

平板と薄肉円筒シェルとの接合部における 応力集中とその解析

STRESS CONCENTRATION AND ANALYSIS OF THE JOINT PROBLEM BETWEEN PLATE AND THIN CYLINDRICAL SHELL

浜島良吉*・奥村敏恵**

By Ryokichi HAMAJIMA and Toshie OKUMURA

1. まえがき

円筒シェルは、その種々の特性によりトラス部材、ラーメン脚柱など広い範囲に使用されている。しかし、これら円筒シェルを構成部材とした構造物ではその継手部において円筒曲面に直接に平板あるいは円筒が接合する構造となり、適切な補強がない場合きわめて高い応力集中が生ずることになる。このため円筒シェル要素を用いた構造ではその継手部によって構造全体の強度が支配されるといってもよい。しかし、こうした鋼管継手部の応力集中は局所的なものであり、応力集中部の応力が降伏点を越えても全体としては、なお相当の余力を残している。これより終局耐力を基に設計する方がより合理的であり、これまでも鋼管継手に対する耐荷力についての研究が多くなされている^{3), 12)}。しかし、終局耐力は、荷重条件、材料、幾何学的特性、さらに局部座屈との関係など多くの因子により変化するものであり、これらの場合を想定して実験に基づいた定式化を行うことはきわめて困難であるといえよう。しかし、終局耐力に対して応力集中度の大きさはもっとも大きな因子の一つである。しかし、これは幾何学的特性により大きく変化するもので、設計に際し応力集中の大きさを過小評価している場合も少なくない。近年では構造物の大型化とあいまって疲労破壊の立場からも応力集中を含めた基本的な立場から鋼管継手部の体系づけられた考察が必要とされている。

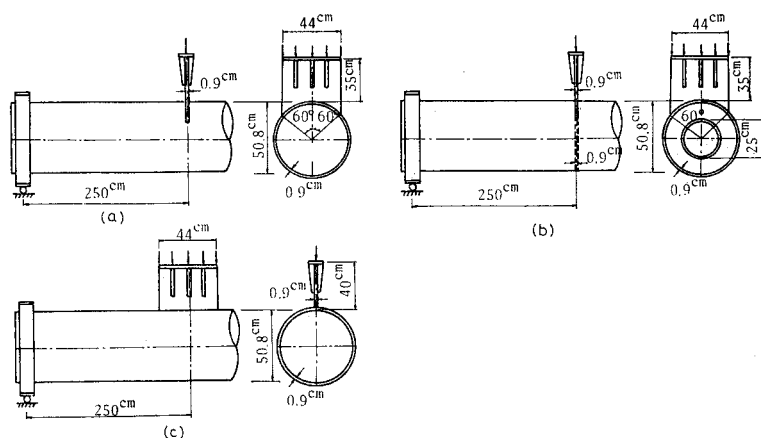


図-1 鋼管継手部基本構造

上記の観点より筆者らは円筒柱と箱形断面横ばりが接合するラーメン構造の隅角部における応力集中、特にダイヤフラム剛度およびフランジ幅の影響に着目した実験を行った^{4), 11)}。その結果、フランジ幅が小さく、ダイヤフラム剛度が小さいものについてはフランジのせん断おくれを考慮に入れた従来の解析⁵⁾よりもはるかに大きな応力集中が生じていることが明らかとなった。また、この実験結果からラーメン隅角部の応力集中については、内側フランジ部のみが円筒に接合した単純化された構造についての解析を行えばよいことを示した。また、図-1に示される鋼管継手部基本構造についての詳細な実験結果より荷重板からの伝達力の荷重板板厚方向の分布形が円筒の応力集中に大きな影響を及ぼし、ダイヤフラムの補強がない場合には特にその影響が大きいことが明らかとなった¹¹⁾。

本研究では上記の実験結果をふまえて図-1に示される鋼管継手部の基本構造について以下の点に着目した解析を行った。

(1) 荷重板から円筒に伝わる力は荷重板端部に集中

* 正会員 工博 埼玉大学助手 工学部建設基礎工学科

** 正会員 工博 埼玉大学教授 工学部建設基礎工学科

する。これはダイアフラムの補強がないものについては特に著しい。この荷重板端部近傍に生ずる荷重板および円筒の著しい応力集中を精度よく解析しうること。

(2) 荷重板からの伝達力の荷重板板厚方向の分布形を考慮に入れて解析しうること。

(3) 円筒がダイアフラムで補強された場合にも解析しうること。

(4) 基本構造の解析から得られた結果を実際の構造物の設計に適用するには、荷重板接合部近傍の局所的に攪乱された応力状態と、全体的な挙動を表わすはり理論に対応する応力状態とを、分離した形で整理しうること。

上記の観点より解析方法を考えるとき、円筒シェルを有限要素法により解析することは(1)、(4)の立場から困難である。これに対し筆者の一人は図-1(b)に示されるダイアフラムで補強された鋼管継手部基本構造の解析に対して選点最小自乗法を用いた解析を行った⁹⁾。これは荷重板、円筒シェル、ダイアフラムの解析解を求め、荷重板境界、およびこれら構造要素の接合部の適当なる有限点で境界条件、接合条件を満足させ、各要素の解析解の中に含まれる未知定数を定める方法である。しかし、大きな応力集中を精度よく求めるためには選点の数が著しく多くなり、特にダイアフラムの補強がない場合に精度のよい解を得ることが困難となる。

これに対してこうした鋼管継手部の一解析法として、枝管と円筒、あるいは荷重板と円筒との接合部に作用する応力を階段状分布荷重で近似し、円筒に対しては解析解を用いる解析が行われている^{2)、12)、17)}。これにより円筒については局部曲げによる著しい応力集中を計算することが可能である。しかし、枝管あるいは荷重板については、(a)剛性を無限大と仮定する¹⁷⁾、(b)完全に剛性を無視し、接合部の応力を等分布と仮定する²⁾、(c)荷重板を曲り棒で近似する¹²⁾などの解析が行われており、まだ十分とはいえない。また、荷重板端部近傍の応力集中部においては階段状分布荷重幅を小さく選ぶ必要があり、このため集中的に作用する単位荷重による収束性のよい円筒シェルの解が必要となる。こうした立場からみると、二重フーリエ級数解を用いた方法²⁾は収束性に難点があり、また、軸方向にフーリエ展開した方法¹⁷⁾と同様、上記(3)、(4)の立場からも問題がある。また、Vlasovの半膜理論解を用いた方法¹²⁾については軸方向に膜応力状態を仮定しており実状に合わない。しかし、集中的に作用する荷重に対しての収束がよく上記(3)、(4)の条件を満たす円筒シェルの解析解が存在し、さらに荷重板からの伝達力の荷重板板厚方向の分布形をも考慮した解析をすることができれば、上記の解析法は有効な方法といえよう。

本研究ではこうした条件を満たすべく、有限要素解(荷重板)と解析解(円筒)とを接合した形での解析を行った。ここで円筒の解としては、はり理論に対応する解と局所的な応力状態を近似的に分離して求めた解¹⁰⁾を用いた。この円筒シェルの解はダイアフラムで補強された場合の解析にも有効に適用できる。そこで、ダイアフラムの内側境界に沿って補強リングをつけたもつとも一般的な状態を考え、ダイアフラムの面外曲げを含んだ形での解析を行った。

ところでこれまでの補強円筒シェルの解析は、

(i) 円筒シェルに、ある有効幅を考え、これを外側フランジにもつ曲り棒りとして計算する⁹⁾、

(ii) 周方向リブを曲り棒として、これと円筒シェルとの接合を考える^{9)、18)}、

(iii) 周方向リブが密に入っている場合については、これを異性シェルとして解析する¹⁴⁾、

(iv) ダイアフラムを円板あるいはannular plateとして厳密に解析する^{1)、5)}、

などの方法によりなされている。しかし、鋼管継手部にみられるように局所的な荷重が作用する場合の解析には(i)~(iii)の方法は不適當であり、(iv)により厳密な解析を行うことが必要である。ここで(iv)については円板で補強された節付円筒体の解析がなされている¹⁾。また、面内応力状態のannular plateにより補強された円筒シェルの解析⁵⁾がなされている。しかし、これは局所的な応力状態とはり理論に対応する応力状態とが混在した形で解析されている。これに対し本論文ではダイアフラム(annular plate)についてNovozhilov¹⁴⁾、Chernykh⁷⁾の薄肉シェルの複素基礎方程式から導かれた解を用いた。この解は剛体変形を含まない形での複素境界量が得られる点でSavin^{15)、16)}が面外曲げを受けるannular plateについて求めた解と異なっている。これよりダイアフラム接合部近傍の局所的な応力状態にのみ着目した解析が可能となる。

2. 荷重板が円筒軸方向に直角に接合する場合

(1) 接合条件

荷重板と円筒との接合部に作用する応力を図-2(b)のように階段状分布荷重で近似する。いまの場合、鉛直軸(y軸)に対し対称であり、不静定力は法線方向および接線方向にそれぞれN個である。ここでこれらの不静定力を荷重板と円筒との法線方向および接線方向の変位が一致するように次の接合条件から定める。

$$A_p X = A_s X + \delta_s + cB \dots\dots\dots (1 \cdot a)$$

ただし、

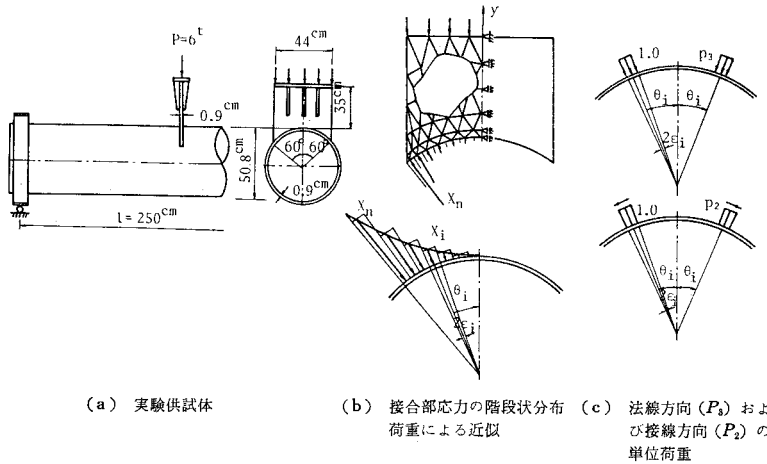


図-2 荷重板と円筒シェルとの接合部応力

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{2n}\}^T \\ \mathbf{B} = \{-\cos \theta_1, \dots, -\cos \theta_n, \sin \theta_1, \dots, \sin \theta_n\}^T \end{cases} \dots\dots\dots (1 \cdot b)$$

