

圧縮補剛板の弾塑性座屈強度と 合理的設計法について

ON ELASTO PLASTIC BUCKLING STRENGTH OF STIFFENED PLATES UNDER COMPRESSION AND THEIR RATIONAL DESIGN METHOD

小松定夫*・牛尾正之**

By Sadao KOMATSU and Masayuki USHIO

1. 緒 言

1969年から1971年にかけて、欧州を中心に架設途中の鋼箱桁橋が崩壊する事故が起きた。この事故に関連する調査報告によると¹⁾、重大な原因の一つとして圧縮フランジやダイヤフラムに採用された薄肉補剛板の圧縮耐荷力の不足が指摘されている。薄肉補剛板において、溶接による残留応力および初期たわみなどのいわゆる初期不整がその面内圧縮強度に悪影響を及ぼすことは周知のとおりである。上記事故を契機に、初期不整が圧縮補剛板の極限強度に及ぼす影響を実験的に、また理論的に明らかにし、圧縮補剛板の設計法の合理化を推進しようとする気運が各国で高まった。そして、最近欧州を中心に圧縮補剛板に関する強度規定の暫定的な改訂が行われている²⁾。

ところで、わが国においては、1973年に道路橋示方書³⁾(以下、道示という)が改訂され、圧縮補剛板に関する強度規定が設けられた。この規定は、Giencke⁴⁾が直交異方性板を対象に導いた弾性線形座屈理論に基づき、残留応力の影響を間接的に考慮した内容になっている。また、1970年には鋼鉄道橋設計標準⁵⁾(以下、鉄道標準という)も改訂されているが、圧縮補剛板の強度規定の中で、必要最小補剛材剛比など主要な規定は道示の場合と同一である。ただし、安全率は道示の場合が $\mu=1.7$ に対して、鉄道標準では $\mu=1.9$ となっている。その後、長谷川⁶⁾、福本⁷⁾の研究において、圧縮補剛板の強度規定に対する各種議論がなされている。また、これらの研究成果は、本州四国連絡橋上部構造の圧縮補剛板の設計標準⁸⁾および鉄道標準の暫定改訂⁹⁾の基礎となっている。前者では、サブパネル注1)の無次元幅厚比 $R^{3),5)}$ が通常の使用範囲に対応する0.3~0.7の領域にお

いて、設計極限圧縮応力度を降伏点の9割とし、安全率を $\mu=1.7$ としている。さらに、補剛材には板パネル注2)の鋼種より高強度の鋼材を使用することを推奨している(通称、ハイブリッド補剛板)。これは、板パネルが部分降伏しても、補剛材はでき得る限り弾性域にとどまることを意図し、座屈強度の低下を防ごうとするものである。そして、具体的な鋼種の組合せを提示している。一方、鉄道標準では1975年の暫定改訂において、必要最小補剛材剛比を従来の5倍とした。

以上のように、わが国の示方書において圧縮補剛板の設計法およびその考え方などの点で実質的に少なからず差異があるのが現状である。また、1975年来建設省土木研究所において大規模な実験的研究が実施されており^{10)~12)}、これらは現在作業が進められている道示改訂原案の基礎資料となっている。

さて、著者らは広範囲にわたる補剛板の圧縮耐荷力実験を実施し、その圧縮挙動を詳細に把握するとともに、その結果に基づいて道示を中心に各国示方書で規定する設計極限強度の検討を行った¹³⁾。引き続き、溶接に伴って生ずる補剛板における初期不整の実態を究明した¹⁴⁾。そのうち、残留応力については実橋補剛板におけるその大きさおよび分布形状の推定法を提案した。そして、本文では、まず、(1)補剛板内の残留応力については、上記推定法に基づき、特に実橋の補剛材内の残留応力分布の実情を反映したモデル化を行う。そして、(2)有限帯板法による立体薄肉構造物の弾塑性線形分岐座屈強度解析プログラムにより、その座屈強度を数値計算する。その際に、選んだ無次元パラメーターは、補剛板の縦横比、補剛材の本数、さらには、補剛材に着目して、補剛材剛度、補剛材と板パネルが異種鋼材の場合の両者の降伏点比などである。(3)道示の圧縮補剛板に関する強度

* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学教室

** 正会員 工博 日立造船(株)技術研究所

注1) サブパネルとは、補剛材間の各平板パネル部をいう。
注2) 板パネルとは、補剛材から補剛材を取り除いた平板パネル全体をいう。

規定に準拠して設計された補剛板に限定して、その基本的座屈特性を求め、(4) 道示規定の適用に際して配慮すべき諸点について提言を行う。

2. 弾塑性座屈強度解析の理論的背景

解析の対象となる補剛板は縦方向にのみ面内圧縮応力を受け、かつ、平板要素からなる補剛材が縦方向のみに配置されているものとする。

この種の補剛板における補剛材のねじり剛性の効果や補剛材内部に存在する残留応力の影響を同時に考慮した弾塑性座屈強度に関する理論的研究はきわめて少なく、宇佐美の研究¹⁵⁾および長谷川らの研究⁶⁾があるに過ぎない。これらの解析では、Cheung¹⁶⁾が提案し、吉田¹⁷⁾が弾塑性座屈解析に応用した有限帯板法を適用している。長谷川らは、文献 6) においては、残留応力の影響のみに着目し、補剛材剛比 α をパラメーターとした一連の数値解析を行い、補剛材の必要最小剛比を現行道示の規定値 r_N の 5 倍以上にするか、あるいは、サブパネルの幅厚比制限を現行の半分にすべきであるとの結論を得ている。また、宇佐美は補剛材のねじり剛性を含め、かつ、補剛材の曲げ剛性の評価において残留応力の分布形状を考慮し、定性的にはほぼ同様な結論を得ている。しかし、むしろ $R \leq 0.7$ の範囲においては設計極限応力度を降伏点より下げることが提案している。ところが、これらの解析ではいずれも補剛材をはり・柱材として取り扱っており、長谷川らは柱全断面に平均化した応力・ひずみの関係を概括的に考え、これを 3 次曲線と仮定している。したがって、実際の補剛板に用いられる材料および残留応力の実情を必ずしも表現しているとは限らない。宇佐美は残留応力分布を考慮しているが、板パネルおよび補剛材内でそれぞれ残留応力がつり合うと仮定している。しかし、著者らの研究でも明らかなように、残留応力は板パネルを含めた補剛板全体でつり合うべきである¹⁴⁾。

本文の解析においては有限帯板法を適用するが、上述した補剛材の取り扱い上の不備を改善するために、まず文献 14) に基づき補剛材内の実情に即した残留応力特性を忠実にモデル化する。そして、補剛材を板パネルと同様に有限帯板要素群に分割し、補剛板全体を立体薄肉構造物として取り扱う。また、塑性領域での座屈に伴う応力増分とひずみ増分の関係は変形理論に基づくものとする。変形理論を採用した理由は、微小ひずみを考慮した分岐座屈問題に関しては変形理論による総合的結果の方が流れ理論によるよりも実験値とよく一致するという過去の報告に基づいており、かつ、変形理論による方が取り扱いが簡明であるという利点があるためである。さ

らに、座屈変形時のひずみの反転はないと考える。この場合、得られる座屈値は安全側の下限値になると考えられる。

したがって、ここでは座屈時の応力増分とひずみ増分の関係に関して、単一平板の塑性座屈問題に Stowell¹⁸⁾、Bijlaard¹⁹⁾ らが適用し、上記長谷川、宇佐美らも採用したひずみの反転のないとした変形理論を用いることとする。また、補剛板を構成する材料は等質等方性の完全弾塑性体とする。そして、考慮する残留応力は、縦方向のすみ肉溶接、かど溶接などによって生ずる縦方向成分のみとし、それを初期応力と考え、作用応力と同等に扱う。

(1) 座屈変形時の応力増分とひずみ増分の関係

平面応力状態において、Hencky の提案した塑性域での応力とひずみの関係式に相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^P$ 、相当応力度 $\bar{\sigma}$ の概念を導入すると、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\bar{\epsilon}^P}{\bar{\sigma}} \left\{ \sigma_{xx} - \frac{1}{2} \sigma_{yy} \right\} + \frac{1}{E} \{ \sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} \} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\bar{\epsilon}^P}{\bar{\sigma}} \left\{ \sigma_{yy} - \frac{1}{2} \sigma_{xx} \right\} + \frac{1}{E} \{ \sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx} \} \\ \epsilon_{xy} &= 3 \cdot \frac{\bar{\epsilon}^P}{\bar{\sigma}} \cdot \sigma_{xy} + \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \sigma_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 E ：ヤング係数、 ν ：ポアソン比

$$(\bar{\epsilon}^P)^2 = \frac{4}{3} \{ (\epsilon_{xx}^P)^2 + \epsilon_{xx}^P \cdot \epsilon_{yy}^P + (\epsilon_{yy}^P)^2 \} + \frac{1}{3} (\epsilon_{xy}^P)^2$$

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3 \sigma_{xy}^2$$

式 (1) の右辺の第 1 項が塑性ひずみ成分、第 2 項が弾性ひずみ成分である。

材料の単軸引張試験より得られた応力・ひずみ曲線をモデル化し図-1 に示す。図において、ヤング係数 E 、接線係数 E_t 、降伏点 Y が得られたとする。von Mises の降伏条件に従い、かつ、ひずみ硬化に関する塑性仕事等価の説によれば、式 (1) の $\bar{\epsilon}^P$ と $\bar{\sigma}$ の関係は、単軸引張状態における $\bar{\sigma} = \sigma_{xx}$ 、 $\bar{\epsilon}^P = \epsilon_{xx}^P$ の関係から求めら

