

砂漣・砂堆上の流れの抵抗について

HYDRAULIC RESISTANCE OF STREAMS OVER DUNES AND RIPPLES

吉川秀夫*・石川忠晴**

By Hideo KIKKAWA and Tadaharu ISHIKAWA

に考察している。

1. はじめに

移動床水路では、水理条件によって、河床波とよばれる種々の波状河床形態が生じる。河床波が形成されると、摩擦抵抗のほかに、上流側と下流側の圧力不均衡による抵抗（形状抵抗）が生じ、抵抗係数が変化する。特に砂漣・砂堆と呼ばれるものが形成されると流れがはく離するために形状抵抗が顕著に増大する。この抵抗の変化と水理条件との関係を明らかにすることが河川工学上の主要な問題のひとつとなっている。

移動床流れの抵抗予測に関する研究は大きく二つの流れに分けられる。一つは抵抗係数(または抵抗そのもの)と、次元解析等で得られた少数のパラメーターとの関係を測定データから直接見い出そうとするもので、代表例として、Einstein & Barbarossa¹⁾, Alam & Kennedy²⁾, Engelund³⁾, Garde & Raju⁴⁾, 岸・黒木, 今泉⁵⁾, 等の研究があげられる。いま一つは、河床波の形状特性を介して、おもに力学的関係を考慮して抵抗法則を見い出そうとするもので、Vanoni & Hwang⁶⁾, 芦田・田中⁷⁾, 岡部・杉尾⁸⁾, 等の研究があげられる。

前者の方法で抵抗法則を定式化できれば実用上きわめて便利である。しかし、この方法では数式の導出がまったく測定データに依存するので、結果の普遍性が常に問題とされる。現象としては、河床波が生成してその形状によって抵抗が変わるものであるから、河床波の形状特性を介した理論が最終的には必要になると思われる。本研究は後者に属する。この種の研究は二つの部分から構成される。すなわち、河床波の形状特性量（波長、波高等）と水流の抵抗との関係の定式化、および水理条件と発生する河床波の形状特性量の関係の定式化である。本論文では形状特性量と抵抗の関係について理論的

2. 形状抵抗と摩擦抵抗

流体が河床に及ぼす力の流下方向成分を底面せん断力とよんでいる。しかし、河床が完全に滑面である場合を除くと、連続体の力学において定義されているせん断力とは異なる。すなわち、厳密な意味でのせん断力（粘性力）のほかに、河床の凹凸の上下流面での圧力不均衡により生じる流下方向の力も含めたものを指している。ここにいう凹凸とは河床波および個々の粒子の凹凸である。そこで河床波上の流れの底面せん断力は三つのランクに分けられる。第1に粘性による応力、第2に粒子規模の凹凸での圧力不均衡による応力、第3に河床波の上下流面での圧力不均衡による応力、である。第2種の応力は、粗度高さという指標をとることにより第1種の応力と同じような方法で扱うことができる。そこでこの二つを合わせて摩擦抵抗とよんでいる。第3種の応力は本質的には第2種の応力と同じであるが、河床波が変形することと水深と同オーダーの大きさをもつことのために、粗度高さという固定された単一の指標で表わすことができない。そこでこれを形状抵抗とよび前二者と分けて取り扱うのが普通である。そこで次のように書かれろ。

ここに、 τ_0 =底面せん断力、 τ_0' =摩擦抵抗による底面せん断力、 τ_0'' =形状抵抗による底面せん断力、である。

式(1)の右辺各項を水理量に結びつける手段として、二つの方法がよく使われてきた。一つは Einstein & Barbarossa¹⁾ の径深分割法、いま一つは Taylor & Brooks²⁾ の勾配分割法である。従来の抵抗則に関する多くの研究がこのいずれかの分割法に基づいている。しかし、ここで注意すべきは、式(1)右辺の分割された応力は実在のものであるのに対し、分割された径深、分

* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 王博 建設省土木研究所築崎試験所研究員

割された勾配はともに架空の量だということである。したがって、従来の抵抗則に関する理論の多くがその根底にあいまいさを含んでいることを否めない。抵抗の分割は移動床の抵抗則を議論するうえで基本となるものである。それゆえ本論文では、従来の形式的な分割によらずに、摩擦抵抗、形状抵抗そのものについて流体力学的に考察する。