ここで、式 (1・a) の左辺は接合部での円筒の変位であり、右辺は接合部での荷重板の変位を表わす。ここで右辺第1項は図-2(b)のように支持された荷重板の接合部における不静定力による変位であり、第2項は荷重板上に載荷荷重による接合部の変位、そして第3項が剛体変位量を表わす。ここで c の値は載荷荷重 P とのつり合いから次式により決定される。

$$\mathbf{H}^T \mathbf{X} = P \dots\dots\dots (2 \cdot a)$$

ただし、

$$\mathbf{H}^T = 4 r_p \{ \sin \varepsilon_1 \cos \theta_1, \dots, \sin \varepsilon_n \cos \theta_n, -\sin \varepsilon_1 \sin \theta_1, \dots, -\sin \varepsilon_n \sin \theta_n \} \dots\dots (2 \cdot b)$$

ここで、 θ_i, ε_i は図-2(b)に示されるように不静定力 X_i の位置および載荷幅である。

式 (1), (2) より \mathbf{X}, c は次のようになる。

$$\begin{cases} \mathbf{X} = (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_s)^{-1} \mathbf{d}_s \\ + c (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_s)^{-1} \mathbf{B}; \\ c = [P - \mathbf{H}^T (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_s)^{-1} \mathbf{d}_s] / [\mathbf{H}^T (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_s)^{-1} \mathbf{B}] \end{cases} \dots\dots\dots (3)$$

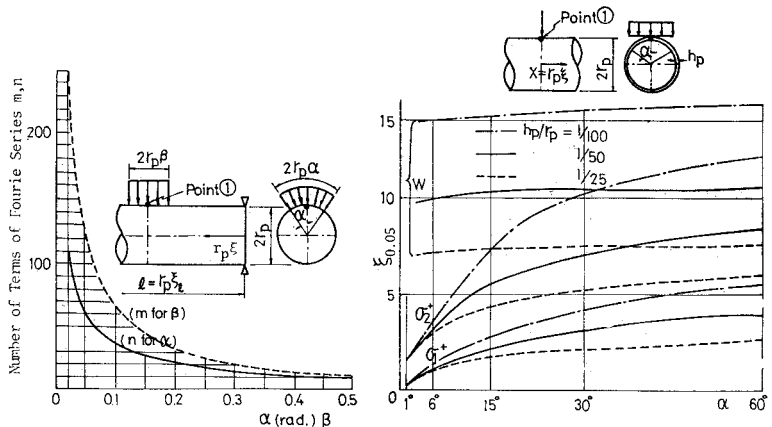
ここで、 $\mathbf{A}_p, \mathbf{A}_s$ は図-2(c)に示される単位荷重による円筒、および荷重板の接合部における変位である。ここで \mathbf{A}_s については図-2(b)に示される支持条件を有する荷重板に対して有限要素法により容易に解が得られる。

\mathbf{A}_p を求めるためには図-2(c)に示される法線方向および接線方向の単位荷重による円筒量を計算する必要がある。ここで円筒の解について浜島¹⁰⁾は、a) はり理論の解、b) 荷重作用点近傍の局所的な応力状態を表わす攪乱応力、c) 境界近傍の応力状態を表わす境界攪乱応力の3つの解の和で表わした。ここで b) の攪乱応力は無限長円筒の解として独自に定められる。図-3(b)は攪乱応力に対応する円筒の変位および応力の円筒軸方向への減衰性を示した

ものであり、 $\xi_{0.05}$ は円筒量 $w(\xi), \sigma(\xi)$ の値が荷重作用線の値 $w(0), \sigma(0)$ の5%にまで減衰するための減衰距離 ξ を示す。いまの場合、 $h_p/r_p \approx 1/28$ であり解析に用いる円筒長は十分長いとして円筒両端の境界の影響を無視することができる。また、いまの場合、はり理論の解については剛体変位量の中に含ませることができるから、結局、図-2(c)で示される法線方向 P_3 、および接線方向 P_2 の単位荷重による、荷重板接合部の法線方向変位 $w(0)$ 、接線方向変位 $u_2(0)$ は、攪乱応力に対する $w^*(0), v_2^*(0)$ のみを計算すればよい。

$$\left. \begin{aligned} w^*(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_{,n}^*(0) \cos n\theta \\ u_2^*(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{2,n}^*(0) \sin n\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $w_{,n}^*(0), u_{2,n}^*(0)$ は次式で与えられる。



(a) 円筒応力が収束するに必要なフーリエ級数項数 (Point ①) における周方向曲げモーメント M_2 に対して、

$$M_2 = \sum_{m,n=0}^{\infty} M_{2,m,n} \sin \frac{m\pi\xi}{\xi_l} \cos n\theta$$

(b) 荷重載荷角度 α の変化による減衰距離 $\xi_{0.05}$ の変化 ($\xi_{0.05} = w(\xi)/w(0), \sigma(\xi)/\sigma(0)$ が 0.05 以下になるのに必要な減衰距離、 w = 法線方向変位、 σ_1^*, σ_2^* = 円筒軸方向および周方向表面応力)

図-3

$n=0, 1$

$$w_{,n}^*(0) = P_{3,1}/R_e(2a_{2,0}), v_{2,n}^*(0) = 0 \dots\dots\dots (5 \cdot a)$$

$n \geq 2$

$$\left\{ \begin{matrix} w_{,n}^*(0) \\ u_{2,n}^*(0) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} R_e \{ \delta_i \beta_i^{-1} \} \left\{ \begin{matrix} P_{2,n} \\ P_{3,n} \end{matrix} \right\} \dots\dots (5 \cdot b)$$

ここで、係数 $a_{2,0}$, δ_i , β_i は文献 10) で与えられている。

$R_e\{\dots\}$ は実数部を表わし、 $P_{2,n}$, $P_{3,n}$ は図-2(c)の線荷重 P_2 , P_3 を周方向にフーリエ展開した係数である。ここでフーリエ級数の必要項数はもっともせまい単位荷重幅により決定される。図-3(a) は円筒量のうちもっとも収束のおそい曲げモーメントについて載荷幅の変化による必要フーリエ級数項を示したものである(前項における計算値との差が 1% になったときに打ち切った)。いまの場合、周方向にのみフーリエ展開しているので項数 n のみを必要とするが、2重フーリエ級数に展開した場合円筒軸方向への荷重載荷幅は荷重板厚となるため軸方向フーリエ級数項 m が著しく大きくなることがわかる。

(2) 計算結果および実験結果

a) 解の収束性

荷重板の要素は三角形要素内でひずみを仮定した適合要素であるので要素分割を細かくすれば荷重板については厳密解に収束する。しかし、円筒をも含めた全体の解析を考える場合、荷重板と円筒との接合部においては荷重板要素の格点においてのみ荷重板と円筒との変位の適合条件が満足されるのみであるので、解が真の値に収束するという保証はない。そこで要素分割を変化させることによる解の収束性を調べこれと実際値と比較する。

図-2(a) は実験供試体であり荷重板接合部近傍にゲージ長 2~5 mm のひずみゲージを貼付して実験を行った。ここで断面の対称位置にゲージを貼付し得られたひずみの平均を実験値とした。

図-4(a)~(d) は接合部の階

段状分布荷重数 n が 3 種類 (A($n=10$), B($n=12$), C($n=13$)) に変化する場合について、接合部における法線方向および接線方向階段状分布荷重、荷重板鉛直方向ひずみ ϵ_y 、および測線②における円筒軸方向表面ひずみ ϵ_1^+ の変化を示したものである。

階段状分布荷重の分布をみた場合、荷重板端部において分布幅を小さくするにつれ、法線方向および接線方向の階段状分布荷重とも、荷重板端部近傍で変動が大きくなっている。しかし、荷重板の鉛直方向ひずみ ϵ_y の分布について荷重板端部近傍を除いて A, B, C はほぼ一致している。また測線②における円筒軸方向ひずみ ϵ_1^+ の分布についても荷重板接合部近傍を除いて A, B, C はほぼ一致している。これより応力集中部の階段状分布荷重分割を細かくしていくことにより正しい解に収束し、荷重板接合部近傍の著しい応力集中をも比較的精度よく解析しうるといえる。次に図-5 は接合部応力を等分布と考えた場合、および荷重板を剛と考えた場合、そして荷重板を弾性板として有限要素解析した場合の接合部における円筒周方向表面ひずみの比較である。これら 3 種類のひずみ分布は大きく異なり、剛板と仮定し

