

## 2次元および軸対称選択取水に関する研究

### STUDY ON TWO DIMENSIONAL AND AXISYMMETRIC SELECTIVE WITHDRAWAL

吉川 秀夫\*・山田 正\*\*・水谷 俊孝\*\*\*

By Hideo KIKKAWA, Tadashi YAMADA and Toshitaka MIZUTANI

#### 1. 序 論

密度成層をした流体の挙動は非常に複雑であり、また、その運動形態も予期しないものがあり、実験室内規模のスケールの運動から大気、大洋の規模のスケールの運動までわれわれをとりまく空気、水の運動は多かれ少なかれ密度成層の影響を受けている。一方、密度成層の流れに与える効果を積極的に利用したもの1つとしてダム貯水池の放水（取水）、あるいは火力および原子力発電の冷却水の取水等に行われる選択取水（selective withdrawal）がある。貯水池においては洪水時に貯水池に入った濁度の高い水塊は長期間滞留し、洪水が終わった後も放流水が濁る長期濁水放流の問題が生じたり、冷水放流にともなう農業用水の冷化等の問題が発生する。また、火力および原子力発電所においては、冷却水として多量の低温水を必要とするため一般に取水口は底近くに設けられる場合が多いが、あまり底近くに設置すると底面近くの濁度の高い水を吸い込む恐れがあり、また、これを避けるために水表面近くに設置すると温度の高い水を取水することになり冷却の効率を落としたり、クラゲ等の海洋生物を吸入する問題が発生する。いずれの問題においても結局、取水（放流）時にいかにして最適の水を他の箇所へ支障なく必要量を確保し得るかが選択取水の問題といえよう。

一般にダム貯水池においては貯水池内に円筒形の取水塔を設け、水道水等を取水していたり、また、ダム本体に発電用取水口あるいは放水口を設けている例が多いようである。これらの取水形式では流れの場は取水塔（口）まわりに軸対称になると思われる。一方、火力あるいは原子力発電所の復水器冷却用に使われる冷却水の

取水方法にはカーテンウォール式取水と海底取水管式に大別され、カーテンウォール式も平面形状を円弧形にすると、これらの取水口への流れは軸対称になることが報告されている<sup>16)</sup>。

一方、これらの流れの理論的解析や実験を行うにあたっては2次元取水の問題を取り扱う方がより簡単である。よって本論文では2次元取水ならびに軸対称取水の両者の理論的解析を行い、これらの流れの相違を調べてみることにより選択取水の物理的内容をより明確にし、さらに2次元取水に関して行った実験結果について述べている。ところで本研究で扱っているのはある時刻から階段関数（step function）的に一定流量を取水し始めるいわゆる過渡応答の問題を考えているが、取水前の時刻では貯水池内は静穏で、水は止まっており、取水前の密度分布としては水面から水底まで密度が直線的に変化する場を考えている。しかしながら、吉川・山本<sup>3)</sup>の研究によると、実際のダム貯水池の温度分布は夏季には表層近くと放流口高さ近くに2つの温度躍層をもっており、深層温度躍層面が放流口高さに安定に形成され、大洪水が起きた場合以外はくずれることがないことを報告しており、石橋・秋本<sup>20)</sup>も同様の報告をしている。このように本研究で扱っている密度分布と実際の貯水池等で生じているものとは必ずしも同じではないが、選択取水の問題の解析にあたっては密度分布が直線の場合がもっとも基本的と思われることにより以下の研究を行った。ところで成層流体の流れを支配しているパラメーターの1つに後に定義する取水流量と密度勾配からなる内部フルード数  $F_r$  があるが、従来からの研究により  $F_r$  が1より小さいある値以下になると取水口上下によどみ層ができることが知られており、このときがいわゆる選択取水の状態になっている。よって本研究で取り扱う内部フルード数も1以下の十分に小さい場合を考えることにする。著者らはこの問題に関し2次元取水の場合の線形理論解を出している<sup>21)</sup>。よって本論文はこの研究（以後こ

\* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科

\*\*\* 学生会員 東京工業大学大学院

れを論文 I とよぶ) をふまえ、2次元取水ならびに軸対称取水の理論展開を行い、さらに両者の比較検討を行ったものである。

2. 従来の研究

密度成層をしたダム貯水池や海からの選択取水の問題の取り扱いにおいては成層の状態によって密度の異なる2成層流体からの取水の場合と、連続成層流体からの取水の場合とがあり前者については取水方式(上層取水, 下層取水のそれぞれにつき, 上下横方向取水等がある)ごとに理論解析がなされ, 十分な精度で実験を説明し得ることが報告されている<sup>1)</sup>。一方, 連続成層の場合には, Debler<sup>2)</sup> の実験的研究や, Yih<sup>4)</sup> の解析的研究以来今日まで数多くの研究がなされており, 以下にそれらを簡単に review してみる。まず Debler の実験は鉛直方向の密度分布を直線とし, 2次元水槽の一方の側に line sink を設けてこれより一定流量を取水するものであるが, 内部フルード数  $F_r$  がある臨界値(彼の実験では  $F_r=0.28$ ) 以下になると取水口上層部に静止領域(よどみ層)が生じることを見出した。これに対し Yih は Debler の実験とほぼ同一条件のもとでの理論解析を行い, よどみ層のできる臨界フルード数が  $F_r=1/\pi$  となる結果を得た。しかし, 彼の得た解では  $F_r$  が  $1/\pi$  より小さくなると上流端の境界条件を破壊してしまい, 十分上流では一様流速になるという境界条件とは別の取り扱いをしなければならないことがわかっている。この Yih の解を改良したものに Kao<sup>6),7)</sup> の解があり, 側端に仮想の sink を新たに導入することにより, Yih の解の破綻を避けている。しかし, これは一種の技法であり, 本質的に問題が解決したわけではない。さらに取水量が極端に小さい場合 (creeping flow) について Koh<sup>11)</sup> の研究があり, 密度の拡散も考慮し, 境界層型の近似と, 相似変換の手法による解が得られており, 実験とのよい一致をみている。しかしながら, Imberger<sup>13)</sup> によるとこの解は, 鉛直断面をよぎる体積フラックスは保存されていても運動量が保存されていないことが明らかにされており, 彼は新たに貯水池の有限性を考慮に入れた議論を行っている。一方, Pao and Kao<sup>9),10)</sup> はこれらの事情をふまえて非定常問題として選択取水の問題を取り扱い, 解析および数値計算を行うことにより, 密度成層流体からの取水時には特異な波動が存在することを明らかにした。また, 彼らの計算によりたとえ内部フルード数が小さい流れでも運動方程式中の非線形項は無視し得るほどは小さくないことを示している。これらの研究にさきがけ Trustrum<sup>5)</sup> は運動方程式中の移流項を部分的に残した Oseen 近似に基づき, 非定常問題とし

ての選択取水の解を得ている。しかし, 彼女の得た定常解には前述の波動性が十分に考慮されていなかった。著者ら<sup>21)</sup>はこの点を考慮し, さらに粘性の効果をも加味した2次元選択取水の線形理論解を出している。既述の論文 I において, 粘性の効果を示すレイノルズ数を適当に選ぶならば実験で得られる流速分布等はかなりの程度まで説明されることが示されている。一方, これらの研究で取り扱っている line sink の2次元取水と違った軸対称取水に関して, 日野・大西<sup>14),15)</sup>の一連の研究があり, 選択取水に及ぼす取水口の高さの効果が議論されている。また, Koh<sup>12)</sup> は軸対称取水の非定常問題を扱っている。これらの研究をふまえ, 本論文は, 文献 9) がおもに数値計算によって選択取水の問題を取り扱っているのに対し, モードをもった各波動の伝播という点に着目して, この現象をより明確にするために, 非定常問題としての解析的研究を行い, 2次元ならびに軸対称取水の両者を一括して議論したものである。

3. 理 論

(1) 基礎方程式

上記のように2次元取水と軸対称取水を統一的に論じるために流れの場の座標系を図-1に示す。図中の  $\xi_0$ ,  $x_0$  は取水塔半径, あるいは取水塔位置である。

基礎方程式としては Euler の連続の式(密度の拡散は考慮しない)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) \equiv \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\mathbf{v}) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここに,  $\rho$  は密度,  $\mathbf{v}$  は速度ベクトルを表している。次に流体粒子の密度が時間の経過に従って変化しない, いわゆる非圧縮の条件は,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

