(z)}{E J_y} \text{ または } u'' = -n \frac{\bar{M}(z)}{E J_y} \quad \dots\dots\dots (56)$$

ここで、

$$n = \frac{1}{1 - \frac{K_{yy}}{J_y} \cdot \frac{R_{yy}}{k^2}}, \quad k^2 = \frac{G}{E} n \frac{D_{yy}}{R_{yy}} \quad \dots\dots\dots (57)_a, b$$

式 (55), (56) は E. Reissner が求めた式とまったく一致する。ただし、Reissner が定義したパラメータ n および k は式 (60) で表わされる。

E. Reissner は文献 14) で Shear-lag 解析を行っており、せん断変形によって直応力は一般に腹板上で最大となり、腹板から離れるに従って減少することを示している。

著者の理論によると、断面内の直応力応布は式 (44) で求められるので E. Reissner と比較することにしよう。

Fig. 3 に示すような片持はりの先端に集中垂直荷重 P が作用した場合について比較する。横断面形は Fig. 3 中に表わした 3 種の箱形断面とした。このとき、 I_w を腹板 2 枚の断面 2 次モーメント、 I_s を上下板の断面 2 次モーメントとすると 3 種断面すべて $I_s=I_w$ としている。ただし、 $J_y=I_s+I_w$ の関係にある。

Fig. 3 ははり理論より得られる σ_B との比を示したものである。ここでは上板の中央部 (σ_z)_{middle} と端部 (σ_z)_{edge} における値のみを示してある。E. Reissner により得られる値はどの断面についても $I_s=I_w$ であるので一つの曲線しか求められないが著者の理論によるとそれぞれについて求められている。Fig. 3 は文献 16) を参照したものであるが、参考までに文献 16) の FEM に

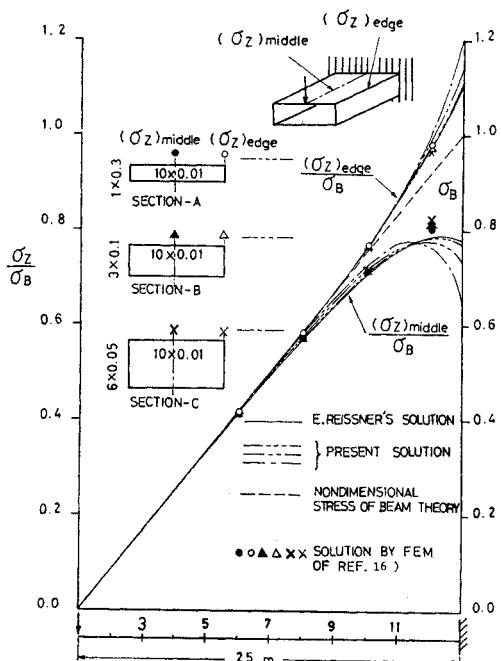


Fig. 3 Comparison of Stresses from Present Theory with Reissner's Theory

Table 3 Comparison of Stresses from Present Theory with Reissner's Theory

NODE No.	$(\sigma_z)_{\text{edge}}/\sigma_B$				$(\sigma_z)_{\text{middle}}/\sigma_B$		
	E. Reissner	Present Theory			E. Reissner	Present Theory	
		Section-A	Section-B	Section-C		Section-A	Section-B
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0.0836	0.0835	0.0834	0.0833	0.0829	0.0829	0.0831
3	0.1672	0.1671	0.1669	0.1667	0.1656	0.1658	0.1662
4	0.2510	0.2509	0.2505	0.2501	0.2480	0.2483	0.2491
5	0.3351	0.3349	0.3342	0.3335	0.3299	0.3303	0.3316
6	0.4196	0.4193	0.4183	0.4171	0.4109	0.4114	0.4134
7	0.5049	0.5045	0.5032	0.5010	0.4902	0.4910	0.4939
8	0.5916	0.5911	0.5892	0.5858	0.5668	0.5679	0.5718
9	0.6804	0.6800	0.6777	0.6726	0.6389	0.6401	0.6451
10	0.7733	0.7728	0.7707	0.7643	0.7033	0.7045	0.7096
11	0.8725	0.8725	0.8722	0.8679	0.7549	0.7552	0.7577
12	0.9826	0.9839	0.9895	1.0000	0.7849	0.7825	0.7750
13	1.1108	1.1154	1.1364	1.2014	0.7785	0.7698	0.7344