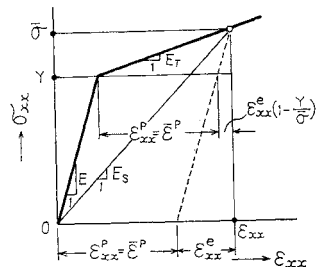


図-1 単軸引張試験における応力度とひずみの関係モデル

れ、

$$\bar{\epsilon}^P = \beta \cdot (\bar{\sigma}/E) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、

$$\beta = \{1 - (Y/\bar{\sigma})\} \cdot \frac{1 - (E_t/E)}{E_t/E} \dots\dots\dots (3)$$

次に、座屈に伴う応力増分とひずみ増分の関係は、式(2)を式(1)に代入して変分すると得られる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \delta\epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left\{ \left(\sigma_{xx} - \frac{1}{2} \sigma_{yy} \right) \cdot \delta\beta + \beta \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\delta\sigma_{xx} - \frac{1}{2} \delta\sigma_{yy} \right) + \delta\sigma_{xx} - \nu \cdot \delta\sigma_{yy} \right\} \\ \delta\epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \left\{ \left(\sigma_{yy} - \frac{1}{2} \sigma_{xx} \right) \cdot \delta\beta + \beta \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\delta\sigma_{yy} - \frac{1}{2} \delta\sigma_{xx} \right) + \delta\sigma_{yy} - \nu \cdot \delta\sigma_{xx} \right\} \\ \delta\epsilon_{xy} &= \frac{1}{E} \{ 3 \sigma_{xy} \cdot \delta\beta + (3\beta + 2 + 2\nu) \cdot \delta\sigma_{xy} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、

$$\delta\beta = \left\{ \frac{1 - (E_t/E)}{E_t/E} - \beta \right\} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \cdot \left\{ \left(\sigma_{xx} - \frac{1}{2} \sigma_{yy} \right) \cdot \delta\sigma_{xx} + \left(\sigma_{yy} - \frac{1}{2} \sigma_{xx} \right) \cdot \delta\sigma_{yy} + 3 \sigma_{xy} \delta\sigma_{xy} \right\}$$

単軸圧縮における座屈に限定すると、座屈直前の初期応力度は $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$, $\bar{\sigma} = \sigma_{xx}$ であるから、これらを式(4)に代入し、応力増分 $\delta\sigma_{xx}$, $\delta\sigma_{yy}$, $\delta\sigma_{xy}$ について解くと、

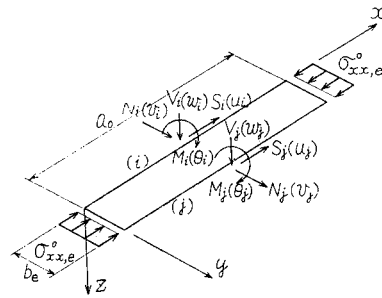
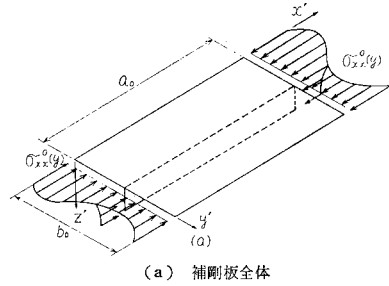
$$\{\delta\sigma_{xx}, \delta\sigma_{yy}, \delta\sigma_{xy}\}^T = E \cdot \mathbf{K} \cdot \{\delta\epsilon_{xx}, \delta\epsilon_{yy}, \delta\epsilon_{xy}\}^T \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 \mathbf{K} は3次元の正方行列で、その各要素は、

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= \frac{1 + 3(\beta + 1)(E_t/E)}{(3\beta + 5 - 4\nu) - (1 - 2\nu)^2(E_t/E)} \\ k_{12} = k_{21} &= \frac{2 - 2(1 - \nu)(E_t/E)}{(3\beta + 5 - 4\nu) - (1 - 2\nu)^2(E_t/E)} \\ k_{13} = k_{31} = k_{23} = k_{32} &= 0 \\ k_{22} &= \frac{4}{(3\beta + 5 - 4\nu) - (1 - 2\nu)^2(E_t/E)} \\ k_{33} &= \frac{1}{3\beta + 2 + 2\nu} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

また、割線係数 E_s を考慮すれば、 $\beta = (E/E_s) - 1$ となり、式(6)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= \frac{1 + 3(E_t/E_s)}{2 - 4\nu + 3(E/E_s) - (1 - 2\nu)^2(E_t/E)} \\ k_{12} = k_{21} &= \frac{2 - 2(1 - \nu)(E_t/E)}{2 - 4\nu + 3(E/E_s) - (1 - 2\nu)^2(E_t/E)} \\ k_{13} = k_{31} = k_{23} = k_{32} &= 0 \\ k_{22} &= \frac{4}{2 - 4\nu + 3(E/E_s) - (1 - 2\nu)^2(E_t/E)} \\ k_{33} &= \frac{1}{-1 + 2\nu + 3(E/E_s)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$



(a) 補剛板全体
(b) 帯板要素の局部座標と節線力、節線変位

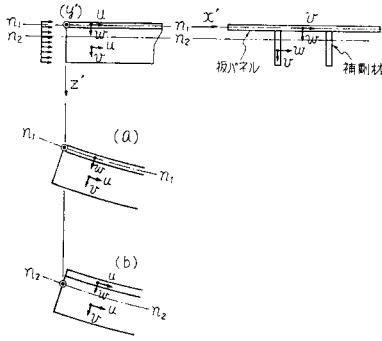
図-2 解析の対象となる補剛板

式(7)は Bijlaard の結果¹⁰⁾と一致する。

(2) 有限帯板法による座屈変形時のつり合い方程式

図-2 (a) に示すような長さ a_0 、幅 b_0 の4辺単純支持の補剛板に残留応力を含む圧縮応力度 $\sigma_{xx}^0(y)$ が作用している場合を対象とする。板パネルもしくは補剛材（ここでは長方形断面、L形断面、T形断面など平板要素からなる補剛材を対象にする）を分割して得られる帯板要素（図-2 (b)）の縦横寸法を $a_0 \times b_e$ 、板厚を t_e とし、図示したように、要素の中立面が x - y 平面と一致するような局部座標系を想定する。また、各要素には $\sigma_{xx}^0(y)$ の平均値 $\sigma_{xx,e}^0$ が均等に作用しているものとする。 $y=0$ および $y=b_e$ の i 辺、 j 辺がそれぞれ隣接要素と接する節線である。いま、補剛板の座屈に伴って、この要素の中立面の任意の点が x 方向に u 、 y 方向に v 、 z 方向に w なる変位を生じ、要素の各節線にせん断力 V 、曲げモーメント M 、面内せん断力 S および面内垂直力 N が断面力として作用するものとする。これらの変位によって生ずるひずみ増分は、変位の2次の項まで考慮すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \delta\epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \right\}$$



- (a) 補剛板の座屈に伴う補剛板断面の回転変位が、板パネルの中央面 (n_1-n_1) まわりに生じる場合
 板パネル： $u=v=0, w \neq 0$
 補剛材： $u \neq 0, v \neq 0, w=0$ あるいは $w \neq 0$ *
 - (b) 同じく、補剛板の中立軸 (n_2-n_2) まわりに生じる場合
 板パネル： $u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0$
 補剛材： $u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0$ あるいは $w \neq 0$ *
- * 補剛材のねじり剛性を考慮する場合。

図-3 補剛板の座屈変形の形態

$$\left. \begin{aligned} \delta \varepsilon_{xy} = & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\ & + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ただし、式(8)において、板パネル内の帯板要素の場合、図-3(a)のときは、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

の各項は無視でき、図-3(b)のときは、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

のみ無視できる。また補剛材の場合は、図-3(a),(b)ともにすべての項が必要である。

また、このとき生ずる応力増分 $\delta \sigma_{xx}, \delta \sigma_{yy}, \delta \sigma_{xy}$ とひずみ増分の関係は、式(5)、式(7)より次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \delta \sigma_{xx} = & Ek_{11} \delta \varepsilon_{xx} + Ek_{12} \delta \varepsilon_{yy} \\ \delta \sigma_{yy} = & Ek_{22} \delta \varepsilon_{yy} + Ek_{21} \delta \varepsilon_{xx} \\ \delta \sigma_{xy} = & Ek_{33} \delta \varepsilon_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし、式(7)において、弾性域では $E=E_x=E_y$ となり、また、塑性域では材料を完全弾塑性体とすれば、 $E_t=0$ となる。

座屈前には x 方向応力度 σ_{xx, e^0} (ここでは、便宜上圧縮の場合を正とする) のみが作用していたとすると、座屈変形によって要素内に貯えられるひずみエネルギー ΔU は次式で得られる。

$$\Delta U = \int_0^{a_0} \int_0^{b_0} \int_{-t_e/2}^{t_e/2} \left\{ -\sigma_{xx, e^0} \cdot \delta \varepsilon_{xx} + \frac{1}{2} (\delta \sigma_{xx} \cdot \delta \varepsilon_{xx} \right.$$

$$\left. + \delta \sigma_{yy} \cdot \delta \varepsilon_{yy} + \delta \sigma_{xy} \cdot \delta \varepsilon_{xy} \right\} dx dy dz \dots\dots\dots (10)$$

