

開断面薄肉らせんはりの基礎理論

FUNDAMENTAL THEORY OF THIN-WALLED
HERICAL BEAMS WITH OPEN SECTION

平嶋政治*・恵谷舜吾**
By Masaharu HIRASHIMA and Shungo EYA

1. 序

初期ねじれを有する部材の幾何学的な特色は、横断面上の各点で母線の方向が、それぞれ異なっていることがある。

中実断面の初期ねじれを有する曲線はりに関しては、従来から多くの研究が行われ、棒理論の範囲内で十分厳密な解法が導かれている。これらの報告を概観すると、まず第1のグループは Love¹⁾ により代表される理論であり、対象とする部材の断面寸法が小さいことにより、各母線の方向が棒軸と一致していると仮定して、解析を行うものである。この理論は、鷺津²⁾により一般化され、そり変位、せん断変形を考慮した基礎方程式が誘導されている。

第2のグループは、Schröter³⁾、Weißgerber⁴⁾ の報告に記されているように、部材断面の広がりを考慮するために各母線の方向の差異に着目し、基本式を誘導する理論である。

初期ねじれ率、曲率を有する薄肉部材の研究としては、築地⁵⁾と Schroeder⁶⁾による報告がある。

築地による報告では、文献 2)において動座標系²⁵⁾ (moving frame) で定義されたひずみに、軸線の法平面上だけでの座標変換を行ったひずみを、薄肉断面中央曲面上およびそれと平行な曲面上のひずみとして定義している。そのため中央曲面上のひずみについては検討がなされていない。

Schroeder による研究では、ひずみは有限項までをも考慮して導かれているが、① 平面保持則の適用過程、② 軸方向応力と平衡するせん断力の定義、③ St. Venant のせん断ひずみ、については明確にすべき問題がある。

そこで本論文は初期ねじれ率、曲率が一定な薄肉部材の基礎方程式を棒理論の範囲で厳密に導くことを目的とし、その解析法は次の事項により特色づけられている。

① Bernoulli-Euler の平面保持則を用いて、軸方向変位を棒軸の変位で表わし、3次元問題を1次元問題に還元し、棒理論として解析している。

② 変位-ひずみの関係式を曲線座標系で定義し、ひずみに対する仮定を曲線座標系で表示したひずみに適用している。

③ 軸方向応力と平衡するせん断力は、テンソル表示された微小要素のつり合い式により導いている。

平面曲線はりの解析では、解析軸としてせん断中心の変位を用いることが有利であると指摘されているが、本論文では、次に定める棒軸を解析軸としている。“軸線の法平面が、はりの横断面が載っている平面と一致するとき、その軸線を棒軸とする”これは座標軸が互いに直交している動座標系 (moving frame) の適用できる条件であるから、この座標系で表わした独立な変位は互いに直交することとなり、解析を行うに際して演算が簡便となるからである。

また、テンソル解析を用いることにより、初期ねじれ率を考慮する場合に重要な要素となる母線の方向に関する幾何学的な考察は不要となっている。

2. 仮定、座標系、変位

基礎方程式を導くにあたり、本論で用いる仮定、座標系、変位は次のものである。

(1) 仮定

(a) 変形前の部材のねじれ率、曲率は棒軸方向に一定である。

(b) 断面形状は棒軸に沿って一定であり、有限個の特異点を除いて十分なめらかである⁸⁾。

* 会員正 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科

** 正会員 工修 首都高速道路公団第1建設部塩浜工事事務所

(c) 変位は微小であり、変形後も断面形は変化しない。

(d) 板厚方向軸 (θ_2) と母線 (θ_3)との間、および板厚中央曲面上では板厚中心線座標軸 (θ_1) と母線間にはせん断ひずみを生じない。

(2) 座 標 系

本論で用いる解析軸としての棒軸は、力学的条件より定まる断面の特定点（中立点、せん断中心等）を連ねた軸線ではなく、断面と直交する幾何学的軸線である。通常の設計においては、当初、骨組線を決定し、骨組線の法平面上に断面形を決定することを考えると、この骨組線に相当するものである。

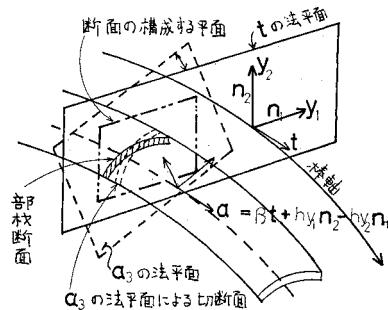


図-1 棒 軸

棒軸の接ベクトルを t 、断面方向のベクトルを n_1 と表わすと、棒軸の定義より $t \cdot n_1 = 0$ となるが、棒軸以外の軸線を解析軸として選ぶと、その接ベクトル (a_i) は $a_i \cdot n_1 \neq 0$ となり(3. 節)、断面と直交しなくなる。また、 a_i の法平面上で断面形を決定することも考えられるが、その場合は、軸線の位置により断面の形が変化するので、非常に難しくなる(図-1 参照)。このようなことから本論文においては、先に定義した軸線を解析軸として用いる。

次に本論文で使用する座標系は以下のものである。

a) 曲線座標系 θ_i ($i=1, 2, 3$)

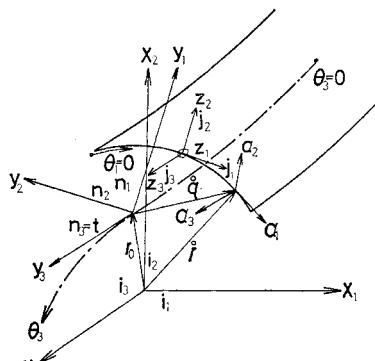


図-2 座 標 系

この座標系は左手系座標であり、 θ_1 は断面上における板厚中心線に沿って定める座標軸、 θ_2 は断面上で θ_1 の法線方向に定める座標軸、 θ_3 は棒軸に沿って母線方向のパラメーターとして定める座標軸である。

b) 動座標系軸²³⁾ (moving frame) y_i ($i=1, 2, 3$)

y_3 軸の基本ベクトルの方向は、棒軸の接ベクトルの方向と一致し、 y_1, y_2 軸は棒軸からの距離を表わす直線軸である。 y_1, y_2 軸の方向は断面上で任意に選定できるが、 θ_i 座標との相対的位置関係は棒軸方向に一定である。

c) 局所デカルト座標系 z_i ($i=1, 2, 3$)

z_1, z_2 軸の基本ベクトルは曲線座標系の θ_1, θ_2 軸の基本ベクトルと方向が一致し、 z_3 軸は左手系を構成するよううに断面上に定める座標軸である。座標系の定義から明らかのように z_3 軸の基本ベクトルの方向は棒軸の接ベクトルの方向と一致している。