よる解をもあわせ示しておいた。FEM の結果と著者の理論による結果とはほとんど同じ傾向を示している。固定端近くの中央部応力 $(\sigma_z)_{\text{middle}}$ で差が生じているのみであるのでかなり精密であると思われる。なお、Fig. 3 では数値的比較が判然としないので Table 3 にその数値を示す。数値的に比較してもほとんどよく一致していることがわかる。

以上の結果から、著者の理論は E. Reissner の理論を改良した形になっているものと思われる。

(2)他の方法との比較

古典曲げ理論は Bernoulli-Euler の研究以来、多くの研究者によってはぐくまれ、その合理化、精密化に向って研究が続けられてきた。精密化に関してせん断変形に対する補正もその代表的問題点であり、多くの研究報告がある。そのなかから Timoshenko のはり理論を取り上げ、その Timoshenko のせん断補正係数を 3 次元弾性論から求めた Cowper の方法、さらに前節で示した E. Reissner の方法と著者の理論による数値解との比較

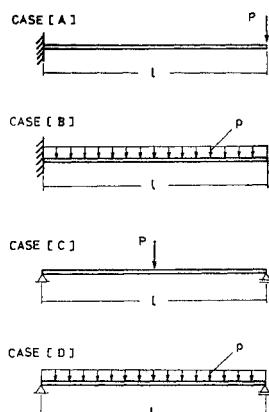


Fig. 4 Typical Beams

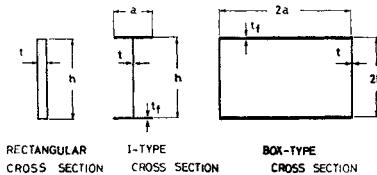


Fig. 5 Cross Sections

を示すこととする。

比較する数値解は Fig. 4 に表わされる各種のはりの最大たわみとする。横断面形は矩形断面、I 形断面および箱形断面とし、Fig. 5 に示される。

a) Timoshenko の方法

Fig. 4 のそれぞれの境界条件、荷重状態に対する最大たわみは、

$$\left. \begin{array}{l} [\text{A}] \quad u = \frac{Pl^3}{3EJ_y} \left(1 + \frac{3\alpha_s E J_y}{G F l^2} \right) \\ [\text{B}] \quad u = \frac{pl^4}{8EJ_y} \left(1 + \frac{4\alpha_s E J_y}{G F l^2} \right) \\ [\text{C}] \quad u = \frac{Pl^3}{48EJ_y} \left(1 + \frac{12\alpha_s E J_y}{G F l^2} \right) \\ [\text{D}] \quad u = \frac{5pl^4}{384EJ_y} \left(1 + \frac{48\alpha_s E J_y}{5G F l^2} \right) \end{array} \right\} \dots (58)_{\text{a-d}}$$

ここで、せん断補正係数 α_s はそれぞれの断面形に対し Table 4 に示される。

Table 4 Shear Coefficient

	せん断補正係数 α_s	せん断補正係数 K
Rectangular Cross Section	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{15.3}$
I-Type Cross Section	$\frac{F}{F_w}$	$\frac{13(1+6m)^2}{n^2(84m+174m^2)+936m^3+762m^2+183.6m+15.3}$
Box-Type Cross Section	$\frac{F}{F_w}$	$\frac{13(1+3m)^2}{10n^2(3.3m+3m^2)+117m^3+190.5m^2+91.8m+15.3}$

$$F = \text{全断面積}, \quad F_w = \text{腹板面積}, \quad m = \frac{at_f}{ht}, \quad n = \frac{a}{h}$$

b) Cowper の方法

Fig. 4 のそれぞれの境界条件、荷重状態に対する最大たわみは、Timoshenko の方法の式において $\alpha_s=1/K$ とすれば求められる。ここでせん断補正係数 K はそれぞれの断面形に対して **Table 4** に示される。ただしボアソン比は $\nu=0.3$ としている。

c) Reissner の方法

Fig. 4 のそれぞれの境界条件、荷重状態に対する最大たわみは、

$$\left. \begin{array}{l} [\text{A}] \quad u = \frac{Pl^3}{3EJ_y} \left[1 + \frac{3(n-1)}{(kl)^3} \{kl - 1\} \right] \\ [\text{B}] \quad u = \frac{pl^4}{8EJ_y} \left[1 + \frac{8(n-1)}{(kl)^4} \left\{ 1 + \frac{1}{2}(kl)^2 - kl \right\} \right] \\ [\text{C}] \quad u = \frac{Pl^3}{48EJ_y} \left[1 + \frac{24(n-1)}{(kl)^3} \left\{ \frac{kl}{2} - 1 \right\} \right] \\ [\text{D}] \quad u = \frac{5pl^4}{384EJ_y} \left[1 + \frac{384(n-1)}{5(kl)^4} \left\{ \frac{(kl)^2}{8} - 1 \right\} \right] \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (59)_{\text{a-d}}$$