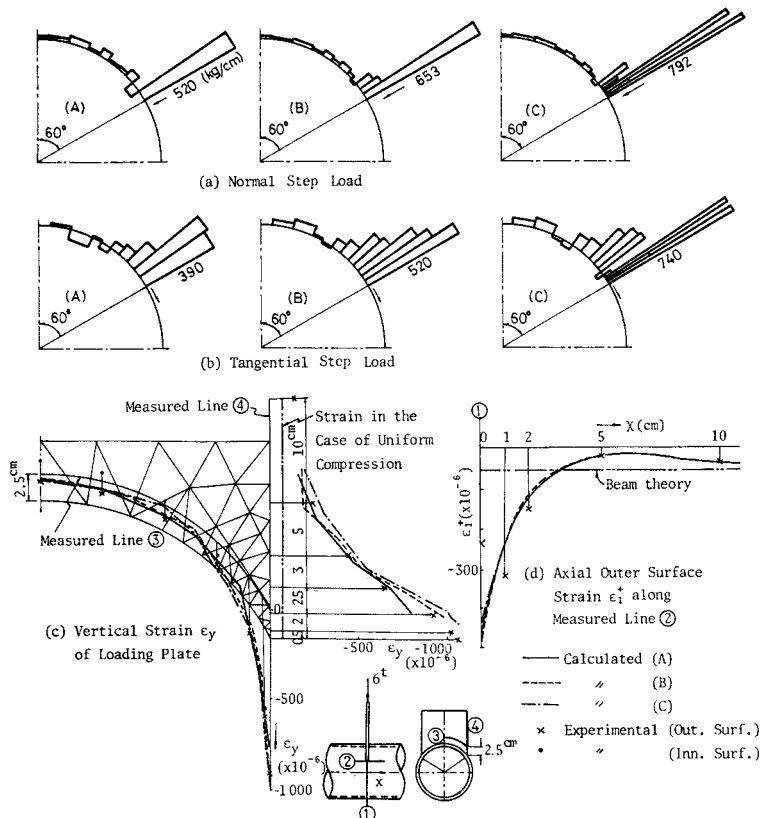


図-4 荷重板の要素分割の変化による解の収束状況

(接合部における階段状分布荷重分割数 n : A($n=10$), B($n=12$), C($n=15$) : c は B($n=12$) の場合に対する荷重板の要素分割)

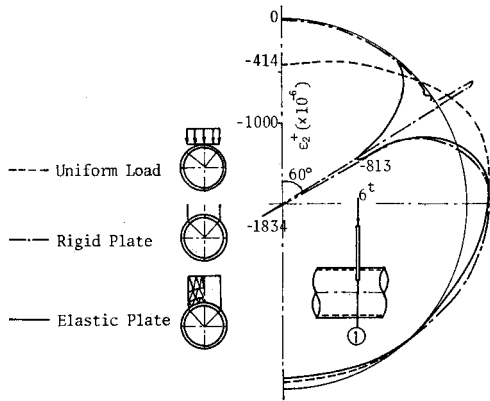
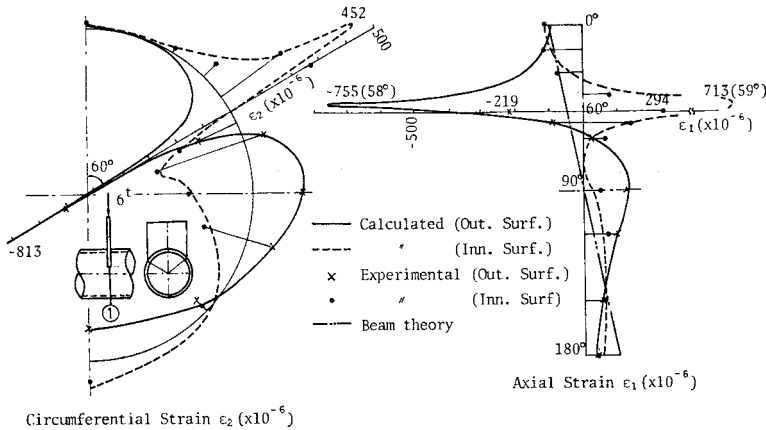


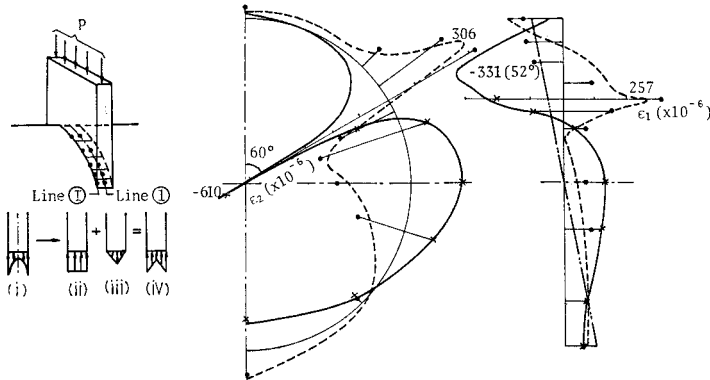
図-5 荷重板接合部応力を等分布とした場合、荷重板を剛とした場合、および荷重板を有限要素解析した場合の円筒周方向応力の比較(測線①)

た場合には荷重板端部に著しい応力集中が生じ、接合部応力を過大評価することになる。

b) 荷重板厚方向の荷重板面内応力分布の変化を考慮した場合



(a) 荷重板厚方向に沿う接合部応力を一様と考えた場合



(b) 荷重板厚方向に沿う応力分布とその近似

(c) 荷重板厚方向に沿う荷重板面内剛性を剛とした場合

図-6 円筒周方向ひずみ ϵ_2 および軸方向ひずみ ϵ_1 (測線①)

図-4(d)における測線②の円筒軸方向表面ひずみをみると荷重板接合部において理論値より実験値がかなり小さくなっていることがわかる。また、図-6(a)の測線①における円筒軸方向ひずみ分布をみると、荷重板端部近傍において理論値は実験値のおよそ2.3倍となっている。これは荷重板と円筒との接合部における荷重板厚方向の荷重板面内応力分布が一様でないことによるものと考えられる。図-4,5および図-6(a)で示される計算結果については荷重板厚方向には図-6(b)(ii)のように一様と仮定している。しかし、実際には荷重板厚方向の応力分布は図-6(b)(i)のような分布をしていると考えられる。そこで図-6(b)(ii)のほかに(iii)で示される荷重状態を加えることにより、(i)で表わされる応力分布を近似する。また図-6(b)に示される測線①と①'では変位が等しいと仮定する。すなわち、荷重板は荷重板厚方向には荷重板面内剛性を無限大と仮定することになる。図-6(c)はこれより得られた結果であり、周方向ひずみ、および軸方向ひずみとも、計算値と実験値は荷重板厚方向の応力分布を一様と仮定した

場合よりはるかによい近似を示し、ひずみ最大点についてもよく一致しているといえる。ただし、厳密には荷重板接合部における円筒軸方向ひずみの値がまだ十分でない。これは荷重板厚方向に荷重板面内剛性を無限大仮定していることおよび荷重板厚方向の階段状分布荷重数が少ないためであり、これに対する検討を行い、さらに荷重板接合部の隅肉溶接の影響を考慮すればいっそう精度のよい結果が得られよう。

3. 荷重板が円筒軸に平行に接合する場合

図-7(a)に示すモデルについて解析を行う。ここで前例と同様に円筒端部の境界撓乱応力の影響を無視する。ただし、たわみの計算においては、はり理論の解を含めて計算する。図-7(b)は測線①における軸方向ひずみおよび円筒周方向ひずみであり、荷重板接合部近傍を除いて計算値と実験値はほぼ一致

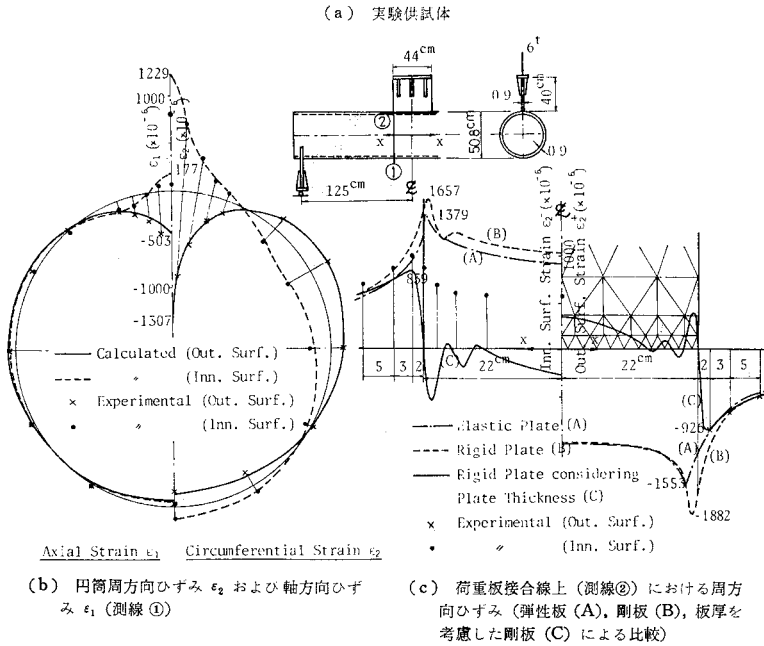


図-7

している。しかし、荷重板接合部において周方向ひずみ ϵ_2 の実験値が計算値よりかなり小さくなっている。これは前の計算値と同様に、荷重板接合部の応力分布を荷重板厚方向に一様であると仮定しているためと考えられる。図-7(c) は荷重板を弾性板として有限要素解析した場合 (A)、および荷重板を剛とした場合 (B)、そして荷重板を剛とし、さらに荷重板厚方向に図-6(b) で示される荷重板面内応力分布を考えた場合 (C) の荷重板接合線上における円筒周方向ひずみの比較である。これを見ると、A に比べ B の方がひずみの最大点で 2 割ほど大きくなるがひずみ分布についてはほぼ一致している。しかし、A、B とも、荷重板接合部において実験値のおよそ 2 倍の値となっている。これに対し C の計算において理論値と実験値を比較すると荷重板端部のひずみ最大位置ではほぼ一致しているが、荷重板接合部においては零に近い値となっている。これは前節の計算例と同様の理由によるものである。

4. ダイアフラムで補強された薄肉円筒シェルの解析

荷重板を介して円筒に荷重が載荷される場合、接合部には著しい応力集中が生ずることがわかった。このため円筒の補強が必要となるが円筒シェルの補強

形式としては周方向リブあるいはダイアフラムによる補強が一般的によく用いられている。しかし、その力学的性状については必ずしもまだ十分に明らかにされているとはいえない。

前節で述べた鋼管継手部の解析をより一般的な鋼管継手部構造の解析に適用するには、図-8 に示されるような任意静荷重の作用を受ける円筒がダイアフラムで補強された場合の薄肉円筒シェルの解析が必要となる。

