

## 立体骨組構造物の最適塑性設計法に関する一考察

## A STUDY ON THE OPTIMAL PLASTIC DESIGN OF SPACE FRAMES

石川 信隆\*・大野 友則\*\*・岡元 北海\*\*\*

By Nobutaka ISHIKAWA, Tomonori OHNO and Kitami OKAMOTO

## 1. 緒 言

土木学会第32回年次学術講演会(1977年10月14日～16日)第I部門の設計法のセッションにおいて、最適設計の実用化についての議論が種々沸騰したが、著者らはさしあたり最適設計を設計段階における予備設計(Preliminary Design)としての位置づけを考えている。したがって、本研究の目的の第1は、立体骨組構造物の設計段階において、最適塑性設計を予備設計として位置づけるため、ある程度大胆な仮定を設けることにより、精度は多少甘くても各部材断面を決定するうえでの1つのめやすを与えること、第2はそのために比較的大規模な立体骨組構造物に対しても、効率的な計算が可能であること、第3は解析分野で有力な武器である有限要素に基づくマトリックス解析法を最適化問題の中に取り入れ、将来板あるいはシェル構造などの連続体にも拡張したいというねらいをもっている。

さて、立体骨組構造物の最適塑性設計を行うためには、二軸曲げとねじり( $M_x + M_y + T_z$ )および二軸曲げとねじりと軸力( $M_x + M_y + T_z + N_z$ )などの組合せ応力を考慮した降伏条件、平衡条件および崩壊機構条件の3つの基本的条件を満足したうえで、構造物全体の重量を最小にするよう各部材の塑性容量(たとえば、強軸および弱軸まわりの全塑性曲げモーメント $M_{px}$ ,  $M_{py}$ , 全塑性ねじりモーメント $T_{pz}$ および降伏軸力 $N_{pz}$ など)を決定しなければならない。

従来、組合せ応力を考慮した最適塑性設計に関する研究としては、曲げと軸力( $M_x + N_z$ )を考慮した平面ラーメン<sup>1)~3)</sup>や曲げとねじり( $M_x + T_z$ )を受ける格子桁<sup>4), 5)</sup>などの例があり、また、組合せ応力を考慮した設

計の定式化の試み<sup>6)</sup>もなされているが、二軸曲げとねじりと軸力( $M_x + M_y + T_z + N_z$ )などを受ける立体骨組を対象とした最適塑性設計についての研究はあまりなされていない。その原因の第1としては、上記3つの基本的条件のうち、一般に非線形関数で表わされる降伏条件式<sup>7)</sup>の取り扱いが複雑なためと思われる。すなわち、降伏条件を非線形関数のまま取り扱うと設計問題がきわめて複雑な非線形計画法(NLP)の問題として定式化せざるを得ず、また、NLPの計算の効率性が線形計画法(LP)に比し現在(1977年)のところがあまりよくないことに起因している。第2は、運動的方法(Kinematic Approach)による場合、立体骨組の崩壊機構をすべて見つけ出すことはきわめて困難であり、したがって、従来の仮想変形法をそのまま立体骨組に適用することはほとんど不可能ではないかと思われる。このような難点を克服するため、最近、組合せ応力を受ける断面の厳密な降伏条件をLPにより近似的な降伏凸多面体に置換する方法を提案し<sup>8)</sup>、さらにこれを組合せ応力を受ける骨組構造物の崩壊荷重解析に適用する方法が研究されている<sup>9)</sup>。

本研究は、上記の諸研究<sup>8), 9)</sup>を勘案したうえで、各種の組合せ応力を受ける骨組構造物の最適塑性設計に対する基本式の定式化を行い、効率的な計算手法の確立を図るとともに、比較的大規模な立体骨組構造物への応用を試みたものである。

すなわち、まず一般に無次元化断面力(たとえば $M_x/M_{px} + M_y/M_{py} + T_z/T_{pz} + N_z/N_{pz}$ )で表示される降伏条件式を、設計用に有次元化断面力(たとえば $M_x + M_y + T_z + N_z$ )で表示した近似的な降伏凸多面体に変換し、ついで有限要素に基づくマトリックス解析法<sup>10)</sup>を準用して、構造全体の平衡条件式と崩壊機構条件式を導き、さらにLPにおける双対定理を適用して最小重量設計理論の上界および下界定理に基づく設計基本式を誘導した。また、Dantzig-WolfeによるLPの分割法<sup>11)</sup>

\* 正会員 工博 防衛大学校助教 土木工学教室

\*\* 学生会員 防衛大学校理工学研究科学生

\*\*\* 正会員 工博 防衛大学校教授 土木工学教室

を利用して計算の効率化を図り、汎用プログラムの開発を行うとともに、数値計算例により本法の妥当性を検証し、立体高架ラーメン構造物への応用を試みてみた。

なお、設計にあたっては、慣用の剛塑性理論に従うほかに次の仮定を設けた。

(1) 断面はH形、箱形および鋼管断面を使用する。

(2) 各部材要素の塑性容量の比(たとえば  $M_{py}/M_{px}(=\alpha^*)$ ,  $T_{pz}/M_{px}(=\beta^*)$ ,  $N_{pz}L/M_{px}(=\gamma^*)$ ,  $L$ =標準部材要素長)は部材要素について一定とし、各部材要素当りの設計変数は1つ( $M_{px}$ )とする。したがって、 $M_{px}$ が最適塑性設計により求まれば、 $M_{py}$ ,  $T_{pz}$ ,  $N_{pz}$ などが算定されることになる。なお、 $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\gamma^*$ については、H形、箱形および鋼管断面に対し、それぞれ板の幅厚比制限(鋼管では径厚比制限)および一定の部材の細長比を考慮すれば、ある範囲内ではほぼ一定値となり、この仮定はおおむね妥当なものと思われる(付録I参照)。

(3) 各部材要素の単位長さ当りの重量は  $M_{px}$  の線形関数で表わされる。この仮定は、通常のH形または箱形断面に対する単位長さ当りの重量が強軸まわりの塑性断面係数にほぼ比例するという在来の最小重量設計理論<sup>(4), (12)</sup>の仮定と同じである。

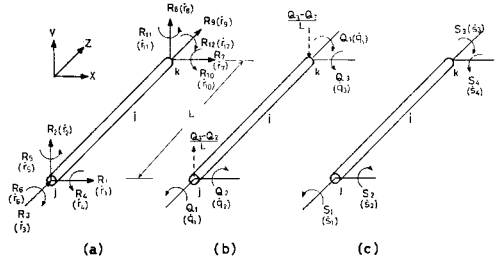
(4) 等分布荷重は等価集中荷重に置換できるものとする。

## 2. 設計のための基本的条件

以下の定式化にあたっては、説明を容易にするために曲げとねじり ( $M_x + T_z$ ) の場合について述べることにする。

### (1) 部材要素に働く断面力と変形速度

いま骨組を構成する1つの部材要素  $i$  の剛塑性挙動が部材要素の両端によって定義されるものとし、要素端に働く断面力およびそれに対応する塑性変形速度(仮想塑性変形)を 図-1 (a)~(c) のように3つの場合に分けて考える。これら3つの場合に分けた理由としては、設計における状態変数の数をなるべく少なくするためと塑性設計に必要な降伏条件式を表示するためで、図-1 (a), (b), (c) の順にそれぞれ一般断面力  $R_i$  (一般変位速度  $\dot{r}_i$ )、作用断面力  $Q_i$  (作用変形速度  $\dot{q}_i$ ) および無次元化断面力  $S_i$  (無次元化変形速度  $\dot{s}_i$ ) と名づける。ここで、一般断面力  $R_i$  は局部座標系において要素内でのつり合いを考慮せずに要素端でとりうるすべての断面力であり、また、作用断面力  $Q_i$  は局部座標系において要素内でのつり合いを考慮したうえで実際の塑性変形に関与する必要最小限の断面力、さらに無次元化断面力



(a) 一般断面力 (一般変位速度)  
 (b) 作用断面力 (作用変形速度)  
 (c) 無次元化断面力 (無次元化変形速度)

図-1 要素に働く断面力と塑性変形速度 ( $T_z + M_x$  の場合)

$S_i$  は局部座標系において要素の降伏条件式を表示するために必要な断面力である。よって、これら3つの断面力の間の関係式およびこれに対応する3つの塑性変形速度間の関係式を以下に求める。

#### a) 3つの断面力間の関係式

まず、一般断面力  $R_i$  と作用断面力  $Q_i$  との関係は 図-1 (a), (b) を参照して次式のようなになる。

$$\{R_i\}_{g \times 1} = \{B_i\}_{g \times p} \{Q_i\}_{p \times 1} \dots \dots \dots (1)$$

ただし、 $g$ =要素  $i$  の一般断面力の全数、 $p$ =要素  $i$  の作用断面力の全数、 $B_i$ =要素  $i$  の  $R_i$  と  $Q_i$  とを関係づける等価変換マトリックス。たとえば、図-1 (a), (b) のような場合は次のような値となる。

$$Q_i^T = \{Q_1 \ Q_2 \ Q_3\}_{1 \times 3},$$

$$R_i^T = \{R_1 \ R_2 \ R_3 \ \dots \ R_{12}\}_{1 \times 12},$$

$$B_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/L & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/L & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 12}$$

次に一般断面力  $R_i$  と無次元化断面力  $S_i$  との関係は 図-1 (a), (c) より次のようになる。

$$\{S_i\}_{s \times 1} = \{X_i\}_{s \times g} \{A_i\}_{s \times p} \{R_i\}_{g \times 1} \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $s$ =要素  $i$  の無次元化断面力の全数、 $X_i$ =要素  $i$  の一般断面力  $R_i$  を無次元化するために必要な塑性容量マトリックス、 $A_i$ =要素  $i$  の  $S_i$  と  $R_i$  とを関係づける等価変換マトリックス。たとえば、図-1 (a), (c) のような場合には次のような値をもつ。

$$S_i^T = \{S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4\}_{1 \times 4}$$

$$X_i = \begin{bmatrix} 1/T_{pz} & & & & & & & & & & & \\ & 1/M_{px} & & & & & & & & & & \\ & & & & & & 1/T_{pz} & & & & & \\ & & & & & & & & & & & 1/M_{px} \end{bmatrix}_{4 \times 12}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 12}$$

よって、式 (1) と式 (2) より無次元化断面力  $S_i$  と作用

断面力  $Q_i$  との関係式が次のように表わされる。

$$\{S_i\}_{s \times 1} = \{X_i\}_{s \times s} \{A_i\}_{s \times g} \{B_i\}_{g \times p} \{Q_i\}_{p \times 1} \dots\dots\dots (3)$$

すなわち、

$$\{S_i\}_{s \times 1} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1/T_{pz} \\ Q_2/M_{px} \\ Q_1/T_{pz} \\ Q_3/M_{px} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_z/T_{pz} \\ M_{xj}/M_{px} \\ T_z/T_{pz} \\ M_{xk}/M_{px} \end{bmatrix}^i$$

ただし、 $M_{xj}, M_{xk}$  = 要素  $i$  の両端  $j, k$  に作用する  $x$  軸まわりの曲げモーメント、 $T_z$  = 要素  $i$  に作用するねじりモーメント。