ここで、

$$n = \frac{1}{1 - \frac{5I_s}{6J_y}}, \quad k^2 = \frac{5}{2a^2} n \frac{G}{E}$$

$$\dots \dots \dots \quad (60)_{\text{a,b}}$$

I_s は箱形断面上下板のみの断面 2 次モーメント

d) 著者の方法

前節(1)で導かれた基本式を **Fig. 4** のそれぞれの境界条件、荷重状態に対して解けば、前項の Reissner の方法とまったく同一の解が得られる。ただし、パラメータ n および k は式(57)で表わされる。

以上のそれぞれの方法と曲げ理論によるたわみを **Table 5~7** に示す。表中()内の数字は曲げ理論に対する比率でせん断変形の影響を示したものである。表中の各値は $G/E=3/8$ として計算し、I 形断面では $a/h=1/2$, $t_f/t=2$, $h/l=1/10$, 箱形断面では $a/h=3/2$, $t_f/t=2$, $2h/l=1/10$ のときの値を求めていている。

表からわかるように、Timoshenko の理論は矩形断面で過大評価をし、他の断面ではやや小さすぎるように思われる。各断面を通じて Cowper の方法と著者の理論とはよい一致を示している。Reissner の方法は箱形断面のみを示したがたわみに関しては過小評価をしていることがわかる。

8. Shear-lag について

著者の理論の一つの特徴としてはり理論を保

持したうえで Shear-lag 解析が可能であることをあげることができる。すでに、7.(1) の E. Reissner との比較で述べたように著者の理論による数値解はかなり精密解に近いものであるように思われる。Shear-lag に関する詳細な解析、検討は次の機会に譲ることにして、本節においては各種のはりについて断面内の直応力分布とせん断応力分布を示すことにする。断面内の応力分布は式(44) および式(47)によって求めることができる。

Fig. 6~9 は各種のはりについてのたわみと断面内応力分布を表わしたものである。断面内応力分布を表わす図中の記号 1, 1-b, 5, 5-b 等は数字が節点番号を示し、添字 b は古典理論の値を、添字なしは本理論の値を示している。片持ばりの固定端および単純支持ばりの荷重載荷付近の直応力分布に顕著に Shear-lag 効果が現われていることが示される。

また、せん断応力分布はいずれの場合においても、曲げ理論における慣用の修正せん断応力分布とほとんど差

Table 5 Deflections of Rectangular Beam

Case	Beam Theory	Timoshenko	Cowper	Reissner	Present Theory	Multiplier
[A]	4.0000	4.0400 (1.00%)	4.0314 (0.78%)		4.0318 (0.80%)	$\frac{P}{tE} \times 10^3$
[B]	1.5000	1.5200 (1.33%)	1.5157 (1.05%)		1.5158 (1.05%)	$\frac{pl}{tE} \times 10^3$
[C]	0.2500	0.2600 (4.00%)	0.2579 (3.16%)		0.2579 (3.16%)	$\frac{P}{tE} \times 10^3$
[D]	0.1563	0.1613 (3.20%)	0.1602 (2.51%)		0.1603 (2.56%)	$\frac{pl}{tE} \times 10^3$

Table 6 Deflections of I-Beam

Case	Beam Theory	Timoshenko	Cowper	Reissner	Present Theory	Multiplier
[A]	0.5714	0.5981 (4.67%)	0.5988 (4.79%)		0.5990 (4.82%)	$\frac{P}{tE} \times 10^3$
[B]	0.2143	0.2276 (6.22%)	0.2280 (6.39%)		0.2280 (6.39%)	$\frac{pl}{tE} \times 10^3$
[C]	0.3571	0.4238 (18.7%)	0.4255 (19.15%)		0.4258 (19.24%)	$\frac{P}{tE} \times 10^3$
[D]	0.2232	0.2565 (14.9%)	0.2574 (15.3%)		0.2577 (15.5%)	$\frac{pl}{tE} \times 10^3$