一方、要素の節線に作用する節線力および初期圧縮応力度 σ_{xx, e^0} のポテンシャル ΔA は、

$$\begin{aligned} \Delta A = & \int_0^{a_0} \int_0^{b_0} \int_{-t_e/2}^{t_e/2} \left\{ -\sigma_{xx, e^0} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right. \\ & \cdot dx dy dz + \int_0^{a_0} \{ (M_i \cdot \theta_i + V_i \cdot w_i + S_i \cdot u_i \\ & + N_i \cdot v_i) + (M_j \cdot \theta_j + V_j \cdot w_j + S_j \cdot u_j \\ & \left. + N_j \cdot v_j) \} dx \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

したがって、座屈変形による全ポテンシャルエネルギー Π_e は、

$$\Pi_e = \Delta U - \Delta A \dots\dots\dots (12)$$

次に、要素内の変位 u, v, w は x 方向に三角級数、 y 方向には面外変形は3次の Hermite 補間式、面内変位は1次式を用いてそれぞれ次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} w = & \sum_{m=1}^{\infty} (f_1 \cdot \bar{\theta}_{im} + f_2 \cdot \bar{w}_{im} + f_3 \cdot \bar{\theta}_{jm} \\ & + f_4 \cdot \bar{w}_{jm}) \cdot \sin(m\phi) \\ u = & \sum_{m=1}^{\infty} (f_5 \cdot \bar{u}_{im} + f_6 \cdot \bar{u}_{jm}) \cdot \cos(m\phi) \\ v = & \sum_{m=1}^{\infty} (f_5 \cdot \bar{v}_{im} + f_6 \cdot \bar{v}_{jm}) \cdot \sin(m\phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $\phi = \pi x/a_0$ 、 $f_1 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$ 、 $f_2 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$ 、 $f_3 = -\xi^2 + \xi^3$ 、 $f_4 = 3\xi^2 - 2\xi^3$ 、 $f_5 = 1 - \xi$ 、 $f_6 = \xi$ 、 $\xi = y/b_0$ また、 $\bar{\theta}_{im}, \bar{\theta}_{jm}$ などは節線変位係数とよぶことにする。

ちなみに、各節線変位は次のように表わされる (図-2(b) 参照)。

$$\left. \begin{aligned} \theta_i = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\theta}_{im} \sin(m\phi) & \theta_j = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\theta}_{jm} \sin(m\phi) \\ w_i = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{w}_{im} \sin(m\phi) & w_j = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{w}_{jm} \sin(m\phi) \\ u_i = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{u}_{im} \cos(m\phi) & u_j = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{u}_{jm} \cos(m\phi) \\ v_i = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{v}_{im} \sin(m\phi) & v_j = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{v}_{jm} \sin(m\phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

式(13)の変位関数は Cheung²⁰⁾が折れ板構造解析に用いたもので、式(14)に対応する節線力は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_i = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{M}_{im} \sin(m\phi) & M_j = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{M}_{jm} \sin(m\phi) \\ V_i = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{V}_{im} \sin(m\phi) & V_j = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{V}_{jm} \sin(m\phi) \\ S_i = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{S}_{im} \cos(m\phi) & S_j = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{S}_{jm} \cos(m\phi) \\ N_i = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{N}_{im} \sin(m\phi) & N_j = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{N}_{jm} \sin(m\phi) \end{aligned} \right\}$$

$$\dots\dots\dots(15)$$

ここに、 \bar{M} , \bar{V} , \bar{S} , \bar{N} は平板理論若しくはシャイペ理論における断面力と変位の周知の式により、 $\bar{\theta}$, \bar{w} , \bar{u} , \bar{v} の関数として与えられ、これらを節線断面力係数と名付ける。

以上の結果、式 (12) に式 (13)~(15) を代入して、3 次以上の高次の微小項を無視すると、要素の全ポテンシャルエネルギー Π_e は、各変位および節線力の係数の 2 次関数となり、全ポテンシャルエネルギーの停留原理より各要素に対して次のつり合い方程式が得られる。ただし、節線力および変位がともに三角級数で表わされるため、直交性により級数の各項間の連成はなくなり、各項ごとにつり合い方程式が成り立つ。すなわち、

$$\mathbf{F}_{em} = (\mathbf{K}_{Gem} - \lambda^2 \mathbf{K}_{Sem}) \cdot \mathbf{U}_{em} \dots\dots\dots(16)$$

ここに、

$$\mathbf{F}_{em} = \{\bar{M}_{im}/b^*, \bar{M}_{jm}/b^*, \bar{V}_{im}, \bar{V}_{jm}, \bar{S}_{im}, \bar{S}_{jm}, \bar{N}_{im}, \bar{N}_{jm}\}^T$$

$$\mathbf{U}_{em} = \{\bar{\theta}_{im} \cdot b^*, \bar{\theta}_{jm} \cdot b^*, \bar{w}_{im}, \bar{w}_{jm}, \bar{u}_{im}, \bar{u}_{jm}, \bar{v}_{im}, \bar{v}_{jm}\}^T$$

\mathbf{K}_{Gem} : 初期ひずみと帯板要素の幾何学的寸法から決まる剛性行列

\mathbf{K}_{Sem} : 初期応力度 σ_{xx,e^0} に関する剛性行列

$$\lambda = \frac{b^*}{t^*} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_y}{E} \cdot \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2}} \quad (\text{無次元基準幅厚比})$$

b^* : 基準幅, t^* : 基準板厚, σ_y : 降伏点

また、各帯板要素の面外変形と面内変形とは連成しないので、これらを分離することができる。したがって、式 (16) における \mathbf{K}_{Gem} および \mathbf{K}_{Sem} は次のように分解できる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{Gem} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Geom} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{Geim} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{Sem} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Seom} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{Seim} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

ここに、添字 o, i はそれぞれ面外変形、面内変形に対応する。なお、式 (16) および式 (17) で表示した帯板要素の \mathbf{K}_{Gem} と \mathbf{K}_{Sem} の詳細を付録に示す。

(3) 座屈強度解析法

a) 固有値の計算法

式 (16) で得られた各要素のつり合い方程式を補剛板全体の座標系で表示し、境界条件、拘束条件などによって決まる既知変位成分を除外して、全要素について重合すれば、補剛板全体のつり合い方程式が得られる。すなわち、

$$\mathbf{F}_m = (\mathbf{K}_{Gm} - \lambda^2 \mathbf{K}_{Sm}) \cdot \mathbf{U}_m \dots\dots\dots(18)$$

ここで、座屈変形時には、 $\mathbf{F}_m = \mathbf{0}$ となり、式 (18) は、

$$(\mathbf{K}_{Gm} - \lambda^2 \mathbf{K}_{Sm}) \cdot \mathbf{U}_m = \mathbf{0} \dots\dots\dots(19)$$

また、 \mathbf{K}_{Gm} は正值 2 次形式であるからこれを Cholesky

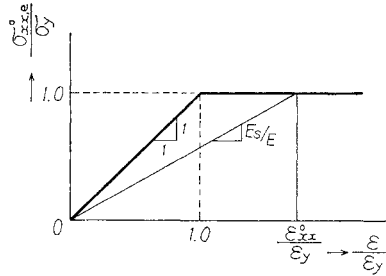


図-4 無次元初期応力度と無次元ひずみの関係
分解し $(\mathbf{K}_{Gm} = \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W})$, 式 (19) を変形すれば、

$$\left\{ (\mathbf{W}^T)^{-1} \cdot \mathbf{K}_{Sm} \cdot \mathbf{W}^{-1} - \frac{1}{\lambda^2} \cdot \mathbf{I} \right\} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{U}_m = \mathbf{0} \dots\dots\dots(20)$$

ここに、 \mathbf{I} は単位行列、 \mathbf{W} は右上半三角行列である。式 (20) において左辺第 1 項を三重対角行列に変換し、バイセクション法により固有値 λ を求める。

b) 本解析法による数値解析上の問題点の検討

① ヤング係数 (E) と割線係数 (E_s)

付録に示した \mathbf{K}_{Gem} の各要素中に、応力増分とひずみ増分の関係を示す $k_{11} \sim k_{33}$ が含まれる。そして、各帯板要素ごとの $k_{11} \sim k_{33}$ の中には、作用応力度 (座屈応力度) σ_{cr} と残留応力度 σ_r の和 σ_{xx,e^0} に関する E/E_s が含まれる。ここでは、これらの合応力度を降伏点で無次元化し ($\sigma_{xx,e^0}/\sigma_y$)、それに対応する無次元合ひずみ $\epsilon_{xx,e^0}/\epsilon_y$ を考える。ただし、溶接部近傍の残留応力度が降伏点に等しい場合は、残留ひずみ ϵ_r に対する無次元残留ひずみは $\epsilon_r/\epsilon_y = 1.0$ とする。そして、図-4 に示すように、 $\sigma_{xx,e^0}/\sigma_y$ と $\epsilon_{xx,e^0}/\epsilon_y$ の関係から E/E_s を求めると、 $E/E_s = \epsilon_{xx,e^0}/\epsilon_y$ となる。