ここでダイアフラムはその内側境界を補強リングで補強した場合を考えるものとする。

(1) 円筒シェル、ダイアフラム、補強リングの境界量

図-9 において x, y, z は全

体座標系であり、 i, j, k は x, y, z 方向の単位ベクトルである。また、 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 、 $\{e_1^{(d)}, e_2^{(d)}, e_3^{(d)}\}$ および $\{e_1^{(s)}, e_2^{(s)}, e_3^{(s)}\}$ は円筒シェル、ダイアフラム、および補強リングの局所座標系における単位ベクトルであり、それぞれ次の関係にある。

$$\begin{aligned} \{e_1, e_2, e_3\} &= \{-e_3^{(d)}, e_2^{(d)}, e_1^{(d)}\} \\ &= \{e_1^{(s)}, e_2^{(s)}, e_3^{(s)}\} \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

また、 $\{\xi, \theta\}$ 、 $\{\rho, \theta\}$ は円筒シェルの無次元化座標およびダイアフラムの無次元化極座標である。また、 ρ_i, ρ_o はダイアフラムの内側および外側の無次元化された半径

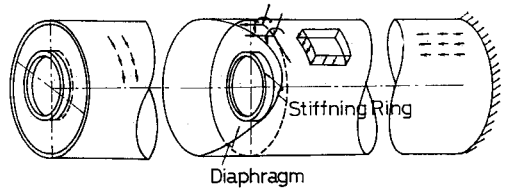


図-8 ダイアフラムで補強された連続薄肉円筒シェル

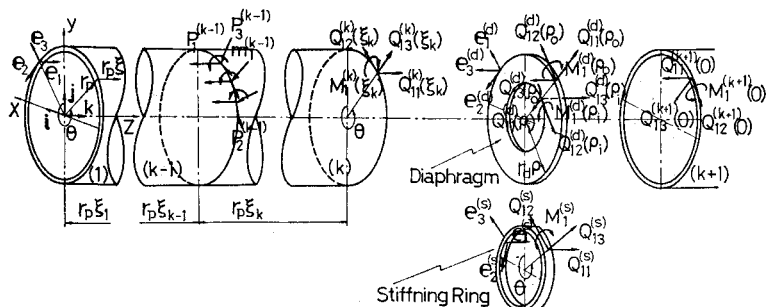
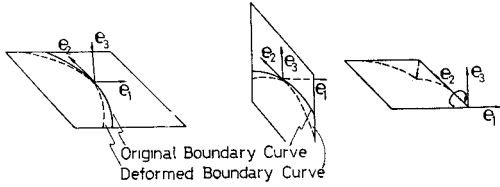


図-9 円筒シェル、ダイアフラム、補強リングの座標系および境界力



(a) 測地曲率の変化 (b) 法曲率の変化 (c) ねじり率の変化
 $(-\kappa_{23}) - \kappa_{23} > 0$ $(\kappa_2) \kappa_2 > 0$ $(\kappa_{21}) \kappa_{21} > 0$

図-10 円筒シェル, ダイアフラム, 補強リングの幾何学的境界量

を示す。次に $\{M_1^{(k)}, Q_{11}^{(k)}, Q_{12}^{(k)}, Q_{13}^{(k)}\}$, $\{M_1^{(d)}, Q_{11}^{(d)}, Q_{12}^{(d)}, Q_{13}^{(d)}\}$ および $\{M_1^{(s)}, Q_{11}^{(s)}, Q_{12}^{(s)}, Q_{13}^{(s)}\}$ は円筒シェル (k), ダイアフラム, および補強リングの θ 座標に沿って作用する境界力である。

また, $P_1^{(k-1)}, P_2^{(k-1)}, P_3^{(k-1)}, m^{(k-1)}$ は (k-1), (k) の円筒シェルの接合部に作用する線荷重である。

図-10 は円筒シェル, ダイアフラム, 補強リングの正の幾何学的境界量を示し, 図-10(a) は e_1e_2 面内の曲率変化, すなわち測地曲率の変化 $(-\kappa_{23})$, 図-10(b), (c) は e_2e_3 面内の法曲率の変化 (κ_2) およびねじり率の変化 (κ_{21}) の正方向を示す。

これらの幾何学的境界量は境界力と同様円筒シェル (k), ダイアフラム および補強リングに対してそれぞれ (k), (d), (s) の上付指標で示す。

(2) 円筒シェルの境界量

図-9 に示される θ 座標に沿う円筒 (k) の境界量は次の複素境界量によって表わされる¹⁰⁾。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tilde{M}_1(\xi, \theta) \\ \tilde{Q}_{11}(\xi, \theta) \\ \tilde{Q}_{12}(\xi, \theta) \\ \tilde{Q}_{13}(\xi, \theta) \end{Bmatrix}_k &= \begin{Bmatrix} M_1(\xi, \theta) + iEh_p c \varepsilon_2(\xi, \theta) \\ Q_{11}(\xi, \theta) - iEh_p c \kappa_2(\xi, \theta) \\ Q_{12}(\xi, \theta) + iEh_p c \kappa_{21}(\xi, \theta) \\ Q_{13}(\xi, \theta) - iEh_p c \kappa_{23}(\xi, \theta) \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} N_\xi(\xi) \\ M_t(\xi) \\ S_b(\xi) \\ i \frac{(2+\nu)}{r_p} c \frac{S_b(\xi)}{r_p \pi} \sin \theta \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{Bmatrix} \tilde{M}_{1,0}^*(\xi) + \tilde{M}_{1,1}^*(\xi) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{M}_{1,n}^*(\xi) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \\ \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{Q}_{11,n}^*(\xi) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \\ \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{Q}_{12,n}^*(\xi) \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} \\ \tilde{Q}_{13,0}^*(\xi) + \tilde{Q}_{13,1}^*(\xi) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{Q}_{13,n}^*(\xi) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{M}_{1,0}^{(c)}(\xi) + \tilde{M}_{1,1}^{(c)}(\xi) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{M}_{1,n}^{(c)}(\xi) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \\ \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{Q}_{11,n}^{(c)}(\xi) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \\ \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{Q}_{12,n}^{(c)}(\xi) \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} \\ \tilde{Q}_{13,0}^{(c)}(\xi) + \tilde{Q}_{13,1}^{(c)}(\xi) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{Q}_{13,n}^{(c)}(\xi) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \end{Bmatrix}_k \end{aligned} \quad (7)$$

ここで, ε_2 は周方向伸びひずみであり, $\kappa_2, \kappa_{21}, \kappa_{23}$ は図-10 に示される幾何学的境界量である。式 (7) の右辺第 1 項は, はり理論に対応する解であり, M_b, S_b, N_ξ, M_t ははりの曲げモーメント, せん断力, 軸力, そしてねじりモーメントである。また, 右辺第 2 項は荷重作用点近傍の局所応力を表わす局所撓乱応力である。そして右辺第 3 項は境界近傍の応力状態を表わす境界撓乱応力であり, 未知積分定数を含んだ形で次式により表わされる。

$n=0, 1$ のとき,

$$\begin{Bmatrix} \tilde{M}_{1,n}^{(c)}(\xi) \\ \tilde{Q}_{13,n}^{(c)}(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} \\ a_{2,0} & -a_{2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\alpha \xi} & 0 \\ 0 & e^{\alpha(\xi_k - \xi)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{A}_n \\ \tilde{B}_n \end{Bmatrix} \quad (8 \cdot a)$$

$n \geq 2$ のとき,

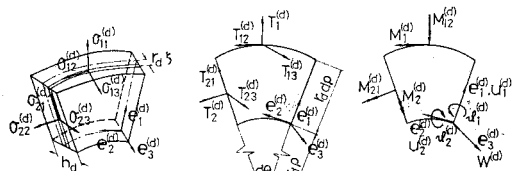
$$\begin{Bmatrix} \tilde{M}_{1,n}^{(c)}(\xi) \\ \tilde{Q}_{11,n}^{(c)}(\xi) \\ \tilde{Q}_{12,n}^{(c)}(\xi) \\ \tilde{Q}_{13,n}^{(c)}(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E(\xi) \\ 0 \\ E(\xi_k - \xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{A}_n \\ \tilde{B}_n \\ \tilde{C}_n \\ \tilde{D}_n \end{Bmatrix} \quad (8 \cdot b)$$

ここで, $a_{1,0}, a_{2,0}, \alpha, \beta, E(\xi), E(\xi_k - \xi)$ は文献 10) により与えられている。

(3) ダイアフラムの境界量

図-11 において $\sigma_{11}^{(d)} \sim \sigma_{23}^{(d)}$ はダイアフラム要素に



(a) ダイアフラム要素に作用する応力 (b) 合応力 (c) モーメントおよび変位, 回転角

図-11

作用する応力成分であり、 $T_1^{(d)} \sim T_{23}^{(d)}$ および $M_1^{(d)} \sim M_{21}^{(d)}$ は合応力 および モーメント成分を表わす。また、 $u_1^{(d)}, u_2^{(d)}, w_0^{(d)}$ および $\theta_1^{(d)}, \theta_2^{(d)}$ はそれぞれ変位成分および回転角成分である。

ダイアフラムについても円筒シェルと同様にシェルの複素基本方程式から以下の複素境界量が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{M}_1^{(d)} &= M_1^{(d)} + iEh_d c_d \varepsilon_2^{(d)} = ic_d \{ \tilde{T}_2^{(d)} \\ &\quad + \nu \delta_m \tilde{T}_1^{(d)} \} \\ \tilde{Q}_{11}^{(d)} &= Q_{11}^{(d)} - iEh_d c_d \kappa_2^{(d)} = \tilde{T}_1^{(d)} \\ \tilde{Q}_{12}^{(d)} &= Q_{12}^{(d)} + iEh_d c_d \kappa_{21}^{(d)} = \tilde{S}^{(d)} \\ \tilde{Q}_{13}^{(d)} &= Q_{13}^{(d)} - iEh_d c_d \kappa_{23}^{(d)} \\ &= \frac{i}{r_d} c_d \left\{ \frac{\partial \tilde{T}_1^{(d)}}{\partial \rho} - \frac{(1-\nu \delta_m)}{\rho} \frac{\partial \tilde{S}^{(d)}}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 $R_e \{ \tilde{M}_1^{(d)} \}, R_e \{ \tilde{Q}_{13}^{(d)} \}$ に対しては $\delta_m = +1$
 $I_m \{ \tilde{M}_1^{(d)} \}, I_m \{ \tilde{Q}_{13}^{(d)} \}$ に対しては $\delta_m = -1$ とする。