(3) 変 位

棒理論として解析するための独立な 4 自由度の変位は、棒軸の y_i 軸方向への変位と棒軸まわりの回転変位によって表わし、それぞれ次の記号を用いる。

u : y_1 軸方向の変位

v : y_2 軸方向の変位

w : y_3 軸方向の変位

ϑ : y_3 軸まわりの回転変位

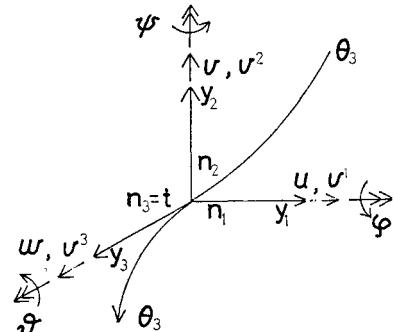


図-3 変位の方向

(4) そ の 他

各座標系の基本ベクトル、ひずみ、応力は表-1 の記号により表わす。

演算に関する規約として「AINSHUTAIN の規約(同じ項のなかに同一の指標が 2 度現われている場合には、その指標の取り得る値をすべてこれに与えて、それらの総和をつくるものとする)」を適用する。

$$\text{例)} \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k = a_{ik} x_k \quad (k=1, 2, 3)$$

表-1 記号

座標系	基本ベクトル	ひずみ	応力
曲線座標系 (θ_i)	a_i	$r_{\lambda\mu}$	$\tau^{\lambda\mu}$
動座標系 (moving frame) (y_i)	n_i		
局所デカルト座標系 (z_i)	j_i	$e_{\lambda\mu}$	$\sigma^{\lambda\mu}$

また、微分記号は $\frac{d(\)}{d\theta_i} = (\),_i$ と記す。

3. 変位とひずみの関係

この節では、変位とひずみの関係を一般的に取扱う。その場合、断面のひろがり、各母線軸の方向の差を考慮するために、薄肉部材の中央曲面上に定める曲線座標系を用いる。

(1) 変形前の幾何量

変形前の棒軸の位置ベクトルを r_0 とし、 r_0 を θ_3 に関して微分することにより、棒軸の接ベクトル (t) を次の式で定める。

$$t (= n_3) = r_{0,3} \dots \quad (1)$$

n_1, n_2 を断面上で直交する二つのベクトル (方向はそれぞれ y_1, y_2 の方向) とすると、フルネー・セレーの公式により、ベクトルの θ_3 による微分法則は次の式で定義できる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta_3} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & h & -k_2 \\ -h & 0 & k_1 \\ k_2 & -k_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}; \\ \Gamma_{i3}^m &= \begin{bmatrix} 0 & h & -k_2 \\ -h & 0 & k_1 \\ k_2 & -k_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Gamma_{i1}^m = \Gamma_{i2}^m = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 Γ_{in}^m はクリストッフェルの記号であり、 i は行 m は列を表わしている。

$$\Gamma_{i3}^m = n_{m,i} n^i, \quad n^i = n_i \dots \quad (3)$$

であるので k_1, k_2, h はそれぞれ次のようになる。

$$k_1 = n_{2,3} n^3 : y_2 - y_3 \text{ 平面内の棒軸の曲率}$$

$$k_2 = -n_{1,3} n^3 : y_3 - y_1 \text{ 平面内の棒軸の曲率}$$

$$h = n_{1,3} n^2 : y_3 \text{ 軸まわりの棒軸のねじれ率}$$

断面形は一定であるので、動座標系 (moving frame) で表わした断面任意点の位置ベクトル (q) は次のようになる。

$$q = \dot{\varphi}_i n_i + \theta_2 a_2 \quad (i=1, 2) \dots \quad (4)$$

ここに、(°) は中央曲面上の値を表わしている。

式 (4) より断面任意点の絶対位置ベクトル (r) は、

$$r = r_0 + q \dots \quad (5)$$

となる。断面任意点の動座標系 (moving frame) での位置は、

$$y_1 = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_{2,1} \theta_2, \quad y_2 = \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_{1,1} \theta_2 \dots \quad (6)$$

と表わすことができるので式 (5) を θ_i で微分することにより、変形前の任意点の基本ベクトル ($a_i = r_{i,i}$) は次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (\dot{\varphi}_{1,1} - \dot{\varphi}_{2,1} \theta_2) n_1 + (\dot{\varphi}_{2,1} + \dot{\varphi}_{1,1} \theta_2) n_2 \\ &= y_{1,1} n_1 + y_{2,1} n_2 \\ a_2 &= -\dot{\varphi}_{2,1} n_1 + \dot{\varphi}_{1,1} n_2 \\ a_3 &= \beta t - h y_2 n_1 + h y_1 n_2 \\ \beta &= 1 - k_2 y_1 + k_1 y_2 \end{aligned} \right\} \dots \quad (7.a \sim c)$$

長さ、角度の定義に関係する基本計量テンソルは、基本ベクトルを用いて次の式で定義される。

$$a_{\lambda\mu} = a_\lambda a_\mu \dots \quad (8)$$

式 (8) へ式 (7) を代入して得た結果は APPENDIX (2) に記してある。

(2) 変形後の幾何量

薄肉部材を棒理論で解析するには断面任意点の変位を断面上の特定点 (棒軸) の変位で表現しなければならない。その場合に、断面上任意点の軸方向変位は Bernoulli-Euler の平面保持則から導くことのできる変位 (APPENDIX (1)) とそり変位との和で表わすことができ、そり変位の方向は棒軸の接ベクトルの方向と一致していると仮定する。そうすると、断面上任意点の変位を次のように表わすことができる。

$$V = v^i n_\lambda \quad (\lambda=1, 2, 3) \dots \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} v^1 &= u - y_2 \varphi \\ v^2 &= v + y_1 \varphi \\ v^3 &= w + y_2 \psi - y_1 \varphi + \varrho \end{aligned} \right\} \dots \quad (10.a \sim c)$$

ここに、 v^i はそれぞれ断面任意点の y^i 軸方向への変位、 φ, ψ はそれぞれ断面の y_1 軸まわりの回転角、 y_2 軸まわりの回転角であり、 ϱ は断面任意点のそり量である。

変形後の断面任意点の位置ベクトル (\tilde{r}) は式 (5), (9) を用いて次のように表わされる。

$$\tilde{r} = r + V = r + v^i n_\lambda \quad (\lambda=1, 2, 3) \dots \quad (11)$$

式 (11) を θ_i に関して微分し、式 (7) を利用すれば変位後の基本ベクトル (\tilde{a}_i) を次のように求めることができる。

$$\tilde{a}_i = a_i + v^i |_i n_\lambda \quad (\lambda=1, 2, 3) \dots \quad (12)$$

式 (12) において、 $v^i |_i$ は θ_i 座標での共変微分を表わしており、次の式で定義される。

$$v^i |_i = v_{,i}^1 + \Gamma_{mi}^1 v^1 \quad (\lambda=1, 2, 3) \dots \quad (13)$$

式 (13) に式 (2) の値を代入することにより $v^i |_i$ を次のように定めることができる。

$$\left. \begin{aligned} v^1 |_i &= \begin{bmatrix} v_{,1}^1 & , & v_{,1}^2 & , & v_{,1}^3 \\ v_{,2}^1 & , & v_{,2}^2 & , & v_{,2}^3 \\ v_{,3}^1 - h v^2 & , & v_{,3}^2 + h v^1 & , & v_{,3}^3 - k_2 v^1 \\ + k_2 v^3 & , & -k_1 v^3 & , & +k_1 v^2 \end{bmatrix} \\ & \dots \quad (13)' \end{aligned} \right.$$