② 残留応力

本文では、文献 14) で詳細に検討した補剛板の残留応力の実情を忠実に反映することとする。文献 14) の式 (1)~(13) で示したように、対象となる補剛板の残留応力の圧縮領域幅もしくは引張領域幅を決定する際、補剛材内の無次元化した分布幅 η_s (残留引張応力の分布幅と補剛材高さとの比) は、補剛材および板パネルの寸法に関係なく、残留応力の大きさによって決まる。また、板パネル内の無次元分布幅 η_t (残留引張応力の分布幅とサブパネルの幅との比) は、サブパネル数 n 、補剛材の高さ h とサブパネルの幅 b との比および補剛材と板パネルの板厚比 t_r/t と残留応力の大きさで決まる。したがって、補剛板内の残留応力の各無次元分布幅は、サブパネルの幅厚比 b/t には無関係である。

③ 補剛板に対する解析

長方形断面補剛材の場合、少なくとも板パネルの面外変形と補剛材の面内曲げ変形に伴う補剛材の帯板要素の面内変位とを考慮しなければならない。したがって、 b^*

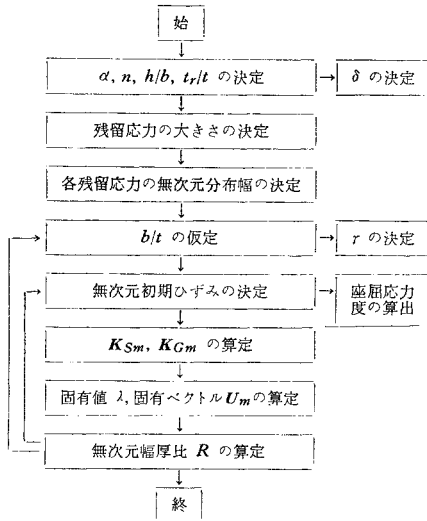


図-5 長方形断面補剛材を有する補剛板の座屈計算要領

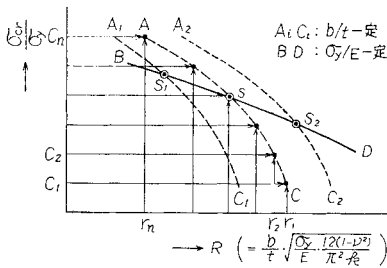


図-6 σ_{cr}/σ_y と R の関係

および t^* をそれぞれサブパネルの幅 b および板厚 t とすれば、付録に掲げる剛性行列より明らかなように、 $B_1 \sim B_6$ に b/t が含まれることになる。すなわち、サブパネルの幅厚比 b/t を既知量としなければならない。ただし、残留応力の影響を含めて解析する場合、残留応力の各無次元分布幅は、 $n, l_r/t$ および h/b を既知とすれば、前述したように自動的に決定される。一方、補剛材剛比 r および断面積比 δ (補剛材 1 本の断面積と板パネル全体の断面積との比) は以下の式で表わされ、自動的に決定される。

$$r = \frac{4(1-\nu^2)}{n} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{t}\right)^2 \cdot \left(\frac{l_r}{t}\right) \dots\dots\dots(21)$$

$$\delta = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{h}{b}\right) \cdot \left(\frac{l_r}{t}\right) \dots\dots\dots(22)$$

しかしながら、固有値 λ から計算される無次元幅厚比 $R = (b/t) \cdot \sqrt{(\sigma_y/E) \cdot 12(1-\nu^2)/(\pi^2 k)}$ のうち、 b/t は初期値として与えられていることになる。

以上を総合すると、具体的な数値計算手順は次のようになる(図-5 参照)。まず、対象となる補剛板の $h/b, l_r/t$ および縦横比 α を定め、かつ、残留応力の大きさおよび分布幅を決定する。この時、断面積比 δ も決ま

る。次に、 b/t の値が与えられると、補剛材剛比 r も決まる。そこで、任意の b/t の値を与えて、無次元初期ひずみおよびそれに対応する無次元初期応力 $\sigma_{xx}^0(y)/\sigma_y$ を仮定する。そして、式(20)の固有値 λ を計算すれば、それに対応して仮定した作用応力が座屈応力になるような無次元幅厚比 R が求まる注3)。このようにして、無次元座屈応力 $\sigma_{cr}/\sigma_y = c_i$ と無次元幅厚比 $R = r_i$ の関係を順次計算すると、図-6のACのような b/t が一定の曲線が描ける注4)。同様に、パラメーター b/t の種々の値に対して b/t が一定の曲線 A_1C_1, A_2C_2, \dots が得られる。これらの曲線群に対して、ある鋼種について、すなわち σ_y/E を一定値にした場合について R 値が決まる。そして、これらの R 値に対応する曲線上の点 s, s_1, s_2, \dots が求まり、それらを結ぶとある一つの曲線 BD が得られる注5)。この曲線が同一鋼種に対する b/t を変数とする $\sigma_{cr}/\sigma_y - R$ 曲線すなわち座屈強度曲線となる。

一方、サブパネルの局部座屈については、補剛材のねじり剛性の影響を無視する場合、4辺単純支持の単一平板の座屈として扱える。このような単一平板の場合、座屈時の変形は面外変形のみとなる。したがって、付録の(1)に掲げた剛性行列から明かなように、 b^* を単一平板の幅、 t^* を板厚 $t(t_{eff}^* = 1.0)$ とすれば、剛性行列作成にあたっては、既知量として単一平板の縦横比 α のみが必要となるだけである。また、残留応力の無次元分布幅も残留応力の大きさが決まれば、単一平板の幅厚比とは無関係に決定される。したがって、単一平板の場合すなわちサブパネルの局部座屈の場合、弾性座屈もしくは弾塑性座屈のいずれの座屈現象に対しても、式(19)を用いて固有値 λ は α のみの関数として算出できる。

c) 数値計算例

① 計算条件

本節で導いた解析法を長方形断面補剛材を有する補剛板に適用する場合の基本的な計算条件は以下のとおりである。

- (i) 作用圧縮応力は、 $x' = 0, x' = a_0$ の2辺上の板パネルおよび補剛材の端部に等分布しているものとする。
- (ii) 板パネルの4辺は単純支持とする。また、補剛材の載荷辺の面内変位は自由、面外変形に対しては単純支持とする。
- (iii) 補剛材は板パネルの中立面に直接接合されるものとし、その位置で両者の対応する各変位成分は適合するものとする。

注3) 本解析では、 $\sqrt{\sigma_y/E}$ が固有値として求まる。そして、それに初期値として与えた定数 b/t などをかけて R 値とする。

注4) 横軸の R 値は注3)と同様にして得られた値である。

注5) 曲線 BD に対する横軸の R 値は、 b/t が変数となる。

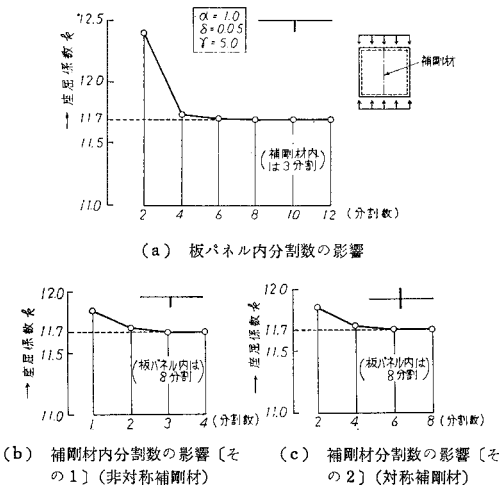


図-7 要素分割数と収束性の関係

(iv) (a) 面外曲げによる断面の回転変位が板パネルの中立面まわりに起こると仮定する場合は、板パネルの面内変位 u (x' 軸方向) および v (y' 軸方向) は無視する。(b) 同じく、補剛板の中立軸まわりに起こると仮定する場合はこれら u および v をも考慮する。

(v) 補剛材の板としてのねじり変形 ($\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$) は生じずに補剛板全体の曲げ変形のみが生じる場合は、補剛材の面内変位 u (x' 軸方向), v (z' 軸方向) のみを考慮し、板パネルのたわみ w (z' 軸方向) と補剛材の面内変位 v を適合させる。

(vi) 補剛材の板としてのねじり変形を考慮する場合は、(iv) の条件のほかに補剛材のたわみ w (y' 軸方向), たわみ角 θ をも考慮する。そして、板パネルのたわみ角と補剛材のたわみ角を適合させる。

ここで、 x', y', z' 軸とは補剛板全体の座標軸である (図-2 (a) 参照)。

② 要素分割数と収束性

長方形断面補剛材 1 本を有する補剛板の弾性座屈強度を対象に、要素分割数と解の収束性の関係を検討する。補剛板の縦横比は $\alpha=1.0$ 、補剛材と板パネルの寸法は、 $b/t=50$, $t_r/t=0.95$, $h/b=0.11$ の場合である。その場合には、断面積比は $\delta=0.05$ 、補剛材剛比は $r=5.0$ となる。図-7 に得られた計算結果より求めた要素分割数と座屈係数 k の関係を示す。座屈係数 k は $k=\sigma_{cr}/\sigma_e$ で定義される。ここで、 σ_e は、

$$\sigma_e = \frac{t^2}{b^2} \cdot \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)}$$

で表わされる基本座屈応力度である。これらの計算はすべて、前項 (iv), (a) (図-3 (a) 参照) および (v) の条件のもとで行ったものである。まず、図-7 (a) では、板パネル部分の分割数 (等分割) と k の関係を示しているが、6 分割以上になると一定値に収束する。ま