**b) 3つの塑性変形速度間の関係式**

部材要素  $i$  全体の塑性変形によるエネルギー逸散率(仮想内部仕事)は作用断面力および無次元化断面力のいずれを用いても同一であるから次式が成立する。

$$\{Q_i^T\} \{\dot{q}_i\} = \{S_i^T\} \{\dot{s}_i\} \dots\dots\dots (4)$$

よって、式(3)を式(4)に代入すれば、作用変形速度  $\dot{q}_i$  と無次元化変形速度  $\dot{s}_i$  との関係式が次のように得られる。

$$\{\dot{q}_i\}_{p \times 1} = \{B_i^T\}_{p \times g} \{A_i^T\}_{g \times s} \{X_i^T\}_{s \times s} \{\dot{s}_i\}_{s \times 1} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、式(3)と式(5)の間には力と変形との相関関係を表わす反傾定理(Principle of Contragredience)<sup>10)</sup>が成立している。したがって、式(1)および式(2)に対しても同様に反傾定理を適用すれば、次の関係式がそれぞれ得られる。

$$\{\dot{q}_i\}_{p \times 1} = \{B_i^T\}_{p \times g} \{\dot{r}\}_{g \times 1} \dots\dots\dots (6)$$

$$\{\dot{r}\}_{g \times 1} = \{A_i^T\}_{g \times s} \{X_i^T\}_{s \times s} \{\dot{s}\}_{s \times 1} \dots\dots\dots (7)$$

**(2) 基本的条件**

**a) 降伏条件**

一般に組合せ応力を受ける断面の厳密な降伏条件は、非線形関数で表わされるが<sup>7)</sup>、工学的にはいくつかの線分または凸多面体に置換した方が便利であり、実用上の精度もまた十分である<sup>9), 13)</sup>。したがって、いま要素  $i$  の剛塑性挙動を支配する断面の非線形な降伏条件が既知であるとすれば、要素端  $j, k$  に対応する線形化降伏条件(降伏凸多面体)は、非線形な降伏曲面上のある点を指定することによって、次のような無次元化断面力の関数として表わすことができる<sup>9), 9)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \{\Phi_j\}_{h \times 1} &= \{n_j^T\}_{h \times (s/2)} \{S_j\}_{(s/2) \times 1} \\ &\quad - \{K_j\}_{h \times 1} \leq \{0\}_{h \times 1} \\ \{\Phi_k\}_{h \times 1} &= \{n_k^T\}_{h \times (s/2)} \{S_k\}_{(s/2) \times 1} \\ &\quad - \{K_k\}_{h \times 1} \leq \{0\}_{h \times 1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $\Phi_j, \Phi_k$  = 部材要素  $i$  の両端  $j, k$  における降伏凸多面体を表わす塑性ポテンシャルを示すベクトル、 $n_j, n_k$  = 部材要素  $i$  の両端  $j, k$  の降伏凸多面体の外向き単位法線マトリックス、 $K_j, K_k$  = 降伏凸多面体にお

ける原点から降伏線(面)までの距離を示すベクトル、 $h$  = 断面の降伏凸多面体の線分または面の全数。たとえば、曲げとねじりを受ける任意断面の場合、非線形な降伏条件は図-2(a)の点線のような円となるが<sup>14)</sup>、これを図-2(a)の実線のような八角形で近似すれば、式(8)の  $n_j (= n_k), K_j (= K_k)$  は次のような値になる。

$$n_j = n_k = \begin{bmatrix} c_0 & b_0 & b_0 & c_0 & -c_0 & -b_0 & -b_0 & -c_0 \\ b_0 & c_0 & -c_0 & -b_0 & -b_0 & -c_0 & c_0 & b_0 \end{bmatrix}_{2 \times 8}$$

$$K_j^T = K_k^T = [b_0 \ b_0 \ b_0 \ b_0 \ b_0 \ b_0 \ b_0 \ b_0]_{1 \times 8}$$

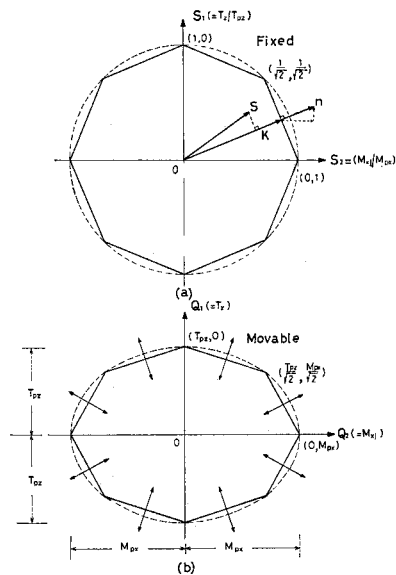
ただし、 $a_0 = 1/\sqrt{2}, b_0 = a_0/\sqrt{2(a_0^2 - 2a_0 + 1)}$ ,

$$c_0 = (1 - a_0)/\sqrt{2(a_0^2 - 2a_0 + 1)}$$

ここに、式(8)すなわち図-2(a)の実線の線形化降伏条件は無次元化断面力  $S$  の関数として表わされているため固定化しており、これは塑性容量  $T_{pz}, M_{px}$  が既知である解析の場合に使用できることを意味している。しかし、設計の場合には塑性容量  $T_{pz}, M_{px}$  が未知であるゆえ、図-2(a)の線形化の形のままでは使用できず、これを図-2(b)のように作用断面力を座標軸にもつ線形化降伏条件に変換する必要がある。

すなわち、まず式(8)に式(3)を代入すれば、部材要素  $i$  に対する降伏条件式が作用断面力  $Q_i$  の関数として次のように表わすことができる。

$$\{\Phi_i\} = \begin{Bmatrix} \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix}_{2h \times 1} = \begin{bmatrix} n_j^T \\ \dots\dots\dots \\ n_k^T \end{bmatrix}_{2h \times s} \cdot \{X_i\}_{s \times s} \{A_i\}_{s \times g} \{B_i\}_{g \times p} \{Q_i\}_{p \times 1} - \begin{bmatrix} K_j \\ \dots\dots\dots \\ K_k \end{bmatrix}_{2h \times 1} \leq \{0\}_{2h \times 1} \dots\dots\dots (9)$$



(a) 無次元化降伏条件  
(b) 有次元化降伏条件  
図-2 曲げとねじりを受ける断面の降伏条件

ここで、式(9)中の  $X_i$  は式(2)に示すように無次元化のために必要な塑性容量を示すマトリックスであるが、仮定(2)より各塑性容量の比を一定とすれば、部材要素当りの設計変数を1つ ( $M_{px}^i$ ) とすることができ、式(9)の  $X_i$  を次のように置換することができる。

$$\{X_i\}_{s \times s} = 1/M_{px}^i \{Y_i\}_{s \times s} \dots\dots\dots(10)$$

ただし、 $Y_i$ =部材要素  $i$  の各塑性容量の比を示すマトリックスで、たとえば  $M_x + T_z$  の場合には次のような値となる。

$$Y_i = \begin{bmatrix} 1/\beta^* & & & \\ & 1 & & \\ & & 1/\beta^* & \\ & & & 1 \end{bmatrix}^i$$

なお、 $\beta^*$  の値は付録Iで述べたように要素  $i$  については一定値をとる。よって、 $M_{px}^i > 0$  であるから式(10)を式(9)に代入すれば、

$$\{\Phi_i^*\}_{2h \times 1} = \{N_i^T\}_{2h \times p} \{Q_i\}_{p \times 1} - \{K_i\}_{2h \times 1} M_{px}^i \leq \{0\}_{2h \times 1} \dots\dots(11)$$

ただし、 $\{\Phi_i^*\} = \{\Phi_i\} \cdot M_{px}^i$ 、

$$\{N_i^T\}_{2h \times p} = \{N_i^T\}_{2h \times s} \{Y_i\}_{s \times s} \{A_i\}_{s \times g} \{B_i\}_{g \times p}$$

ここに、式(11)は図-3のように部材要素  $i$  に対する作用断面力  $Q_i$  を座標軸にもつ降伏条件式を示すが、要素端  $j$  については図-2(b)の実線のようになり、 $\beta^* = T_{pz}/M_{px}$  が一定であるゆえ、線形化降伏面の勾配を常に一定に保ったまま平行移動し、最適塑性設計によって  $M_{px}^i$  が決定されたとき停止することになる。

よって、式(11)を要素  $i=1, 2, \dots, m$  について拡張したうえで、構造全体の設計変数を  $M_{p1}, M_{p2}, \dots, M_{pn}$  ( $n \leq m$ ) とすれば、構造全体に対する降伏条件式が次式のように得られることになる。

$$\{N^T\}_{2hm \times pm} \{Q\}_{pm \times 1} - \{K\}_{2hm \times m} \{T\}_{m \times n} \cdot \{M_p\}_{n \times 1} \leq \{0\}_{2hm \times 1} \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 $N^T = \text{diag.}\{N_1^T N_2^T \dots N_m^T\}$ 、

$$Q^T = \{Q_1^T Q_2^T \dots Q_m^T\}$$

$K^T = \text{diag.}\{K_1^T K_2^T \dots K_m^T\}$ 、 $M_p^T = \{M_{p1} M_{p2} \dots M_{pn}\} =$  設計変数の行ベクトル、 $n =$ 設計変数の全数、 $T =$ 部材

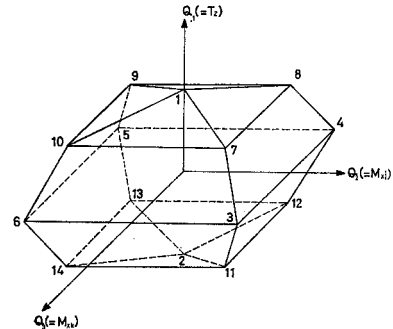


図-3 曲げとねじりを受ける要素の有次元化降伏条件

要素と設計変数  $M_p$  とを結びつける等価変換マトリックスで、 $\{M_{px}\}_{m \times 1} = \{T\}_{m \times n} \{M_p\}_{n \times 1}$  の関係にある。たとえば、図-5の格子桁の場合次のような値をもつ。

$$\{T^T\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{10 \times 18}$$

また、作用断面力  $Q_i$  が降伏線(面)にあるときは、 $Q_i$  に対応する作用変形速度  $\dot{q}_i$  がその降伏線(面)上の単位外向き法線マトリックスに比例するという塑性流れ法則<sup>(13),(14)</sup>が成立し、式(11)で  $\Phi_i^* = 0$  のとき、要素  $i$  の塑性流れ法則は次式となる。

$$\{\dot{q}_i\}_{p \times 1} = \{\dot{\lambda}_i^T\} \frac{\partial \{\Phi_i^*\}}{\partial \{Q_i\}} = \{N_i\}_{p \times 2h} \{\dot{\lambda}_i\}_{2h \times 1} \dots\dots(13)$$