式 (13)' を式 (12) へ代入すれば、変位後の基本ベクトル (\tilde{a}_i) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_1 &= a_1 + v_{,1}^1 \mathbf{n}_1 + v_{,1}^2 \mathbf{n}_2 + v_{,1}^3 \mathbf{n}_3 \\ \tilde{a}_2 &= a_2 + v_{,2}^1 \mathbf{n}_1 + v_{,2}^2 \mathbf{n}_2 + v_{,2}^3 \mathbf{n}_3 \\ \tilde{a}_3 &= a_3 + (v_{,3}^1 - hv^2 + k_2 v^3) \mathbf{n}_1 \\ &\quad + (v_{,3}^2 + hv^1 - k_1 v^3) \mathbf{n}_2 \\ &\quad + (v_{,3}^3 - k_2 v^1 + k_1 v^2) \mathbf{n}_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14 \cdot a \sim c)$$

式 (10) を式 (14) へ代入することにより、変形後の基本ベクトルを棒軸の変位で表わすことができる。変形後の基本計量テンソル ($a_{\lambda\mu}$) は式 (14) を式 (8) へ代入することにより求まる。

(3) ひずみテンソル

変形前と、変形後の基本計量テンソル ($a_{\lambda\mu}$, $\tilde{a}_{\lambda\mu}$) を用いると、グリーンのひずみテンソルは次の式で定義できる¹⁹⁾。

$$r_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} (\tilde{a}_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu}) \dots\dots\dots(15)$$

式 (15) に式 (8) を利用して、式 (7), (12) を代入し、変位の2次の項を省略すると、微小ひずみの仮定のもとでのグリーンのひずみテンソルを次の式で定義することができる。

$$r_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_\lambda v^j |_\mu \mathbf{n}_j + \mathbf{a}_\mu v^i |_\lambda \mathbf{n}_i) \quad \left(\begin{array}{l} i=1, 2, 3 \\ j=1, 2, 3 \end{array} \right) \dots\dots\dots(15')$$

式 (15)' へ式 (7), (13)' を代入することにより、各ひずみテンソルが次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} r_{11} &= r_{22} = r_{33} = 0 \\ r_{33} &= \beta \times (\epsilon - y_{12} z_2 + y_{21} z_1 + \varrho_{,3} + h(y_{12}^2 + y_{21}^2)) z_3 - h(k_1 y_1 + k_2 y_2) \varrho \\ 2r_{23} &= \beta \varrho_{,2} - (k_2 \dot{y}_{2,1} + k_1 \dot{y}_{1,2}) \varrho + \dot{\varphi}_{,2} z_3 \\ 2r_{13} &= \beta \varrho_{,1} + (k_2 y_{1,1} - k_1 y_{2,1}) \varrho + r_{12} z_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16 \cdot a \sim d)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= w_{,3} - k_2 u + k_1 v && : \text{棒軸の軸方向ひずみ} \\ x_1 &= \varphi_{,3} - h \psi + k_2 \theta && : y_1 \text{ 軸まわりの回転率} \\ x_2 &= \psi_{,3} + h \varphi - k_1 \theta && : y_2 \text{ 軸まわりの回転率} \\ x_3 &= \theta_{,3} - k_2 \varphi + k_1 \psi && : y_3 \text{ 軸まわりの回転率} \\ \varphi &= -v_{,3} - hu + k_1 w && : y_1 \text{ 軸まわりの回転角} \quad (A \cdot 3a) \\ \psi &= u_{,3} - hv + k_2 w && : y_2 \text{ 軸まわりの回転角} \quad (A \cdot 3b) \\ \varphi_n &= \dot{y}_{1,1} \dot{y}_1 + \dot{y}_{2,1} \dot{y}_2 && : \text{棒軸と輪郭線の法線との距離} \\ r_t &= -y_{1,1} y_2 + y_{2,1} y_1 && : \text{棒軸と輪郭線の接線との距離} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17 \cdot a \sim h)$$

(4) そり変位

薄肉断面を対象としているので、仮定 (d) により次

の二式をひずみ条件として仮定する。

$$\left. \begin{aligned} r_{23} &= 0 \\ \dot{r}_{13} (\theta_2 = 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18 \cdot a, b)$$

式 (18-a) へ式 (16-c) を代入し、積分を行うことにより、そり変位の肉厚方向分布式として次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= \omega z_3 \\ \omega &= \beta \dot{\varphi} - \frac{\dot{r}_{13} \theta_2}{\beta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

$\dot{\varphi}$ は積分定数であり、中央曲面上のそり変位を示しておき式 (18-b) へ式 (16-d) を代入し積分を行うことにより、

$$\dot{\varphi} = -C_0 - \int_0^{\theta_1} \frac{\dot{r}_{13}}{\beta^2} d\theta_1 \dots\dots\dots(20)$$

となる。中央曲面上のそり変位は式 (19), (20) より次の式で表わされる。

$$\dot{\varphi} = -\dot{\beta} \left(C_0 + \int_0^{\theta_1} \frac{\dot{r}_{13}}{\beta^2} d\theta_1 \right) \times z_3 \dots\dots\dots(21)$$

$-\dot{\beta} C_0$ は点 (0, 0, θ_3) のそり変位を表わしており、 C_0 は、表-2 に記す断面定数 $J_\omega = 0$ の条件より定まる値である。

式 (16-d) へ式 (19) を代入することにより、St. Venant のせん断ひずみは、

$$\left. \begin{aligned} s\dot{r}_{13} &= \theta z_3 \\ \theta &= -\left(\theta_2 + \frac{k_2 \dot{y}_1 - k_1 \dot{y}_2}{\dot{\beta}} \theta_2 + \frac{k_1 \dot{y}_{1,1} + k_2 \dot{y}_{2,1}}{2 \dot{\beta}} \theta_2^2 \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16 \cdot d')$$

となる。式 (16-d')においては、仮定 (b) により $y_{i,11}$ の項は省略している。

(5) ひずみの物理成分

基本ベクトル \mathbf{a}_i は一般に単位ベクトルではないので、式 (16) によるひずみは、断面上各点で異なる物理単位をもっている。ひずみの物理成分は文献 19) によれば、次の式で定義される。

$$\epsilon_{ij} = r_{ij} / (\sqrt{a_{ii}} \sqrt{a_{jj}}) \dots\dots\dots(22)$$

なお、式 (22) は物理成分であるから総和規約を適用しない。式 (22) へ式 (16-b), (16-d') を代入することにより、母線方向ひずみ (ϵ_{33}) と St. Venant のせん断ひずみ ($s\dot{r}_{13}$) は次の式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{33} &= \frac{\beta}{a_{33}} (\epsilon - y_{12} z_2 + y_{21} z_1 + \omega z_{3,3} + f z_3) \\ s\dot{r}_{13} &= -\frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \left\{ \theta_2 + \frac{k_2 \dot{y}_1 - k_1 \dot{y}_2}{\dot{\beta}} \theta_2 + \frac{k_1 \dot{y}_{1,1} + k_2 \dot{y}_{2,1}}{2 \dot{\beta}^2} \theta_2^2 \right\} z_3 = \theta z_3 \\ f &= \frac{h}{\beta} \{ y_1^2 + y_2^2 - (k_1 y_1 + k_2 y_2) \omega \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23 \cdot a, b)$$