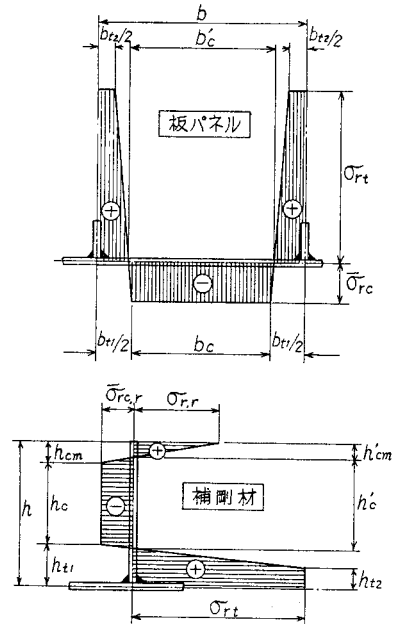


図-8 補剛板のモデルした残留応力分布

た、図-7 (b), (c) は補剛材の分割数と k 値の関係を非対称補剛材と対称補剛材の場合について示している。いずれも分割数による k 値の収束の状態は同様である。

③ 補剛板の基本座屈強度

解析例として、長方形断面補剛材 3 本を有し、 $\alpha=1.0$, $b/t=40$, $r=18.1$, $n\delta=0.20$, $h/b=0.27$, $t_r/t=0.78$ の補剛板を対象とする。この補剛板は SS 41 材からなる場合、道示の規定で許容される最小剛度を有する。また、残留応力度は文献 14) で提案した SS 41 材のものに相当し、降伏点で無次元化した無次元残留応力度 $\bar{\sigma}_{rc}^* = 0.3$, $\bar{\sigma}_{rc,r}^* = 0.2$, $\sigma_{rt}^* = 1.0$, $\sigma_{r,r}^* = 0.6$ となる (記号は 図-8 参照)。これに対して、 $b/t=28$ および $b/t=17$ とした場合の 2 種類の補剛板を比較のために選んだ。ただし、 α , t_r/t , 無次元残留応力度は $b/t=40$ の場合と同一であるが、 $n\delta$ および h/b は多少変化させて補剛材剛比 r を一定 ($r=18.1$) となるようにした。対象とする座屈モードは補剛材と板パネルがともに変形する場合すなわち全体座屈モードである。また、その理由については後述するが、通常の場合の長方形断面補剛材の場合、そのねじり剛性が全体座屈強度に及ぼす影響は微小と考えられるので、ここでは、

ケース① 板パネルと補剛材とをヒンジ結合する場合

補剛材と板パネルの接合辺において、曲げモーメントが作用し合わないで、補剛材のねじり変形が生ずることなく、補剛材のねじり剛性により板パネルの変形を弾性拘束しないことになる。このような取り扱い、補剛板の座屈強度の評価

においていくぶん安全側になっている。すなわち、補剛材はねじり変形が生ずることなく曲げ変形のみが生じる。また、座屈変形に伴う板パネルの面内変位は無視する。

とする。

以上の条件のもとで、 $b/t=40$ 、 $b/t=28$ および $b/t=17$ をパラメーターとする σ_{cr}/σ_y-R 曲線を計算して 図-9 に示す。ここで、各鋼材の E 値は一定であると考え ($E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$)、仮に、 $b/t=40$ の曲線における $R=0.7$ として得られている σ_y を逆算すると、 $\sigma_y=2325 \text{ kg/cm}^2$ となる。この点を 図-9 の右端の・印として、 $b/t=40$ の曲線上にプロットしている。次に、 $b/t=28$ の場合、 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ となる R 値を求めると $R \cong 0.49$ となり、この点を 図-9 の $b/t=28$ の曲線上に・印 (図-9 の中央部) としてプロットしている。同様にして、 $b/t=17$ の場合にも R 値を求め、 $b/t=17$ の曲線上にプロットする (図-9 の左側の・印)。そして、これらの・印を結んだ曲線が、 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_y=2325 \text{ kg/cm}^2$ (図-9 の計算では、 $\gamma=18.1$ 、 $n\delta=0.20 \sim 0.35$ などの条件が付加される) の場合の σ_{cr}/σ_y-R 曲線となり、偶然 $b/t=40$ (一定) としたときの最初の曲線とほぼ一致する。したがって、わが国の道示の規定に従って断面寸法、剛度などが決められる SS 41~SM 58 からなる補剛材では、本文 図-5 で述べたような繰り返し計算の必要はなく、 $b/t=40$ (一定) とした計算結果から得られる σ_{cr}/σ_y-R 曲線においては、 b/t を変数とみなして利用することができる。

以上の結果、SS 41~SM 58 では、1本の曲線で b/t を固定した曲線が描け、かつ、これが b/t を変数とする σ_{cr}/σ_y-R 曲線とみなすことができる。

次に、補剛材が偏心して板パネルに接合されているこ

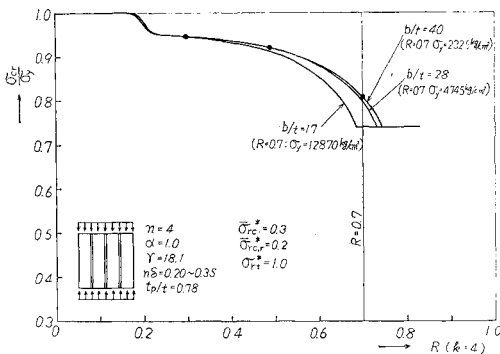


図-9 b/t をパラメーターとした全体座屈に関する σ_{cr}/σ_y-R 曲線

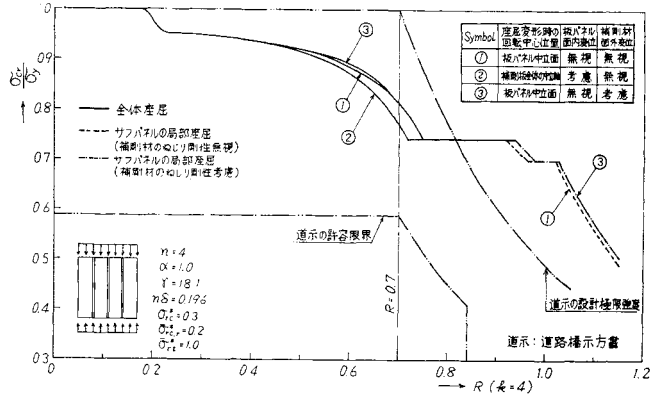


図-10 補剛材の基本座屈強度曲線 (σ_{rel}/σ_y-R 曲線)

とおよび補剛材のねじり剛性がそれぞれ座屈強度へ及ぼす影響を検討する。前述した $b/t=40$ を基本ケース①とし、ケース②およびケース③として次のような状態を選定した。ただし、断面諸元および残留応力などはケース①とまったく同様である。

ケース② 板パネルと補剛材とをヒンジ結合する場合：ケース①で考慮した変位のほかに、座屈変形に伴う板パネルの面内変位を考慮する (図-3 (b) 参照)。

ケース③ 板パネルと補剛材とを剛結する場合：板パネルの面外曲げ変形に対する補剛材のねじり剛性の影響を考慮する。すなわち、補剛材の面内曲げ変形および面外変形をともに考慮する。

これらの2ケースの座屈強度曲線を求め、ケース①の結果および道示の規定と対比して 図-10 に示す。図中、実線部は前述した全体座屈強度を示す。また、 R が大なる領域の点線部および一点鎖線部は、板パネルの座屈モードが補剛材位置で節になる場合、すなわちサブパネルの局部座屈強度を示す。

まず、曲線①と③を比較すると、全体座屈に対しては補剛材のねじり剛性効果はほとんどないといえよう。また、 $h/t_r \cong 13$ としたため、サブパネルの局部座屈に対しても、ねじり剛性の効果はわずかである。一方、曲線②は上述のように板パネルの面内変位を考慮しているため、計算上補剛材の偏心の影響が考慮されていることになる。しかし、いくぶん座屈強度が低下するだけである。

④ 極限強度と分岐座屈強度の関係

著者らが以前に実施した補剛材模型の圧縮荷重実験⁽¹³⁾ で得られた極限強度と本解析法で求められる各模型 (供試体) の分岐座屈強度とを対比し、両者の関係を検討する。計算において仮定した残留応力の分布は、実測結果に基づいてモデル化した形状 (図-8 において $\sigma_{r,r} = -\bar{\sigma}_{r,r}$ とする) をもつものとする。また、残留応力の大

表-1 分岐座屈強度と極限強度（実験値）¹⁹⁾の関係

供試体	R	r/r_N (r/r_N^*)	区分	$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y}$ (計算)	$\frac{\bar{\sigma}_{max}}{\sigma_y}$ (実験)	$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{cr}}$
				値	値	値
A ₁ -1	0.55	0.85 (0.52)	全	0.83	0.82	0.99
A ₁ -2	0.55	1.12 (0.68)	全	0.83	0.83	1.00
A ₀ -1	0.69	0.57 (0.58)	全	0.83	0.78	0.94
A ₀ -2	0.69	1.03 (1.06)	全	0.83	0.85	1.01
A ₀ -3	0.69	2.05 (2.11)	全	0.84	0.85	1.01
B ₀ -1	0.90	— (0.99)	全	0.83	0.73	0.88
E ₀ -1	1.14	— (1.01)	局	0.67	0.57	0.85
E ₀ -2	1.11	— (2.24)	局	0.78	0.59	0.76
E ₀ -3	1.12	— (4.77)	全	0.84	0.65	0.77
C ₀ -1	1.31	— (1.02)	局	0.44	0.44	1.00
D ₀ -2	1.66	— (1.03)	局	0.20	0.33	1.65