Table 7 Deflections of Box Beam

Case	Beam Theory	Timoshenko	Cowper	Reissner	Present Theory	Multiplier
[A]	0.2000	0.2133 (6.67%)	0.2154 (7.69%)	0.2026 (1.30%)	0.2158 (7.91%)	$\frac{P}{tE} \times 10^3$
[B]	0.7500	0.8167 (8.89%)	0.8269 (10.3%)	0.7625 (1.67%)	0.8279 (10.4%)	$\frac{pl}{tE} \times 10^3$
[C]	0.1250	0.1583 (26.7%)	0.1634 (30.7%)	0.1312 (4.98%)	0.1639 (31.1%)	$\frac{P}{tE} \times 10^3$
[D]	0.7814	0.9481 (21.3%)	0.9736 (24.6%)	0.8148 (4.27%)	0.9818 (25.7%)	$\frac{pl}{tE} \times 10^3$

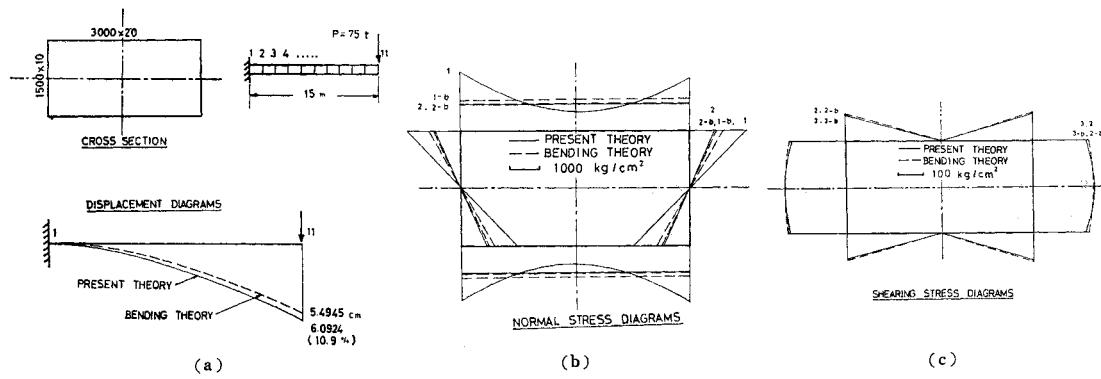


Fig. 6

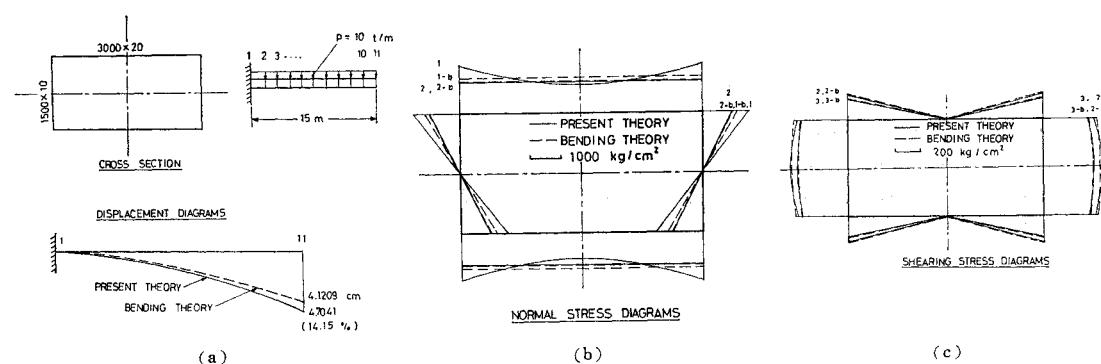


Fig. 7

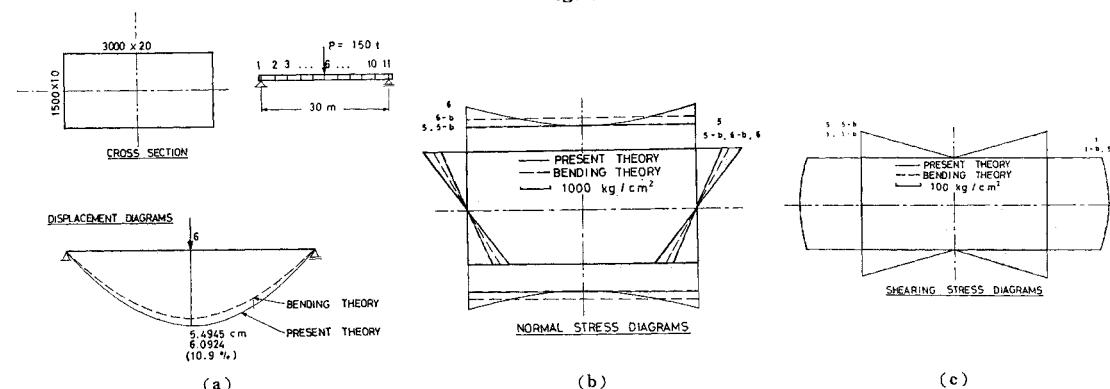


Fig. 8

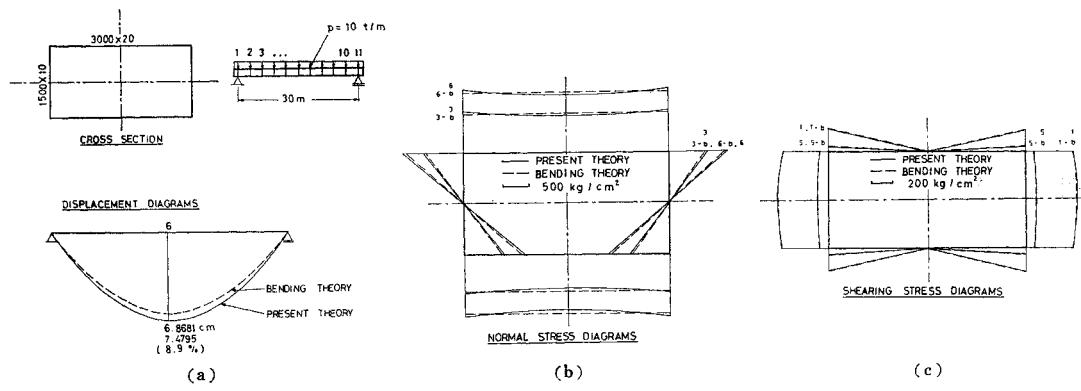


Fig. 9

がないことがわかる。特に単純支持ばかりではまったく一致しているといえよう。

9. 結 論