ここで、 $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{S}$ は複素力である。

次に境界力のみが作用する場合の円板の複素基本方程式は次式で表わされる¹¹⁾。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \tilde{\Psi} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $\tilde{\Psi}$ は複素応力関数であり複素力と次の関係にある。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}_1^{(d)} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \rho} \\ \tilde{T}_2^{(d)} &= \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \rho^2}, \tilde{S}^{(d)} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここで $\tilde{\Psi}$ に対して $\rho^{\frac{\cos n\theta}{\sin n\theta}}$ の形の解を仮定すれば、式 (10) より次の同次解が得られる。

$$\begin{aligned} \Psi(\rho, \theta) &= \tilde{A}_0^{(d)} \rho^2 + \tilde{B}_0^{(d)} \ln \rho + \tilde{C}_0^{(d)} \rho^2 \ln \rho \\ &\quad + \tilde{D}_0^{(d)} + \{ \tilde{a}_0^{(d)} \rho^2 + \tilde{b}_0^{(d)} \ln \rho + \tilde{c}_0 \rho^2 \ln \rho \\ &\quad + \tilde{d}_0^{(d)} \} \theta + \{ \tilde{A}_1^{(d)} \rho^{-1} + \tilde{B}_1^{(d)} \rho^3 \\ &\quad + \tilde{C}_1^{(d)} \rho + \tilde{D}_1^{(d)} \rho \ln \rho \} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &\quad + \{ \tilde{a}_1^{(d)} \rho + \tilde{b}_1^{(d)} \rho \ln \rho \} \frac{\theta \sin \theta}{\theta \cos \theta} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \{ \tilde{A}_n^{(d)} \rho^n + \tilde{B}_n^{(d)} \rho^{n+2} + \tilde{C}_n^{(d)} \rho^{-n} \\ &\quad + \tilde{D}_n^{(d)} \rho^{-n+2} \} \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここで、 $\tilde{A}_0^{(d)} \sim \tilde{D}_n^{(d)}$ は複素積分定数であり、実数部を $A_0^{(d)} \sim D_n^{(d)}$ 、虚数部を $\tilde{A}_0^{(d)} \sim \tilde{D}_n^{(d)}$ で表わす。この積分定数のうち複素力 $\tilde{T}_1^{(d)}, \tilde{T}_2^{(d)}, \tilde{S}^{(d)}$ の一価性から、

$$\tilde{a}_0^{(d)} = \tilde{b}_0^{(d)} = \tilde{c}_0^{(d)} = \tilde{d}_1^{(d)} = 0 \dots\dots\dots (13 \cdot a)$$

そして、境界力の自己つり合い条件から、

$$a_1^{(d)} = d_0^{(d)} = \tilde{C}_0^{(d)} = \tilde{D}_1^{(d)} = 0 \dots\dots\dots (13 \cdot b)$$

変位 $u_1^{(d)}, u_2^{(d)}, w_0^{(d)}$ および回転角 $\theta_1^{(d)}, \theta_2^{(d)}$ の一

価性から、

$$\left. \begin{aligned} C_0^{(d)} &= 0, D_1^{(d)} = \mp (1-\nu) a_1^{(d)}/2 \\ \tilde{a}_1^{(d)} &= \pm \tilde{D}_1^{(d)}/2, \tilde{d}_0^{(d)} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (13 \cdot c)$$

さらに、応力および変位に無関係な積分定数を零とおくことから、

$$\tilde{C}_1^{(d)} = \tilde{D}_0^{(d)} = 0 \dots\dots\dots (13 \cdot d)$$

これより、式 (12) の下線項はすべて零となる。

式 (9), (11), (12) より複素境界量は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} n=0, 1 \text{ の場合,} \\ \left\{ \begin{aligned} \tilde{M}_{1,n}(\rho) \\ \tilde{Q}_{11,n}(\rho) \end{aligned} \right\}_{(d)} &= \begin{bmatrix} d_{11,n} & d_{12,n} \\ d_{41,n} & d_{42,n} \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} \tilde{A}_n \\ \tilde{B}_n \end{aligned} \right\}_{(d)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14 \cdot a)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} d_{11,0} &= 2 ic_d (1 + \nu \delta_m), & d_{12,0} &= -ic_d (1 - \nu \delta_m) \rho^{-2} \\ d_{41,0} &= 2, & d_{42,0} &= \rho^{-2} \\ d_{11,1} &= 2 ic_d (1 - \nu \delta_m) \rho^{-3}, & d_{12,1} &= 2 ic_d (3 + \nu \delta_m) \rho \\ d_{41,1} &= -2 \rho^{-3}, & d_{42,1} &= 2 \rho \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14 \cdot b)$$

$n \geq 2$ の場合、

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{M}_{1,n}(\rho) \\ -\tilde{Q}_{13,n}(\rho) \\ \tilde{Q}_{12,n}(\rho) \\ \tilde{Q}_{11,n}(\rho) \end{aligned} \right\}_{(d)} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} \tilde{A}_n \\ \tilde{B}_n \\ \tilde{C}_n \\ \tilde{D}_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14 \cdot c)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{11} &= ic_d (1 - \nu \delta_m) n(n-1) \rho^{n-2}, \\ d_{12} &= ic_d (n+1) \{ n+2 - \nu \delta_m (n-2) \} \rho^n \\ d_{13} &= ic_d n(n+1) (1 - \nu \delta_m) \rho^{-(n+2)}, \\ d_{14} &= ic_d (n-1) \{ n-2 - \nu \delta_m (n+2) \} \rho^{-n} \\ d_{21} &= ic_d n^2 (n-1) (1 - \nu \delta_m) \rho^{n-3} / r_d \\ d_{22} &= ic_d n(n+1) (n-4 - \nu \delta_m n) \rho^{n-1} / r_d \\ d_{23} &= -ic_d (1 - \nu \delta_m) n^2 (n+1) \rho^{-(n+3)} / r_d \\ d_{24} &= -ic_d n(n-1) (n+4 - \nu \delta_m n) \rho^{-(n+1)} / r_d \\ d_{31} &= \delta n(n-1) \rho^{(n+2)}, & d_{32} &= \delta n(n+1) \rho^{-(n+2)} \\ d_{33} &= -\delta n(n+1) \rho^{-(n+2)}, & d_{34} &= -\delta n(n-1) \rho^{-n} \\ d_{41} &= -n(n-1) \rho^{n-2}, & d_{42} &= -(n+1)(n-2) \rho^n \\ d_{43} &= -n(n+1) \rho^{-(n+2)}, & d_{44} &= -(n-1)(n+2) \rho^{-n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14 \cdot d)$$

ただし、 y 軸に対し対称荷重のとき $\delta = +1$ 、逆対称のとき $\delta = -1$ である。

式 (14) において $n=0$ のとき、 $Q_{13,0} = Q_{12,0} = 0$ であるが、 $Q_{13,1}, Q_{12,1}$ については境界力の自己つり合い条件より $M_{1,1}, Q_{11,1}$ から決定される値であり独立な境界量ではない。

(4) 補強リングの境界量

補強リングに対する局所座標系の直交単位ベクトル $e_1^{(s)}, e_2^{(s)}, e_3^{(s)}$ は図-9 に示されるように円筒シェル

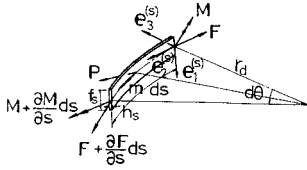


図-12 補強リング要素

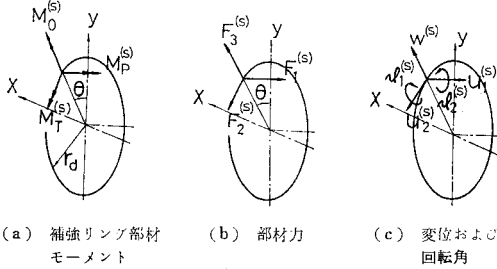


図-13

と同じ方向にとられる。これより、図-13(c) に示される変位 $u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, w^{(s)}$ に対しても円筒シェルと同じ方向が正となる。ここで補強リングは幅 f_s 、厚さ h_s の薄い曲り棒として取り扱われ、すべての量は補強リングの中心線と与えられ、 $\vartheta_1^{(s)}, \vartheta_2^{(s)}$ は棒のねじり角および回転角を表す。

図-12 に示される P, m は補強リングの θ 座標に沿って単位長さ当りに作用する荷重であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} P &= P_1^{(s)} e_1^{(s)} + P_2^{(s)} e_2^{(s)} + P_3^{(s)} e_3^{(s)} \\ m &= m_2^{(s)} e_2^{(s)} \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

また、 F および M は部材力および部材モーメントであり、

$$\left. \begin{aligned} F &= F_1^{(s)} e_1^{(s)} + F_2^{(s)} e_2^{(s)} + F_3^{(s)} e_3^{(s)} \\ M &= M_P^{(s)} e_1^{(s)} + M_T^{(s)} e_2^{(s)} + M_0^{(s)} e_3^{(s)} \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

で表わされる。

ここで 図-12 に示される要素のつり合い式は次式で与えられる¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s} + P &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial s} + m + [r, P] + \frac{\partial}{\partial s} [r, F] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

ただし、 $r = r_d e_1^{(s)}$ であり、 $[r, P], [r, F]$ はベクトル外積である。これより面内荷重 ($P_2^{(s)}, P_3^{(s)}$) が作用する場合、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_1^{(s)}}{\partial \theta} + r_d F_3^{(s)} &= 0, \\ \frac{\partial F_2^{(s)}}{\partial \theta} + F_3^{(s)} &= -r_d P_2^{(s)} \\ \frac{\partial F_3^{(s)}}{\partial \theta} - F_2^{(s)} &= -r_d P_3^{(s)} \end{aligned} \right\} \dots (18 \cdot a)$$