全：全体座屈

局：サブパネルの局部座屈（補剛材のおじり剛性考慮）

r*：DIN 4114 で規定する補剛材の必要最小剛比

r_N：道示で規定する補剛材の必要最小剛比

大きさも同じく実測結果に基づき、すべての模型において、 $\bar{\sigma}_{rc}^*=0.2$ 、 $\bar{\sigma}_{rc,r}^*=0.1$ 、 $\sigma_{r,r}^*=0.1$ （圧縮）と仮定した。また、計算条件としては、c)、③のケース①と同様、計算の簡易性を考慮して、座屈変形は板パネルの中立面まわりに起こるとした。得られた計算結果と実験値とを対比して表-1に示す。

まず、供試体 A₁-2 および A₀-2 の各補剛材は道示が要求する必要最小剛比を有しており、それらの極限強度は計算値として得られる分岐座屈強度とほぼ一致している。また、供試体 A₀-2 の約2倍の剛比の補剛材を有する供試体 A₀-3 の計算値および実験値は同様によく一致している。一方、供試体 A₀-2、B₀-1、E₀-1、C₀-1、D₀-1 の補剛材剛比は DIN 4114²¹⁾ の規定で要求される最小値を有している。供試体 A₀-2 については前述したとおりであるが、その幅厚比が全体座屈領域（全体座屈が先行する幅厚比の領域）と局部座屈領域（同じくサブパネルの局部座屈が先行する幅厚比の領域）の境目にある供試体 B₀-1 では、分岐座屈強度より低い極限強度となっている。また、局部座屈領域に入る E シリーズ、C₀-1、D₀-1 の三者のうち幅厚比の小さい E シリーズでは、供試体 B₀-1 と同様に極限強度が下まわっている。しかし、供試体 C₀-1 ではちょうど両者が一致し、供試体 D₀-1 ではむしろ極限強度の方が大きくなっている。その理由は、幅厚比の大きさに応じて、後座屈余力の大きさと初期たわみの影響との度合が相違しているためと考えられる。

以上の結果、理論計算で得られる分岐座屈強度と極限強度との間で、サブパネルの幅厚比の大小に応じて次の

ような関係が確認された。すなわち、(a) 道示のサブパネルの幅厚比規定および補剛材剛比規定を満足し、初期たわみも許容値内に十分納まっている場合、その極限強度は初期たわみの影響を受けず、計算で得られる分岐座屈強度とほぼ一致する。(b) サブパネルの無次元幅厚比が R=0.9~1.1 の場合、極限強度は初期たわみの影響を相当受けると考えられ、計算で得られる分岐座屈強度より低い応力度レベルで耐荷力を失う。(c) 幅厚比のききわめて大きい R≒1.6 の場合、逆に分岐座屈強度より高い耐荷力を示す。したがって、この領域では初期たわみの影響を受けることもあるが、後座屈強度が十分に期待できる。

3. 道路橋示方書の圧縮補剛板に関する規定の検討

(1) 圧縮補剛板の基本座屈強度特性

道示の圧縮補剛板の設計基準では、補剛板の全体座屈強度が残留応力の影響を考慮したサブパネルの局部座屈強度と同等に期待できること、すなわち、全断面が降伏するまで座屈が起きないことを前提に、サブパネル（4辺単純支持の正方形板と仮定）と同一の塑性域での低減係数を使い、補剛材剛比の必要最小値が決定されている。したがって、補剛材内に存在する残留応力の影響は考慮されていない。ここでは、道示の規定を満足するように設計された長方形断面補剛材を有する補剛板を対象に、2.(3)、c)、③と同様、文献 14) に基づき実橋の実情を反映してモデル化した残留応力分布および大きさを採用し、道示の規定に従ってパラメーターを選び、その座屈強度をシリーズ解析する。

ここでは、2.(3)、c)、③で対象としたケース①を基本ケースとする。この基本ケースの補剛材剛比 r は、道示規定 3.4.2 における $t=t_0$ の場合すなわち R=0.7（もしくは $0.7 < R \leq 0.84$ ）の場合の必要最小剛比 r_N と一致する。ところが、わが国の実橋で採用されている補剛板の無次元幅厚比 R は 0.7 あるいは 0.7 弱の場合が多いので、巨視的には補剛材剛比が $r=r_N$ (R=0.7) となる基本ケースの座屈特性から道示の規定を定性的に論じうると考えられる。すなわち、ここでは道示の規定を定性的に論じる場合は、 $t=t_0$ として与えられる補剛材剛比 r_N の補剛板を、また、道示規定を詳細に検討する場合は $(t_0/t)^2$ の項を考慮した補剛材剛比 r_N の補剛板を対象とする。

a) 補剛材の本数 (N) (サブパネル数 (n))

補剛材本数が N=1(n=2)、同じく N=3(n=4)、N=5(n=6)、N=7(n=8) の場合について、N=3 の基本

ケースと同様に、道示の各規定を満足させ、残留応力の大きさも一定として、座屈強度曲線を求めた。その結果を図-11に示す。図より明らかなように、全体座屈曲線は $n=2$ の場合のみ少々傾向が異なっているだけで、 $n \geq 4$ ではほぼ同じ状況である。また、サブパネルの局部座屈強度の理論曲線は、補剛材のねじり剛性の効果を無視しているため、各補剛板に対して同一である。したがって、通常の使用範囲である $R \leq 0.7$ の領域で、これらの座屈強度は道示の設計極限強度を下まわりますが、補剛材剛比の規定は補剛材の本数のいかにかわらず同程度の安全率を与えられるので均衡がとれていると考えられる。

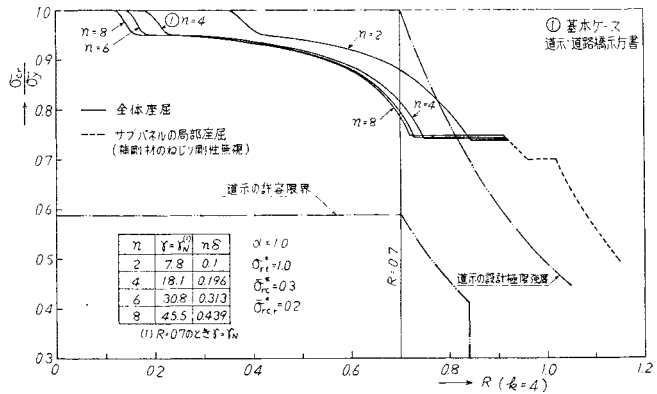


図-11 補剛材の本数と座屈強度の関係

b) 補剛板の縦横比 (α)

道示の圧縮補剛板の強度規定の基礎となり、Gienckeが示した縦横比 α と座屈係数 k の関係⁹⁾ および同示方書で塑性座屈領域を考慮して修正した両者の関係について、基本ケースの全体座屈を例にとり、二、三の検討を行った。その結果を図-12に示す。縦軸の ξk は、 $\sigma_{cr} = \xi k \cdot \sigma_e$ で表わされる換算座屈係数である。ここで、 σ_e は弾性基本座屈応力度、 k は弾性座屈係数、 ξ は道示の3.4節で定義している塑性領域での低減係数である。図中、曲線(A)は基本ケースの断面諸元に対してGienckeの理論解より求められる曲線で、 $\xi=1$ の場合である。曲線(B)は道示の考え方によって求められる曲線である。また、実線(1)、(2)、(3)は基本ケースの座屈応力度から計算される曲線である。したがって、それぞれに対応する座屈直前の塑性域の広がりまたは無次元幅厚比は必然的に決まる。

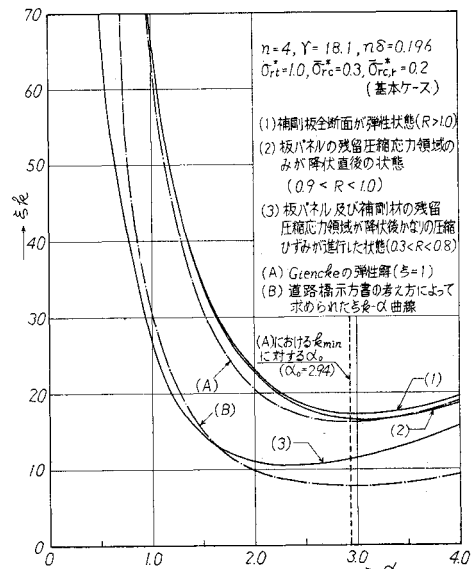


図-12 縦横比 α と換算座屈係数 ξk の関係

まず、残留応力の影響を考慮しても座屈直前は断面すべてが弾性状態の曲線(1)と残留応力を含まない弾性理論解の曲線(A)はほぼ一致している。これは、補剛板の剛性を低下させる残留圧縮応力領域と逆に向上させる残留引張応力領域とが混在し、補剛板全体が弾性域にある場合は、初期応力行列 K_{Sm} の中に両残留応力度の影響が同程度に含まれているためと考えられる。しかし、板パネルの残留圧縮応力領域が降伏した直後の曲線(2)も曲線(1)と大差がない。この状態でも割線係数 E_s 値とヤング係数 E 値とであまり相違がなく、また、降伏領域では $E_t=0$ となるための影響も顕著に現われてこない。それで上述したことがいえるものと考えられる。また、見方を変えれば、板パネルの一部が降伏しても、補剛板全体の座屈強度への影響はわずかであるともいえる。さらに、塑性域が広がって補剛材の残留圧縮応力領域も降伏すると様相が異なってくる(曲線(3))。すなわち、補剛材の一部が塑性化すると、補剛材の剛性が