河床波の頂上で水流ははく離し、波高の5~6倍下流で再び河床にぶつかる。この点を再付着点とよぶ。はく離領域内では逆流が生じるが、その流速は一般に平均流速に比べて小さいので、摩擦抵抗はおもに再付着点から次の頂上までの区間で生じると考えてよい。この区間では再付着点から新たな境界層が発達しており、摩擦抵抗はこの境界層の発達と密接に関係していると思われる。したがって、境界層の解析を通じて摩擦抵抗を算定することができるものと考えられる。

形状抵抗は一波長当たりの圧力の合力の流下方向成分として得られる。再付着点から発達する境界層の厚さは、水深や河床波の波高および再付着点からの距離に比較して十分薄いと考えられる。また、そのような場合、境界層内の底面に垂直方向の圧力変化（静圧分を差し引いたもの）は小さいとみなせる。したがって、摩擦抵抗および境界層の存在を無視した解析から近似的に形状抵抗を算定できると思われる。

以上の考察に基づき、摩擦抵抗、形状抵抗をそれぞれ解析的に取り扱う注1)。

なお、本論文では砂漣・砂堆を二次元管路内の規則的三角波としてモデル化する（図-1）。砂漣・砂堆は一般に三次元性、不規則性を有するが、その性質については現段階では十分明らかにはされていない。本研究ではできるだけ解析的に取り扱う目的で、これらの不明確な因子を除いてモデル化している。また、開水路流では河床の凹凸に伴って水面が変動する。特にフルード数が1に近くなるとこの影響は大きくなる。しかし、砂漣・砂堆

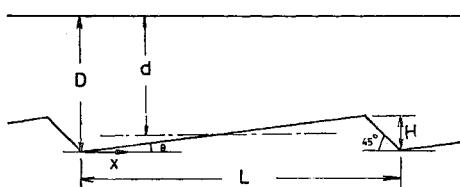


図-1 解析の対象とする波形

注 1) とはいっても摩擦抵抗と形状抵抗に分けて別々に算定する以上は、それぞれが現実のものと多少異なることを免れ得ない。なぜならば、両者はまったく無関係ではないからである。以下の取り扱いも、その意味において現実とは異なることをあらかじめ断わっておく。要はそれぞれの基本的性質を犠牲なく、個別の物理モデルを創造するという点にある。

は低フルード数のもとで形成される場合が多いので、本研究では水面変動を無視して取り扱う。要するに、砂漣・砂堆の流れに及ぼす抵抗の特性は頂上下流部のはく離に負うところが大きいと考えられるので、本研究ではその効果を取り出して解析するものである。この目的に照らして 図-1 の形状を砂漣・砂堆の基本 モデルとした。

3. 形状抵抗

(1) 抗力係数算定式の誘導

Yalin¹⁰⁾, Engelund¹¹⁾は管路の急拡損失の式(Carnot's Formula)を形状抵抗による損失の算定に用いている。この方法では河床波相互の干渉を考えていないから、独立した単一の三角形突起の形状抵抗を求めていることになる。図-2 は三角形波の抗力係数と、同形の単一突起の抗力係数とを比較したものである注2)。連続している一波当たりの抗力は、同形の単一突起の抗力に比べて明らかに小さい。したがって、急拡損失の式をそのまま河床波に適用するのは適当でないと考えられる。