薄肉断面直線材を対象としてせん断変形を考慮したはり理論の基本式を求めた。断面不变の基本的仮定を出发点としてあくまでもはり理論の立場を保持した上でせん断変形を考慮した理論を展開したものであり、逐次近似理論体系ではあるが第2近似理論で十分に収束していることが確認され、したがって、閉じた理論解が求められ得ることが示された。はり理論の最大の特性は、いわゆる1次元の棒理論であり、簡単に閉じた理論解が得られることである。しかるに本理論ではその意味においてはり理論の特性を十分發揮されているものと思われる。本理論の適用にあたって複雑な断面形状に対する断面諸量の計算がやや複雑になるのは古典理論にあらわれない一部断面諸量（式（43）参照）のみであるがこれも古典理論における断面諸量の計算とまったく同じ手順で計算することができ、公式化しておくこともできる。本理論の最大の特徴には、はり理論を保持した上でShear-lag解析が可能になったことがあげられる。そもそも有効幅という概念は、はり理論を設計理論として保持しておきたいために導入されたものである。その意味から本理論ははり理論の解析の断面内応力分布をそのまま用いることができる、はり断面に対する評価がより適切なものになっている。

本報告の得られた結果のうち、変形に関しては G.R. Cowper の理論解とよく一致した値を示している。また、断面内応力分布に関しては E. Reissner の理論解とほぼよい一致を示しているうえに、E. Reissner の理論の改良された形になっているものと思われる。本報告の特徴である Shear-lag 解析に関しては各種のはりについて数値解を示したことととどめたが、さらに2次元応力問題として得られる Shear-lag および従来の棒理論として実用的設計に便を与えている有効幅とのかかわりあり、そして非常に興味ある問題としてねじりあるいは偏心荷重を受けるはりの断面内応力分布等に関しては貢数の制限のため次の機会に報告する予定である。