式 (1), (2) より,

$$\text{div}(\mathbf{v}) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

運動の方程式としては, 重力加速度  $g$  にかかった密度  $\rho$  以外のすべての密度を reference density  $\rho_0$  とするいわゆる Boussinesq 近似を用いた Euler の運動方

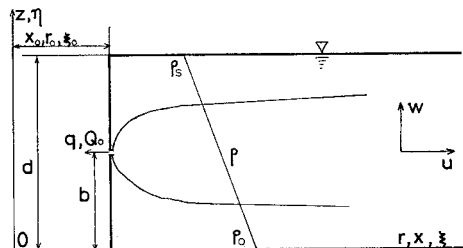


図-1 座 標 系

程式を考える。

$$r\text{-方向} : \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial r} \dots\dots\dots(4)$$

$$z\text{-方向} : \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} g \dots\dots\dots(5)$$

ここで、未知数は  $u, w, P, \rho$  の4個であり、構成式は式(2), (4), (5)の3本である。次に式(4), (5)より cross-differential を取り、圧力  $P$  を消去する。

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{u}{r} \omega = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial r} \dots(6)$$

ここに、 $\omega = \partial u / \partial z - \partial w / \partial r$  で定義される渦度である。次に Stokes の流れの関数  $\psi$  を導入する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, w = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \omega &= \nabla^2 \psi \\ \nabla^2 &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

式(7)で定義される流れの関数を式(2), (6)に用いると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi \\ - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \nabla^2 \psi = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial r} \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

ここで、取水を開始する前の密度分布は既述のように直線分布とすると、 $t > 0$  つまり取水開始後の密度  $\rho$  は、次のように表すことができる。

$$\rho(r, z, t) = \rho_0(1 - \varepsilon z) + \rho'(r, z, t) \dots\dots\dots(10)$$

ここに、 $\varepsilon = (\rho_0 - \rho_s) / \rho_0 d$ 、 $\rho_0, \rho_s$  はそれぞれ  $z=0, d$  での密度である。

式(10)を式(8), (9)に代入して、

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho'}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \rho'}{\partial z} \left( -\varepsilon \rho_0 + \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right) = 0 \dots\dots\dots(11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi \\ - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \nabla^2 \psi = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial r} \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

以下の理論展開においては、式(11), (12)をもとに未知数  $\rho', \psi$  を求める。

(2) 無次元化

基本式の無次元化にあたって長さの規準としては水深  $d$ 、時間は密度成層の勾配  $\varepsilon$  から決まる時間スケール  $T$  (Brunt-Väisälä 振動数の逆数)、流れの関数は取水流量  $Q_0$ 、密度は底面密度  $\rho_0$  を用いて行くと、

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= r/d, \eta = z/d, \tau = t/T, T = 1/\sqrt{\varepsilon g} \\ \varphi &= \psi / (Q_0/2\pi), \zeta = \rho/\rho_0\beta, \beta = (Q_0/d^2)/2\pi g T \\ G &= Q_0 T/2\pi d^3 = Q_0/2\pi d^3 \sqrt{\varepsilon g} \text{ (日野・大西}^{14) \sim 16)} \end{aligned} \right.$$

の研究において用いられている取水パラメータ一で一種の内部フルード数

となり、式(11), (12)は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 \varphi + G \frac{1}{\xi} \frac{\partial (\nabla^2 \varphi, \varphi)}{\partial (\xi, \eta)} - G \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \nabla^2 \varphi \\ = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + G \frac{1}{\xi} \frac{\partial (\varphi, \zeta)}{\partial (\eta, \xi)} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0 \dots\dots\dots(14)$$

以後は式(13), (14)をもとにして議論する。

(3) 摂動法による解

本研究では取水パラメータとしての  $G$  が1に比べ十分小さい場合を取り扱うことにより、 $\varphi$  と  $\zeta$  を  $G$  に関して次のように展開する。

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + G\varphi_1 + G^2\varphi_2 + \dots \\ \zeta &= \zeta_0 + G\zeta_1 + G^2\zeta_2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

式(15)を式(13), (14)に代入し、第0近似のみをとると、

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 \varphi_0 = \frac{\partial \zeta_0}{\partial \xi} \dots\dots\dots(16)$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial \tau} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} = 0 \dots\dots\dots(17)$$

さらに式(16), (17)より  $\zeta_0$  を消去すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \nabla^2 \varphi_0 - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2} = 0 \dots\dots\dots(18)$$

式(18)の両辺に  $\xi$  をかけると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} \varphi_0 - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} \\ + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2} = 0 \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

ここで、式(19)の解を次式のようにおくと、

$$\varphi_0 = -\eta H(\tau) + \varphi_*(\xi, \eta, \tau) \dots\dots\dots(20)$$

ここに、 $H(\tau)$  : 単位段階関数 (unit step function)

式(20)を式(19)に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} \varphi_* - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \varphi_*}{\partial \xi} \\ + \frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial \xi^2} = 0 \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

式(21)が軸対称取水の解くべき式となる。

(4)  $\varphi_0$  および  $\varphi_*$  に対する境界条件

$\varphi_0$  に対しては、

(i)  $\varphi_0 = -H(\tau)$   $\xi_0 \leq \xi < \infty, \eta = 1$

(ii)  $\varphi_0 = 0$   $\xi_0 \leq \xi < \infty, \eta = 0$

(iii)  $\varphi_0 = -\eta H(\tau)$   $\xi \rightarrow \infty, 0 \leq \eta \leq 1 (\tau \ll \infty)$

$$(iv) \varphi_0 = \begin{cases} 0 & 0 \leq \eta \leq b \\ -H(\tau) & b \leq \eta \leq 1 \end{cases} \xi = \xi_0$$

$$(v) \partial/\partial\tau(F^2\varphi_0) = \partial\zeta/\partial\xi = 0 \quad \tau < 0$$

(取水開始前に半径方向に密度変化はない)

$$(vi) F^2\varphi_0 = 0 \quad \tau < 0 \quad (\text{取水開始前には渦度はない})$$

$\varphi_*$  に対して境界条件を考えると、

$$(i) \varphi_* = 0 \quad \xi_0 \leq \xi < \infty, \quad \eta = 1$$

$$(ii) \varphi_* = 0 \quad \xi_0 \leq \xi < \infty, \quad \eta = 0$$

$$(iii) \varphi_* = 0 \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \xi \rightarrow \infty$$

$$(iv) \varphi_*(\xi_0) = -F(\tau, \eta) + \eta H(\tau) \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \xi = \xi_0$$

$$\text{ここに } F(\tau, \eta) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \eta \leq b \\ H(\tau) & b \leq \eta \leq 1 \end{cases}$$

$$(v) \partial/\partial\tau(F^2\varphi_*) = \partial\zeta/\partial\xi = 0$$

$$(vi) F^2\varphi_* = 0$$

### (5) 2次元選択取水

式(21)の軸対称取水の場合を議論する前に2次元取水の場合を考える。前述のようにこの場合はすでに著者らはOseen近似に基づく解を得ているが、ここでは若干手法を変えて導出する。式(21)で $1/\xi$ のかかった項を除くと次式を得る。

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \right\} \varphi_* + \frac{\partial^2\varphi_*}{\partial\xi^2} = 0 \dots\dots\dots(22)$$

この式は流れ関数 $\varphi_*$ をラグランジュの流れ関数とみなすと2次元取水の基本式となる。このときは摂動パラメータとしての内部フルード数は $F_r = qT/d^2$  ( $q$ は単位幅当りの流量)で定義されるものである。次に式(22)を直接解く前に $\partial^2/\partial\eta^2 \gg \partial^2/\partial\xi^2$ の近似のもとに式(23)の簡易化された方程式を考える。

$$\frac{\partial^4\varphi_*}{\partial\tau^2\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\varphi_*}{\partial\xi^2} = 0 \dots\dots\dots(23)$$

これをもとにした解はPao<sup>9)</sup>らによって求められており、

$$\varphi_*(\xi, \eta, \tau) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \sin n\pi\eta \cdot H[\tau - n\pi(\xi - \xi_0)] \dots\dots\dots(24)$$