回転変位 θ だけに着目して、St. Venant のせん断ひ

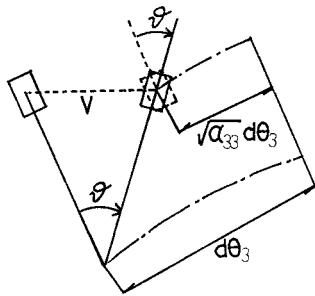


図-4 回転変位

すみを考えると、図-4 にみるように、棒軸の回転変位 θ により、任意点の母線は、変位 V と母線まわりの回転 θ を受ける(図-4)。各母線の回転によるねじれ率の変化は、回転角はどの位置でも同じであることから、線素の長さ ($\sqrt{a_{33}}$) に逆比例する。ゆえに“任意点のねじれ率の変化” = $(1/\sqrt{a_{33}})d\theta$ となる。これが式(23・b)の θ の成分の第1項であり、第2、第3項は回転により生じる変位 (V) によるねじれ率の変化を表わしている。

(6) 局所デカルト座標系におけるひずみ

棒理論で一般に用いられている Hooke の法則を用いるためには、曲線座標系で定義されているひずみを局所デカルト座標系のひずみに変換しなければならない。

ひずみテンソル (r_{ij}) は次の変換式により局所デカルト座標系でのひずみテンソル (e_{ij}) に変換できる²⁰⁾.

$$\left. \begin{aligned} e_{ij} &= \frac{\partial \theta_i}{\partial z_j} \frac{\partial \theta_\mu}{\partial z_j} r_{i\mu} \quad (\lambda=1, 2, 3; \mu=1, 2, 3) \\ \frac{\partial \theta_\lambda}{\partial z_i} &= a^{\lambda x} j_i a_x \quad (x=1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (24)$$

上式において $a^{\lambda x}$ は反変計量テンソル (APPENDIX (3)) であり、 j_i は局所デカルト座標系の基本ベクトルである。座標系の定義に従えば、基本ベクトル j_i は、

$$j_1 = a_1, \quad j_2 = a_2, \quad j_3 = t \quad \dots \quad (25)$$

となる。式(24)へ式(16), (A-11)を代入すれば、局所デカルト座標系でのひずみ (e_{ij}) が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} e_{11} &= e_{22} = e_{12} = e_{23} = 0 \\ e_{33} &= \frac{1}{\beta} (\epsilon - y_1 x_2 + y_2 x_1 + \omega x_{3,3} + {}_0 f x_3) \\ e_{31} &= \frac{1}{\beta} \theta x_3 \\ {}_0 f &= \frac{h}{\beta} \{y_1^2 + y_2^2 - (k_1 y_1 + k_2 y_2) \omega \\ &\quad - 2(y_2 y_{1,1} + y_1 y_{2,1}) \theta\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (26 \cdot a \sim c)$$

(7) 応力

応力とひずみの関係として、棒理論で一般に用いられ

ている Hooke の法則を仮定すると、応力は次のように定義できる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{11} &= \sigma^{22} = \sigma^{12} = \sigma^{23} = 0 \\ \sigma^{33} &= E e_{33} \quad E: ヤング率 \\ \sigma_s^{31} &= 2 G e_{31} \quad G: せん断弾性定数 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (27 \cdot a \sim c)$$

式(27)において σ_s^{31} は St. Venant のせん断応力である。

薄肉部材においては、St. Venant のせん断応力のほかに、軸方向応力と平衡するせん断応力を計算する必要がある。これを求めるために、微小要素の母線方向のつり合いを考える。テンソル表示された微小要素のつり合い条件は次の式で与えられる。

$$\tau^{\alpha\lambda}||_\alpha + p^\lambda = 0 \quad (\alpha=1, 2, 3) \quad \dots \quad (28)$$

上式において $||_\alpha$ は曲線座標系における、計量テンソルに関する共変微分 (APPENDIX (5)) を表わしており、また、 p^λ は微小要素に作用している λ 軸方向の荷重である。式(28)より母線方向 ($\lambda=3$) のつり合い条件は、

$$\left. \begin{aligned} \tau_{,3}^{33} &+ \frac{h(k_1 y_1 + k_2 y_2)}{\beta} \tau^{33} + \frac{3(k_1 \dot{y}_{2,1} - k_2 \dot{y}_{1,1})}{\beta} \tau^{31} \\ &+ \tau_{,1}^{31} + \frac{3(k_1 \dot{y}_{1,1} + k_2 \dot{y}_{2,1})}{\beta} \tau^{32} + \tau_{,2}^{32} + p^3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (29)$$

となる。

部材に生じる応力を $\sigma^{33}, \sigma^{31}, \sigma^{32}$ とすると、微小要素に作用している応力は、変換式

$$\tau^{i\mu} = \frac{\partial \theta_i}{\partial z_j} \frac{\partial \theta_\mu}{\partial z_j} \sigma^{ij} \quad (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3) \quad \dots \quad (30)$$

により、曲線座標系の応力テンソルに変換すると、次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \tau^{33} &= \frac{\sigma^{33}}{\beta^2} \\ \tau^{31} &= \frac{\sigma^{31}}{\beta} - \frac{a_{13}}{\beta^2} \sigma^{33} \\ \tau^{32} &= \frac{\sigma^{32}}{\beta} - \frac{a_{32}}{\beta^2} \sigma^{33} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (31 \cdot a \sim c)$$

式(31)を式(29)へ代入し、 θ_1 軸について積分すると次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{31} &= -\frac{1}{\beta^2} \int_0^{\theta_1} \beta \sigma_{,3}^{33} d\theta_1 + \frac{1}{\beta^3} \int_0^{\theta_1} \beta (a_{31} \sigma^{33})_{,1} d\theta_1 \\ &\quad + \frac{1}{\beta^2} \int_0^{\theta_1} \beta (a_{23} \sigma^{33})_{,2} d\theta_1 - \frac{1}{\beta^2} \int_0^{\theta_1} (\beta^2 \sigma^{32})_{,2} d\theta_1 \\ &\quad - \frac{1}{\beta^2} \int_0^{\theta_1} \beta^2 p^3 d\theta_1 + C \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (32)$$

p^3 は局所デカルト座標系での物理成分であり $p^3 = \beta P^3$ の関係がある。また、 C は積分定数であり、境界条件より定まる値である。

式(32)を θ_2 軸について積分すれば、せん断力のせ

ん断流 (q) 表示式を得る.