ただし、 $\dot{\lambda}_i$ =降伏凸多面体に関する塑性変形速度ベクトルで非負の値をもつ。

式(13)を  $i=1, 2, \dots, m$  について拡張すれば、構造全体に対する作用変形速度ベクトルが次のように表わされる。

$$\{\dot{q}\}_{pm \times 1} = \{N\}_{pm \times 2hm} \{\dot{\lambda}\}_{2hm \times 1} \dots\dots\dots(14 \cdot a)$$

$$\{\dot{\lambda}\}_{2hm \times 1} \geq \{0\}_{2hm \times 1} \dots\dots\dots(14 \cdot b)$$

ここに、 $\dot{q}^T = \{\dot{q}_1^T \dot{q}_2^T \dots \dot{q}_m^T\}$ 、 $\dot{\lambda}^T = \{\dot{\lambda}_1^T \dot{\lambda}_2^T \dots \dot{\lambda}_m^T\}$

b) 崩壊機構条件(変形適合条件)

崩壊機構条件は前記塑性流れ法則から導いた式(14・a)と構造全体の作用変形速度  $\dot{q}$  が構造物の独立な節点変位速度(節点自由度)  $\dot{u}$  と幾何学的に結合するという変形適合条件とから、以下のように導かれる。

まず、要素  $i$  の一般変位速度  $\dot{r}_i$  は局部座標系で与えられているため、これを全体座標系における一般変位速度  $\bar{r}_i$  に変換する。すなわち、

$$\{\bar{r}\}_{g \times 1} = \{D_i\}_{g \times g} \{\dot{r}_i\}_{g \times 1} \dots\dots\dots(15)$$

ここに、 $D_i$ =部材要素  $i$  の座標変換マトリックス<sup>(15)</sup>で、たとえば、図-5(b)の  $i=1$  の場合には次のような値となる。

$$\{D_i\} = \begin{bmatrix} D_j^1 & 0 \\ 0 & D_k^1 \end{bmatrix}$$

$$\{D_j^1\} = \{D_k^1\} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

次に、全体座標系における要素  $i$  の一般変位速度  $\bar{\mathbf{r}}_i$  と全体座標系における構造物の独立な節点変位速度  $\dot{\mathbf{u}}$  とは次の関係によって結ばれる。

$$\{\bar{\mathbf{r}}_i\}_{g \times 1} = \{\mathbf{c}_i\}_{g \times f} \{\dot{\mathbf{u}}\}_{f \times 1} \dots \dots \dots (16)$$

ただし、 $f$  = 節点変位速度の全数、 $\mathbf{c}_i = \bar{\mathbf{r}}_i$  と  $\dot{\mathbf{u}}$  とを結合させる変形適合マトリックスで、たとえば 図-6 の場合の  $i=1$  に対して  $\mathbf{c}_1$  は次のような値となる。

$$\{\mathbf{c}_1\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \end{bmatrix}_{12 \times 39}$$

式 (15) および式 (16) を式 (6) に代入したうえて、 $i=1, 2, \dots, m$  について拡張すれば、構造全体の作用変形速度  $\dot{\mathbf{q}}$  と節点変位速度  $\dot{\mathbf{u}}$  との関係が次のように得られる。

$$\{\dot{\mathbf{q}}\}_{p m \times 1} = \{\mathbf{C}\}_{p m \times f} \{\dot{\mathbf{u}}\}_{f \times 1} \dots \dots \dots (17)$$

ここに、 $\mathbf{C}$  は構造全体の変形適合マトリックスで、 $\mathbf{C}^T = \{\mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_2^T \dots \mathbf{C}_m^T\}$ 、 $\{\mathbf{C}_i\}_{p \times f} = \{\mathbf{B}_i^T\}_{p \times g} \{\mathbf{D}_i\}_{g \times g} \{\mathbf{c}_i\}_{g \times f}$ 、よって、式 (14・a) と式 (17) とから構造全体に対する崩壊機構条件式が次のように表わされることになる。

$$\{\mathbf{N}\}_{p m \times 2 h m} \{\dot{\lambda}\}_{2 h m \times 1} - \{\mathbf{C}\}_{p m \times f} \{\dot{\mathbf{u}}\}_{f \times 1} = \{\mathbf{0}\}_{p m \times 1} \dots \dots \dots (18)$$

c) 平衡条件

構造全体の平衡条件は、構造全体の作用断面力  $\mathbf{Q}$  が節点に作用する終局荷重  $\alpha_L \mathbf{F}_L + \alpha_D \mathbf{F}_D$  (ただし、 $\mathbf{F}_L$ 、 $\mathbf{F}_D$  = 節点作用活荷重および死荷重ベクトル、 $\alpha_L$ 、 $\alpha_D$  = 終局活荷重および死荷重係数) とつり合うという条件であり、式 (17) に反傾定理<sup>10)</sup>を適用すれば次のように容易に得られる。

$$\{\mathbf{C}^T\}_{f \times p m} \{\mathbf{Q}\}_{p m \times 1} = \{\alpha_L \mathbf{F}_L + \alpha_D \mathbf{F}_D\}_{f \times 1} \dots \dots \dots (19)$$

たとえば、図-5 (b) の場合の終局荷重ベクトルは  $\alpha_L = 1.0$ 、 $\alpha_D = 0$  として次のような値をもつ。

$$\{\alpha_L \mathbf{F}_L^T + \alpha_D \mathbf{F}_D^T\}_{1 \times f} = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} -\frac{3qL}{2} & 0 & 0 & -\frac{13qL}{2} & 0 & 0 & -\frac{3qL}{2} & 0 & 0 & -2qL & & \\ 0 & 0 & -2qL & 0 & 0 & -2qL & 0 & 0 & -\frac{3qL}{2} & 0 & 0 & -\frac{3qL}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3qL}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}_{1 \times 39}$$

d) 目的関数

ここでは目的関数として構造物の全重量を採用する。すなわち、仮定 (3) より目的関数として次のような重量関数を用いる。

$$G = \{\mathbf{L}^T\}_{1 \times n} \{\mathbf{M}_p\}_{n \times 1} \dots \dots \dots (20)$$

ここに、 $G$  = 構造全体の重量、 $\mathbf{L}$  = 設計変数  $\mathbf{M}_p$  に対応する部材要素長で、たとえば、図-5 (a) の場合には次の値となる。

$$\{\mathbf{L}^T\}_{1 \times n} = \{2L \ 2L \ 2L \ 2L \ 2L \ 2L \ 2L \ 2L \ 2L \ 2L\}_{1 \times 10}$$

3. 設計の基本式<sup>22), 23)</sup>

(1) 上界定理による基本式 (Static Approach)

最小重量設計の上界定理<sup>14)</sup>によれば、「降伏条件と平衡条件とを満足するいわゆる静的許容な応力状態における設計は、最小重量設計の上界を与える」ことになるから、最小重量設計された構造物の全重量を  $G$ 、上界定理に基づく設計の全重量を  $G^+$  とすれば  $G \leq G^+$  または  $G = \min. G^+$  となる。よって、式 (20) を目的関数にとり、式 (12) と式 (19) を制約条件とすれば、上界定理による設計の基本式が次のような LP 問題として表わされることになる。

未知の変数：

$$\{\mathbf{M}_p\}_{n \times 1}, \{\mathbf{Q}\}_{p m \times 1}$$

目的関数：

$$G = \min. G^+ = \min. \{\mathbf{L}^T\}_{1 \times n} \{\mathbf{M}_p\}_{n \times 1} \dots \dots (21 \cdot a)$$

制約条件：

$$\{\mathbf{C}^T\}_{f \times p m} \{\mathbf{Q}\}_{p m \times 1} = \alpha_L \{\mathbf{F}_L\}_{f \times 1} + \alpha_D \{\mathbf{F}_D\}_{f \times 1} \dots \dots \dots (21 \cdot b)$$

$$\{\mathbf{N}^T\}_{2 h m \times p m} \{\mathbf{Q}\}_{p m \times 1} - \{\mathbf{K}\}_{2 h m \times n} \cdot \{\mathbf{T}\}_{m \times n} \{\mathbf{M}_p\}_{n \times 1} \leq \{\mathbf{0}\}_{2 h m \times 1} \dots \dots (21 \cdot c)$$

$$\{\mathbf{M}_p\}_{n \times 1} \geq \{\mathbf{0}\}_{n \times 1} \dots \dots \dots (21 \cdot d)$$

ここに、式 (21) は降伏条件 (式 (21・c)) と平衡条件 (式 (21・b)) とを満足したうえて、構造物の全重量が最小 (式 (21・a)) となることを示している。また、式 (21) において変数の数は  $(n + pm)$  個、制約条件式の数は  $(f + 2 hm)$  個である。

(2) 下界定理による基本式

(Kinematic Approach)

式 (21) を LP の双対定理<sup>11)</sup>における表の問題 (Primal Problem) として裏の問題 (Dual Problem) を求めれば、下界定理による基本式が以下のように得られる。

未知の変数：

$$\{\dot{\mathbf{u}}\}_{f \times 1}, \{\dot{\lambda}\}_{2 h m \times 1}$$

目的関数：

$$G = \max. G^- = \max. \{ \alpha_L \mathbf{F}_L^T + \alpha_D \mathbf{F}_D^T \}_{1 \times f} \{ \mathbf{u} \}_{f \times 1} \dots \dots \dots (22 \cdot a)$$

制約条件：

$$\{ \mathbf{C} \}_{p m \times f} \{ \mathbf{u} \}_{f \times 1} - \{ \mathbf{N} \}_{p m \times 2 h m} \{ \mathbf{\lambda} \}_{2 h m \times 1} = \{ \mathbf{0} \}_{p m \times 1} \dots \dots \dots (22 \cdot b)$$

$$\{ \mathbf{T}^T \}_{n \times m} \{ \mathbf{K}^T \}_{m \times 2 h m} \{ \mathbf{\lambda} \}_{2 h m \times 1} \leq \{ \mathbf{L} \}_{n \times 1} \dots \dots \dots (22 \cdot c)$$

$$\{ \mathbf{\lambda} \}_{2 h m \times 1} \geq \{ \mathbf{0} \}_{2 h m \times 1} \dots \dots \dots (22 \cdot d)$$

ここに、式 (22・a) は終局荷重時における外力仕事が大となることを示し、式 (22・b) は式 (18) と同じく崩壊機構条件式を、式 (22・c) は以下に説明するように重量適合機構 (Foulkes 機構) が形成される条件を示している。ただし、 $G^-$  = 終局荷重のなす仮想外力仕事。

まず、式 (22・c) の左辺  $\{ \mathbf{T}^T \mathbf{K}^T \mathbf{\lambda} \}_{n \times 1}$  を係数ベクトル  $\{ \mathbf{a} \}_{n \times 1}$  とおくと、これは最小重量設計されるとき崩壊機構の内部仕事式における設計変数  $M_p$  の係数を示している。すなわち、

$$a_1 M_{p1} + a_2 M_{p2} + \dots + a_n M_{pn} = \text{内部仕事} \dots \dots \dots (23 \cdot a)$$

一方、右辺の  $\mathbf{L}$  は構造全体の重量関数における設計変数  $M_p$  の係数であるから、

$$L_1 M_{p1} + L_2 M_{p2} + \dots + L_n M_{pn} = \text{全重量} \dots \dots \dots (23 \cdot b)$$