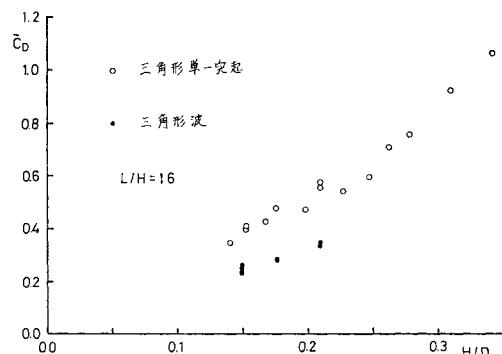


図-2 単一突起と連続突起の抗力係数

連続している場合に抗力が減少するのは、前面の一部が上流側の突起の陰に隠れるためであると考えられる（以後、遮蔽効果とよぶ）。この効果を図

3 のようにモデル化して取り扱うこととする。すなわち前面の rH (r は定数, H は波高) の長さの領域での底面上圧力は、上流側の突起の

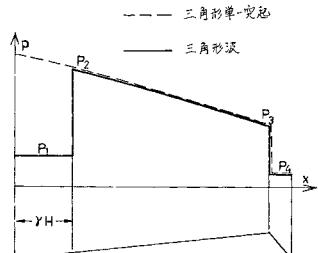


図-3 遮蔽効果

注 2) このデータは 3. (2) に述べる実験から得られたものである。図中の記号も後に述べる定義によっている。

25 cm × 25 cm の吹き出し口を有するエッフル型風洞に、 $L/H = 9, 16, 31$ の三角形突起を入れて通風し、表面の圧力分布を測定した。測定間隔を細かく取るため、ピトー管を底面につけてその静圧管を用いた。測定された圧力分布を積分して抗力を求めた。なお風速は $6.2 \text{ m/s} < U < 12.6 \text{ m/s}$ にとった。図-6 に圧力分布の一例を示す、ただし、はく離領域内の圧力を基準にとっている。図中実線は式(4)（ベルヌーイの式）であり、 $X=20$ で測定値と一致するように const. を定めた。頂点付近で測定値が下がるのは、流れが角部を越えようとするために局所的に流速が増大するからと思われる。また、前端部で上昇するのは、前端角部がよどみ点となるからである。このような局所的な圧力変化は式(4)では

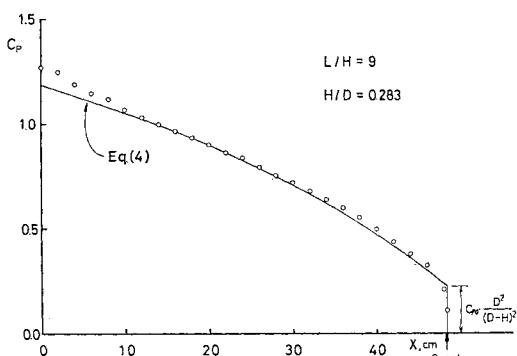


図-6 圧力分布の測定例（単一突起）

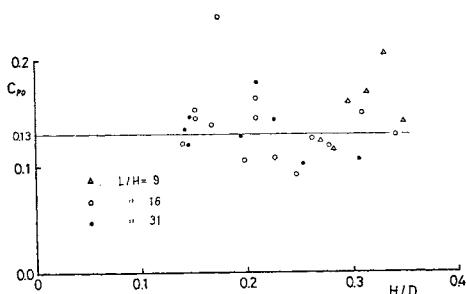


図-7 はく離域内の圧力降下

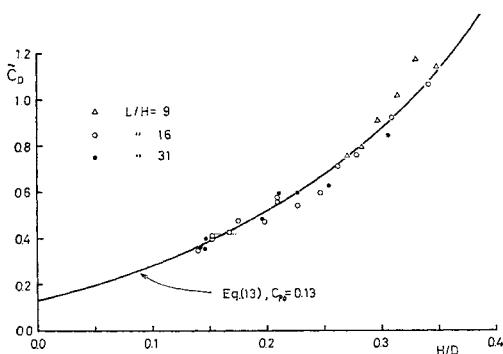


図-8 抗力係数（単一突起）

表わされない。しかし、ほとんどの領域ではよく一致している。この図から式(8)の C_{p0} を求めることができる。このようにして得られた C_{p0} を図-7 に示す。ばらつきは多少大きいが、ほぼ一定値とみなせる。平均値はおよそ 0.13 である。図-8 に抗力係数の測定値と式(13)とを比較する。全領域にわたってよく一致しているといえる。

b) 三角形波

$L/H = 16, 31$ の二種の三角形波を用いた。中央の一波上の圧力分布を单一突起の場合と同じ方法で測定し、これを積分して抗力を求めた。風速は $6.7 \text{ m/s} < V < 13.1 \text{ m/s}$ にとった。測定された圧力分布の一例をほぼ同条件の单一突起の結果とともに図-9 に示す。遮蔽効果についての仮定がほぼ成立していることがわかる。図-10 に抗力係数の測定値と式(18)とを比較する。单一突起の場合（図-8）と大きく異なるのは、波形勾配の影響が顕著に表われることである。すなわち、波形勾配が小さいほど遮蔽される面積の率が減少するので、抗力係数は増大する。この図によると測定値と理論曲線はよく一致し、式(12)によって三角形波の抗力係数をほぼ正しく算定できるものと考えられる。