4. 弹性方程式

弾性方程式を仮想仕事の原理から導くにあたり、荷重はすべて棒軸に作用しているものとし、次の記号で表わす。

q_i : 作用線が y_i 軸に一致する荷重

m_i : y_i 軸まわりのモーメント荷重

また、 \bar{q}_i , \bar{m}_i は、部材の両端に作用している荷重とする。

応力による仮想仕事は²⁰⁾,

荷重による仮想仕事は、

$$\delta\pi_a = \int_0^t (q_1\delta u + q_2\delta v + q_3\delta w + m_1\delta\varphi + m_2\delta\psi + m_3\delta\vartheta) d\theta_3 + [\bar{q}_1\delta u + \bar{q}_2\delta v + \bar{q}_3\delta w + \bar{m}_1\delta\varphi + \bar{m}_2\delta\psi + \bar{m}_3\delta\vartheta]_t' \dots \dots \dots (35)$$

となる。仮想仕事の原理 $\delta\pi = \delta\pi_i - \delta\pi_a = 0$ に式 (34), (35) を代入することにより、次の平衡方程式および境界条件を得る。

$$\begin{aligned}
 & N_{,3} + k_1 M_{1,3} + k_2 M_{2,3} + h(k_2 M_1 - k_1 M_2) \\
 & = -q_3 - k_1 m_1 - k_2 m_2 \\
 M_{2,33} - h^2 M_2 + 2h M_{1,3} - k_1 M_{3,3} + h k_2 M_3 - k_2 N \\
 & = q_1 - m_{2,3} - hm_1 \\
 M_{1,33} - h^2 M_1 - 2h M_{2,3} + k_2 M_{3,3} + h k_1 M_3 - k_1 N \\
 & = -q_2 - m_{1,3} + hm_2 \\
 M_{3,3} - k_2 M_1 + k_1 M_2 & = -m_3
 \end{aligned}
 \quad \dots \quad (36\text{-a}\sim\text{d})$$

また、 $\theta_3=0$, l における境界条件として、

$$\left. \begin{array}{l} M_{2,3} + hM_1 - k_1M_3 = -\bar{q}_1 \quad \text{または} \quad u = \bar{C}_1 \\ M_{1,3} - hM_2 + k_2M_3 = \bar{q}_2 \quad \text{または} \quad v = \bar{C}_2 \\ N = \bar{q}_3 \quad \text{または} \quad w = \bar{C}_3 \\ M_1 = \bar{m}_1 \quad \text{または} \quad \varphi = \bar{C}_4 \\ M_2 = \bar{m}_2 \quad \text{または} \quad \psi = \bar{C}_5 \\ M_3 = \bar{m}_3 \quad \text{または} \quad \vartheta = \bar{C}_6 \\ M_w = 0 \quad \text{または} \quad z_3 = \bar{C}_7 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (37, a \sim n)$$

ここに、 N, M_1, M_2, M_3, M_w は次の式で定義される断面力であり、 $\bar{C}_i (i=1 \sim 7)$ は境界で与えられる量である。

$$N = \int_E \sigma^{33} dF, \quad M_1 = \int_E \sigma^{33} y_2 dF$$

$$\left. \begin{aligned} M_z &= - \int_F \sigma^{33} y_1 dF, \quad M_{\omega} = - \int_F \sigma^{33} \omega dF \\ M_f &= \int_F \sigma^{33} f dF, \quad T = - \int_F \sigma^{31} \Theta dF \\ M_3 &= M_{\omega,3} + M_f + T \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (38 \cdot a-g)$$

式(38)へ式(27)で表わされている応力を代入することにより、断面力と変位の関係式を得る。

$$\begin{aligned}
 N &= EF\varepsilon - EJ_{y_1}x_2 + EJ_{y_2}x_1 + J_{\omega f}x_3 \\
 M_1 &= EJ_{y_2}\varepsilon - EJ_{y_1}x_2 + EJ_{y_3}x_1 \\
 &\quad + EJ_{y_1\omega}x_{3,3} + EJ_{\omega f y_2}x_3 \\
 M_2 &= -EJ_{y_1}\varepsilon + EJ_{y_1}x_2 - EJ_{y_1}x_1 \\
 &\quad - EJ_{y_1\omega}x_{3,3} - EJ_{\omega f y_3}x_3 \\
 M_\omega &= EJ_{\omega y_1}x_2 - EJ_{\omega y_1}x_1 - EJ_{\omega\omega}x_{3,3} \\
 M_f &= EJ_{\omega f}\varepsilon - EJ_{\omega f y_1}x_2 + EJ_{\omega f y_2}x_1 + EJ_{\omega f \omega}x_3 \\
 T &= GJ_{TD}x_3
 \end{aligned}
 \quad \dots \quad (39.a-f)$$

式(39)中の断面定数は、表-2に記してある。

表-2 断面定数

断面定数	
等価断面積	$F = \int_F \frac{1}{\beta} dF$
等価断面一次および二次モーメント	$J_{y_1^m y_2^n} = \int_F \frac{y_1^m y_2^n}{\beta} dF$
そり体積およびそりモーメント	$J_{w^l y_1^m y_2^n} = \int_F \frac{\omega^l y_1^m y_2^n}{\beta} dF$
その他の項	$J_{w^l y_1^m y_2^n f^k} = \int_F \frac{\omega^l y_1^m y_2^n f^k}{\beta} dF$
St. Venant のねじり定数	$J_{TD} = \int_F \frac{1}{\beta^2} \left[2 \left(1 + \frac{k_1 \dot{y}_1 - k_2 \dot{y}_2}{\beta} \right) \theta_z + \frac{k_1 \dot{y}_{1z} + k_2 \dot{y}_{2z}}{\beta} \theta_z^2 \right]^2 dF$
そり関数	$\omega = -\beta \times \left\{ \int_0^\theta \frac{\dot{\theta}_t}{\beta^2} d\theta_t + C_0 \right\} - \frac{r_n}{\beta} \theta_z$

さらに、 y_1 , y_2 軸方向のせん断力 (Q_1 , Q_2) は、はりの微小要素に仮想仕事の原理を適用することにより、

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 = -M_{2,3} - hM_1 + k_1 M_3 \\ Q_2 = M_{1,2} - hM_2 + k_2 M_1 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (40 \text{-a,b})$$

となる。

5. 者 窥

本論文の特色は、ひずみを曲線座標系で定義し、座標変換により局所デカルト座標系でのひずみを導いたことがある。3. (6)において局所デカルト座標でのひずみを導く場合に、 $r_{23} \neq 0$ として、軸方向ひずみを導くと文献 5) と同一の軸方向ひずみを得る。これは、文献 5) では仮定式 (18-b) を局所デカルト座標系で行っているためである。また、文献 5) においては、そり関数の内厚方向の分布を求めるに際して、式 (18-b) の積分過程

において、体素 (β^2) の肉厚方向変化を無視している。

次に文献 6) は変断面部材をも対象として、有限項まで考慮しているが、等断面、微小変位に限定すると、そり変位、そり関数、軸方向ひずみテンソルは次のようになる。

$$\begin{aligned} \varrho &= \omega \vartheta_{,3} \\ \omega &= \int_0^{\theta_1} \left[\beta \dot{\varphi}_t + \left(\int_0^{\theta_1} \dot{\varphi}_t d\theta_1 + C_1 \right) \right. \\ &\quad \times (k_2 \dot{\varphi}_{1,1} - k_1 \dot{\varphi}_{2,1}) + C_2 \left. \right] d\theta_1 \quad \cdots \text{(41-a~c)} \\ r_{33} &= \dot{\varphi}_e - y_1 (\psi_{,3} + h\varphi) \\ &\quad + y_2 (\varphi_{,3} - h\psi) + \varrho_{,3} \end{aligned}$$