また、面外荷重 ($P_1^{(s)}, m_2^{(s)}$) が作用する場合、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_1^{(s)}}{\partial \theta} &= -r_d P_1^{(s)} \\ \frac{\partial M_2^{(s)}}{\partial \theta} + M_3^{(s)} &= -r_d m_2^{(s)} \\ \frac{\partial M_3^{(s)}}{\partial \theta} - M_2^{(s)} &= -r_d F_1^{(s)} \end{aligned} \right\} \dots (18 \cdot b)$$

が得られる。

また、ひずみ変位関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2^{(s)} &= \frac{1}{r_d} \left\{ \frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial \theta} + w^{(s)} \right\} \\ \kappa_2^{(s)} &= \frac{1}{r_d} \frac{\partial \vartheta_2^{(s)}}{\partial \theta} \\ \kappa_{21}^{(s)} &= \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \vartheta_1^{(s)} - \frac{u_1^{(s)}}{r_d} \right\} \\ -\kappa_{23}^{(s)} &= -\frac{1}{r_d} \left\{ \vartheta_1^{(s)} + \frac{1}{r_d} \frac{\partial^2 u_1^{(s)}}{\partial \theta^2} \right\} \\ \theta_2^{(s)} &= \frac{1}{r_d} \left\{ \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \theta} + u_2^{(s)} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

また、ひずみと部材力の関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{F_2^{(s)}}{EA_s}, \quad \kappa_2^{(s)} = -\frac{M_P^{(s)}}{EI_1} \\ \kappa_{21}^{(s)} &= \frac{M_T^{(s)}}{GJ_t}, \quad -\kappa_{23}^{(s)} = \frac{M_0^{(s)}}{EI_3} \end{aligned} \right\} \dots (20 \cdot a)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} A_s &= h_s f_s, \quad I_1 = f_s h_s^3 / 12, \\ J_t &= f_s h_s^3 / 3, \quad I_3 = h_s f_s^3 / 12 \end{aligned} \right\} \dots (20 \cdot b)$$

ここで補強リング諸量を以下のようにフーリエ展開する。

$$\left. \begin{aligned} F_2^{(s)}, M_P^{(s)}, M_0^{(s)}, u_1^{(s)}, w^{(s)}, \vartheta_1^{(s)}, \\ P_1^{(s)}, P_3^{(s)}, m_3^{(s)} \dots \dots \dots \sum \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \\ F_1^{(s)}, F_3^{(s)}, M_T^{(s)}, u_2^{(s)}, \vartheta_2^{(s)}, P_2^{(s)} \dots \dots \sum \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

次に補強リングの複素境界量を以下のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{M}_1^{(s)} &= \sum (M_{1,n}^{(s)} - iE\varepsilon_{2,n}^{(s)}) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \\ \tilde{Q}_{11}^{(s)} &= \sum (Q_{11,n}^{(s)} - iE\kappa_{2,n}^{(s)}) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \\ \tilde{Q}_{12}^{(s)} &= \sum (Q_{12,n}^{(s)} + iE\kappa_{21,n}^{(s)}) \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} \\ \tilde{Q}_{13}^{(s)} &= \sum (Q_{13,n}^{(s)} - iE\kappa_{23,n}^{(s)}) \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

ただし、 $\{M_1^{(s)}, Q_{11}^{(s)}, Q_{12}^{(s)}, Q_{13}^{(s)}\}$ は次式で与えられる量である。

$$\left. \begin{aligned} \{M_{1,n}^{(s)}, Q_{11,n}^{(s)}, Q_{12,n}^{(s)}, Q_{13,n}^{(s)}\} \\ = \{m_{2,n}^{(s)}, P_{1,n}^{(s)}, P_{2,n}^{(s)}, P_{3,n}^{(s)}\} \dots (23) \end{aligned} \right\}$$

式 (18)~(22) および部材力 $F_1^{(s)}, F_2^{(s)}, F_3^{(s)}$ および部材モーメント $M_1^{(s)}, M_2^{(s)}, M_3^{(s)}$ の一価性、さらに変位 $u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, w^{(s)}$ および回転角 $\vartheta_1^{(s)}, \vartheta_2^{(s)}$ の一価性を考慮することにより補強リングの複素境界量は次

のようになる¹¹⁾。

$n=0, 1$ の場合,

$$\left. \begin{aligned} s_{11,0}=1, s_{12,0}=ir_d/A_s, s_{41,0}=-ir_d/I_3, s_{42,0}=1 \\ s_{11,1}=1, s_{12,1}=ir_d/A_s, s_{41,1}=-ir_d\alpha^*/[I_3(1+\alpha^*)], s_{42,1}=1 \\ \alpha^*=EI_l/(GJ_t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24 \cdot b)$$

$n > 2$ の場合,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{1,n}^{(s)} \\ \tilde{Q}_{11,n}^{(s)} \\ \tilde{Q}_{12,n}^{(s)} \\ \tilde{Q}_{13,n}^{(s)} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \frac{r_d}{A_s} \frac{\delta n}{n^2-1} & -i \frac{r_d}{A_s} \frac{1}{n^2-1} \\ 0 & 1 & i \frac{r_d^2}{I_1} \frac{\delta}{n(n^2-1)} & -i \frac{r_d^2}{I_1} \frac{1}{n^2-1} \\ -i \frac{\alpha^*}{I_1} r_d \frac{\delta n}{n^2-1} & -i \frac{\alpha^*}{I_1} r_d^2 \frac{\delta}{n(n-1)} & 1 & 0 \\ i \frac{r_d}{I_3} \frac{1}{n^2-1} & i \frac{r_d^2}{I_3} \frac{1}{n^2-1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} m_{2,n}^{(s)} \\ P_{1,n}^{(s)} \\ P_{2,n}^{(s)} \\ P_{3,n}^{(s)} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (24 \cdot c)$$

(5) 接合条件

円筒シェル, ダイアフラムおよび補強リングの複素境界量は式 (7), (14), (24) で与えられる. いま, これらの複素境界量および接合線上に作用する荷重を次のようにベクトル表示する.

円筒シェル要素 (k):

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1^{(k)}(\xi, \theta) \\ \tilde{Q}_1^{(k)}(\xi, \theta) = \tilde{Q}_{11}^{(k)}(\xi, \theta) \mathbf{e}_1 + \tilde{Q}_{12}^{(k)}(\xi, \theta) \mathbf{e}_2 \\ + \tilde{Q}_{13}^{(k)}(\xi, \theta) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

ダイアフラム:

$$\begin{aligned} M_1^{(d)}(\rho, \theta) \\ \tilde{Q}_1^{(d)}(\rho, \theta) = \tilde{Q}_{11}^{(d)}(\rho, \theta) \mathbf{e}_1^{(d)} + \tilde{Q}_{12}^{(d)}(\rho, \theta) \mathbf{e}_2^{(d)} \\ + \tilde{Q}_{13}^{(d)}(\rho, \theta) \mathbf{e}_3^{(d)} \end{aligned}$$

補強リング:

$$\begin{aligned} M_1^{(s)}(\theta) \\ \tilde{Q}_1^{(s)}(\theta) = \tilde{Q}_{11}^{(s)}(\theta) \mathbf{e}_1^{(s)} + \tilde{Q}_{12}^{(s)}(\theta) \mathbf{e}_2^{(s)} \\ + \tilde{Q}_{13}^{(s)}(\theta) \mathbf{e}_3^{(s)} \end{aligned}$$

荷重:

$$\begin{aligned} m_1^{(k)}(\theta) \\ \mathbf{P}_1^{(k)}(\theta) = -(P_1^{(k)} \mathbf{e}_1 + P_2^{(k)} \mathbf{e}_2 + P_3^{(k)} \mathbf{e}_3) \end{aligned} \dots\dots\dots (25)$$

ここで, $\tilde{Q}_1^{(k)}, \tilde{Q}_1^{(d)}, \tilde{Q}_1^{(s)}$ は円筒シェル (k), ダイアフラム, 補強リングの複素境界力ベクトルであり, $\mathbf{P}^{(k)}$ は荷重ベクトルである. 上式と式 (6) の関係を考慮すれば円筒とダイアフラム, およびダイアフラムと補強リングの間の接合条件式は以下のようになる.

$n \geq 2$ の場合,

力のつり合い条件式

$\rho = \rho_0$ において,

$$R_e \left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{1,n}(0) \\ \tilde{Q}_{11,n}(0) \\ \tilde{Q}_{12,n}(0) \\ \tilde{Q}_{13,n}(0) \end{array} \right\}_{(k+1)} - \left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{1,n}(\xi_k) \\ \tilde{Q}_{11,n}(\xi_k) \\ \tilde{Q}_{12,n}(\xi_k) \\ \tilde{Q}_{13,n}(\xi_k) \end{array} \right\}_{(k)}$$

ただし,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{1,n}^{(s)} \\ \tilde{Q}_{13,n}^{(s)} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} s_{11,n} & s_{12,n} \\ s_{41,n} & s_{42,n} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} m_{2,n}^{(s)} \\ P_{3,n}^{(s)} \end{array} \right\} \dots (24 \cdot a)$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{1,n}(\rho_0) \\ -\tilde{Q}_{13,n}(\rho_0) \\ \tilde{Q}_{12,n}(\rho_0) \\ \tilde{Q}_{11,n}(\rho_0) \end{array} \right\}_{(d)} = \left\{ \begin{array}{l} m_{1,n} \\ P_{1,n} \\ P_{2,n} \\ P_{3,n} \end{array} \right\}_{(k)} \dots\dots\dots (26 \cdot a)$$

$\rho = \rho_i$ において,

$$R_e \left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{1,n} \\ \tilde{Q}_{11,n} \\ \tilde{Q}_{12,n} \\ \tilde{Q}_{13,n} \end{array} \right\}_{(s)} - \left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{1,n}(\rho_i) \\ -\tilde{Q}_{13,n}(\rho_i) \\ \tilde{Q}_{12,n}(\rho_i) \\ \tilde{Q}_{11,n}(\rho_i) \end{array} \right\}_{(d)} = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots\dots\dots (26 \cdot b)$$