(3) 形状抵抗による底面せん断力

一波当たりの力のつり合いから次式が成り立つ。

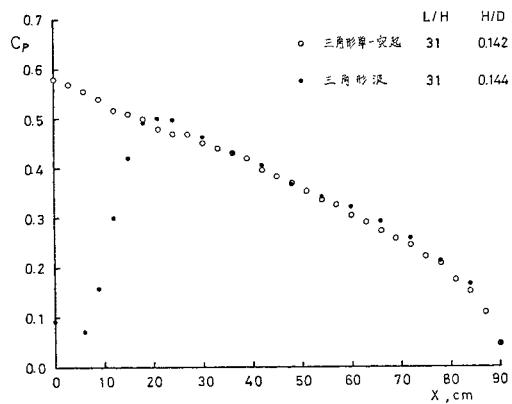


図-9 圧力分布の測定例

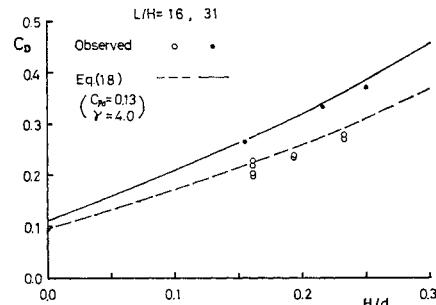


図-10 抗力係数（三角波）

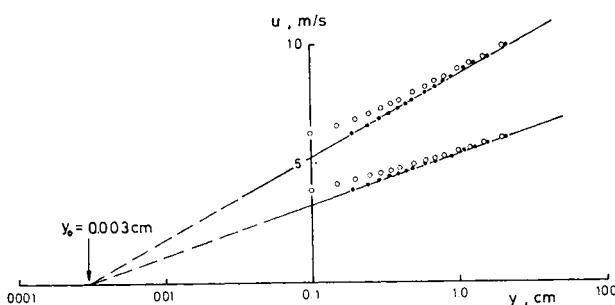


図-12 鉛玉上の境界層内速度分布

に 3.8 cm の段落ち部を設け、下流部で測定を行った。平均粒径 1.83 mm の鉛玉を密に一層に敷きならべ粗度として使用した。風洞の中心線上で外径 1.3 mm のピト一管を用いて底面摩擦力と平均流速分布を測定した。底面摩擦力の算定にあたっては、Hwang & Laursen¹⁴⁾のキャリブレーション結果を用いた。

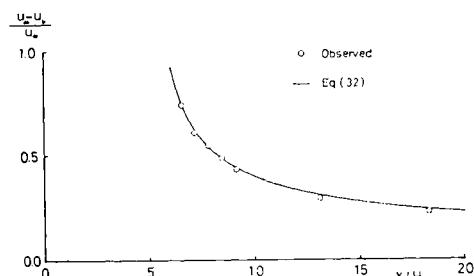
(ii) 粗度高さ

粗度高さを調べるための予備実験を行った。図-12 は、段落ち部を取り除き普通に境界層を発達させ、十分下流部で測定した流速分布形である。○は鉛直座標原点を鉛玉上面にとった場合の流速分布である。●は座標原点を鉛玉上面から 0.9 mm 下げた場合の流速分布形で、このようにすると片対数紙上で直線関係が得られ、かつ y_0 の値が流速によらない。図中の実線は測定された摩擦速度を式(25)に代入したもので、●とよく一致している。そこで実験結果を整理する際には、鉛直座標点を鉛玉上面から 0.9 mm 下にとり、 $y_0 = 0.03 \text{ mm}$ ($K_s = 0.9 \text{ mm}$)とした。