式 (41) と本論文の結果の差異は、文献 6) においては下記の仮定のもとに解析を行っていることによる。

① そり変位の誘導仮定において、そり変位を生じる変位を回転変位に限定し、式 (41-a) でもってそり変位を定義していること。

② 式 (16-d) において x_3 を $\vartheta_{,3}$ で置き換えると、文献 6) のそり関数定義式と同一になるが、式 (18-b) の積分過程において近似を行っていること。

③ 平面保持則を適用する場合に y_1, y_2 座標の一次の項だけを考慮していること。

また、肉厚方向のひずみ変化を考慮していないので、St. Venant のねじり定数の定義が明確にされていない。

6. 薄肉部材のまとめ

薄肉部材を棒理論で取り扱うためには、三次元問題を一次元問題に還元して解析を行わなければならない。そのため変形に対する幾何量は棒軸の特性により定まり、断面定数は三次元空間を規定するために用いる座標系の幾何量により定まる結果となる。表-3, 4 にこれら幾何量を記してある。

各種部材の平衡方程式を求めるには、表-4 の値を用いて、表-2 より断面定数を定めるとともに、表-3 の変形の幾何量を式 (39) へ代入して得る断面力の変位表示式を式 (36) へ代入すればよい。

円曲線部材に、本論文の結果を適用すると次のように

表-3 変形の幾何量

変形の幾何量	立体曲線部材	円弧部材	初期ねじれのある直線部材
y_1 軸まわりの回転角 (φ)	$-v_{,s} - hu + k_1 w$	$-v_{,s}$	$-v_{,s} - hu$
y_2 軸まわりの回転角 (ψ)	$u_{,s} - hv + k_2 w$	$u_{,s} + k_2 w$	$u_{,s} - hv$
棒軸の伸びひずみ (ϵ)	$w_{,s} - k_2 u + k_1 v$	$w_{,s} - k_2 u$	$w_{,s}$
y_1 軸まわりの回転率 (χ_1)	$\varphi_{,s} - h\psi - k_2 \vartheta$	$\varphi_{,s} - k_2 \vartheta$	$\varphi_{,s} - h\psi$
y_2 軸まわりの回転率 (χ_2)	$\psi_{,s} + h\varphi - k_1 \vartheta$	$\psi_{,s}$	$\psi_{,s} + h\varphi$
y_3 軸まわりの回転率 (χ_3)	$\vartheta_{,s} - k_2 \varphi + k_1 \psi$	$\vartheta_{,s} - k_2 \varphi$	$\vartheta_{,s}$

表-4 座標系の幾何量

座標系の幾何量		
座標系 部材形状	棒軸の特性 (ねじれ率、曲率)	体素 (β^2)
曲線座標系 (1) らせん曲線部材	h, k_1, k_2	$(1 - k_2 y_1 + k_1 y_2)^2$
円曲線座標系 円弧部材	$h = k_1 = 0, k_2$	$(1 - k_2 y_1)^2$
曲線座標系 (2) ねじれ率をもつ直線部材	$h, k_1 = k_2 = 0$	1
直交デカルト座標系 直線部材	$h = k_1 = k_2 = 0$	1

なる。

表-3 は円曲線座標系で表わされているので、円柱座標系で表わすために $d\theta_3 = R d\alpha$ ($R = 1/k_2$ は解析軸の曲率半径、 $d\alpha$ は円柱座標系の微小中心角) の変数変換を行いうと、変形の幾何量は次の式で表わされる。

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{R} (w_{,3} - u), \quad \chi_1 = -\frac{1}{R^2} (v_{,33} - R\vartheta) \\ \chi_2 &= \frac{1}{R^2} (u_{,33} + w), \quad \chi_3 = \frac{1}{R} \left(\vartheta_{,3} + \frac{1}{R} v_{,3} \right) \\ \chi_{3,3} &= \frac{1}{R^2} \left(\vartheta_{,33} + \frac{1}{R} v_{,3} \right) \end{aligned} \quad \cdots \text{(42-a~e)}$$

断面定数は、表-4 において、 $1 - k_2 y_1 = \rho/R$ (ρ は任意点の曲率半径) と変換すれば文献 11), 12) で定義されているものと一致する。特にそり関数は、

$$\begin{aligned} \omega &= -(1 - k_2 y_1) \times \left[\int_0^{\theta_1} \frac{\dot{\varphi}_t}{(1 - k_2 \dot{\varphi}_1)^2} d\theta_1 + C_0 \right] \\ &\quad - \frac{\dot{\varphi}_n}{1 - k_2 \dot{\varphi}_1} \theta_2 \\ &= -\rho R \int_0^{\theta_1} \frac{\dot{\varphi}_t}{\dot{\varphi}^2} d\theta_1 - \frac{R \dot{\varphi}_n}{\dot{\varphi}} \theta_2 - \frac{\rho}{R} C_0 \end{aligned} \quad \text{(43)}$$

となり、板厚方向の曲率の変化を考慮したそり関数となっている¹²⁾。

ひずみは式 (26) より次の式となる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{33} &= e_{33} = \frac{R}{\rho} (\epsilon - y_1 \chi_2 + y_2 \chi_1 + \omega \chi_{3,3}) \\ s \epsilon_{31} &= 2 e_{31} = \frac{R^2}{\rho \dot{\varphi}} \left(2 \theta_2 + \frac{\dot{\varphi}_{2,1}}{\dot{\varphi}} \theta_2^2 \right) \left(\frac{1}{R} \vartheta_{,3} - \frac{1}{R^2} v \right) \end{aligned} \quad \cdots \text{(44-a, b)}$$

以上のように、円曲線部材の場合には、文献 12) において断面定数の定義点を解析軸と一致させた場合の結果と同一となる。

7. あとがき

初期ねじれ率、曲率が一定な薄肉曲線部材の解析を行い、平衡方程式を仮想仕事の原理により導いた。

平面保持則の仮定を用いて、断面任意点の変位を棒軸の変位で表わし、この変位を用いて、曲線座標系においてひずみを定義した。せん断ひずみに対する仮定式(18)を曲線座標系のひずみに適用し、得た条件式を積分することにより、そり変位は肉厚方向の変化をも考慮して定めた。

曲線座標系で定義したひずみを、局所デカルト座標系のひずみに変換し、一般に棒理論で用いられているHookeの法則を適用し応力を定め、平衡方程式、断面力と変位の関係式を導いた。また、軸方向応力と平衡するせん断力は、テンソル表示された微小要素のつり合い条件より、厳密に導いた。

さらに、変形の幾何量は棒軸の特性(ねじれ率、曲率)により定まり、断面定数は部材を規定した座標系の幾何量により定まることを記し、各種の棒部材を統一的に解釈できることを示した。