変形の連続条件式

$\rho = \rho_0$ において,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_{k+c}c_{k+1}} I_m \left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{1,n}(0) \\ \tilde{Q}_{11,n}(0) \\ \tilde{Q}_{12,n}(0) \\ \tilde{Q}_{13,n}(0) \end{array} \right\}_{(k+1)} &= \frac{1}{h_k c_k} I_m \left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{1,n}(\xi_k) \\ \tilde{Q}_{11,n}(\xi_k) \\ \tilde{Q}_{12,n}(\xi_k) \\ \tilde{Q}_{13,n}(\xi_k) \end{array} \right\}_{(k)} \\ &= \frac{1}{h_d c_d} I_m \left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{1,n}(\rho_0) \\ -\tilde{Q}_{13,n}(\rho_0) \\ \tilde{Q}_{12,n}(\rho_0) \\ \tilde{Q}_{11,n}(\rho_0) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (27 \cdot a) \end{aligned}$$

$\rho = \rho_i$ において,

$$I_m \left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{1,n} \\ \tilde{Q}_{11,n} \\ \tilde{Q}_{12,n} \\ \tilde{Q}_{13,n} \end{array} \right\}_{(s)} = \frac{1}{h_d c_d} I_m \left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{1,n} \\ -\tilde{Q}_{13,n} \\ \tilde{Q}_{12,n} \\ \tilde{Q}_{11,n} \end{array} \right\}_{(d)} \dots\dots\dots (27 \cdot b)$$

$n=0, 1$ の場合には, 力のつり合い条件式, 変形の連続条件式において式 (26), (27) の第 1 行目と第 4 行目のみが有効となる. ここで注意すべきことは $n=1$ の場合円筒シェル, ダイアフラム, 補強リングの境界力 $R_e\{\tilde{Q}_{11,1}\} = Q_{11,1}$, $R_e\{\tilde{Q}_{12,1}\} = Q_{12,1}$ は零ではなく, これらは境界力 $M_{1,1}$ および $Q_{13,1}$ から自己つり合い条件により決定される量である. Flügge⁸⁾ は補強リングの

解析において、 $n=1$ の荷重状態は自己つり合い荷重でないとして、 $n=1$ の項を無視して解析を行っているが、補強円筒シェルの解析において、こうした $n=1$ の項による局所応力状態を無視することはできない。

(6) 計算例

図-14(a) に示される荷重状態の場合を考える。

この場合、ダイアフラムは面内応力状態である。また、ダイアフラムの左側の円筒要素 (1) および右側の円筒要素 (2) の応力状態は対称となる。また、式 (7) で示される円筒の複素境界量のうち右辺第 2 項の局所撓乱応力の項は零である。また、右辺第 1 項のはり理論に対応する解の影響も円筒シェルが長くない場合は無視しうる。

これより、いまの場合、円筒の境界量としては式 (7) の右辺第 3 項の境界撓乱応力のみを考えればよい。ただし、円筒シェル要素 (2) は右側境界の影響が無視しうる程度の長さを有するとする。

これより、円筒シェル (2)、ダイアフラム、および補強リングに対する未知積分定数は、

$$\left. \begin{array}{l} n=0 \quad n=1 \quad n \geq 2 \\ \text{円筒シェル (2): } \{ \tilde{A}_0 \}_{(2)} \quad \{ \tilde{A}_1 \}_{(2)} \quad \{ \tilde{A}_n, \tilde{B}_n \}_{(2)} \\ \text{ダイアフラム: } \{ \tilde{A}_0 \}_{(d)} \quad \{ \tilde{A}_1 \}_{(d)} \quad \{ \tilde{A}_n, \tilde{B}_n \}_{(d)} \\ \text{補強リング: } \{ P_{3,0} \}_{(s)} \quad \{ P_{3,1} \}_{(s)} \quad \{ P_{2,n}, P_{3,n} \}_{(s)} \end{array} \right\} \dots (28)$$

これより、実積分定数の数でいえば $n=0$ および $n=1$ についてはそれぞれ 5 個、 $n \geq 2$ については 10 個である。これらの積分定数は次の接合条件から決定される。

$n \geq 2$ に対して、

円筒シェルの対称条件

① $\kappa_{21,n}^{(2)}(0) = 0$

② $\kappa_{23,n}^{(2)}(0) = 0$

力のつり合い条件

$\rho = \rho_0$ において

③ $2Q_{12,n}^{(2)}(0) - Q_{12,n}^{(d)}(\rho_0) = P_{2,n}^{(2)}$

④ $2Q_{13,n}^{(2)}(0) - Q_{11,n}^{(d)}(\rho_0) = P_{3,n}^{(2)}$

$\rho = \rho_i$ において

⑤ $Q_{12,n}^{(s)} - Q_{12,n}^{(d)}(\rho_i) = 0$

⑥ $Q_{13,n}^{(s)} - Q_{11,n}^{(d)}(\rho_i) = 0$

変形の連続条件

$\rho = \rho_0$ において

⑦ $\varepsilon_{2,n}^{(2)}(0) - \varepsilon_{2,n}^{(d)}(\rho_0) = 0$

⑧ $\kappa_{2,n}^{(2)}(0) - \{ -\kappa_{23,n}^{(d)}(\rho_0) \} = 0$

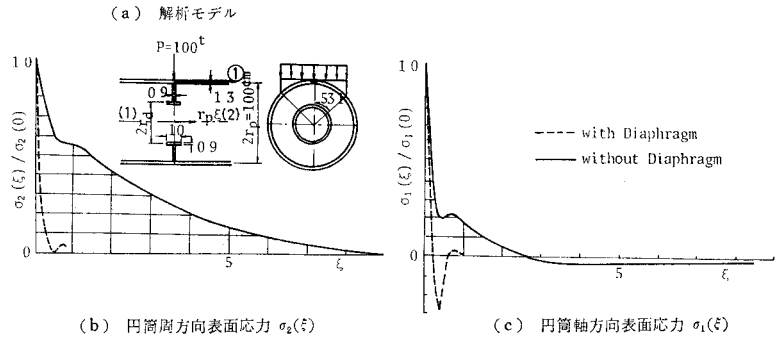
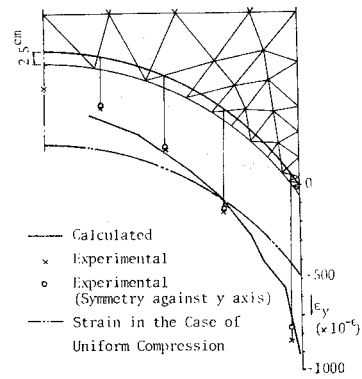
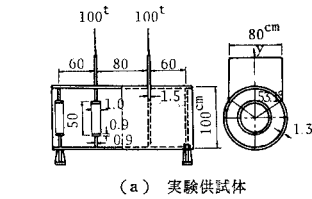
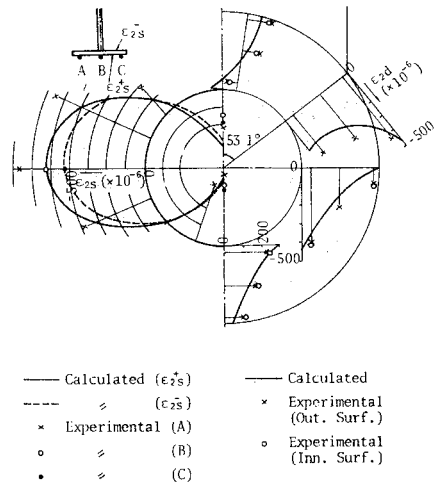


図-14 円筒軸に沿う円筒応力の減衰 (測線①)



(b) 荷重板鉛直方向ひずみ ε_y



(c) 補強リング周方向ひずみ ε_{2s} (d) ダイアフラム周方向ひずみ ε_{2d}

図-15

$$\rho = \rho_i \text{ において}$$

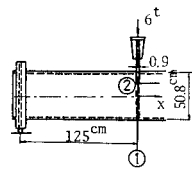
$$\textcircled{9} \quad \varepsilon_{2,n}^{(s)} - \varepsilon_{2,n}^{(d)}(\rho_i) = 0$$

$$\textcircled{10} \quad \varepsilon_{2,n}^{(s)} - \{-\varepsilon_{23,n}^{(d)}(\rho_i)\} = 0$$

..... (29)

$n=0, 1$ に対しては、式 (29) のうち ②, ④, ⑥, ⑦, ⑨ のみとなる。

図-14(b), (c) はそれぞれ円筒周方向応力および軸方向応力の円筒軸方向への減衰状況を示している。これより、ダイアフラムで補強されていない場合の減衰に比べダイアフラムで補強された場合の減衰が著しく早く円筒半径のほぼ半分で減衰していることがわかる。



(a) 実験供試体

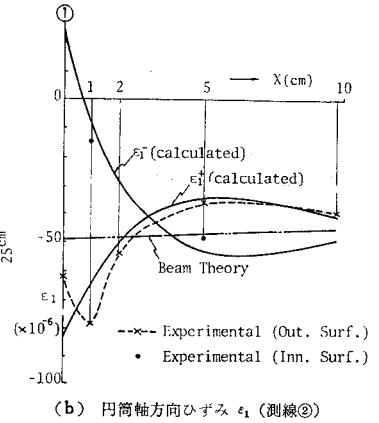


図-16

5. ダイアフラムで補強された場合の鋼管継手部の解析

図-15 は円筒軸方向に直角に荷重板が接合する場合の補強円筒シェルの実験および解析結果である。

ここで 図-15(a) は実験に使用した供試体である。ここで、荷重板接合部および両端の支承部はダイアフラムで補強されており、図-14 の計算結果から荷重板接合部および両端支承部の応力状態は互いに影響を及ぼし合わない距離にあるといえる。このことから計算に際しては 図-15(a) のモデルを 図-14(a) のようにモデル化して考えることができよう。

また、はり理論に対応する解の影響についてもいまの場合、円筒長が短かいので、この影響を無視する。

図-15(b)~(d) はそれぞれ荷重板の鉛直方向ひずみ、補強リングの周方向ひずみおよびダイアフラムの周方向ひずみに対する実験値と理論値との比較であり、ほぼ良好な一致を示している。