付 錄

剛性方程式 $\{P\} = [K] \{u\}$

第2近似理論

$$\{P\}^T = [Q_{xi}, M_{yi}, H_i, Q_{xj}, M_{yj}, H_j]$$

$$\{u\}^T = [u_{xi}, \beta_{yi}, U_i, u_{xj}, \beta_{yj}, U_j]$$

剛性マトリックス要素

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= \frac{12}{l^3} E J_y, \quad k_{12} = \frac{6}{l^2} E J_y, \quad k_{13} = 0 \\
 k_{14} &= -\frac{12}{l^3} E J_y, \quad k_{15} = \frac{6}{l^2} E J_y, \quad k_{16} = 0 \\
 k_{22} &= \frac{4}{l} E J_y, \quad k_{23} = -\frac{1}{l} E_g K_{yy}, \quad k_{24} = -\frac{6}{l^2} E J_y \\
 k_{25} &= \frac{2}{l} E J_y, \quad k_{26} = \frac{1}{l} E_g K_{yy} \\
 k_{33} &= \frac{1}{l} E_g R_{yy} + \frac{l}{3} E_g D_{yy}, \quad k_{34} = 0 \\
 k_{35} &= \frac{1}{l} E_g K_{yy}, \quad k_{36} = -\frac{1}{l} E_{gg} R_{yy} + \frac{l}{6} E_g D_{yy} \\
 k_{44} &= \frac{12}{l^3} E J_y, \quad k_{45} = -\frac{6}{l^2} E J_y, \quad k_{46} = 0 \\
 k_{55} &= \frac{4}{l} E J_y, \quad k_{56} = -\frac{1}{l} E_g K_{yy} \\
 k_{66} &= \frac{1}{l} E_{gg} R_{yy} + \frac{l}{3} E_g D_{yy}
 \end{aligned}$$

第3近似理論

$$\begin{aligned}
 \{P\}^T &= [Q_{xi}, M_{yi}, H_{2i}, H_{3i}, Q_{xj}, M_{yj}, H_{2j}, \\
 &\quad H_{3j}] \\
 \{u\}^T &= [u_{xi}, \beta_{yi}, U_{2i}, U_{3i}, u_{xj}, \beta_{yj}, U_{2j}, U_{3j}]
 \end{aligned}$$

剛性マトリックス要素

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= \frac{12}{l^3} E J_y, \quad k_{12} = \frac{6}{l^2} E J_y, \quad k_{13} = 0, \quad k_{14} = 0 \\
 k_{15} &= -\frac{12}{l^3} E J_y, \quad k_{16} = -\frac{6}{l^2} E J_y, \quad k_{17} = 0, \quad k_{18} = 0 \\
 k_{22} &= \frac{4}{l} E J_y, \quad k_{23} = -\frac{1}{l} E_g K_{yy} \\
 k_{24} &= \frac{1}{l} E_{gg} W_{yy}, \quad k_{25} = -\frac{6}{l^2} E J_y, \quad k_{26} = \frac{2}{l} E J_y \\
 k_{27} &= \frac{1}{l} E_g K_{yy}, \quad k_{28} = -\frac{1}{l} E_{gg} W_{yy} \\
 k_{33} &= \frac{1}{l} E_{gg} R_{yy} + \frac{l}{3} E_g D_{yy} \\
 k_{34} &= -\frac{1}{l} \frac{E^4}{G^3} \bar{L}_{yy} - \frac{l}{3} E_{gg} \bar{W}_{yy}, \quad k_{35} = 0 \\
 k_{36} &= \frac{1}{l} E_g K_{yy}, \quad k_{37} = -\frac{1}{l} E_{gg} R_{yy} + \frac{l}{6} E_g D_{yy} \\
 k_{38} &= \frac{1}{l} \frac{E^4}{G^3} \bar{L}_{yy} - \frac{l}{6} E_{gg} \bar{W}_{yy} \\
 k_{44} &= \frac{1}{l} \frac{E^5}{G^4} T_{yy} + \frac{l}{3} \frac{E^4}{G^3} L_{yy}, \quad k_{45} = 0 \\
 k_{46} &= -\frac{1}{l} E_{gg} W_{yy} \\
 k_{47} &= \frac{1}{l} \frac{E^4}{G^3} \bar{L}_{yy} - \frac{l}{6} E_{gg} \bar{W}_{yy} \\
 k_{48} &= -\frac{1}{l} \frac{E^5}{G^4} T_{yy} + \frac{l}{6} \frac{E^4}{G^3} L_{yy}, \quad k_{55} = \frac{12}{l^3} E J_y \\
 k_{56} &= -\frac{6}{l^2} E J_y, \quad k_{57} = 0, \quad k_{58} = 0, \quad k_{66} = \frac{4}{l} E J_y \\
 k_{67} &= -\frac{1}{l} E_g K_{yy}, \quad k_{68} = \frac{1}{l} E_{gg} W_{yy}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{77} &= \frac{1}{l} E_{gg} R_{yy} + \frac{l}{3} E_g D_{yy} \\k_{78} &= -\frac{1}{l} \frac{E^4}{G^3} \bar{L}_{yy} - \frac{l}{3} E_{gg} \bar{W}_{yy} \\k_{88} &= \frac{1}{l} \frac{E^5}{G^4} T_{yy} + \frac{l}{3} \frac{E^4}{G^3} L_{yy}\end{aligned}$$