また、実験による測定ひずみは、曲線座標系で定義されたひずみの物理成分であるので、この値を式(23)で記しておいた。

おわりに早稲田大学院生、井浦雅司君の協力を得たことを記し、感謝の意を表します。

APPENDIX

(1) Bernoulli-Euler の平面保持則より導かれる断面任意点の変位と棒軸の変位の関係

棒軸が変位 $\mathbf{v}(u, v, w) = u\mathbf{n}_1 + v\mathbf{n}_2 + w\mathbf{n}_3$ (図-3) した後の棒軸の位置ベクトル ($\bar{\mathbf{r}}_0$) は、

$$\bar{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \quad \text{(A1)}$$

となる。上式を θ_3 に関して微分して、式(2)を代入することにより、変位後の棒軸の単位接ベクトル ($\bar{\mathbf{n}}_3$) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}}_3 &= \frac{\bar{\mathbf{r}}_{0,3}}{|\bar{\mathbf{r}}_{0,3}|} = (u_{,3} - hv + k_2w)\mathbf{n}_1 \\ &\quad + (v_{,3} + hu - k_1w)\mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 \end{aligned} \quad \text{(A2)}$$

$\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ の係数はそれぞれ y_2 軸、 y_1 軸まわりの回転角を表わしているので²²⁾、

$$\begin{cases} \varphi = -v_{,3} - hv + k_1w \\ \psi = u_{,3} - hv + k_2w \end{cases} \quad \text{(A3-a, b)}$$

φ, ψ の正の方向は図-3を参照のこと。

断面の回転変位がないとすると、変位後の y_1, y_2 軸方向の単位接ベクトル ($\bar{\mathbf{n}}_i; i=1, 2$) は φ, ψ を用いて次の式で表わされる。

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{n}_1 - \psi\mathbf{n}_3 \\ \bar{\mathbf{n}}_2 = \mathbf{n}_2 + \varphi\mathbf{n}_3 \end{cases} \quad \text{(A4-a, b)}$$

θ_3 軸まわりの回転変位 ϑ が生じた後の、各単位ベク

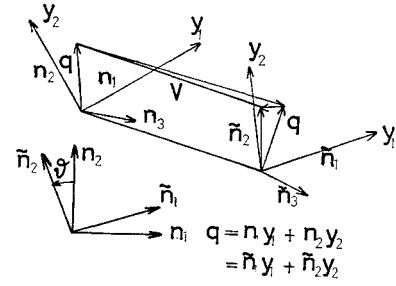


図-A1 任意点の変位

トル ($\tilde{\mathbf{n}}_i; i=1, 2, 3$) は、図-A1より次の式となる。

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{n}}_1 = (\cos \vartheta) \bar{\mathbf{n}}_1 + (\sin \vartheta) \bar{\mathbf{n}}_2 \\ \tilde{\mathbf{n}}_2 = -(\sin \vartheta) \bar{\mathbf{n}}_1 + (\cos \vartheta) \bar{\mathbf{n}}_2 \\ \tilde{\mathbf{n}}_3 = \bar{\mathbf{n}}_3 \end{array} \right\} \quad \text{(A5-a~c)}$$

上式へ式(A2), (A4)を代入し、 $\cos \vartheta = 1, \sin \vartheta = \vartheta$ と近似し、変位の二次の項を省略すると、微小変位の仮定のもとで、全変位後の、各単位ベクトル ($\tilde{\mathbf{n}}_i$) は次のように求まる。

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{n}_1 + \vartheta \mathbf{n}_2 - \psi \mathbf{n}_3 \\ \tilde{\mathbf{n}}_2 = -\vartheta \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \varphi \mathbf{n}_3 \\ \tilde{\mathbf{n}}_3 = \psi \mathbf{n}_1 - \varphi \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 \end{array} \right\} \quad \text{(A6-a~c)}$$

Bernoulli-Eulerの平面保持則を仮定すると、図-A1より、断面任意点の変位 $\mathbf{V}(v^1, v^2, v^3)$ は、

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + (\tilde{\mathbf{n}}_1 - \mathbf{n}_1)y_1 + (\tilde{\mathbf{n}}_2 - \mathbf{n}_2)y_2 \quad \text{(A7)}$$

と表わされる²²⁾。式(A7)に式(A6)を代入することにより断面任意点の変位を、

$$\left. \begin{array}{l} v^1 = u - y_2 \vartheta \\ v^2 = v + y_1 \vartheta \\ v^3 = w + y_2 \varphi - y_1 \psi \end{array} \right\} \quad \text{(A8-a~c)}$$

と定めることができる。ただし、式(A8)においては、そり変位は含まれていない。

(2) 基本計量テンソル (a_{ij})

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 & , & h(-y_2 \dot{\vartheta}_{1,1} + y_1 \dot{\vartheta}_{2,1}) \\ 0 & , & 1 & , & h(y_2 \dot{\varphi}_{2,1} + y_1 \dot{\varphi}_{1,1}) \\ h(-y_2 \dot{\vartheta}_{1,1} + y_1 \dot{\vartheta}_{2,1}), & h(y_2 \dot{\varphi}_{2,1} + y_1 \dot{\varphi}_{1,1}), & \beta^2 + h^2(y_1^2 + y_2^2) & , & \end{bmatrix} \quad \text{(A9)}$$

(3) 反変計量テンソル (a^{ij})

反変計量テンソルは、

$$a^{ij} = \frac{A_{ij}}{|a_{ij}|}; A_{ij} \text{ は } |a_{ij}| \text{ の余因数}$$

で定義されるので、上式に式(A9)を代入することにより次のように求まる。

$$a^{ij} = \frac{1}{\beta^2} \begin{bmatrix} a_{33} - (a_{23})^2, & a_{13}a_{32}, & -a_{13} \\ a_{13}a_{32}, & a_{33} - (a_{13})^2, & -a_{23} \\ -a_{13}, & -a_{23}, & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(A10)}$$

(4) $\partial\theta_\lambda/\partial z_i$ の値

$$\frac{\partial \theta_\lambda}{\partial z_i} = a^{\lambda x} j_i a_x \quad (x=1, 2, 3)$$

で定義されるので、上式に式 (7), (25), (A10) を代入することにより次のような。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial z_1} &= 1, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial z_2} = 0, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial z_3} = -\frac{a_{13}}{\beta} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial z_1} &= 0, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial z_2} = 1, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial z_3} = -\frac{a_{23}}{\beta} \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial z_1} &= 0, \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial z_2} = 0, \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial z_3} = \frac{1}{\beta} \end{aligned} \right\} \dots\dots(A11)$$

(5) 反変テンソルの共変微分

反変テンソルの共変微分は次の式で定義される。

$$A^{ij}||_r = A_{,r}{}^{ij} + \tilde{\Gamma}_{rm}{}^i A^{mj} + \tilde{\Gamma}_{rm}{}^j A^{mi}. \dots \quad (\text{A12})$$

ここにクリストフェル記号 \tilde{F}_{rm}^i は、

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^r = \tilde{\Gamma}_{ji}^r = \frac{1}{2} a^{rs} (a_{is,j} + a_{js,i} - a_{ij,s}) \quad \dots \dots \dots \quad (A13)$$