(iii) 測定結果

u_b の実験値と式(32)とを図-13 に比較する^{注6)}。ただし C_D の値は最下流断面の流速分布から得られた 0.44 を用いた。図-14 に底面摩擦係数を比較する。測定値と計算値はほぼ一致している。

のことから前述の計算法は妥当なものであると考えられる。

図-13 底面上流速 u_b

注 6) u_b の求め方は文献 12)と同じ。

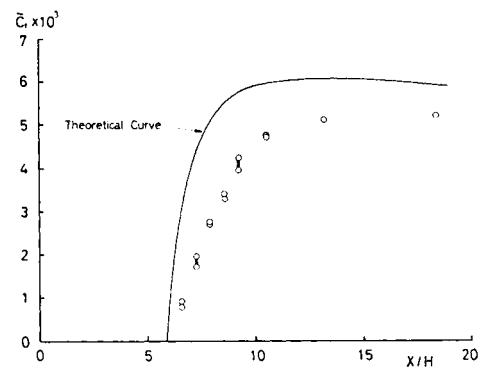


図-14 底面摩擦係数(直角段落ち)

(2) 三角波上の底面摩擦力

a) 算定法

ここまででは水深無限大でかつ段落ち後の底面が水平という条件のもとで解析を進めてきた。三角波の場合、水深が有限でかつ再付着後の底面が傾斜しているので流れが平均的に加速する。本来は境界の形が変われば流れの場を解析し直さねばならない。しかしこの場合、直角段落ち流とそれほど変わることは考えられない。そこで式(32)の u_∞ を断面平均流速 \bar{u} で近似する。

$$\frac{u_h}{\bar{u}} = \frac{u_h}{\bar{V}} \frac{\bar{u}}{V} = \left(1 - \frac{C}{\sqrt{(x/H - 4.9) + C^2}} \right) \times \frac{d - H/2}{d - \theta x} \quad (33)$$

なお、本研究では図-1 に示す形状を扱い、本節では原点を最下点にとっているので、直角段落流についての式(32)中の「5.9」は、本式では 4.9 となる。

ここに、 $C = 1.34 \sqrt{C_D}$ 、 C_D = 三角形波の抗力係数、 V = 平均流速であり、図-1 のように座標原点を最下点にとっている。式(33)を式(28)、(30)に代入して摩擦速度 u_*' を計算できる。底面摩擦係数 c_f' を次式で定義する。

$$c_f' = 2 \left(\frac{u_*'}{V} \right)^2 \quad (34)$$

b) 実験結果との比較

(i) 実験装置および方法

25 cm × 25 cm の風洞中に高さ 5 cm、 $L/H = 16$ の三角形波を置き、4. (1), b) で用いたと同じ鉛玉を敷いた。測定方法およびデータの整理のしかたは先の実験とまったく同じである。

(ii) 測定結果

図-15 に底面摩擦係数の測定値と理論値を比較する。立ち上がり部で大きめに算定されるが、全体的な値の対応はよい。

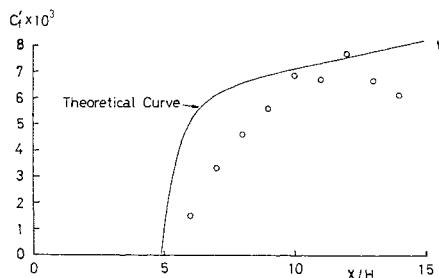


図-15 底面摩擦係数

(3) 摩擦抵抗による底面せん断力

摩擦抵抗による底面せん断力は次式で求まる。

$$\tau_0' = \frac{1}{L} \int_{4.9}^{L/H-1} \frac{\rho}{2} c_f' V^2 dx \quad \dots \dots \dots (35)$$

これより平均摩擦抵抗係数は次式で表わされる。

$$C_f' = \frac{H}{L} \int_{4.9}^{L/H-1} c_f' d\left(\frac{x}{H}\right) \quad \dots \dots \dots (36)$$