ここで新しく定義されている断面値は次のとおりである。

$$\begin{aligned}W_{yy} &= \int_F x \Gamma_x dF, \quad \bar{W}_{yy} = \int_F \frac{s_x A_x}{t^2} dF \\L_{yy} &= \int_F \frac{A_x^2}{t^2} dF, \quad \bar{L}_{yy} = \int_F B_x \Gamma_x dF \\T_{yy} &= \int_F \Gamma_x^2 dF\end{aligned}$$

参考文献

- 1) Timoshenko, S.P., D.H. Young and W. Weaver Jr. : Vibration Problems in Engineering, 4th. ed., John Wiley & Sons, New York, 1974.
- 2) Cowper G.R. : The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, pp. 335-340 June, 1966.
- 3) Wagner, H. und W. Pretschner : Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, Luftfahrt-Forshung, Band XI, 1934.
- 4) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961.
- 5) Vlasov, V.Z. : 薄肉弾性ばかりの理論 (奥村敏恵, ほか共訳), 技報堂, 1967.
- 6) Benscoter, S.U. : A Theory of Torsion Bending for Multicell Beams, Journal of Applied Mechanics, pp. 25-34, March, 1954.
- 7) Heilig, R. : Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform, Der Stahlbau, Heft 11, S. 333-349, 1961.
- 8) Grasse, W. : Wölbkrafttorsion dünnwandiger prisma-
- tischer Stäbe beliebigen Querschnitts, Ingenieur-Archiv, Band XXXIV, S. 330-338 1965.
- 9) Roik, K. und G. Sedlacek : Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen Analogiebetrachtung zur Berechnung des querbelasten Zugstabes, Der Stahlbau, Heft 2, S. 43-52 1966.
- 10) Kollbrunner, C.F. und N. Hajdin : Dünnewandige Stäbe, Band I, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- 11) 佐伯 昇 : 二次せん断変形を考慮した曲げねじり理論と数値計算, 土木学会論文報告集, No. 209, pp. 27-36, 1973-1.
- 12) 西野文雄・長谷川彰夫・名取悦朗 : 断面変形とせん断変形を考慮した長方形薄肉断面ばかりの理論, 土木学会論文報告集, No. 248, pp. 25-40, 1976-4.
- 13) 深沢泰晴・太田貞次 : 薄肉ばかりの曲げせん断変形と曲げねじり変形との連成問題, 土木学会第31回年次学術講演会講演概要集, 第I部, 1976.
- 14) Reissner, E. : Least Work Solution of Shear Lag Problem, Journal of the Aeronautical Science, Vol. 18, No. 7, pp. 284-291, 1941.
- 15) Reissner, E. : Analysis of Shear Lag in Box Beams by the Principle of Minimum Potential Energy, Quarterly Applied Mathematics, pp. 268-278, Oct. 1946.
- 16) 川井忠彦・藤谷義信 : 梁理論の精密化に関する二、三の試み(その1～その5), 生産研究, Vol. 25, No. 6, 1973-Vol. 26, No. 6, 1974.
- 17) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵 : 軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文報告集, No. 225, pp. 1-15, 1974-5.
- 18) 堀江 保・稼農知徳 : 薄肉直線材のせん断変形解析, 土木学会第31回年次学術講演会講演概要集, 第I部, 1976.
- 19) 西野文雄・椿 龍哉 : せん断変形を考慮したばかりの理論, 土木学会第31回年次学術講演会講演概要集, 第I部, 1976.
- 20) 近藤和夫・小松定夫・中井 博 : 鋼床板桁橋の有効幅に関する研究, 土木学会論文集, No. 86, pp. 1-19, 1962-10.

(1977.11.7・受付)