で計算される値である。式 (A 13) へ式 (A 9), (A 10) を代入することにより $\tilde{F}_{ii'}$ の値は次のような。

$$\begin{aligned}
& \tilde{F}_{11}^1 = \tilde{F}_{11}^2 = \tilde{F}_{11}^3 = \tilde{F}_{12}^1 = \tilde{F}_{12}^2 = \tilde{F}_{12}^3 = \tilde{F}_{22}^1 = \tilde{F}_{22}^2 \\
& = \tilde{F}_{22}^3 = 0 \\
& \tilde{F}_{13}^1 = -\frac{\alpha_{13}}{\beta} (-k_2 \dot{y}_{1,1} + k_1 \dot{y}_{2,1}); \\
& \tilde{F}_{13}^2 = h - \frac{\alpha_{23}}{\beta} (-k_2 \dot{y}_{1,1} + k_1 \dot{y}_{2,1}) \\
& \tilde{F}_{13}^3 = \frac{1}{\beta} (-k_2 \dot{y}_{1,1} + k_1 \dot{y}_{2,1}); \\
& \tilde{F}_{23}^1 = -h - \frac{\alpha_{13}}{\beta} (k_2 \dot{y}_{2,1} + k_1 \dot{y}_{1,1}) \\
& \tilde{F}_{23}^2 = -\frac{\alpha_{23}}{\beta} (k_2 \dot{y}_{2,1} + k_1 \dot{y}_{1,1}); \\
& \tilde{F}_{23}^3 = \frac{1}{\beta} (k_2 \dot{y}_{2,1} + k_1 \dot{y}_{1,1}) \\
& \tilde{F}_{33}^1 = -\frac{1}{\beta^2} (\alpha_{33} - \alpha_{13}^2) \{ \beta (-k_2 \dot{y}_{1,1} + k_1 \dot{y}_{2,1}) + h \alpha_{23} \} \\
& + \frac{1}{\beta^2} \alpha_{13} \alpha_{32} \{ \beta (k_2 \dot{y}_{2,1} + k_1 \dot{y}_{1,1}) - h \alpha_{13} \} \\
& \tilde{F}_{33}^2 = \frac{1}{\beta^2} \alpha_{13} \alpha_{32} \{ \beta (-k_2 \dot{y}_{1,1} + k_1 \dot{y}_{2,1}) + h \alpha_{23} \} \\
& + \frac{1}{\beta^2} (\alpha_{33} - \alpha_{13}^2) \{ \beta (k_2 \dot{y}_{2,1} + k_1 \dot{y}_{1,1}) - h \alpha_{13} \} \\
& \tilde{F}_{33}^3 = \frac{h}{\beta} (k_2 y_2 + k_1 y_1)
\end{aligned}$$

.....(A14)

式 (A 9), (A 14) の計算においては $y_{i,11}$ ($i=1, 2$) の項を、仮定 (b) により省略している。

参 考 文 献

- 1) Love, A.E.H. : A Treatise of the Mathematical Theory of Elasticity, University Press, 1927.
 - 2) Washizu, K. : Some Considerations on a Naturally Curved and Twisted Slender Beam, Jour. of Math.

- and Phys., Vol. 43, No. 2, pp. 111~116, 1964.

 - 3) Schröter, H.J. : Anwendung einer Theorie räumlich stark gekrümmter Stäbe auf beliebig geformte, gestützte und belastete freitragende Wendelschalen, Der Stahlbau, Heft 11/12, pp. 338~345, 362~367, 1973.
 - 4) Weißergerber, V. : Schnittkraft-Verformungs-Beziehungen des räumlich stark gekrümmten Stabes, Der Stahlbau, Heft 11, pp. 348~350 1974.
 - 5) 築地恒夫 : 初期曲率,ねじれ率を有する薄肉断面曲線はりの基礎方程式, 土木学会論文報告集, No. 230, pp. 11~22, 1974.10.
 - 6) Schroeder, F.H. : Allgemeine Stabtheorie des dünnwandigen räumlich vorgekrümmten und vorgewundenen Trägers mit großen Verformungen, Ingenieur-Archiv, Band. 39, pp. 87~103, 1970.
 - 7) Namita, Y. : Die Theorie II. Ordnung von Krümmen Stäben. und ihre Anwendung auf das Kipp-Problem des Bogenträgers, 土木学会論文報告集, No. 155, pp. 32~41, 1968.7.
 - 8) Schwarz, H. und Kinsky, G. : Zur Berechnung der Schnittkräfte in Zylinderschalen nach der Balkenmethode bei Berücksichtigung der gemischten Torsion, Ingenieur-Archiv, hand. 39, pp. 1~17, 1970.
 - 9) 小西一郎・小松定夫 : 薄肉曲線桁の基礎理論, 土木学会論文報告集, No. 87, pp. 35~48, 1962.11.
 - 10) 倉西茂 : 一般薄肉曲りばかりの解析, 土木学会論文報告集, No. 108, pp. 7~12, 1964.8.
 - 11) 深沢泰晴 : 薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎理論, 土木学会論文報告集, No. 110, pp. 30~51, 1964.10.
 - 12) 西野文雄・深沢泰晴 : ひずみ場の仮定に基づく薄肉曲がりばかりの静力学的挙動の定式化, 土木学会論文報告集, No. 247, pp. 9~19, 1976.3.
 - 13) Dabrowski, R. : Wölbkrafttorsion von gekrümmten Kastenträgern mit nichtverformbarem Profil, Der Stahlbau, Heft 5, pp. 135~141, 1965.
 - 14) Dabrowski, R. : Gekrümmte dünnwandige Träger, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
 - 15) Becker, G. : Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig gelagerter ebener gekrümmter Stäbe mit einfach symmetrischen dünnwandigen offenen Profilen in Stabachse veränderlichen Querschnitt unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion, Der Stahlbau, Heft. 11/12, pp. 334~436, pp. 368~377, 1975.
 - 16) Hirashima, M. und Yajima, S. : Baustatischer Beitrag zur Elastische Dünnwandigen Stäbe, 早稲田大学理工学研究所報告, No. 45, pp. 121~133, 1969.9.
 - 17) Kollbrunner, C.F. und Hajdin, N. : Dünnwandige Stäbe, Band. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
 - 18) Schapitz, E. : Festigkeitslehre für den Leichtbau, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1963.
 - 19) Green, A.E. and Zerra, W. : Theoretical Elasticity, (2nd-ed.), Oxford, University Press 1968.
 - 20) Washizu, K. : Variational Method in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968.
 - 21) Oden, J.T. : Mechanics of Elastic Structures, McGraw-Hill. Co., 1967.
 - 22) Novozhilov, V.V. : Thin Shell Theory, Wolters-Nordhoff Publishing, Netherland, 1970.
 - 23) Sokolnikoff : Tensor Analysis, John Wiley & Sons. Co., 1964.
 - 24) Timoshenko, S. and Goodier, J.N. : Theory of Elasticity, McGraw-Hill. Co., 1951.
 - 25) 栗田 稔 : 微分形式とその応用, 現代数学社, 1973.