式(36)は L/H , H/d , K_s/H をパラメーターとして含んでいる。数値積分した結果を図-16に示す。

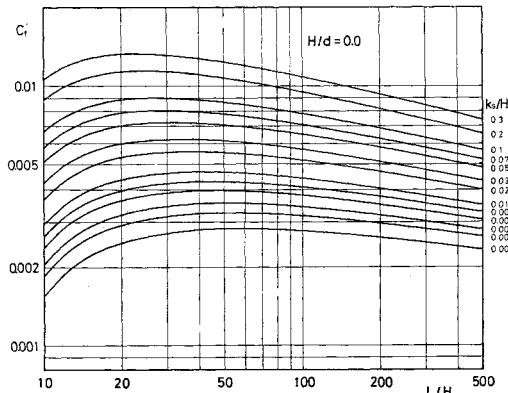


図-16 (a)

5. 平均流速の算定

(1) 平均流速算定式

底面せん断力は次のように書かれる。

$$\tau_0 = \tau_0' + \tau_0'' = \frac{\rho}{2} V^2 (C_f' + C_f'') \quad \dots \dots \dots (37)$$

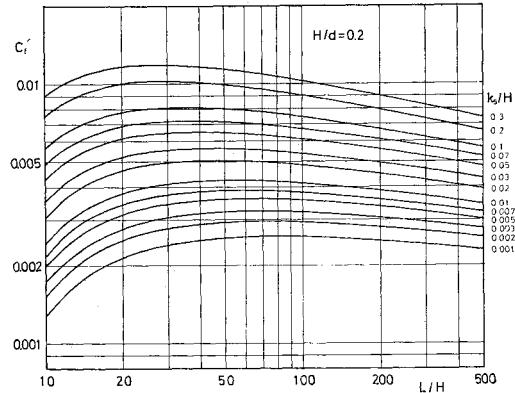


図-16 (c)

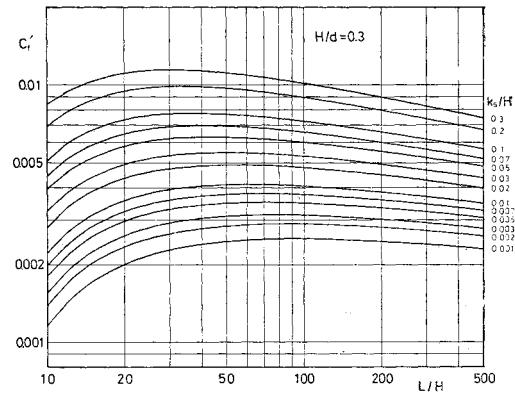


図-16 (d)

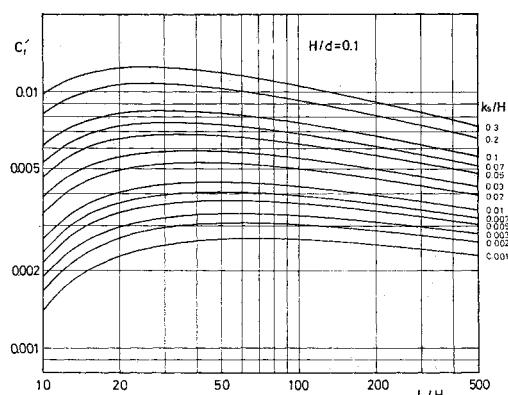


図-16 (b)

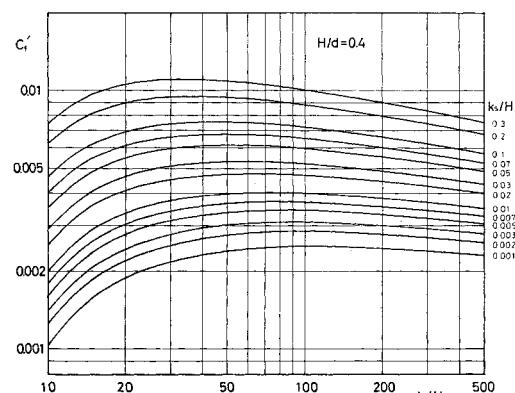


図-16 (e)