と与えられている。ところで、式(24)の非定常項は一種の波動性を示しており、 $\varphi_*$ をフーリエ変換した際に現れる各モードはそれぞれ自身固有の波速 $C_n = 1/n\pi$ をもって取水口より上流に遡上していることがわかり、あたかも開水路にみられる段波のようである。ところで貯水池には取水口に向かう平均流速 $U(=qd)$ があり各波動はこの平均流速と波との大小関係によって上流にそ上できるか否かが決定される。 $C_n$ を次元をもつ形で表わすと $d/n\pi T$ であるから上流にそ上し得るモード( $n$ )は $d/n\pi T > qd$ を満たすものである。これを内部フルード数 $F_r$ によって示すと、 $F_r = qT/d^2$ より、

$$\frac{1}{n\pi} > F_r \dots\dots\dots(25)$$

ここで、式(25)を満たす最大の整数を $N$ とすると、 $n = 1$ から $N$ までのモードの波動のみが上流に遡上することになるが、ある点で観測していると $N$ モードまでの波動が全部通過した後はその観測点断面の流れは定常となる。このときの解を準定常解とよぶと、これを $\varphi_0$ で表わして、

$$\varphi_0 = -\eta - 2 \sum_{n=1}^N \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \sin n\pi\eta \dots\dots\dots(26)$$

となる。式(26)により $\xi$ 方向の流速 $u$ を計算したものが図-2である。図より $F_r$ が小さくなるにつれて流速分布は鋭ってくるのがわかる。ところで式(26)は $\xi$ に関係しない解であるから取水口上での境界条件を満たしてはいない。この原因として $\xi$ 方向の変化の大きい取水口近くでは基礎方程式から移流項を無視することができない点にあると思われる。これに関して論文Iでは移流項を部分的に残したOseen近似に基づく解析を行っており、さらに粘性の効果をも加えて式(27)を得ている。

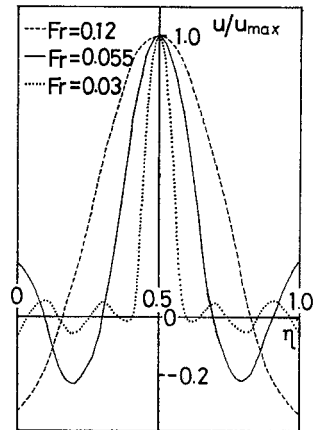


図-2 流速分布(式(26)による)

式から移流項を無視することができない点にあると思われる。これに関して論文Iでは移流項を部分的に残したOseen近似に基づく解析を行っており、さらに粘性の効果をも加えて式(27)を得ている。

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & -\eta - 2 \sum_{n=1}^N \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \sin n\pi\eta \exp \left[ -(\pi n)^3 (\xi - \xi_0) / 2 R_e \right] \\ & - 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \sin n\pi\eta \exp \left[ -\pi n (\xi - \xi_0) \sqrt{1 - (\pi n F_r)^{-2}} \right] \dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

ここに、 $R_e$ は $d^2/\nu T$ で定義されるレイノルズ数である。

ところで式(22)にもどり、この方程式に対し $\eta$ 方向のフーリエ展開、ラプラス変換-逆変換の操作を行うと次の解を得る。

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & -\eta - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \sin n\pi\eta S \dots\dots\dots(28) \\ S = & \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \frac{e^{s\tau}}{s} \exp \left[ -\frac{\pi n s}{\sqrt{1+s^2}} (\xi - \xi_0) \right] ds \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

式(28)右辺の非定常項 $S$ は式(29)のようにラプラス逆変換の形で与えられるが、これを付録1に示す方法により数値計算を行ったものが図-3, 4である。こ

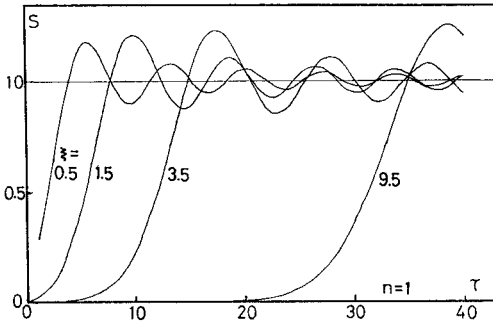


図-3 式(29) S

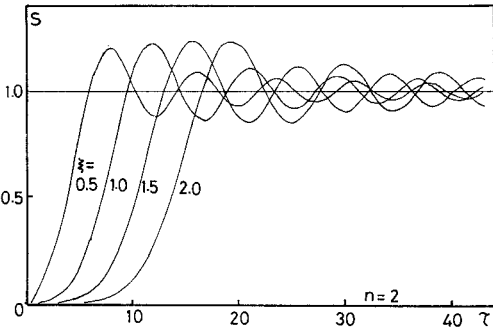


図-4 式(29) S

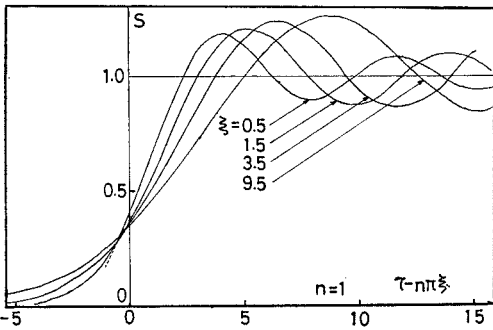


図-5 式(29) S

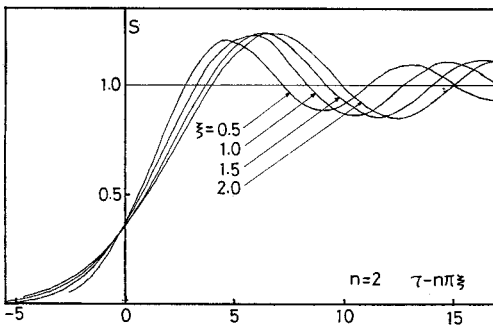


図-6 式(29) S

これらの図より取水時に取水口より徐々に伝播する波動をみることができる。また、 $n$ が大きいほど伝播速度が小さいことがわかり、前述のように取水口に向かう断面平均流速とこの波動の位相速度との大小により上流に遡上することができない波動が存在することを考慮すると、式(28)中の $\Sigma$ の $\infty$ は式(26)と同様に $N$ に置き換えられるべきである。図-5, 6は図-3, 4の横軸を $\tau - n\pi\xi$ に変えて表示したものであり、これらの図からも各モードの位相速度 $C_n$ は $1/n\pi$ となることがわかる。また、各モードともに時間が十分に経つと $S$ は1に収束している。よって式(28)において $\tau \rightarrow \infty$ としたときは、式(26)と同じになり簡易化された方程式(23)から求めた準定常解も、なんら省略しない式(22)から求めた準定常解もまったく同一になることがわかる。

(6) 軸対称選択取水

次に式(21)に基づく軸対称選択取水の理論解を導く。まず $\varphi_*$ を変数分離して次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_* &= X(\tau, \xi) Y(\eta) \\ \cdot &= \partial/\partial\tau \\ \prime &= \partial/\partial\xi \\ \blacktriangledown &= \partial/\partial\eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

このとき、式(21)は、

$$\frac{\ddot{X}''}{\dot{X}} - \frac{1}{\xi} \frac{\dot{X}'}{\dot{X}} - \frac{1}{\xi} \frac{X'}{\dot{X}} + \frac{X''}{\dot{X}} = -\frac{Y''}{Y} \dots(31)$$

式(31)をみると、左辺は $\tau$ と $\xi$ の関数、右辺は $\eta$ のみの関数である。よって左辺=右辺= $a^2$  ( $a > 0$ の定数)と置くと、

$$Y'' + a^2 Y = 0 \dots\dots\dots(32)$$

$$\dot{X}'' - 1/\xi \dot{X}' - 1/\xi X' + X'' = a^2 \dot{X} \dots\dots\dots(33)$$

式(32)の一般解は、

$$Y = A \sin a\eta + B \cos a\eta \dots\dots\dots(34)$$

境界条件を考慮すると $B=0$ ,  $a=n\pi$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ となることより、

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi\eta \dots\dots\dots(35)$$

一方、式(33)を整理して、

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \left\{ \frac{\partial^2 X}{\partial\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial X}{\partial\xi} - a^2 X \right\} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial X}{\partial\xi} + \frac{\partial^2 X}{\partial\xi^2} = 0 \dots\dots\dots(36)$$