急激に低下し、さらに、その応力レベルでは板パネルの塑性域も広がり、それに従って E_s 値が E 値に比べて大幅に低下するため、補剛板全体の剛性が低下することがその原因となっている。この状態は無次元幅厚比がちょうど実橋で一般に使用される範囲に対応し、 $r=18.1$ (一定)とし道示の考え方によって求められた $\xi k-\alpha$ 曲線(B)と比較対象となるものである。両者を比較すると、 $\alpha=1.0$ 弱から2.0付近まではほぼ一致しているが、その他の範囲では少し離れている。したがって、この範囲での道示の考え方は妥当であるといえる。

c) 鋼種

文献14)において、補剛板を構成する鋼種によって、残留応力の大きさが異なることを実験的に明らかにし、鋼種別に具体的な残留応力の大きさを提案した。ここでは、SS 41 (基本ケース)、SM 50、SM 53、SM 58 の4種類の鋼材を使用した補剛板に対して、文献14)に基

つき残留応力度およびモデル化した分布形状を決めた。そして、それらの影響を考慮して座屈強度特性を検討した。得られた座屈強度曲線を図-13に示す。対象とした各補剛板は、基本ケースと同様に、道示の規定の制限値と一致させ $t=t_0$ とした。これらの場合も $R=0.7$ 付近を境目に様相が異なり、 $R=0.6 \sim 0.7$ では一部で座屈強度の逆転現象がみられる。しかし、 $R \leq 0.7$ ではほとんど差異がなく、座屈強度が全般的に降伏点より低くなっているけれども、道示の鋼種別規定は均衡がとれている。

d) 補剛材剛比 (r)

現行道示の規定の中で特に重視されている補剛材の必要最小剛比 r_N の規定について検討する。ここで、サブパネルの無次元幅厚比が $R < 0.7$ の場合の r_N 低減規定を考慮する。図-14に基本ケース①を基準に補剛材剛比を $2r_N$, $5r_N$ にした場合の座屈強度曲線を示す。図中、無次元幅厚比 R の代表値に応じて要求される補剛材剛比 r_N を付記した。これらの数値より、たとえば $R \approx 0.5$ では $R=0.7$ の場合の約半分の剛比を有する補剛材にすればよいことがわかる。図より明らかなように、低減された補剛材剛比 r_N を適用すると、実橋で比較的良好に使用されている $R=0.5 \sim 0.7$ の範囲では無次元座屈応力度 σ_{cr}/σ_y が $0.81 \sim 0.85$ となる。これに対して、 $r=2r_N$ にすると $\sigma_{cr}/\sigma_y = 0.91 \sim 0.92$, $r=5r_N$ では $\sigma_{cr}/\sigma_y \approx 0.94$ となる。このように、 $r=2r_N$ 以上になると、 σ_{cr}/σ_y は $R=0.3 \sim 0.7$ の範囲でほぼ一定値となり、かつ、 $2r_N$ と $5r_N$ とではあまり実質的な差が認められない。しかも、 $5r_N$ にするには、T形断面の補剛材を必要とすることがあり、コスト高となる。また、場合によっては、製作不可能となることもある。

e) ハイブリッド補剛板

補剛材内に存在する残留応力の影響により、その一部が低荷重の段階で早期に降伏し、補剛材剛度が低下することを避けるために、板パネルより高降伏点の異種鋼材を使用することの有利性が提案されている⁹⁾。ここでは、 $\sigma_{yR}/\sigma_{yP} = 1.1, 1.2, 1.3$ の場合 (σ_{yR}, σ_{yP} はそれぞれ補剛材および板パネルの降伏点) についてそれぞれ座屈強度曲線を求めた。ただし、ここでは (6) と同様に $(t_0/t)^2$ による道示の補剛材剛比緩和規定を考慮した。その結果を σ_{yR}/σ_{yP}

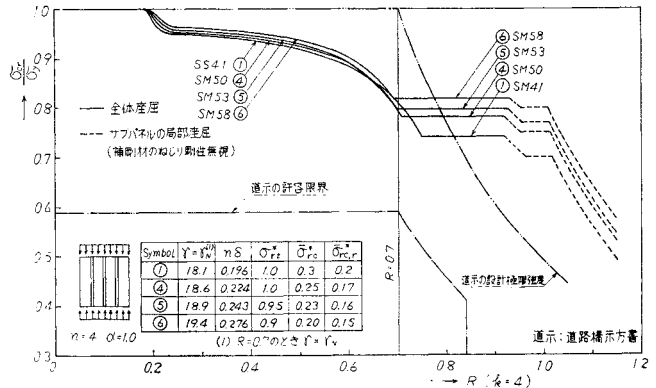


図-13 残留応力の影響を考慮した鋼種別の座屈強度曲線

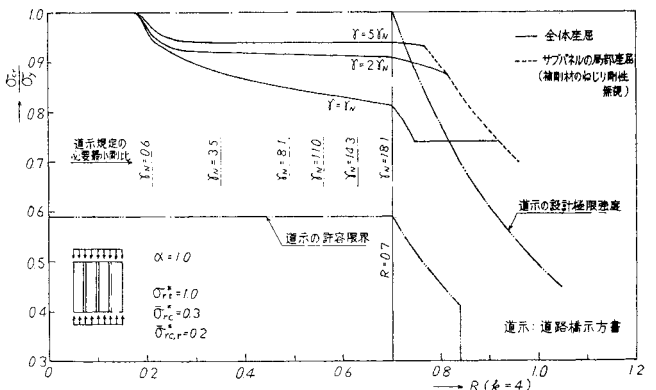


図-14 $(t_0/t)^2$ による緩和規定を考慮した補剛材剛比と座屈強度の関係

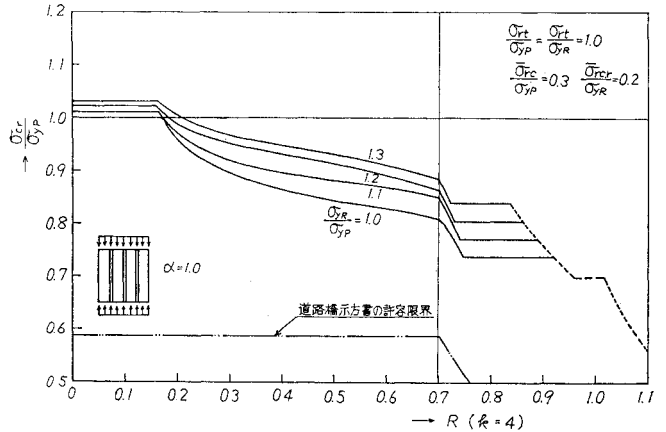


図-15 $(t_0/t)^2$ による緩和規定を考慮したハイブリッド補剛板の座屈強度曲線

=1.0 の基本ケース①と対比して図-15に示す。図より明らかなように、 $R > 0.2$ では $\sigma_{yR}/\sigma_{yP} = 1.3$ の場合でも座屈応力度は板パネルの降伏点をかなり下まわることがわかる。

(2) 圧縮補剛板に関連する規定の検討

a) 補剛材剛比と許容応力度

前述したように、道示の規定に準拠して縦横比などのパラメータを変化させて解析した結果、弾塑性座屈理論による座屈応力度と道示で定められている許容圧縮応力度との比は種々のパラメータの組合せに対してほぼ一定となった。すなわち、期待する安全率 $\mu=1.7$ に対して、実橋でもっともよく使用されている無次元幅厚比 R が $0.5\sim 0.7$ の範囲で、安全率は $\mu\cong 1.4$ となる。したがって、所定の安全率は確保されないが、道示の規定は均衡がとれているといえる。

また、著者らの行った実験結果からも、極限強度についてほぼ同様なことが明らかになっている¹³⁾。そこで、著者らの実験結果も含め、福本⁷⁾らおよび藤原^{10)~12)}の実験結果から $r\cong r_N$ 、 $\alpha=1.0\sim 2.0$ を対象にしたデータを選び、得られた極限強度を図-14の $r=r_N$ の座屈強度曲線と対比して図-16に示す。図から明らかなように、前述した解析結果と同様、極限強度の実験値の下限が設計極限強度に対して約2割低下している。したがって、これらの実験結果からも、実安全率はもっとも小さい場合、 $\mu^*\cong 1.4$ となることがわかる。

以上は、補剛材剛比が道示規定の必要最小値 ($r=r_N$) の場合であるが、福本⁷⁾を初め前述の一連の実験で対象とした $r=2r_N\sim 4r_N$ の場合でも、極限強度の大きな向上は望めず(図-16参照)、実安全率がせいぜい $\mu^*\cong 1.5$ になる程度であると推定される。また、前述したパラメトリック解析の結果からも剛度を2倍ないし5倍に上げて、座屈強度は降伏点まで向上せず、むしろ、安全率が $\mu=1.5\sim 1.6$ に収束することがわかる。これらを総合すると、 $r=r_N$ の場合は許容応力度を0.8倍に下げると、安全率 $\mu=1.7$ が確保できることになる。しかし、 $r=2r_N$ 以上の場合については、実験値のばらつきが大きいので、より精度のよい実験データの蓄積を待たなければならない。

一方、ハイブリッド補剛板は、藤原^{10)~12)}および阿部^{ら²²⁾}の実験結果によると、同一鋼種からなる補剛板の実験結果と比べて有意差が認められないとしている。また、前述した解析結果(図-15参照)からも、ハイブリッド補剛板の座屈強度の飛躍的向上は望めないことが明らかとなった。したがって、ハイブリッド補剛板については今後なお検討の余地があると考えられる。