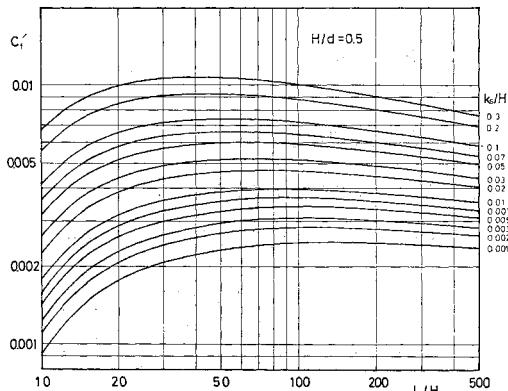


図-16 (f)

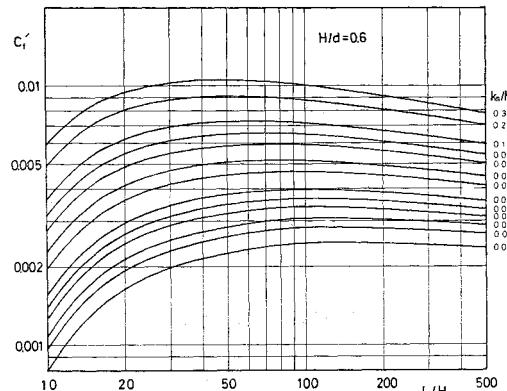


図-16 (g)

筆流状態では

ここに, q =単位幅流量, I =河床勾配, g =重力加速度である. 式(37), (38)から τ_0 を消去すると,

$$V = \sqrt[3]{\frac{2gqI}{C_{f'} + C_{f''}}} \quad \dots \dots \dots \quad (39)$$

すなわち、河床波の波長・波高、河床勾配および単位幅流量から平均流速を計算できる。ただし、 C_f' 、 C_f'' は H/d とともに変わるので、試算する必要がある。

計算にあたっては砂粒子が運動している時の河床面の粗度高さを定める必要がある。以下の計算では Engelund³⁾ に従って 65% 粒径の 2 倍を粗度高さとした。

(2) 実測データによる検討

文献 15), 16) に記載されているデータを用いて検討する。

式 39) から計算された平均流速と測定された値とを図-17 に比較する。ばらつきはあるが、本理論式で平

均流速をおおむね算定できるものと思われる。誤差の原因としては、河床波の三次元性、不規則性、水面の変動などが考えられる。

6. おわりに

本論文では、河床波形状と水流の抵抗との関係を明らかにする目的で、二次元管路内の規則的三角波のもたらす抵抗を理論的に取り扱った。

形状抵抗については、従来見逃されていた遮蔽効果を考慮した理論式を導いた。注目すべきことは、従来の急拡モデルや段落ち流モデルでは抗力係数が波形勾配に無関係であったのに対し、本モデルではそれによる差が顕著に現われることである。この理論式の妥当性は風洞実験によって確かめられた。

摩擦抵抗は再付着点からの境界層の発達と密接に関係している。そこでまず境界の形の比較的単純な直角段落ち流について再付着点からの境界層の発達を解析し底面摩擦力の算定法を導いた。次に河床波上流面の縮流効果を考慮して補正を加えた。この結果を風洞実験データと比較したところよい一致をみた。従来の摩擦抵抗算定法は理論的背景に乏しいものであったが、本方法は流体力学的考察に基づいて導かれている。したがって、平均摩擦抵抗のみならず分布形をも論ずることができ、たとえば河床波の発生・変形・消滅などの議論にも応用できるものと思われる。

最後に以上二つの理論を総合して、河床波の波長・波高、単位幅流量および底勾配から平均流速を算定する式を誘導した。実測データと比較したところ、計算値と測定値はほぼ一致した。