式(36)に対して付録1で定義されるラプラス変換を行うと、 $\bar{X}(\xi, s)$ を $X(\xi, \tau)$ の像関数として、

$$\frac{d^2 \bar{X}}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{d\bar{X}}{d\xi} - \frac{a^2 s^2}{1+s^2} \bar{X} = 0 \dots\dots\dots(37)$$

式(37)の一般解は、

$$\bar{X} = \xi \left[ CI_1 \left( \frac{as\xi}{\sqrt{1+s^2}} \right) + DK_1 \left( \frac{as\xi}{\sqrt{1+s^2}} \right) \right] \dots(38)$$

ここに、 $I_1, K_1$  はそれぞれオーダー1の第1種、第2種変形ベッセル関数である。式(38)で $\xi \rightarrow \infty$ での $\bar{X}$ の有界性の条件から $I_1$ は解として適当でないことより $C_1=0$ となる。このとき、式(35)を考慮して、 $\varphi_*$ のラプラス変換を $\bar{\varphi}_*$ とすると、

$$\bar{\varphi}_* = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \xi K_1 \left( \frac{n\pi s \xi}{\sqrt{1+s^2}} \right) \sin n\pi\eta \dots\dots\dots(39)$$

式(39)の $A_n$ は $\xi=\xi_0$ 上の境界条件より決定されるものである。式(39)を便宜のため次のように置くと、

$$\bar{\varphi}_*(\xi=\xi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin n\pi\eta \dots\dots\dots(40)$$

$\xi=\xi_0$ での境界条件より、

$$\left. \begin{aligned} E_n &= 2 \int_0^1 \bar{\varphi}_*(\xi_0) \sin n\pi\eta d\eta \\ \text{ここに } \bar{\varphi}_*(\xi_0) &= \begin{cases} \eta/s & 0 \leq \eta \leq b, \xi=\xi_0 \\ (\eta-1)/s & b \leq \eta \leq 1, \xi=\xi_0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

よって $E_n = -2 \cos n\pi b / n\pi s$ となる。

ここで $E_n = A_n \xi_0 K_1(n\pi s \xi_0 / \sqrt{1+s^2})$ より、

$$A_n = -\frac{2 \cos n\pi b}{n\pi s} \frac{1}{\xi_0} \frac{1}{K_1 \left( \frac{n\pi s \xi_0}{\sqrt{1+s^2}} \right)} \dots\dots\dots(42)$$

式(42)を式(39)に代入して、

$$\bar{\varphi}_* = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \sin n\pi\eta \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right) \frac{1}{s} \frac{K_1 \left( \frac{n\pi \xi s}{\sqrt{1+s^2}} \right)}{K_1 \left( \frac{n\pi \xi_0 s}{\sqrt{1+s^2}} \right)} \dots\dots\dots(43)$$

式(43)をラプラス逆変換することにより $\varphi_*$ を得るが、これを $\varphi_0$ で表わすと、

$$\varphi_0 = -\eta H(\tau) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \sin n\pi\eta \cdot S \dots\dots\dots(44)$$

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \frac{e^{s\tau}}{s} \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right) \frac{K_1 \left( \frac{n\pi \xi s}{\sqrt{1+s^2}} \right)}{K_1 \left( \frac{n\pi \xi_0 s}{\sqrt{1+s^2}} \right)} ds \dots\dots\dots(45)$$

式(45)を解析的に積分するには通常は被積分関数の特異点としての極を探し出し、積分路を極を囲むように変形して複素関数論における留数の定理を応用するのであるが、式(45)の被積分関数の極に関して、その極を具体的に知ること自体が1つの問題である。よってここでは以下に述べるようにラプラス逆変換の極限值定理を用いて、(i)  $\tau \rightarrow 0$ の場合、(ii)  $\tau \rightarrow \infty$ の場合を求め、さらに付録1に示す数値計算により一般的に $S$ の挙動を調べた。

(i)  $\tau \rightarrow 0$ ：取水開始直後

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \varphi_0 = -\eta - \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \bar{\varphi}_*$$

$$= -\eta - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \sin n\pi\eta \cdot \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right) \frac{K_1(n\pi\xi)}{K_1(n\pi\xi_0)} \dots\dots\dots(46)$$

式(46)は軸対称取水のポテンシャル流れを表わす解である。このように $H(\tau)$ の単位段階関数(unit step function)で急に吸い込みが始まったときのいわば撃圧力により始まる流れは、動き出し始めにおいて、密度成層の有無にかかわらずポテンシャル流れが実現される。このことは粘性流体におけるRayleigh問題にみられる現象と同様に、動き出し直後において流体は、粘性の効果や成層の効果をあたかも忘れていたかのごとく振舞っているようである<sup>(2)</sup>。

(ii)  $\tau \rightarrow \infty$ ：取水開始後十分に時間を経たとき

第2種の変形ベッセル関数の性質の1つとして、 $\lim_{x \rightarrow 0} x K_1(x/a) = a$ があるが、これを用いると、

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi_0 &= -\eta - \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{\varphi}_* \\ &= -\eta - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \sin n\pi\eta \\ &= \begin{cases} 0 & 0 \leq \eta < b \\ 1 & b < \eta \leq 1 \end{cases} \dots\dots\dots(47) \end{aligned}$$

となる。式(47)は $\xi=\xi_0$ での境界条件と同じであり、実際の現象とはかけ離れた解である。このような結果に導いた原因は以下の解析により明らかとなる。

(iii)  $S$ の計算—ラプラス逆変換の数値計算

付録1に示す計算方法に従って $S$ を計算したものが図-7, 8であり、横軸を時間 $\tau$ 、縦軸を $S(\xi_0/\xi)$ とした、 $n=1, 2$ の場合の図である。これらの図より軸対称

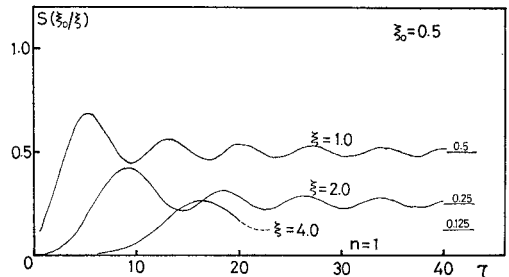


図-7 式(45) S

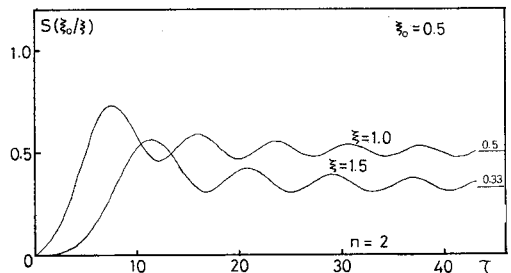


図-8 式(45) S

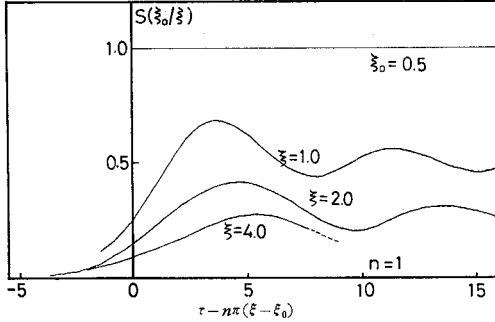


図-9 式(45)のS

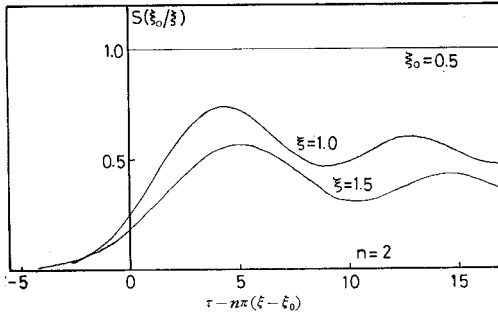


図-10 式(45)のS

取水の解析解である式(44)中の非定常項  $S$  もある種の波動性を示しており、この波動は2次元取水の場合の図-3, 4においてみられたものと同じものと考えられる。2次元取水と軸対称取水に現れるこの波動は密度成層流体中に存在するモード波の一種であると考えられるが、 $\xi$  方向の波数をもたないことより段波とみることもできる。ところで軸対称の場合はこの波動の位相速度を明確に表わすことができないが、2次元取水の場合の  $C_n = 1/n\pi$  によって図-7, 8を整理しなおすと図-9, 10になる。これらの図より軸対称取水の場合の波動も近似的には2次元の場合の波動と同じ位相速度をもつことがわかる。このことは表面波におけるCauchy-Poisson波において2次元と軸対称の波を考えたときに、ほぼ同じ位相速度をもっていることと類似であろう。ところで軸対称取水においては、取水口に向かう平均流速のうち最大値は  $\xi = \xi_0$  において生じており、 $Q_0/2\pi r_0 d$  であるが、2次元取水における議論と同様に  $C_n = 1/n\pi (= d/n\pi T)$  の位相速度との大小によって上流に遡上し得るモードと遡上することのできないモードが存在することがわかる。つまり  $d/n\pi T > Q_0/2\pi r_0 d$  を満たすモード ( $n$ ) のみが上流に遡上することになる。この関係を取水パラメーター  $G$  によって示すと、