図-16(b) は 図-16(a) の供試体について行った測線 ② に沿う円筒軸方向ひずみの計算値と実験値との比較である。ここでダイアフラムのない場合の 図-4(d) の場合と同様荷重板接合部において実験値が落ち込んでいる。しかし、ダイアフラムのない場合には荷重板接合部で計算が実験値に比し著しく大きくなるのに比べ、ダイアフラムで補強された場合、荷重板接合部の計算値は実験値の最大値 ($x=1\text{ cm}$ の場所での値) とほぼ同じ大きさとなっている。これより、ダイアフラムで補強された場合には、荷重板厚方向への応力分布の変化を無視して解析を行っても、それほど大きな誤差は生じないといえよう。

図-17 は荷重板から円筒に伝達される応力分布を一樣と考えた場合と荷重板を接合した状態で解析した場合についてダイアフラムの補強効果を示したものである。

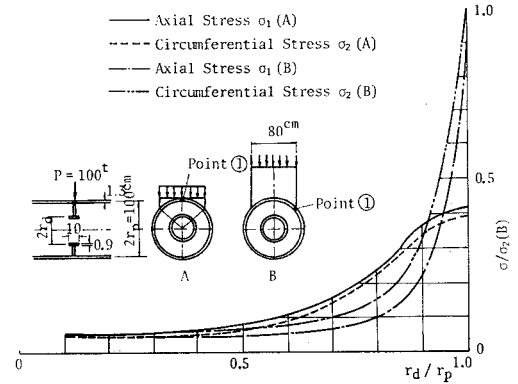
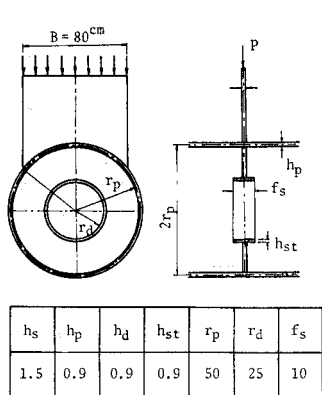


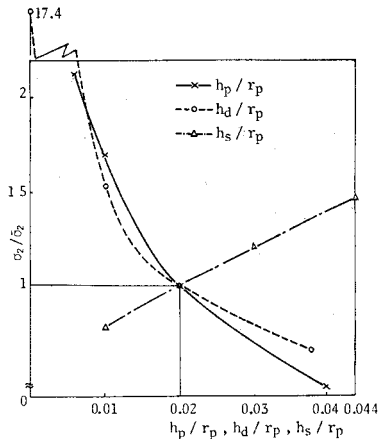
図-17 ダイアフラム穴の大きさの変化による円筒応力の変化

これより、ダイアフラム穴が大きくなるに従い両者の差が著しく大となることがわかる。

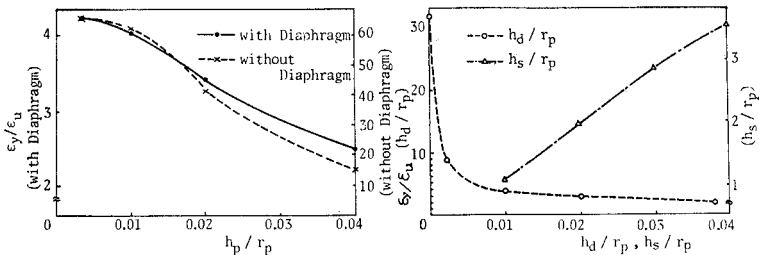
図-18 は円筒厚 (h_p)、ダイアフラム厚 (h_d)、荷重板厚 (h_s) を変化させた場合の円筒周方向応力、および荷重板鉛直方向ひずみの変化を示す。図-18(a) は標準断面を示しており、図-18(b) はそのうち h_p, h_d, h_s のみが変化した場合の円筒周方向応力の変化を示している。また、図-18(c) はダイアフラムのある場合とない場合において h_p が変化した場合の荷重板鉛直方向ひずみ ε_y であり、図-18(d) は h_d, h_s の変化による ε_y の変化を示している。これより円筒厚およびダイアフラム厚を小さくし逆に荷重板厚を増加することにより荷重板端部に応力が集中し円筒および荷重板の応力集中が増加することがわかる。図-18(c) で示されるようにダイアフラムで補強された場合 $h_p/r_p=1/100$ のときの荷重板の鉛直方向ひずみの集中率 (一樣圧縮の場合の鉛直方向ひずみを 1 として) は約 4 倍であるがダイアフラムによる補強がない場合その集中率は 60 倍の大きさに増加している。このように、こうした鋼管継手部において適切な補



(a) 標準断面寸法



(b) 円筒周方向応力 ($\sigma_z = h_p/r_p, h_d/r_p, h_s/r_p$ が 0.02 のときの σ_z)



(c) (d)
荷重板鉛直方向ひずみ ($\epsilon_u = P/(Bh_sE)$, E =ヤング係数)

図一八 円筒厚, ダイアフラム厚, 荷重板厚の変化による円筒周方向応力 σ_z 荷重板鉛直方向ひずみ ϵ_y の絶対最大値の変化

荷重板が重要なことを示している。

6. 結 語

荷重板と薄肉円筒シェルが接合する鋼管継手部の基本構造について有限要素解(荷重板)と解析解(円筒シェル)の接合問題としての解析を行い次の結果を得た。

(1) 荷重板と円筒との接合部応力はダイアフラムの補強がない場合, 荷重板端部に集中する形となる。その集中の度合は荷重板と円筒との剛度の比により著しく異なり, 荷重板を厚くするほど, また, 円筒厚を薄くするほど大となる。これにより荷重板の応力集中は荷重板を一樣圧縮と考えた場合の数 10 倍にも達しうる。ただし, ダイアフラムの補強により応力集中の度合は数倍以下にまで緩和される。

(2) 本解析法では荷重板を有限要素解として解析しているが, 平面応力状態としての適合要素を用いており, こうした高い応力集中についても精度のよい解を得た。また, 荷重板接合部の荷重板厚方向応力分布が円筒応力に影響を及ぼしており, ダイアフラムの補強がない

場合, その影響が特に大きいといえる。これに対しては荷重板厚方向に荷重板面内剛性を無限大と仮定した解析を行った。ただし, 荷重板厚方向の階段状分布荷重数も少なく接合部近傍の円筒の応力状態を完全には表わしていない。しかし, 応力集中の最大点については計算値と理論値は比較的よい一致を示している。

(3) 円筒がダイアフラムで補強された場合, 円筒軸方向への応力の減衰はダイアフラムで補強されない場合に比べて著しく早い。円筒シェルに対しては, 局所的な応力状態を分離した形で解析しているため, ダイアフラム接合部のみを取り出した解析が可能であり, 円筒の境界条件, あるいはほかのダイアフラムの影響もすべて含めた解析を行う必要はない。ただし, 円筒長が比較的大きい場合には, 接合条件の中に, はり理論に対応する解から生ずる変形を加味する必要が生ずる。

参 考 文 献

- 1) 荒井利一郎: 節付き円筒体の応力, 変形, 振動性状に関する力学およびその弾性領域内柱体的座屈の計算法について, 土木学会論文報告集, 第 84 号, pp. 29~70, 1962.8.
- 2) 鶴戸口英善・加納 巖: 円筒殻の局所荷重による応力と変形について, 高圧力, Vol. 9, No. 1, pp. 7~27, 1971.
- 3) 奥村敏恵・村上永一・秋山成興: 鋼管継手部の格点強度の評価方法, 土木学会誌, pp. 14~22, 1973.6.
- 4) 奥村敏恵・秋山成興・浜島良吉: ラーメン隅角部の応力集中に関する実験的研究, 東京大学工学部附属総合試験所年報, No. 29, pp. 19~24, 1970.
- 5) 奥村敏恵・秋山成興・樊 豊美: パイプビームが局部荷重を受けた場合のダイアフラムの補強効果について, 第 14 回橋梁構造工学研究発表会論文集, pp. 109~121, 1967.
- 6) 奥村敏恵・石沢成夫: 薄板構造ラーメン隅角部の応力計算について, 土木学会論文報告集, 第 153 号, pp. 1~18, 1968.5.
- 7) Chernykh, K.F.: Linear Theory of Shells. I, II, Leningrad Univ. Press, 1964.
- 8) Flügge, W.: Stresses in Shells, 2nd Ed. Springer Verlag, 1959.
- 9) 浜島良吉・秋山成興: ダイアフラムで補強されたパイプの応力解析, 埼玉大学工学部建設基礎工学科研究報告, 3巻, pp. 65~107, 1972.

- 10) 浜島良吉：任意静荷重が作用する場合の薄肉円筒シェル
の解析法，土木学会論文報告集，No. 245，pp. 1~16，
1976.1.
- 11) 浜島良吉：薄肉円筒シェルと平板との接合問題に関する
一考察，学位論文（東京大学），1976.
- 12) Krupka, V. : An Analysis for Lug or Saddle-Suppor-
ted Cylindrical Pressure Vessels, Papers Presented
at the First International Conferences of Pressure
Vessel Technology, Delft, Netherlands, Sept. 29-Oct.
2, pp. 491~500, 1969.
- 13) 牧野雄二・黒羽啓明・三井宣之：鋼管継手部の局部変形
耐力の推定——支管が圧縮力を受ける場合，建築学会論
文報告集，No. 251, pp. 45~55, 1976.1.
- 14) Novozhilov, V.V. : Thin Shell Theory, P. Noordhoff,
1964.
- 15) Savin, G.N., and Fleishmann, N.P. : Rib-Reinforced
Plates and Shells, Israel Program for Scientific Tra-
nslations, Jerusalem, 1967.
- 16) Savin, G.N. : Stress Concentration around Holes, Pe-
rgamon Press, 1961.
- 17) Scordelis, A.C. and Boukamp, J.G. : Analytical Study
of Tubular Tee-Joints, Journal of the Structural
Division, ASCE, Vol. 96, No. ST 1, Proc. Paper
7016, pp. 65~87, Jan., 1970.
- 18) Wah, T. and Calcote, L.R. : Structural Analysis by
Finite Difference Calculus Van Nostrand Reinhold
Com., 1970.

(1977.11.17・受付)