しかし、本理論では河床波を二次元の規則的三角波とみなして解析しているのに対し、現実には三次元性、不規則性を無視しえない場合もある。また、本理論では自

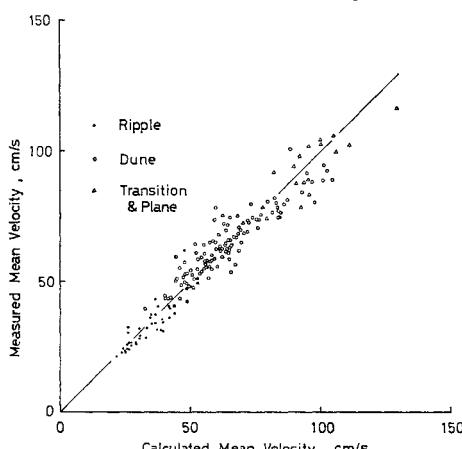


図-17 測定値と計算値の比較

由水面の変形を考慮していないので、波高の増大、フルード数の増加に伴って精度が減少すると思われる。このような点について今後改良を加えてゆく必要があると考える。

東工大水工研究室に卒論生として在籍した大島 明氏(現 群馬県庁)に助力いただいた。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Einstein, H.A. and Barbarossa, N.L. : River Channel Roughness, Trans. ASCE, Vol. 117, pp. 1121~1146, 1952.
- 2) Alam, M.Z. and Kennedy, J.F. : Friction Factors for Flow in Sand-Bed Channels, Journal of Hydraulics Division, ASCE, Vol. 95, No. HY 6, pp. 1973~1992, Nov., 1969.
- 3) Engelund, F., Closure : Hydraulic Resistance of Alluvial Streams, Journal of Hydraulics Division, ASCE, Vol. 93, No. HY 4, pp. 287~296, July, 1967.
- 4) Garde, R.J. and Raju, K.G.R. : Resistance Relationships for Alluvial Channel Flow, Journal of Hydraulics Division, ASCE, Vol. 92, No. HY 4, pp. 77~100, July, 1966.
- 5) 岸 力・黒木幹雄・今泉正次：沖積地河川における水深-流量関係の予測，土木学会北海道支部研究発表論文集，pp. 153~157, 1972.
- 6) Vanoni, V.A. and Hwang, L.S. : Relation between Bed Forms and Friction in Streams, Journal of Hydraulics Division, ASCE, Vol. 93, No. HY 3, pp. 121~144, May, 1967.
- 7) 芦田和男・田中祐一朗：移動床開水路の抵抗則に関する研究(1)，京大防災研年報第14号B, pp. 299~310, April, 1971.
- 8) Okabe, T. and Sugio, S. : Resistance to Flow on Sand Waves, Bulletin of Faculty of Engineering, Tokushima Univ., Vol. 12, pp. 1~15, 1975.
- 9) Taylor, R.H. and Brooks, N.H. : Discussion of Resistance to Flow in Alluvial Channels, by Simons, D.B. and Richardson, E.V., Trans. ASCE, Vol. 127, pp. 982~992, 1962.
- 10) Yalin, S. : On the Averaged Velocity of Flow over a Movable Bed, La Houille Blanche, No. 1, 1964.
- 11) Engelund, F. : Hydraulic Resistance of Alluvial Streams, Journal of Hydraulics Division, ASCE, Vol. 92, No. HY 2, pp. 315~326, March, 1966.
- 12) 石川忠晴：断面急変に伴う剥離領域の下流部の流れと底面せん断力について，土木学会論文報告集，第257号，pp. 21~29, Jan., 1977.
- 13) 日野幹雄：流体力学，理工学基礎講座 16，朝倉書店，p. 178.
- 14) Hwang, L.S. and Laursen, E.M. : Shear Measurement Technique for Rough Surface, Journal of Hydraulics Division, ASCE, Vol. 89, No. HY 2, pp. 19~37, March, 1963.
- 15) Shinohara, K. and Tsubaki, T. : On the Characteristics of Sand Waves Formed Upon the Beds of the Open Channels and Rivers, Report of Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu Univ., Vol. VII, No. 25, pp. 15~45, 1959.
- 16) Guy, H.P., Simons, D.B. and Richardson, E.V. : Summary of Alluvial Channel Data from Flume Experiments, 1956-61, Geological Survey Prof. Paper 462-1, U.S. Government Printing Office, Washington, 1966.
- 17) Tani, I. : Experimental Investigation of Flow Separation over a Step, Boundary Layer Research, IUTAM Sympo. in Freiburg, pp. 377~386, 1958.

(1978.3.23・受付)