よって、式 (23・a) と式 (23・b) から

$$\frac{a_1}{L_1} = \frac{a_2}{L_2} = \dots = \frac{a_n}{L_n} = \text{const.} \dots \dots \dots (23 \cdot c)$$

式 (23・c) は明らかに重量適合機構が形成される条件<sup>16)</sup>を示しており、したがって、最小重量設計が得られるとき、式 (22・c) の不等式は等式として成立することを意味している。すなわち、式 (22) は「運動的許容な変形場において、重量適合機構が得られ、外力仕事は内部仕事より大きい設計は最小重量設計に等しいか軽い」という下界定理<sup>14)</sup>を満足していることになる ( $G^- \leq G$  または  $G = \max. G^-$ )。また、式 (22) の変数の数は ( $f + 2hm$ ) 個、制約条件式の数は ( $pm + n$ ) 個である。

ここで、式 (21) の表の変数 (Primal variable) は  $M_p, Q$  であるが、式 (21) の裏の変数 (Dual variable) を求めれば式 (22) の表の変数  $\mathbf{u}, \mathbf{\lambda}$  が得られ、その反対も成立するゆえ、両式のうちのいずれかを解けば、すべての未知の変数  $M_p, Q, \mathbf{u}, \mathbf{\lambda}$  が得られることになる。

(3) 分割法による設計の基本式

一般に LP 問題を解く場合、表の変数よりも制約条

$$v_i = \left[ \begin{array}{cccccc|cccccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{array} \right]_{3 \times 14}$$

件が多いと、制約条件における端点を次々に繰り返し見つけ出す手間がかかるため計算時間が長くなる。たとえば、LP の計算時間は変数の数におおよそ比例するが、制約条件式の数の3乗にほぼ比例するといわれている<sup>17)</sup>。したがって、式 (21) より式 (22) の方が制約条件の数が少ないので、式 (22) を用いた方が有利である。しかし、式 (22) は簡単な立体骨組に対しては効果的であるが、複雑な立体骨組になると LP 全体のマトリックスが大きくなり、計算の効率性が必ずしも十分高いとはいえない。よって、ここでは制約条件の数をさらに減少させて計算の効率性を高め、また、大規模な立体骨組への応用を図るため、Dantzig-Wolfe によって提案された分割法<sup>11)</sup>を適用することを試みる。この分割法の基本的な考え方は、当初の LP 問題の解が、その一部の制約条件の端点の凸一次結合によって求められるというもので、式 (21) の解がちょうど降伏条件 (式 (21・c)) の端点の凸一次結合によって表わされることから、式 (21) に適用するのに便利である。

a) 分割法による上界定理 (Decomposed Static Approach)

まず式 (11) の部材要素  $i$  の降伏条件式は、図-3 に示すように  $p$  個の作用断面力  $Q_i$  を座標軸にもつ  $p$  次元空間における降伏凸多面体を表わしているの、 $Q_i$  が頂点座標マトリックス  $V_i$  の凸一次結合によって次の式 (24・a) の形で表示されることができ<sup>17)</sup>。

$$\{ \mathbf{Q}_i \}_{p \times 1} = \{ \mathbf{V}_i \}_{p \times v} \{ \boldsymbol{\mu}_i \}_{v \times 1} \dots \dots \dots (24 \cdot a)$$

$$\{ \mathbf{U}_i^T \}_{1 \times v} \{ \boldsymbol{\mu}_i \}_{v \times 1} \leq 1 \dots \dots \dots (24 \cdot b)$$

$$\{ \boldsymbol{\mu}_i \}_{v \times 1} \geq \{ \mathbf{0} \}_{v \times 1} \dots \dots \dots (24 \cdot c)$$

ここに、式 (24・b) は凸一次結合を示す係数の和が1以下であることを示し、これは作用断面力  $Q_i$  が降伏凸多面体の線(面)上もしくは内部にあるという、要素  $i$  についての降伏条件式を意味している。ただし、 $V_i = (X_p^i)^{-1} v_i$  = 要素  $i$  の有次元化降伏凸多面体の頂点座標マトリックスで、 $p$  次元空間において要素端  $j, k$  の2つの降伏凸多面体の交点によって定義される。 $X_p^i$  = 要素  $i$  の作用断面力  $Q_i$  を無次元するための塑性容量マトリックス、 $\boldsymbol{\mu}_i$  = 凸一次結合を示す係数ベクトル、 $v_i$  = 要素  $i$  の無次元化降伏凸多面体の頂点座標マトリックス、 $v$  = 要素の降伏凸多面体の頂点の数、 $U_i^T$  = 単位の行ベクトル、たとえば、曲げとねじりの場合、 $X_p^i$  と  $v_i$  はそれぞれ次のような値をもつ。

$$X_p^i = \begin{bmatrix} 1/T_{pz} \\ 1/M_{px} \\ 1/M_{px} \end{bmatrix}_i^i$$

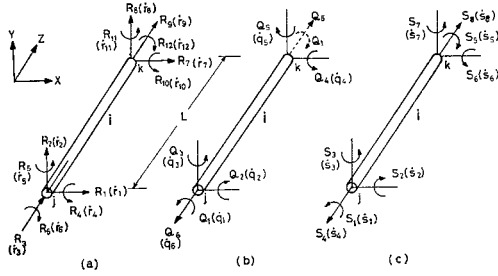


図-4 要素に働く断面力と塑性変形速度  
( $T_x + M_x + M_y + N_z$ )

また、立体骨組要素の場合、作用断面力の全数が  $p=5$  または  $6$  となるゆえ (たとえば  $p=6$  の場合、図-4 参照)、要素の降伏凸多面体は  $5$  または  $6$  次元空間となり、具体的に図示できないが、要素の降伏凸多面体の頂点座標マトリックス  $v_i$  は上記のような符号の置換法則によって次のように表示することができる。

たとえば、二軸曲げとねじり ( $M_x + M_y + T_z$ ) および二軸曲げとねじりと軸力 ( $M_x + M_y + T_z + N_z$ ) の場合の要素  $i$  の無次元化降伏凸多面体の頂点座標マトリックス  $v_i$  は、断面の降伏凸多面体における主座標軸上の頂点 (principal-axes vertices) のみを採用して次のように表わされる<sup>9)</sup>。

(i)  $M_x + M_y + T_z$  の場合

$$\{v_i\} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}_{5 \times 10}$$

(ii)  $M_x + M_y + T_z + N_z$  の場合

$$\{v_i\} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{6 \times 12}$$

なお、さらに精度を上げるためには、断面の降伏凸多面体における主座標軸間の中間の頂点座標 (bisector-axes vertices) が必要となり、これは断面内での平衡条件とミーゼスの降伏条件を満足するように、断面の降伏凸多面体までの距離を最大にするという LP 問題によって別途算定される<sup>9)</sup> が、ここでは計算の便宜上主座標軸上の頂点のみを用いる。

よって、式 (10) と同様に式 (24.a) の  $V_i$  中の  $X_p^i$  を各塑性容量の比を示すマトリックス  $Y_p^i (= M_{px}^i \cdot X_p^i)$  に変換したうえで、式 (24) に代入すれば次式が得られる。

$$\{Q_i\}_{p \times 1} = \{(Y_p^i)^{-1}\}_{p \times p} \{v_i\}_{p \times v} \{\mu^*\}_{v \times 1} \dots \dots \dots (25 \cdot a)$$

$$\{U_i^T\}_{1 \times v} \{\mu^*\}_{v \times 1} - M_{px}^i \leq 0 \dots \dots \dots (25 \cdot b)$$

$$\{\mu^*\}_{v \times 1} \geq \{0\}_{v \times 1} \dots \dots \dots (25 \cdot c)$$

ここに、式 (25.b) は要素  $i$  の降伏条件式を示し、式 (11) で要素当りの降伏条件式の数が  $2h$  個必要としたものが、式 (25.b) ではわずか  $1$  個ですむことを意味している。たとえば、曲げとねじりの場合要素当りの降伏条件式の数は  $1/16$  に減少する。ただし、 $\{\mu^*\} = M_{px}^i \cdot \{\mu_i\}$ 。

よって、式 (25) を  $i=1, 2, \dots, m$  について拡張したうえで、式 (25.a) を式 (21.b) の平衡条件式に代入すれば、結局式 (21) の代りに分割法による上界定理の設計基本式が次のように表わされる。

未知の変数:

$$\{M_p\}_{n \times 1}, \{\mu^*\}_{vm \times 1}$$

目的関数:

$$G = \min. G^+ = \min. \{L^T\}_{1 \times n} \{M_p\}_{n \times 1} \dots (26 \cdot a)$$

制約条件:

$$\{C^T\}_{f \times pm} \{Y_p^{-1}\}_{pm \times pm} \{v\}_{pm \times vm} \{\mu^*\}_{vm \times 1} = \{\alpha_L F_L + \alpha_D F_D\}_{f \times 1} \dots \dots \dots (26 \cdot b)$$

$$\{U^T\}_{m \times vm} \{\mu^*\}_{vm \times 1} - \{T\}_{m \times n} \{M_p\}_{n \times 1} \leq \{0\}_{m \times 1} \dots \dots \dots (26 \cdot c)$$

$$\{\mu^*\}_{vm \times 1} \geq \{0\}_{vm \times 1} \dots \dots \dots (26 \cdot d)$$

$$\{M_p\}_{n \times 1} \geq \{0\}_{n \times 1} \dots \dots \dots (26 \cdot e)$$

ここに、式 (26.b) は構造全体の平衡条件式を、式 (26.c) は構造全体の降伏条件式を示している。また、式 (26) の変数と制約条件式の数は表-1 のようになり、式 (21) に比べ制約条件式の数が  $(f+2hm)$  個から  $(f+m)$  個に減少していることがわかる。

b) 分割法による下界定理

(Decomposed Kinematic Approach)

式 (22) と同様に、式 (26) に双対定理を適用すれば分割法による下界定理の設計基本式が次のように得られる。

未知の変数:

$$\{\hat{u}\}_{f \times 1}, \{\hat{w}\}_{m \times 1}$$

目的関数:

$$G = \max. \{\alpha_L F_L^T + \alpha_D F_D^T\}_{1 \times f} \{\hat{u}\}_{f \times 1} \dots \dots \dots (27 \cdot a)$$

制約条件:

表-1 設計基本式の変数および制約条件式の数 (ただし、かっこはスラック変数の数を示す)

Approach	Variables	Constraints
(I) Static : Eq. (21)	$n + pm (+2hm + pm)$	$f + 2hm$
(II) Kinematic : Eq. (22)	$f + 2hm (+n)$	$pm + n$
(III) Decomposed Static : Eq. (26)	$n + vm (+m)$	$f + m$
(IV) Decomposed Kinematic : Eq. (27)	$f + m (+n)$	$vm + n$

$$\begin{aligned} \{v^T\}_{vm \times pm} \{Y_p^{-1}\}_{pm \times pm} \{C\}_{pm \times f} \{\dot{u}\}_{f \times 1} \\ - \{U\}_{vm \times m} \{\dot{w}\}_{m \times 1} &= \{0\}_{vm \times 1} \dots \dots \dots (27 \cdot b) \\ \{T^T\}_{n \times m} \{\dot{w}\}_{m \times 1} &\leq \{L\}_{n \times 1} \dots \dots \dots (27 \cdot c) \\ \{\dot{w}\}_{m \times 1} &\geq \{0\}_{m \times 1} \dots \dots \dots (27 \cdot d) \end{aligned}$$