$$\frac{1}{n\pi} > \frac{G}{\xi_0} \dots\dots\dots (48)$$

となる。式(48)を満たす  $n$  のうち最大の正整数を  $N$  とすると、軸対称取水の非粘性定常解は式(26)となり、

形式上2次元取水と軸対称取水の準定常解は同一のものになる。ただし、2次元取水の流れ関数はラグランジュの流れ関数であり、軸対称の場合はストークスの流れ関数であることは前記のとおりである。ところで式(26)は既述のように取水塔上での境界条件を満たしていないが、2次元取水の場合は論文Iに示したようにOseen近似に基づく基礎方程式を用いることによりこの問題を解決している。一方、軸対称取水の場合はOseen近似を用いることはできない。しかし、2次元取水の準定常解である式(27)の右辺第3項は  $\xi$  が大きくなると急速に減衰する関数であるから、流れの大部分においては非粘性解として式(26)を用いることができる。このことは軸対称取水に関しても同様に成り立つことが予想される。つまりたとえ取水塔上での境界条件を満たすように新たに項を付加してもその項も  $\xi$  が大きいところでは急速に減衰する関数となる。よって流れの関数の違い

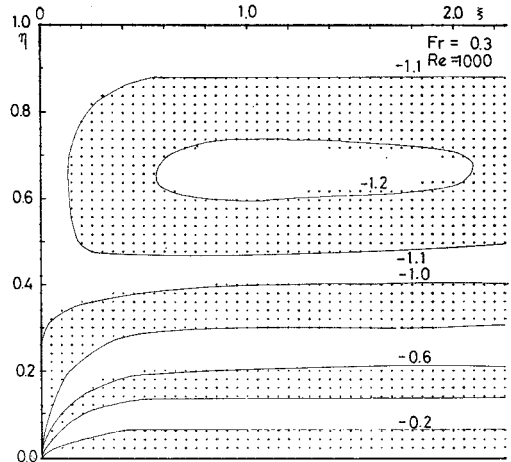


図-11 流線図

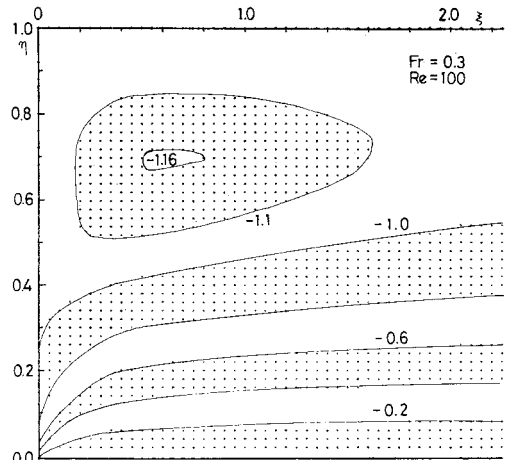


図-12 流線図

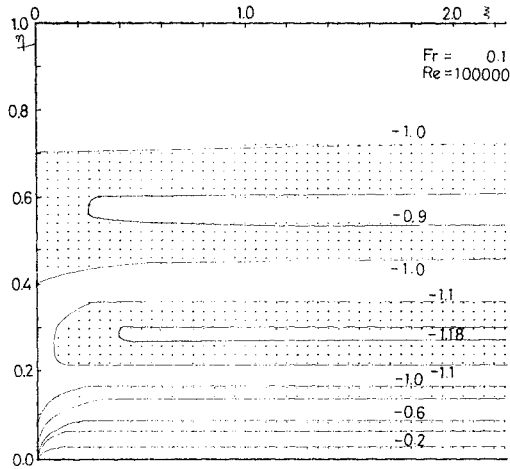


図-13 流線図

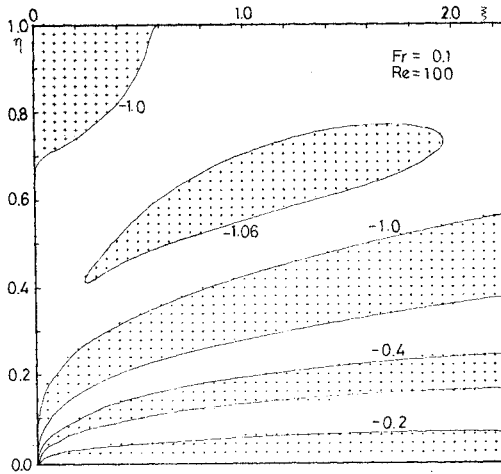


図-14 流線図

を考慮に入れるならば式 (27) は 2 次元選択取水の準定常解であるとともに、取水塔を離れたときの大きいところでの軸対称取水の準定常解でもある。

図-11~14 は、式 (27) に基づき、 $F_r$ 、 $R_e$  をパラメータとして表わした流線図である。これらの図より  $F_r$  が小さくなるにつれて取水される幅は狭くなるのがわかる。これは  $F_r$  が小さいと、式 (25)、あるいは式 (48) よりわかるように上流に遡上するモードが多くなり、加え合わせるモードが多くなればなるほど取水幅は狭くなるからである。また、同じ  $F_r$  に対しては  $R_e$  が小さいほど、取水幅は広くなるのがわかる。これは式 (27) からわかるように  $R_e$  が小さいほど高モードの波動は減衰し、はじめの数モードによって流れが決まってしまうからである。これらのことは定性的には以下に述べる実験結果とよく一致するものである。

#### 4. 実験装置および実験結果

上述の解析結果の妥当性を検討するために以下のような実験を行った。本論文の解析結果では 2 次元取水と軸対称取水の等価性が明らかになっているので、実験としては 2 次元取水の場合を取り扱った。

##### (1) 実験装置および実験方法

図-17 が本実験で用いた水槽で、幅 9 cm × 高さ 19 cm × 長さ 100 cm のアクリル製である。また、2 次元取水を実験するために水槽の一方の壁に底から 10 cm の高さに 0.2 × 9 cm のスリットを設けている。また、取水中の自由表面の低下に伴う流量の変化を防ぐために水槽の他端に 19 × 60 × 60 cm の補助水槽を設けている。本研究の理論で取り扱った直線状の密度成層を作るため