ここに、式 (27・a) は式 (22・a) に同じく仮想外力仕事  
が最大になることを示し、式 (27・b) は崩壊機構条件式  
を、さらに式 (27・c) は Foulkes 機構が形成される条  
件を表わしている。ただし、 $\dot{w}^T = \{\dot{w}_1 \dot{w}_2 \dots \dot{w}_m\}$  で  $\dot{w}_i$   
は要素  $i$  についての塑性乗数を示す。

式 (27) の変数と制約条件式の数は表一のように  
なり、式 (26) に比べて制約条件式の数が多く、分割法  
による場合には式 (26) の上界定理に基づく基本式を用い  
た方が有利であることがわかる。

4. 計算例

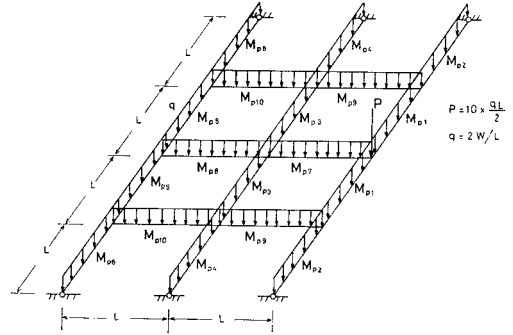
(1) 計算例 1: 3 主桁, 3 横桁をもつ格子桁<sup>4)</sup>

まず本法の妥当性を検証するために、図一5 (a) に示  
す 3 主桁, 3 横桁をもつ格子桁について既往の非線形計  
画法を用いた設計結果<sup>4)</sup> との比較を行う。主桁は箱形  
( $\beta^* = 0.8$ )、横桁は I 形 ( $\beta^* = 0.038$ ) とし、設計変数は  
図一5 (a) に示すように  $n = 10$ 、また荷重係数は  $\alpha_L =$   
 $1.0$ 、 $\alpha_D = 0$  とする。等分布荷重を図一5 (b) に示すよ  
うな格点に作用する等価集中荷重に置換したうえで、節  
点変位速度を図一6 のようにとれば、部材要素の全数は  
 $m = 18$ 、節点変位速度の全数は  $f = 39$  となる。また、  
図一2 (b) または図一3 の降伏条件を用いれば  $h = 8$ 、 $v$   
 $= 14$  となるゆえ、表一による変数の数と制約条件式  
の数は表二に示すような値となり、分割法による上界  
定理の式 (26) がもっとも制約条件式の数が少なく、か  
つ全体のマトリックスの大きさも小さいことがわかる。

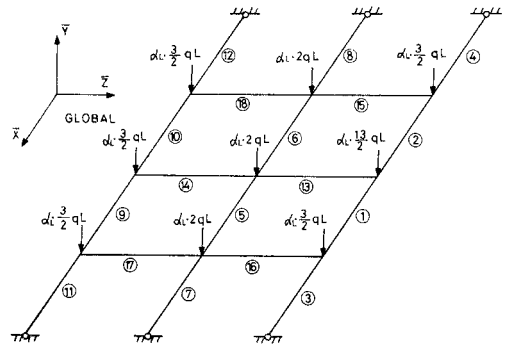
表一 計算例 1: 設計基本式の変数および制約条件式の数

Approach	Variables	Constraints	Matrix size of Constraints
(I) Static : Eq. (21)	406	327	132 762
(II) Kinematic : Eq. (22)	337	64	21 568
(III) Decomposed Static : Eq. (26)	280	57	15 960
(IV) Decomposed Kinematic : Eq. (27)	67	262	17 554

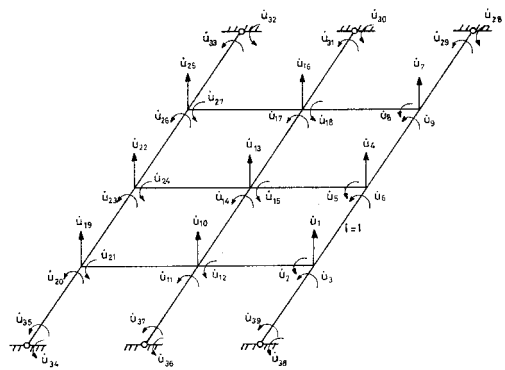
よって、式 (26) を用いて解けば設計結果は表一3の  
ように得られ、既往の解<sup>4)</sup> ときわめてよく一致するこ  
とが認められる。ただし、横桁の強度を示す  $M_{p7}$ 、 $M_{p8}$ 、  
 $M_{p9}$ 、 $M_{p10}$  の最適値は分布荷重を図一5 (b) のように  
とれば 0 となるので、横桁のスパン中央にも集中荷重を



(a) 3 主桁, 3 横桁の格子桁の構造および載荷形式



(b) 等価集中荷重形式  
図一5 計算例 1



図一6 計算例 1: 節点変位速度

表一3 計算例 1: 設計結果 (文献 4) との比較

	Design Variables $M_{px} (\times qL^2/2)$										Weight $G (\times qL^2/2)$
	$M_{p1}$	$M_{p2}$	$M_{p3}$	$M_{p4}$	$M_{p5}$	$M_{p6}$	$M_{p7}$	$M_{p8}$	$M_{p9}$	$M_{p10}$	
M. Kurata & K. Sonoda <sup>4)</sup>	16.000	9.503	8.000	6.000	6.001	4.506	0.125	0.125	0.125	0.125	100.77
Present method	16.000	9.500	8.000	6.000	6.000	4.500	0.125	0.125	0.125	0.125	100.75



置換する必要がある。また、横桁を2径間連続桁、主桁をスパン  $4L$  の単純桁として設計しても結果は一致することから、この格子桁ではねじりモーメントの影響がきわめて小さいものといえる。また、下界定理による式(22)を用いて解いた場合もまったく同様な結果が得られ、最小重量設計時における重量適合機構の節点変位速度は図-7に示すようになる。

(2) 計算例 2: 正方形格子桁<sup>4)</sup>

図-8に示す格子桁についても前と同様に解いてみたが、 $\beta^*=0.7$  の場合の結果は表-4のようになり、重量で約4% 本法の方が大きくなっている。これは、図-2の実線のように降伏条件を安全側に近似化したためと思われる。また、本法では  $M_{p1}, M_{p3}$  が大きく、 $M_{p2}, M_{p4}$  がきわめて小さい値を示しているが、これは荷重形式および構造形式の対称性により中主桁および中横桁 ( $M_{p1}$  と  $M_{p3}$ ) の強度の大きい場合が経済的であることを示すものと思われる。

(3) 計算例 3: 1層1スパン立体ラーメン

図-9に示すような1層1スパン立体ラーメンに対する最適塑性設計を行い、(i) 設計変数の選択による影響、(ii) 軸力による影響、(iii) 断面形状による影響について調べた。なお、本例でも分割法による上界定理の式(26)を使用し、また、構造物の独立な節点変位速度を図-10のように採用した。

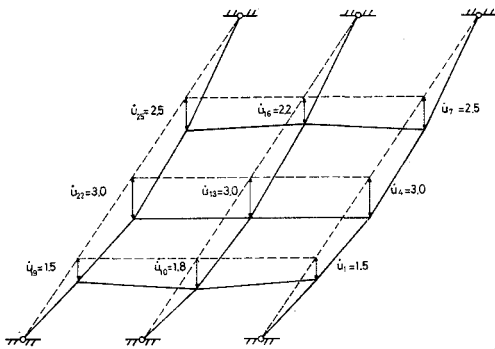


図-7 計算例 1: 重量適合機構

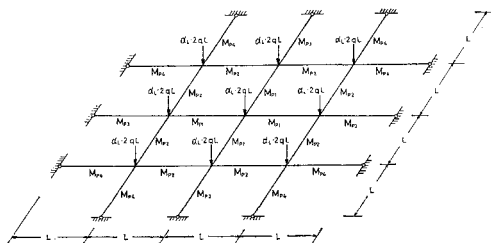


図-8 計算例 2: 正方形格子桁の構造および荷重形式

(i) 設計変数の選択による影響

ここでは荷重係数を  $\alpha_L=2.167$  および  $\alpha_D=1.3$  とし、すべての部材要素に正方箱形断面 ( $\alpha^*=1.0, \beta^*=0.77, r^*=48$ ) を用い、設計変数  $M_p$  を次の3つの場合に分けて行った。

- a. Case I ( $n=3$ ):  $M_{p1}=M_{p2}=M_{p3}=M_{p4}$ ,  
 $M_{p5}=M_{p6}, M_{p7}=M_{p8}$
- b. Case II ( $n=5$ ):  $M_{p1}=M_{p2}=M_{p3}=M_{p4}$ ,  
 $M_{p5}, M_{p6}, M_{p7}, M_{p8}$
- c. Case III ( $n=8$ ):  $M_{p1}, M_{p2}, \dots, M_{p8}$   
を独立変数とした場合

表-4 計算例 2: 設計結果 (文献 4) との比較

	Design Variables $M_{px} (\times qL^2/2)$				Weight $G (\times 2qL^3)$	Difference
	$M_{p1}$	$M_{p2}$	$M_{p3}$	$M_{p4}$		
M. Kurata & K. Sonoda <sup>4)</sup>	6.853	0.580	5.851	2.199	18.264	
Present method	8.665	0.668	7.666	0.668	19.003	+4.04%

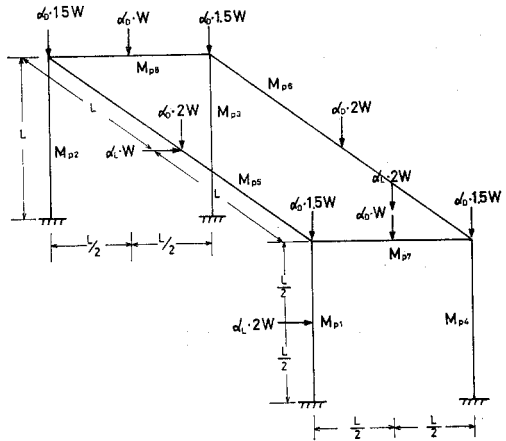


図-9 計算例 3: 1層1スパン立体ラーメンの構造および荷重形式

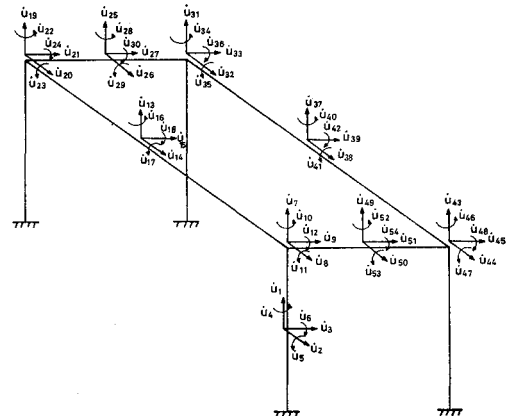


図-10 計算例 3: 節点変位速度

表-5 計算例 3：設計結果（設計変数の選択による影響）

Variables	$M_{p1}$ ( $\times WL$ )	$M_{p2}$	$M_{p3}$	$M_{p4}$	$M_{p5}$	$M_{p6}$	$M_{p7}$	$M_{p8}$	Total Weight $G(\times WL^2)$	Difference
(a) Case I ( $n=3$ )		1.200			1.416		0.911		12.285	
(b) Case II ( $n=5$ )		1.323			1.304	0.818	1.225	0.588	11.348	$(b-a)/a \times 100(\%)$ =-7.6
(c) Case III ( $n=8$ )	1.375	0.649	0.837	1.576	1.282	0.991	1.433	0.722	11.139	$(c-a)/a \times 100(\%)$ =-9.3

結果は表-5に示すようになり、設計変数を多くとれば重量は減少することが確認される<sup>3)</sup>。また、 $n=5$ と $n=8$ とは重量で約1.8%とほとんど差がなく、また、 $n=3$ と $n=5$ とは後者の方が約7.6%重量が軽くなることを示している。しかし、設計変数の選択にあたっては実際の施工上の面からも考慮する必要があり、したがって、この問題に対しては $n=3$ の場合でもさしつかえないものと思われる。なお、 $n=3$ の場合の重量適合機構における節点変位速度を示せば図-11のようになる。

(ii) 軸力による影響

図-9の载荷形式に対し、軸力を考慮した場合( $M_x + M_y + T_z + N_z$ )と軸力およびこれに対応する変位速度(たとえば図-10の $\dot{u}_1, \dot{u}_7$ など)を無視した場合( $M_x + M_y + T_z$ )とについて比較検討した。結果は表-6のようになり、軸力による影響を考慮すると重量で約5.2%増大することが認められた。

(iii) 断面形状による影響

ここでは荷重係数を $\alpha_L=1.0, \alpha_D=0$ として、H形および箱形断面の幅厚比( $d/t_w$ および $b/t_f$ )を変化させたときの全重量 $G$ に及ぼす影響を調べた。結果は

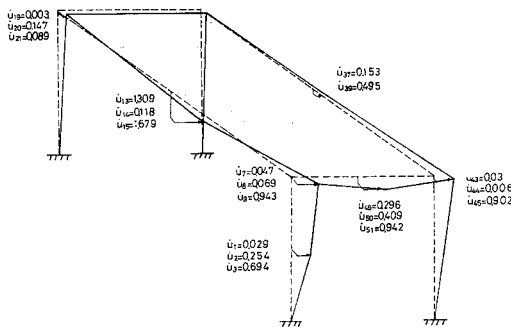


図-11 計算例 3：重量適合機構 ( $n=3$  の場合)

表-6 計算例 3：設計結果（軸力による影響）

Variable	$M_{p1}$ ( $\times WL$ )	$M_{p2}$	$M_{p3}$	Total Weight $G(\times WL^2)$	Difference
Case					
(a) $M_x + M_y + T_z$	1.073	1.410	0.872	11.678	
(b) $M_x + M_y + T_z + N_z$	1.200	1.416	0.911	12.285	$(b-a)/a \times 100(\%)$ =5.2%

図-12に示すようになり、以下のことが考察される。

a. 一般にH形より箱形断面の方が全重量は小さくなる傾向を示している。これは箱形断面の方が当然ながらねじり抵抗および弱軸まわりの曲げ抵抗が大きく、立体骨組の場合この影響が大きく作用しているためと思われる。

b. また、H形および箱形断面のいずれにおいても、一定の $d/t_w$ に対し $b/t_f$ の大きいほど全重量は小さく、また、一定の $b/t_f$ に対し $d/t_w$ が小さいほど全重量は小さくなる傾向を示している。すなわち、フランジ幅が大きくかつウェブ高さが小さい断面の方がこの種の立体骨組では経済的になるものと推測される。

なお、鋼管断面に対しても同様に求め、図-12に併記したが、当然ながら立体骨組に対し有利な断面であることが確認される。

(4) 計算例 4：大規模で複雑な立体ラーメンへの応用

ここでは、かなり大規模でかつ複雑な立体骨組構造物への応用例として、図-13に示す構造形式(兵庫県道高速神戸西宮線生田川オンランプの曲線立体高架ラーメン<sup>18)</sup>をモデル化)を選び、作用荷重の組合せ形式として次の3つの場合を想定した。

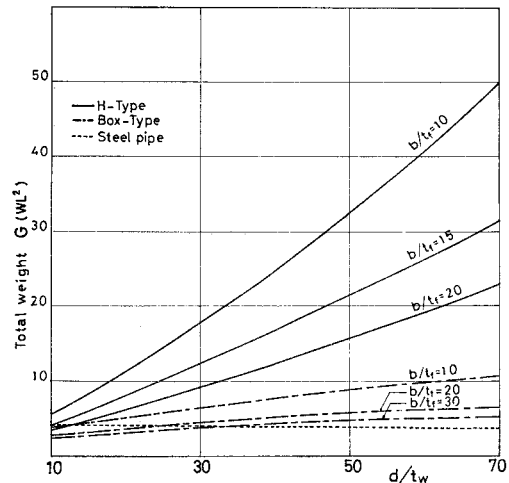


図-12 計算例 3：断面形状と最小重量との関係 ( $\alpha_L=1.0, \alpha_D=0, n=3$  の場合)

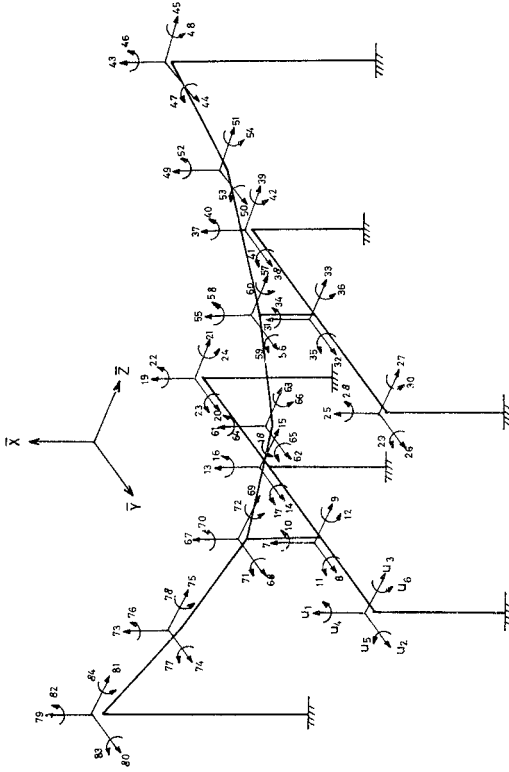


図-14 計算例 4 : 節点変位速度

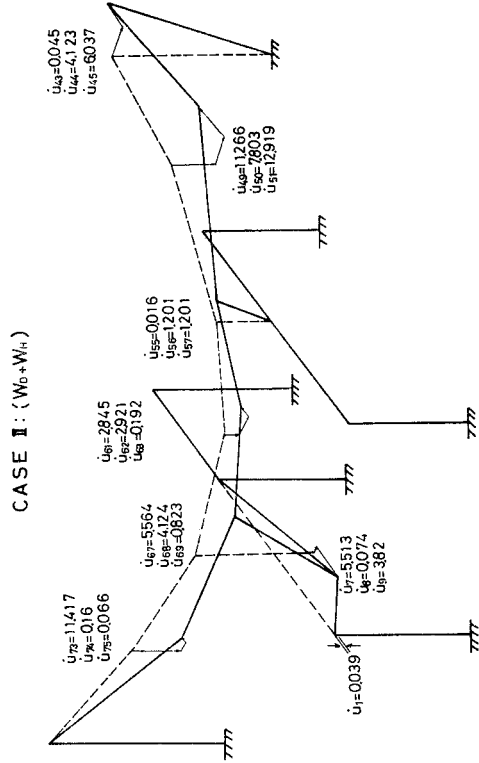


図-16 Case II : 重量適合機構

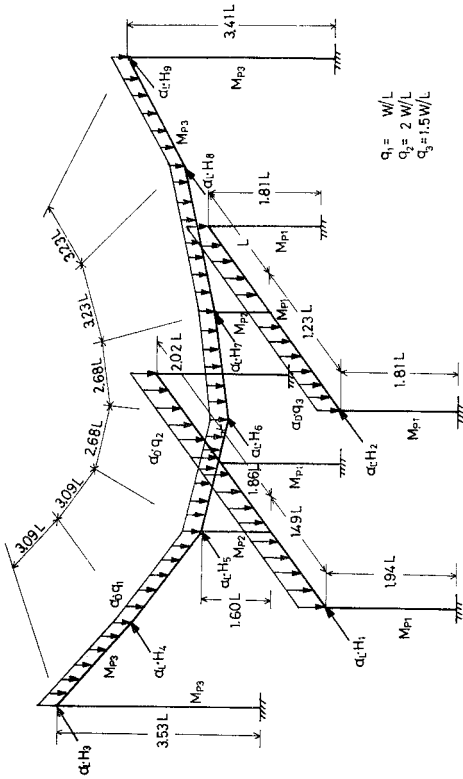


図-13 計算例 4 : 大規模で複雑な立体ラーメンの構造および載荷形式

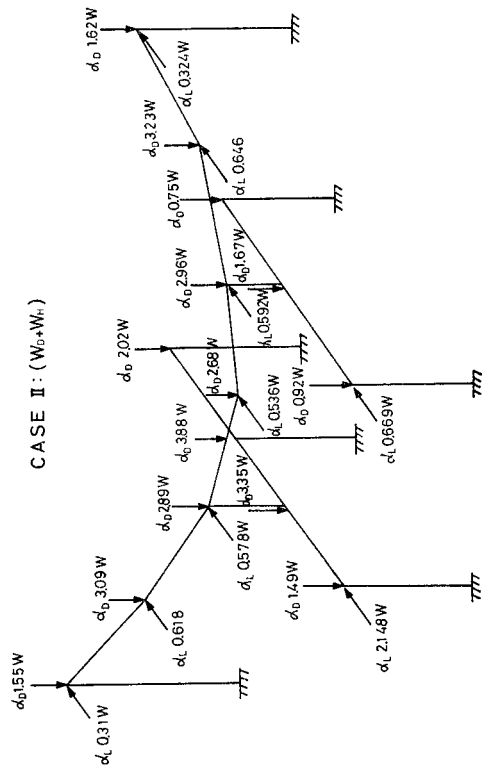


図-15 Case II : 死荷重と地震時水平荷重

- (i) Case I : 死荷重 ( $W_D$ ) + 活荷重 ( $W_L$ )  
( $W_L$  は L-20 を想定)
- (ii) Case II : 死荷重 ( $W_D$ ) + 地震時水平荷重  
( $W_H$ ) ( $W_H = 0.2 W_D$ )
- (iii) Case III : 死荷重 ( $W_D$ ) + 地震時鉛直荷重  
( $W_V$ ) ( $W_V = 0.1 W_D$ )