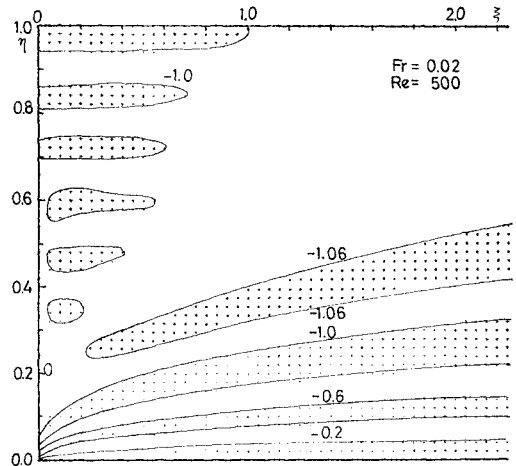


図-15 流線図

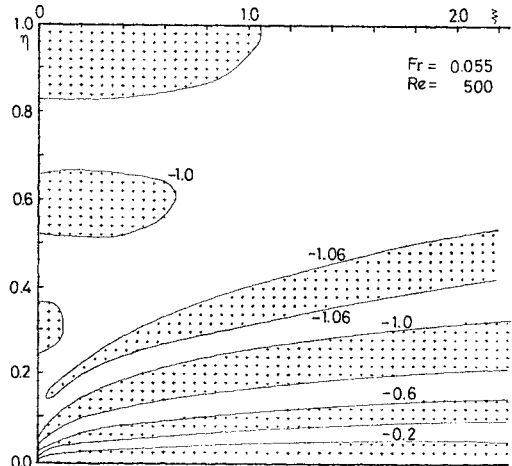


図-16 流線図



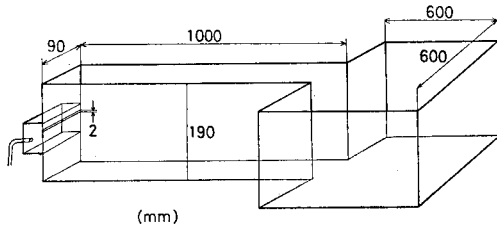


図-17 実験装置

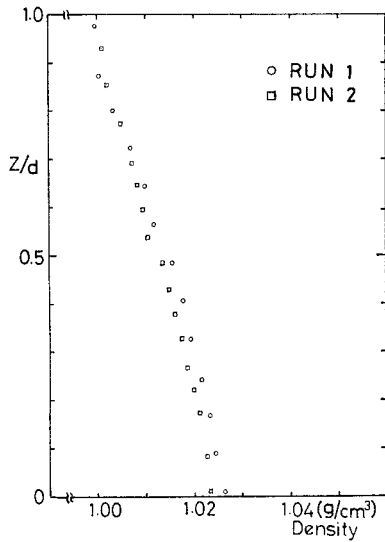


図-18 密度分布

に濃度（密度）をあらかじめ測定した食塩水をサイフォンにより静かに水槽内に入れ、入れ終わった後に水槽内の水をもう一度若干量採水し、この濃度（密度）を測定することにより密度分布を知った。図-18 がこのようにして作った密度分布である。さらに水槽端に取り付けたビニールホースの先端位置を適当な高さに固定し、この流量をメスシリンダーによって測り、単位幅当りの流量を算定した。取水開始後の流速測定にはトレーサー法を用いており、*n*-ヘキサン（比重 0.678）とモノクロールベンゼン（比重 1.107）を適当に混合させることによって任意の密度をもった液を作り、さらにオイルレッドを適量混ぜることにより赤色に着色し、取水を始める前に静置した水槽内にこの液をピペットによって押し出し、このときできる赤色の小滴の移動を 35 mm カメラと 8 mm カメラによって追跡し、その移動距離から流

表-1 実験諸量

	$q$ ( $\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$ )	$\epsilon$ (1/cm)	$T$ (sec)	$F_r$ ( $\frac{UT}{d}$ )	$R_e$ ( $\frac{d^2}{\nu T}$ )
RUN 1	9.13	$1.36 \times 10^{-3}$	0.866	$2.19 \times 10^{-2}$	$4.15 \times 10^4$
RUN 2	4.83	$1.32 \times 10^{-3}$	0.879	$1.18 \times 10^{-2}$	$4.11 \times 10^4$

速を算出した。

(2) 実験結果

本論文では、おもに内部フルード数  $F_r$  を変えて行った実験のうち、特に流速分布を密に測定した 2 ケースを掲げている。表-1 に実験諸量を載せている。Run 1 と Run 2 のおもな相違は内部フルード数がそれぞれ 0.0219 と 0.0118 の約 2 倍異なっている点である。図-19 は取水開始直後からほぼ定常状態に達するまでの Run 2 の水槽内全域にわたる流速分布の変化を示すものである。この図より取水開始直後  $t=0.7$  秒では水槽全体の流速分布は鉛直方向にほぼ一様であり、ポテンシ

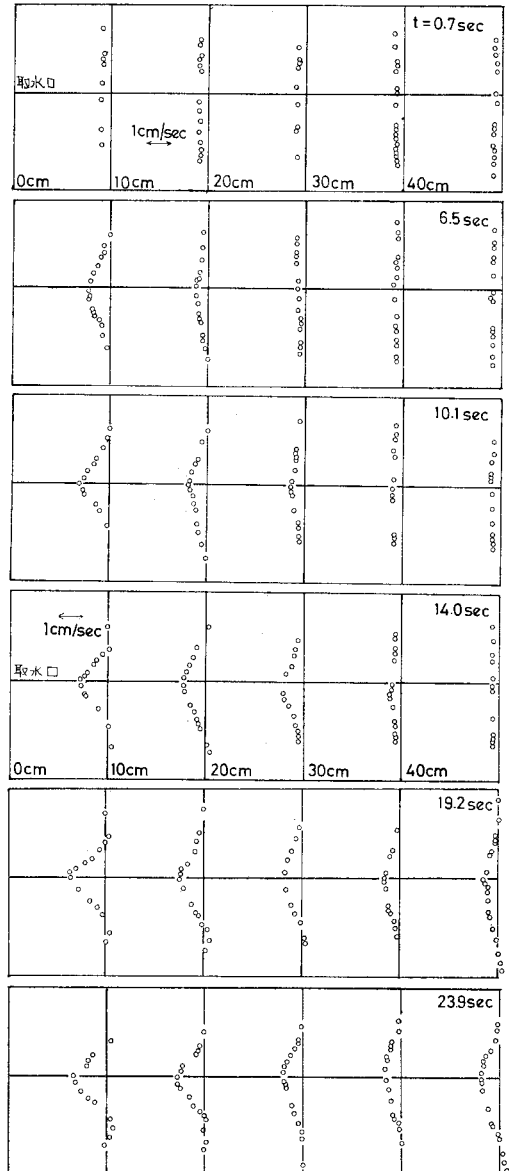


図-19 流速分布

ヤル流れが現れているのを見ることが出来る。これは論文 I において予測し、軸対称取水の場合も本文式 (46) で示したものである。ところで無次元化された取水口高さ  $b$  はほぼ 0.5 であるから式 (26) あるいは式 (27) 中の  $\cos n\pi b$  は  $n$  が奇数で 0,  $n$  が偶数で  $(-1)^{n/2}$  である。よって取水中に見出すことのできる第 1 モードは  $n=2$  である。一方、理論から  $n=2$  のモードの位相速度は  $C_2=d/2\pi T$  であり、取水口に向かう平均流速 ( $q/d$ ) を考慮に入れると実際の第 1 モードの伝播速度  $C$  は、 $C=C_2-q/d$  と表わすことができる。よって取水口より 10, 20, 40, 50 cm 離れた各点において第 1 モードが現われる時刻はそれぞれ 3.8, 7.5, 11.3, 15.1, 18.8 秒となる。図-18 で  $t=6.5, 10.1, 14.0, 19.2, 26.2$  秒のそれぞれ 10, 20, 30, 40, 50 cm の地点の流速分布をみると確かに一様流速ではなく、ある分布形を持ったモードがすでに到達しているのを見ることが出来る。このモードの伝播現象をより詳細にみるために各点各時刻の流速分布のうち縦軸を  $\eta=b$  上の流速、横軸を  $t-x/C$  ( $C$  は上述の第 1 モードの伝播速度) として表示したものが図-20 と図-21 である。これらの図の意味するところ

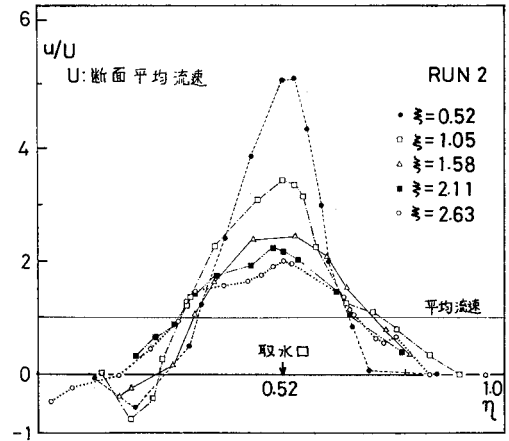


図-22 定常状態の流速分布

は結局 図-6~8 と同じである。また、 $t$  が十分大きくなっても縦軸の速度が増大しつづけているのは、次々と到達するモードによって流速分布が次第に細く鋭ってくるからであろう。

次に取水開始後十分に時間を経て定常な流れになったと思われる時刻での Run 2 の流速分布が 図-22 に示されている。この流速分布が上下 (左右) 非対称なのは取水口高さが完全に水深の半分でないこと、取水前の密度分布が完全に直線でないこと、底面付近の粘性の効果、さらに実験に用いた水槽の有限性等の原因が考えられるから上記の理論結果と得られた

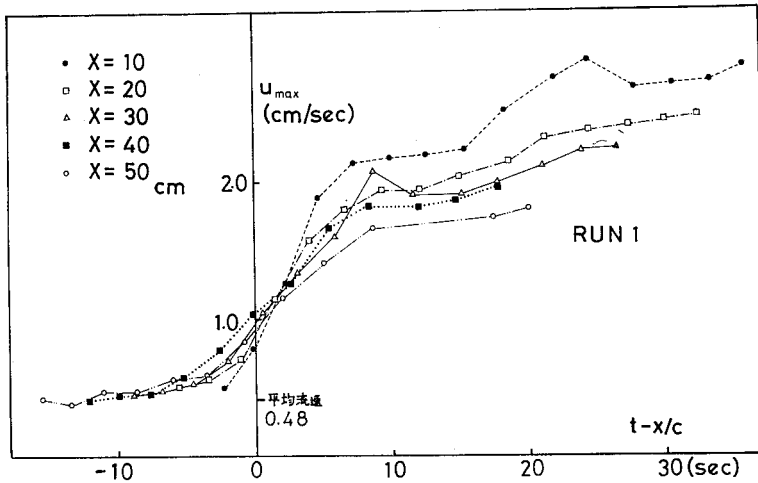


図-20 モードの伝播

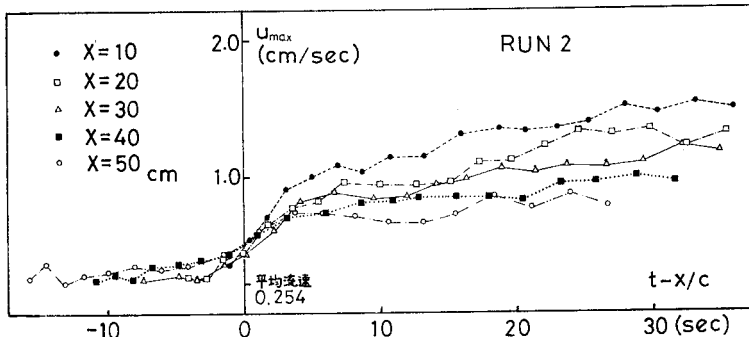


図-21 モードの伝播

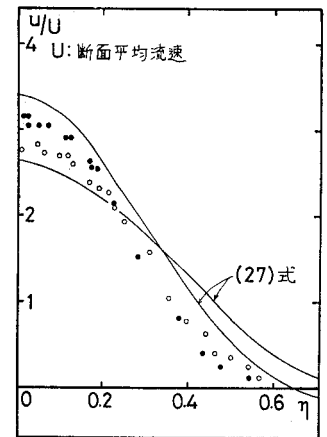


図-23 定常状態の流速分布

(Kao & Pao ら<sup>10)</sup> による実験から、 $F_r (=UT/d) = 500$ , ●:  $\xi = 1$ , ○:  $\xi = 2$ , — は式 (27) で  $R_p = 500$  として計算したもの)

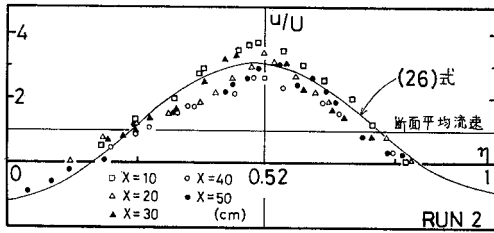


図-24 n=2 までの流速分布

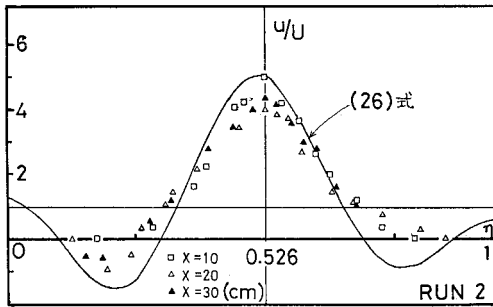


図-25 n=4 までの流速分布

実験結果とを早急に比較することは困難ではあるが、Run 2 の内部フルード数  $F_r$  とレイノルズ数  $R_e$  を用いて式 (27) から流速分布の計算を試みた。その結果、図-2 の  $F_r=0.03$  の場合の流速分布に似て非常に鋭った分布形状をもち、図-22 のような形をしていないことがわかる。

ところで 図-23 は Kao and Paoら<sup>10)</sup> が行った同様の実験とレイノルズ数=500 として式 (27) より計算した流速分布との比較を示している。この場合は計算に用いたレイノルズ数は  $d^2/\nu T$  のレイノルズ数の数百分の1であり、式(27)からわかるように粘性の効果をより大きく見積り、高モードからの寄与を抑えていることになる。このことをより詳細に調べてみるために第1モード ( $n=2$ ) だけが各点を通過しているときの流速分布を 図-24 に、第2モード ( $n=4$ ) までのモードが通過しているときの流速分布を 図-25 に示し、これらと全モードが出そろった場合としての 図-22 と比較してみる。図-24, 25 中の実線は  $F_r, R_e (=d^2/\nu T)$  とともに実験値を用い、式 (27) より計算したものであるが、図-24 より単一モードのみが進行している場合は本研究 (論文 I を含め) で行った線形理論解析が十分に適用し得ることがわかる。しかし、図-22, 25 のようにモードが出揃うにつれて上記の線形解からはずれてくる。前述のより小さいレイノルズ数を用いた方が実験との適合性がよくなることや、各モードの単純な重ね合わせがきかないことから判断して、選択取水の問題の取り扱いにおいては、モードの伝播という事実のほかには各モード間における非線形干渉を考慮しなければならないことを示唆している

ように思われ、今後はこの方面の研究をしていくつもりである。

## 6. 結 論

本研究で得られたこと以下に列挙する。

(1) 2次元選択取水において Paoら<sup>9)</sup>や McEwanら<sup>22)</sup>がその存在を示した波動現象が彼らとは異なる手法—ラプラス逆変換の数値計算—を用いて明らかにされ2次元取水の実験において確認された。

(2) 軸対称選択取水においても同じ手法を用いることにより2次元取水の場合に現れた波動と同様の現象が見い出され、この位相速度は2次元の場合の位相速度  $1/n\pi$  に近似的に等しいことがわかった。

(3) 取水を開始すると、位相速度の異なった各モードが取水口に向かう平均流速にさからい、上流に遡上してくる。遡上し得るすべてのモードが出そろくと、以後は定常な流れになる。

(4) 流れ関数の違いを考慮すると、2次元選択取水と軸対称選択取水の流線は取水口近傍を除いて近似的に等しい。

(5) 軸対称取水においてよどみ層の発生条件は式 (48) より内部フルード数 ( $G$ ) とともに取水塔半径によって決定される。2次元取水の場合は式 (25) により内部フルード数のみにより決定される。

(6) 従来の研究では取水口を離れた上流で一樣流速になるといった無限上流での境界条件を破壊する解が得られていたが、本研究により、その原因が解明され、定性的には、現実には生じている選択取水の流れの状況を示すことができた。

(7) 選択取水の定量的な把握には非線形の領域まで解析を進めねばならない。

## 付録 1 逆ラプラス変換の数値計算

ラプラス変換、逆変換は (S1), (S2) で定義される。

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-tp} f(t) dt \dots\dots\dots (S1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} e^{bt} F(p) dp \dots R[p] > r (S2)$$

ここに、 $r$  は  $R[p] \geq r$  で  $F(p)$  が正則となる実数。次に  $p=r+is$  とおくと式 (S2) は、

$$f(t) = \frac{e^{rt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} F(r+is) ds \dots\dots\dots (S3)$$

となる。式 (S3) は複素関数  $F(p)$  の複素フーリエ変換と考えられるからコンピューターライブラリーを使用することによりラプラス逆変換の数値計算を行うことができる。本論文では文献 23) の手法を参考にして以下