また、設計変数は 図-13 に示すように下部ラーメン、上部ラーメンを支える柱および上部ラーメンの強度を示す  $M_{p1}$ ,  $M_{p2}$ ,  $M_{p3}$  の3つを選び、 $M_{p1}$  と  $M_{p3}$  に対応する断面は箱形 ( $\alpha^* = 1.096$  および  $1.224$ ,  $\beta^* = 0.827$  および  $0.897$ ,  $r^* = 48$ ),  $M_{p2}$  に対応する断面は鋼管断面 ( $\alpha^* = 1.0$ ,  $\beta^* = 0.907$ ,  $r^* = 48$ ) を採用する。なお、終局荷重係数は  $\alpha_L = 2.167$ ,  $\alpha_D = 1.3$  を用いる。

まず、上部3径間連続曲線桁を 図-13 に示すように6本の折線で近似すれば、要素数は  $m = 20$  となり、また、節点変位速度を 図-14 のようにとれば  $f = 84$  となる。よって、式 (26) を用いれば変数の数はスラック変数も考慮して、 $n + vm + m = 263$ 、制約条件式の数は  $f + m = 104$  となり、制約条件のマトリックス全体の大きさは 27 352 となる。計算結果の一部を示せば、図-15 のような Case II の載荷形式に対して 図-16 のような重量適合機構時の節点変位速度が得られ、また、Case I, II, III の最適解は 表-7 のようになる。

表-7 計算例 4 : 設計結果 (組合せ載荷形式の影響)

	$M_{p1}$ ( $\times WL$ )	$M_{p2}$	$M_{p3}$	Total Weight $G(\times WL^2)$
Case I ( $W_D + W_L$ )	8.390	0.717	7.355	328.683
Case II ( $W_D + W_H$ )	25.920	3.275	4.199	556.873
Case III ( $W_D + W_V$ )	13.240	2.051	4.911	354.665

これら3つの載荷形式の中では、Case II の場合の重量が Case I に比し約 40%、Case III に比し約 36% ともっとも大きくなっており、特に下部ラーメンの強度を示す  $M_{p1}$  が Case I に比し約 3 倍、Case III に比し約 2 倍も大きく、これより地震時水平荷重の影響が特に下部ラーメンに対して顕著に現われていることが確認される。また、L-20 を想定した活荷重の影響により Case I の上部ラーメンの強度を示す  $M_{p3}$  が Case II に比べて約 43%、Case III に比べて約 33% 大きく、当然ながら上部ラーメンの強度は活荷重により支配されることがわかる。

なお、上記のように複数個の載荷形式が考えられる場合には、1つの載荷形式に対する解が他の形式に対して許容できない場合があり、したがって、厳密には Case I, II, III の載荷形式のあらゆる組合せに対して許容できる設計値を見い出す必要がある。ここではその方法の

みを述べ、その検討については別の機会に譲ることとする。

すなわち、式 (26) を用いて上記の設計値を決定するには、式 (26・b) の平衡条件式において Case I, II, III のすべての載荷形式を考慮するように式 (26) を解けばよい。つまり、1つの載荷形式の場合は1つの節点自由度に対応して1つの平衡条件式が存在したが、3つの載荷形式の場合には1つの節点自由度に対応して3つの平衡条件式が存在するので、このうちもっとも critical な1つの平衡条件式を選ぶようにすればよい。これは式 (26・b) の平衡条件式の右辺の外力項において、Case I, II, III の3つあるうちのもっとも大きな値を1つ選ばせよことを意味する。よって、本例の場合には、上記のように選んでもっとも critical な  $f = 84$  個の平衡条件式を式 (26・b) に採用して式 (26) を解けばよいことになる。

## 5. 結 論

本法は近似的な降伏凸多面体と有限要素に基づくマトリックス解析法を採用することにより、各種の組合せ応力を受ける立体骨組構造物の最適塑性設計を可能ならしめたもので、本研究の成果と問題点を列挙すれば以下のようになる。

(1) 各部材要素の塑性容量の比を一定と仮定した降伏凸多面体を用いたうえで、LP の双対定理を適用することにより、従来の曲げ構造物に対する最小重量設計理論を立体骨組の場合に対しても拡張することができた。

(2) また、LP における分割法を応用することにより、計算の効率化を図り、かなり大規模で複雑な立体骨組に対しても、たった1回のLPの適用できわめて短時間に最適解を得ることができた (たとえば計算例4で Case II の場合、IBM 360-195 で約 24 sec であった)。

(3) 本法では降伏条件をかなり安全側に近似化しているため、厳密な降伏条件式を用いた場合に比べ、一般に重量は大きくなる傾向にあるが、既往の格子桁の例ではほぼ一致することを確認した。

(4) 設計変数の数を多くとれば構造物の全重量は減少する傾向にあり、また、立体骨組ではH形より箱形さらには鋼管断面の方が当然ながら全重量は小さくなる傾向を示した。

(5) 本法では死荷重を既知として取り扱ったが、本来死荷重は未知であるゆえ、設計変数  $M_p$  の関数として取り扱われるべきで、この場合にはある種の繰り返し演算を必要とする<sup>19)</sup>。

(6) さらに大規模な立体骨組、特にLPのマトリックスの大きさがコンピューターの記憶容量を越える場

合については構造分割化が必要と思われる。

謝 辞：本研究を行うにあたり、カナダ Waterloo 大学の D.E. Grierson 助教授に有益なご助言を得た。また、コンピューターは防大電算機室 NEAC 2200-575 およびユニコン IBM 360-195 を使用したことを付記し、謝意を表するものである。

付録 I 断面の塑性容量の比について

H 形、箱形および鋼管断面に対し、それぞれ  $x, y$  軸まわりの全塑性曲げモーメント  $M_{px}, M_{py}$ , 全塑性ねじりモーメント  $T_{pz}$  および降伏軸力  $N_{pz}$  を求め、これらの  $M_{px}$  に対する比をそれぞれ板要素の幅厚比  $b/t_f$ ,  $d/t_w$  と板厚比  $t_w/t_f$ , また鋼管断面については径厚比  $D/t$  によって無次元化し、以下の諸式を導いた。

(1) H 形断面

まず 図-17 に示す断面諸定数をもつ H 形断面の  $M_{px}, M_{py}, T_{pz}, N_{pz}$  を算定すれば、それぞれ次式が得られる。なお、 $T_{pz}$  の算定には sand hill analogy<sup>(4)</sup> を用いている。

$$M_{px} = \sigma_y \left\{ bt_f(d-t_f) + \frac{1}{4}(d-2t_f)^2 t_w \right\} \quad \dots\dots\dots (A-1 \cdot a)$$

$$M_{py} = \sigma_y \left\{ \frac{1}{2} b^2 t_f + \frac{1}{4} (d-2t_f) t_w^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (A-1 \cdot b)$$

$$T_{pz} = \tau_y \left\{ bt_f^2 - \frac{1}{3} (t_f^3 + t_w^3) + \frac{1}{2} t_w^2 (d-2t_f) \right\} \quad \dots\dots\dots (A-1 \cdot c)$$

$$N_{pz} = \sigma_y \{ bd - (d-2t_f)(b-t_w) \} \quad \dots\dots\dots (A-1 \cdot d)$$

ただし、 $\sigma_y$  = 降伏引張応力度、 $\tau_y$  = 降伏せん断応力度でミーゼスの降伏条件によれば  $\tau_y = \sigma_y / \sqrt{3}$  となる。よって、 $\alpha^* = M_{py} / M_{px}$ ,  $\beta^* = T_{pz} / M_{px}$ ,  $\gamma^* = N_{pz} L / M_{px}$  とおけば、これらは次のような無次元化式で表わされる。

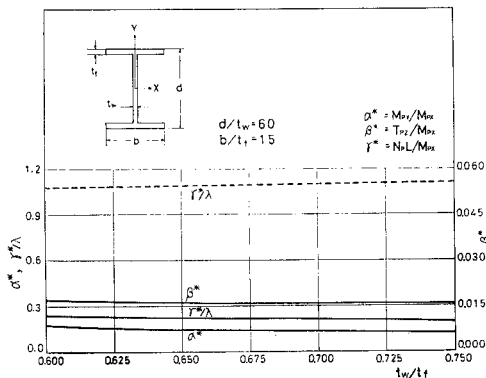


図-17 H 形断面の  $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*/\lambda$  の値

$$\alpha^* = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{b}{t_f} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - 2 \right) \left( \frac{t_w}{t_f} \right)^2}{\frac{b}{t_f} \left( \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - 1 \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - 2 \right)^2 \left( \frac{t_w}{t_f} \right)} \quad \dots\dots\dots (A-2 \cdot a)$$

$$\beta^* = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{b}{t_f} - \frac{1}{3} \left\{ 1 + \left( \frac{t_w}{t_f} \right)^3 \right\} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - 2 \right) \left( \frac{t_w}{t_f} \right)^2}{\frac{b}{t_f} \left( \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - 1 \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - 2 \right)^2 \left( \frac{t_w}{t_f} \right)} \quad \dots\dots\dots (A-2 \cdot b)$$

$$\gamma^* = \lambda \cdot \sqrt{\frac{A}{I}} \cdot \frac{1}{t_f} \cdot \frac{\frac{d}{t_w} + 2 \frac{b}{t_f} \left( \frac{t_f}{t_w} \right)^2 - 2 \left( \frac{t_f}{t_w} \right)}{\frac{b}{t_f} \left( \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - 1 \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - 2 \right)^2} \quad \dots\dots\dots (A-2 \cdot c)$$

ただし、 $\lambda$  はある標準部材長  $L$  に対する細長比で部材の座屈を生じさせないような一定の値、 $\sqrt{I/A}$  は座屈軸まわりの断面二次半径で、たとえば座屈軸を  $y$  軸にとると次のようになる。

$$\sqrt{\frac{I_y}{A}} = \left[ \frac{\frac{1}{12} \left( \frac{d}{t_w} \right) \left( \frac{t_w}{t_f} \right)^2 + 2 \left( \frac{b}{t_f} \right)^3 \left( \frac{t_f}{t_w} \right)^2 - 2 \left( \frac{t_w}{t_f} \right)}{\left( \frac{d}{t_w} \right) \left( \frac{t_w}{t_f} \right)^2 + 2 \left( \frac{b}{t_f} \right) - 2 \left( \frac{t_w}{t_f} \right)} \right]^{1/2} t_w$$

(2) 箱形断面

図-18 のような箱形断面に対しても同様に  $M_{px}, M_{py}, T_{pz}, N_{pz}$  を算定すれば、

$$M_{px} = \sigma_y \left\{ bt_f(d-t_f) + \frac{1}{2} (d-2t_f)^2 t_w \right\} \quad \dots\dots\dots (A-3 \cdot a)$$

$$M_{py} = \sigma_y \left\{ dt_w(b-t_w) + \frac{1}{2} (b-2t_w)^2 t_f \right\} \quad \dots\dots\dots (A-3 \cdot b)$$