のように行った。  $f(t)e^{-rt}=g(t)$ ,  $F(c+ia)=G(\sigma)$  と置くと式 (S3) は、

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} G(\sigma) d\sigma \dots\dots\dots (S4)$$

このとき式 (S1) は、

$$F(p) = G(\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-(r+i\sigma)t} g(t) e^{rt} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-i\sigma t} g(t) dt \dots\dots\dots (S5)$$

式 (S2) と式 (S5) をみると、  $f(t)$  と  $F(p)$  に関するラプラス変換は  $g(t)$  と  $G(\sigma)$  のフーリエ変換と考えることができる。

次に  $g(t)$  が  $0 < t < T$  で有限で  $t > T$  で negligible small かあるいは  $T$  が十分に大きいとき、  $g(t)$  を  $(0, T)$  でフーリエ級数に展開する。

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} \left. \begin{matrix} \dots\dots\dots (S6) \\ \omega = 2\pi/T \end{matrix} \right\}$$

ここに、  $C_k$  は上記の条件のもとで、

$$C_k = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T g(t) e^{-ik\omega t} dt \doteq \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} g(t) e^{-ik\omega t} dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi} G(k\omega) \dots\dots\dots (S7)$$

式 (S7) を式 (S6) に代入して、

$$g(t) = \frac{\omega}{2\pi} \left\{ G(0) + \sum_{k=1}^{\infty} [G(k\omega) e^{ik\omega t} + G(-k\omega) e^{-ik\omega t}] \right\} \dots\dots\dots (S8)$$

さらに式 (S8) を実部と虚部に分けて、

$$G(\pm k\omega) = F(r \pm ik\omega) = A(k\omega) \pm iB(k\omega) \dots\dots\dots (S9)$$

このとき、式 (S8) は式 (S10) となる。

$$g(t) = \frac{\omega}{\pi} \left\{ \frac{A(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A(k\omega) \cos k\omega t - B(k\omega) \sin k\omega t] \right\} \dots\dots\dots (S10)$$

ここで、  $f(t) = g(t) e^{rt}$  の関係を用いることにより像関数  $F(p)$  のラプラス逆変換は式 (S10) の計算に帰着する。ところで式 (S10) の計算では Filon の方法を用いることにより解の精度の向上を図ることができる<sup>17)</sup>。図-26 は  $F(p) = 1/p$  の場合 (A) と  $F(p) = p/\sqrt{1+p^2}$  の場合 (B) の計算例で、これらの逆変換はそれぞれ単位段階関数と第0次のベッセル関数  $J_0(z)$  になるものである。図中 (A) は上記の手法によって計算されたものであり、  $t=0$  近くの立上りに Gibbs 現象が現われている。(B) は実線が厳密解、・印が計算値である。ともに  $t=0$  近くを除けば十分な精度をもっていることがわかる。なお (A),(B) とともに  $T=1000$  で計算している。この計算手法とは異なる方法が文献 18), 23) に示

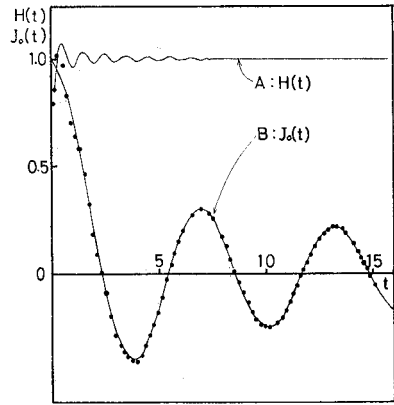


図-26 ラプラス逆変換の数値計算例

されており、ともにフーリエ積分の収束を早め、精度を上げる技法が図られている。

付録 2

オーダー1の第2種変形ベッセル関数(変数が複素数の場合を含む)  $K_1(z)$  の計算は参考文献 19) により次式で計算する。

$$0 < |z| \leq 2$$

$$zK_1(z) = zI_0(z/2)I_1(z) + 1 + 0.15443144(z/2)^2 - 0.67278579(z/2)^4 - 0.18156897(z/2)^6 - 0.01919402(z/2)^8 - 0.00110404(z/2)^{10} - 0.00004686(z/2)^{12} \dots\dots\dots (S11)$$

$$2 \leq |z| < \infty$$

$$z^{1/2} e^z K_1(z) = 1.25331414 + 0.23498619(2/z) - 0.03655620(2/z)^2 + 0.01504268(2/z)^3 - 0.00780353(2/z)^4 + 0.00325614(2/z)^5 - 0.00068245(2/z)^6 \dots\dots\dots (S12)$$

また、式 (S11) 中のオーダー1の第1種変形ベッセル関数は次式により計算する。

$$0 < |z| < 3.75, t = z/3.75$$

$$z^{-1} I_1(z) = 0.5 + 0.87890594 t^2 + 0.51498869 t^4 + 0.15084934 t^6 + 0.02658733 t^8 + 0.00301532 t^{10} + 0.00032411 t^{12} \dots (S13)$$

参考文献

- 1) 水理公式集(昭和46年改訂版), 土木学会編.
- 2) Debler, W.W. : Stratified flow into a line sink, J. Eng. Mech. Div., Proc. A.S.C.E. 85, 1959.
- 3) 吉川秀夫・山本晃一: 貯水池の水の挙動に関する研究, 土木学会論文報告集, 186号, 1971年2月.
- 4) Yih, C.S. : Dynamics Dynamics of Non-homogeneous Fluids, Macmillan Camp., 1965.
- 5) Trustrum, K. : Rotating and stratified flow, J. Fluid Mech., 1964.
- 6) Kao, T.W. : A free-streamline solution for flow into a line sink, J. Fluid Mech. Vol. 21, part 3, 1965.

- 7) Kao, T.W. : Free-streamline theory for inviscid stratified flow into a line sink, *Phys. Fluid*, 13, 1970.
- 8) Kao, T.W., Pao, H.P. and Wei, S.N. : Time dependent behavior of stratified flow in a channel towards a line sink, *Int. Symp. Stratified Flow*, IAHR, Novosibirsk, 1972.
- 9) Pao, H.P. and Kao, T.W. : Dynamics of establishment of selective withdrawal from a line sink, Part 1, *Theory*, *J. Fluid Mech.* 65, 1974.
- 10) Kao T.W., Pao, H.P. and Wei, S.N. : Dynamics of selective withdrawal from a line sink, Part 2, *Experiment*, *J. Fluid Mech.* 65, 1974.
- 11) Koh, R.C.Y. : Viscous stratified flow towards a sink, *J. Fluid Mech.* 24, 1966.
- 12) Koh, R.C.Y. : Unsteady stratified flow into a sink, *J. Hydraulic Res.* 4, 1966.
- 13) Imberger, J. : Two-dimensional sink flow of a stratified fluid contained in a duct, *J. Fluid Mech.* 53, 1972.
- 14) 日野幹雄・大西外明 : Point sink への密度成層流の解析, 東京工業大学, 土木工学科研究報告 No. 5, 1968.
- 15) 大西外明・日野幹雄 : 深層取水への考察 (II), 第15回海岸工学講演会講演集, 1968.
- 16) 日野幹雄・大西外明 : 密度成層流におよぼす Point sink の高さの効果, 土木学会論文報告集, 第163号, 1969年3月.
- 17) 日野幹雄 : スペクトル解析, 朝倉書店, 1977.
- 18) 台丸谷政志・内藤正輝 : 熱衝撃を受ける半無限体の過渡的挙動の解析, 日本機械学会論文集 (第I部), 39巻318号, 1973年2月.
- 19) Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (eds.) : *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publ. Inc., New York, 1972.
- 20) 石橋 毅・秋元 保・白砂孝夫・石川晴雄・斎藤 茂・宮永洋一 : 成層型貯水池内の流れと熱収支の現地観測, 第21回水理講演会論文集, 1977.
- 21) 吉川秀夫・山田 正・水谷俊孝 : 非定常選択取水に関する研究, 第22回水理講演会論文集 (論文I), 1978.
- 22) McEwan, A.D., Baines, P.G. : Shear fronts and an experimental stratified shear flow, *J. Fluid Mech.* Vol. 63, Part 2, 1974.
- 23) Krylov, V.I., Skoblya, N.S. : *Numerical Inversion of Laplace Transforms*, Translated from Russian by D. Louvish, Israel Programming for Scientific Translations, Jerusalem, 1969.

(1977. 12. 20・受付)