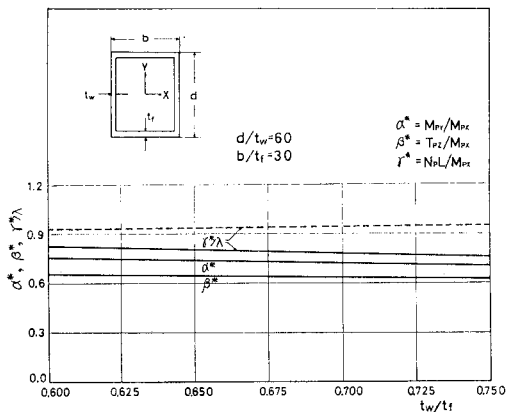


図-18 箱形断面の  $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*/\lambda$  の値

$$T_{pz} = \tau_y \left\{ \frac{1}{2} b^2 d - \frac{b^3}{6} - \frac{1}{2} (b-2t_w)^2 (d-2t_f) + \frac{1}{6} (b-2t_w)^3 \right\} \dots\dots\dots (A-3.c)$$

$$N_{pz} = \sigma_y \{ b d - (d-2t_f)(b-2t_w) \} \dots\dots\dots (A-3.d)$$

よって、 $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  および  $r^*$  はそれぞれ次式のようになる。

$$\alpha^* = \frac{\frac{d}{t_w} \left( \frac{b}{t_f} \cdot \frac{t_f}{t_w} - 1 \right) \left( \frac{t_w}{t_f} \right)^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{b}{t_f} \cdot \frac{t_f}{t_w} - 2 \right)^2 \left( \frac{t_w}{t_f} \right)^2}{\frac{b}{t_f} \left( \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - 2 \right)^2 \left( \frac{t_w}{t_f} \right)^2} \dots\dots\dots (A-4.a)$$

$$\beta^* = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{b}{t_f} \right)^2 \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - \frac{1}{6} \left( \frac{b}{t_f} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{b}{t_f} \cdot \frac{t_f}{t_w} - 2 \right)^2 \left( \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - 2 \right)^2 \left( \frac{t_w}{t_f} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{b}{t_f} \cdot \frac{t_f}{t_w} - 2 \right)^3 \left( \frac{t_w}{t_f} \right)^3 \right]}{\frac{b}{t_f} \left( \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - 2 \right)^2 \left( \frac{t_w}{t_f} \right)^2} \dots\dots\dots (A-4.b)$$

$$r^* = \lambda \cdot \sqrt{\frac{I}{A}} \cdot \frac{1}{t_f} \cdot \frac{2 \left( \frac{b}{t_f} \right) \left( \frac{t_f}{t_w} \right)^2 + 2 \frac{d}{t_w} - 4 \frac{t_f}{t_w}}{\frac{b}{t_f} \left( \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{t_w} \cdot \frac{t_w}{t_f} - 2 \right)^2 \left( \frac{t_w}{t_f} \right)^2} \dots\dots\dots (A-4.c)$$

(3) 鋼管断面

図-19 のような鋼管断面に対しては次式となる。

$$M_{px} = M_{py} = \frac{4}{3} \sigma_y \left\{ \left( \frac{D}{2} \right)^3 - \left( \frac{D}{2} - t \right)^3 \right\} \dots\dots\dots (A-5.a)$$

$$T_{pz} = \frac{2}{3} \pi \cdot \tau_y \left\{ \left( \frac{D}{2} \right)^3 - \left( \frac{D}{2} - t \right)^3 \right\} \dots\dots\dots (A-5.b)$$

$$N_{pz} = \pi \sigma_y \left\{ \left( \frac{D}{2} \right)^2 - \left( \frac{D}{2} - t \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (A-5.c)$$

よって、 $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $r^*$  はそれぞれ次の値となる。

$$\alpha^* = 1 \dots\dots\dots (A-6.a)$$

$$\beta^* = \pi/2\sqrt{3} = 0.9069 \dots\dots\dots (A-6.b)$$

$$r^* = \lambda \cdot \frac{\pi \left( \frac{D}{t} - 1 \right)}{\frac{4}{3} + \left( \frac{D}{t} \right)^2 - 2 \left( \frac{D}{t} \right)} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} \left\{ \left( \frac{D}{t} \right)^2 + 2 - 2 \left( \frac{D}{t} \right) \right\}} \dots\dots\dots (A-6.c)$$

以上の誘導諸式を用いて、H形および箱形断面に対して板要素の幅厚比制限<sup>20), 21)</sup>を満足するある一定の幅厚比 ( $b/t_f$ ,  $d/t_w$ ) を与えて板厚比 ( $t_w/t_f$ ) を変化させ、

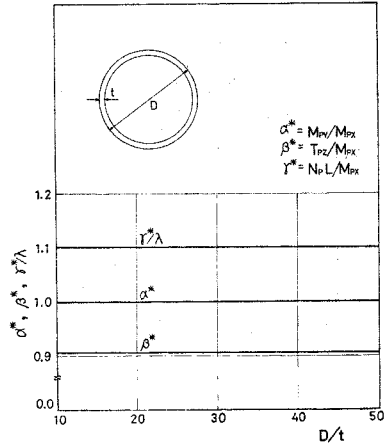


図-19 鋼管断面の  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $r^*/\lambda$  の値

また、鋼管断面に対しては径厚比 ( $D/t$ ) を変化させて、 $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $r^*$  をそれぞれ数値的に求めた。図-17~19 はその一例を図示したものである。

図-17 は H 形断面に対する  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $r^*$  の値を示したもので、熱間圧延 H 形鋼 (JIS G 3192-1971)<sup>20)</sup> に示される 62 種類のうち 50 種類までが  $0.6 \leq t_w/t_f \leq 0.75$  の範囲にあることから、この範囲内で  $t_w/t_f$  を変化させたところ、たとえば  $d/t_w=60$ ,  $b/t_f=15$  の場合には  $\alpha^*=0.165 \sim 0.118$ ,  $\beta^*=0.017 \sim 0.015$ ,  $r^*=(0.241 \sim 0.186)\lambda$  の値 (図-17 の点線は座屈軸を  $x$  軸としたときの  $r^*$  の値) を示しており、 $\alpha^*$ ,  $r^*$  に若干の変動がみられるが、ほぼ一定値と考えてさしつかえなく、 $M_{py}$ ,  $T_{pz}$ ,  $N_{pz}$  を設計変数とするにはいたらないものと思われる。

また、図-18 は箱形断面に対し、 $d/t_w=60$ ,  $b/t_f=30$  の場合を示したもので、図-17 と同様に  $0.6 \leq t_w/t_f \leq 0.75$  の範囲では、 $\alpha^*=0.752 \sim 0.692$ ,  $\beta^*=0.653 \sim 0.615$ ,  $r^*=(0.829 \sim 0.750)\lambda$  となり、ほぼ一定値を示している。さらに、図-19 は鋼管断面に対する径厚比  $D/t \leq 50$  を満足する範囲での変化を示したもので、 $\alpha^*=1$ ,  $\beta^*=0.907$ ,  $r^*=1.111\lambda$  と一定値になっている。

参考文献

- 1) Toakley, A.R. : Optimum Design Using Available Sections, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST 5, pp. 1219~1241, May 1968.
- 2) Yokoo, Y., Nakamura, T. and Keii, M. : The Minimum Weight Design of Multi-Story Building Frames Based upon the Axial Force-Bending Moment Interaction Yield Condition, Optimization in Structural Design, IUTAM, Symposium, Warsaw, 1973, Springer-Verlag, Berlin, pp. 497~517, 1975.
- 3) Grierson, D.E., Nakamura, H. and Ishikawa, N. : Second-Order Optimal Plastic Design of Steel Frames, Mechanics in Engineering, SM Study No. 11, Univ. of Waterloo Press, pp. 223~249, 1977.

- 4) 倉田宗章・園田恵一郎：格子桁の最小重量設計，土木学会論文報告集，第193号，pp. 13~22，1971年9月。
- 5) 伊藤 満・福本昉士：変断面格子桁の塑性設計，土木学会論文報告集，第258号，pp. 1~12，1977年2月。
- 6) Polizzotto, C. : Optimum Plastic Design of Structures Under Combined Stresses, International Journal of Solids and Structures, Vol. 11, pp. 539~553, 1975.
- 7) Morris, G.A. and Fenves, S.J. : Approximate Yield Surface Equations, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 95, No. EM 4, pp. 937~954, Aug. 1969.
- 8) Baset, S.B., Best, M.J. and Grierson, D.E. : Plastic Analysis of Skeletal Structures, Computational Methods in Nonlinear Mechanics, The Texas Institute for Computational Mechanics, pp. 989~998, 1974.
- 9) Grierson, D.E. and Baset, S.B. : Plastic Analysis Under Combined Stresses, SM Paper No. 139, Univ. of Waterloo, pp. 1~31, Aug. 1976.
- 10) Livesley, R.K. : Matrix Method of Structural Analysis, Pergamon Press, p. 57, 1964.
- 11) Gass, S.I. : Linear Programming, McGraw Hill, p. 89, p. 181, 1959.
- 12) Bigelow, R.H. and Gaylord, E.H. : Design of Steel Frames for Minimum Weight, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, No. ST 6, pp. 109~131, Dec. 1967.
- 13) Hodge, P.G. (倉西正嗣外共訳) : 構造物の塑性解析，コロナ社，p. 218，昭和38年。
- 14) 田中 尚：構造物の極限解析，建築構造大系9，彰国社，p. 32, p. 140, 昭和41年。
- 15) Beaufait, F.W. ほか(成岡昌夫訳)：コンピューターによる骨組構造解析，培風館，p. 220，昭和47年。
- 16) 木原博監修：塑性設計法，森北出版，昭和35年。
- 17) Zavelani-Rossi, A. : A New Linear Programming Approach to Limit Analysis, Variational Methods in Engineering, Vol. II, Southampton Univ. Press, pp. 8164~8179, 1975.
- 18) 篠原・岩本・山本ほか：兵庫県道高速神戸西宮線の設計概要について，橋梁，pp. 57~71，昭和43年8月。
- 19) Maier, G., Srinivason, R. and Save, M.A. : On the Limit Design of Frames Using Linear Programming, International Symposium on Computer-Aided Design, Univ. of Warwick, Coventry, England, July 1972, Vol. 1, pp. A 2. 32~59, P. Péregrinus, 1972.
- 20) 日本建築学会：鋼構造塑性設計指針，昭和50年11月。
- 21) 日本溶接協会 塑性設計 研究委員会：鋼構造物塑性設計規準(案)，塑性設計資料集(その3)，昭和42年8月。
- 22) 石川信隆：組合せ応力を受ける骨組構造物の最適塑性設計，土木学会第32回年次学術講演会講演概要集，第I部，pp. 288~289，昭和52年10月。
- 23) 石川・大野・岡元：立体骨組構造物の最適塑性設計に関する一考察，第27回応用力学連合講演会講演論文抄録集，pp. 271~272，昭和52年11月。

(1977.12.12・受付)