以上の結果、現行道示の許容応力度設計法のもとで、圧縮補剛板についても橋梁を構成する他の構造要素の実安全率と均衡を保つべきであるという立場に立つ限り、

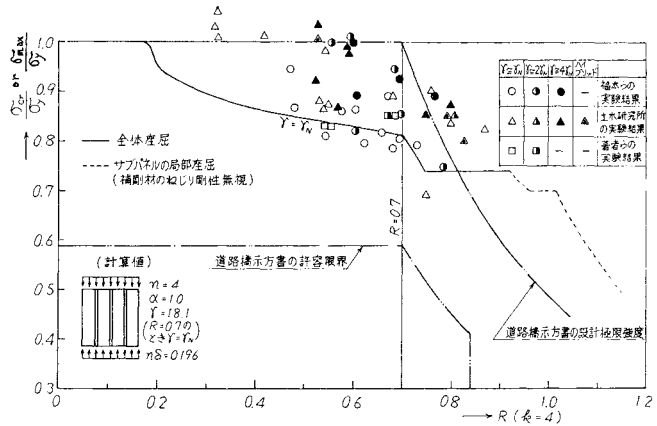


図-16 補剛材剛比の差異と極限強度との関係

許容応力度を低減すべきであろう。

b) サブパネルの幅厚比

2.(3).c)④で述べたように、サブパネルの無次元幅厚比の小さい $R\leq 0.7$ の領域では、本文で示した弾塑性線形座屈理論で求められる分岐座屈強度と実極限強度とほぼ一致するが、 $R>0.9$ の領域では両者に有意の差がつく。すなわち、 $0.9<R<1.2$ の範囲では極限強度は座屈強度より低下し、 $R>1.4$ では逆の状態になる。

そして、 $R\leq 0.7$ の領域では、サブパネルの初期たわみが道示の許容値に対して十分小さければ、初期たわみが極限強度に及ぼす影響も少なく、後座屈強度もほとんど期待できないため、残留応力のみを考慮した弾塑性線形座屈強度解析から極限強度が推定し得ると考えられる。したがって、座屈強度に基づく道示の強度規定の考え方も現段階では妥当であることが確認された。

しかし、 $R>0.9$ の領域では、初期たわみの座屈強度に及ぼす影響と後座屈強度の大きさとの関係で極限強度が決まる。反面、橋梁完成後は引張応力状態となるが、架設途中は圧縮応力状態である場合、主桁フランジにみられるようにスパン方向である区間にわたって小さな圧縮応力しか作用しない場合など現実に現行の幅厚比規定では不経済な設計を余儀なくされるケースがある。したがって、 $R>0.84$ の領域についても合理的設計法の制定が望まれる。そのためには、初期たわみが道示の許容値前後もしくはそれ以上の場合および $R>0.84$ の場合には、残留応力および初期たわみなどの初期不整を考慮した弾塑性有限変形解析による極限強度の検討が必要である。一方、初期たわみに対する実橋の実測データを蓄積し、初期たわみに関する規定を完備することも同様に重要である。これらに関しては、今後の研究成果に期待するところが多い。

4. 結 言

本文では、まず、圧縮補剛板に関して、残留応力については実橋の実情を忠実に反映させてモデル化した分布形状および大きさを考慮し、有限帯板法による立体薄肉構造物の弾塑性線形分岐座屈強度解析手法により、その座屈強度を種々の無次元パラメーターに対して数値計算した。そして、その結果および著者らがすでに実施した圧縮耐荷力実験をもふまえて、現行道示の圧縮補剛板の強度規定についてその妥当性を検討するとともにある種の提言を行った。以上の結果、得られた要点は次のようである。

(1) 現行の道示の圧縮補剛板の補剛材剛比規定に準拠した場合、種々のパラメーターに対して実安全率は $\mu^* \cong 1.4$ となる。しかし、必要最小補剛材剛比を2倍ないし5倍に上げて、また、補剛材に板パネルの鋼種より一段上の高強度鋼種を使用しても（ハイブリッド補剛板）、それはせいぜい $\mu^* = 1.5 \sim 1.6$ にとどまり、期待する安全率 $\mu = 1.7$ を確保することは困難である。

(2) したがって、座屈応力度を降伏点まで高める方策は、非合理的かつ不経済な断面の追求となる。そこで、想定している設計極限強度である降伏点からの低下量を考慮して、 $r = r_N$ の場合は $R = 0.3 \sim 0.7$ の範囲に対して許容圧縮応力度を現行規定の0.8倍に低減すると、期待する所定の安全率 $\mu = 1.7$ が確保できる。

(3) サブパネルの無次元幅厚比 $0.9 < R < 1.3$ の領域については、分岐座屈理論よりもむしろ初期たわみを考慮した有限変形理論を適用することが必要であると考えられる。

付録 式(16)および式(17)の K_{Gem} と K_{Sem} の詳細

(1) 面外変形に関連する項

$$K_{Geom} - \lambda^2 K_{Seom} = \frac{\pi^4 \cdot D^*}{a_0^2 b^*} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{im} \cdot b^* & \bar{w}_{im} & \bar{\theta}_{jm} \cdot b^* & \bar{w}_{jm} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{bmatrix} & \bar{\theta}_{im} \cdot b^* & \bar{w}_{im} & \bar{\theta}_{jm} \cdot b^* & \bar{w}_{jm} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \left(\frac{b_e}{b^*}\right) \cdot \left(\frac{t_e}{t^*}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{105} m^4 \cdot A_1 + \frac{4}{15} m^2 \cdot A_2 + 4 A_3 + \frac{8}{15} m^2 \cdot A_4\right) - \lambda^2 \cdot \frac{1}{105} m^2 \cdot \left(\frac{b_e}{b^*}\right)^2 \cdot \zeta$$

$$a_{12} = \left(\frac{t_e}{t^*}\right)^3 \cdot \left(\frac{11}{210} m^4 \cdot A_1 + \frac{6}{5} m^2 \cdot A_2 + 6 A_3 + \frac{2}{5} m^2 \cdot A_4\right) - \lambda^2 \cdot \frac{11}{210} m^2 \cdot \left(\frac{b_e}{b^*}\right) \cdot \zeta$$

$$a_{13} = \left(\frac{b_e}{b^*}\right) \cdot \left(\frac{t_e}{t^*}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{140} m^4 \cdot A_1 - \frac{1}{15} m^2 \cdot A_2 + 2 A_3 - \frac{2}{15} m^2 \cdot A_4\right) + \lambda^2 \cdot \frac{1}{140} m^2 \cdot \left(\frac{b_e}{b^*}\right)^3 \cdot \zeta$$

$$a_{14} = \left(\frac{t_e}{t^*}\right)^3 \cdot \left(\frac{13}{420} m^4 \cdot A_1 - \frac{1}{5} m^2 \cdot A_2 - 6 A_3 - \frac{2}{5} m^2 \cdot A_4\right) - \lambda^2 \cdot \frac{13}{420} m^2 \cdot \left(\frac{b_e}{b^*}\right) \cdot \zeta$$

$$a_{22} = \left(\frac{b_e}{b^*}\right) \cdot \left(\frac{t_e}{t^*}\right)^3 \cdot \left(\frac{13}{35} m^4 \cdot A_1 + \frac{12}{5} m^2 \cdot A_2 + 12 A_3 + \frac{24}{5} m^2 \cdot A_4\right) - \lambda^2 \cdot \frac{13}{35} m^2 \cdot \zeta$$

$$a_{24} = \left(\frac{b_e}{b^*}\right) \cdot \left(\frac{t_e}{t^*}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{70} m^4 \cdot A_1 - \frac{12}{5} m^2 \cdot A_2 - 12 A_3 - \frac{24}{5} m^2 \cdot A_4\right) - \lambda^2 \cdot \frac{9}{70} m^2 \cdot \zeta$$

$$a_{23} = -a_{14}, \quad a_{33} = a_{11}, \quad a_{34} = -a_{12}, \quad a_{44} = a_{22}$$

ここで、

$$m : \text{次数 (整数)}, \quad D^* = \frac{E(t^*)^3}{12}$$

$$A_1 = \left(\frac{b^*}{a_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{b_e}{b^*}\right)^2 \cdot k_{11}, \quad A_2 = \frac{k_{12}}{\pi^2}$$

$$A_3 = \left(\frac{a_0}{b^*}\right)^2 \cdot \left(\frac{b^*}{b_e}\right)^2 \cdot \frac{k_{22}}{\pi^4}, \quad A_4 = \frac{k_{33}}{\pi^2}$$

$$\zeta = \frac{1}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{b_e}{b^*}\right) \cdot \left(\frac{t_e}{t^*}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_{xz, e^0}}{\sigma_y}\right)$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{b^*}{t^*}\right)^2 \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2} \cdot \left(\frac{\sigma_y}{E}\right)$$

(2) 面内変形に関連する項

$$K_{Gem} - \lambda^2 K_{Seim} = \frac{\pi^4 \cdot D^*}{a_0^2 b^*} \begin{bmatrix} \bar{u}_{im} & \bar{v}_{im} & \bar{u}_{jm} & \bar{v}_{jm} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{bmatrix} & \bar{u}_{im} & \bar{v}_{im} & \bar{u}_{jm} & \bar{v}_{jm} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = (4 m^2 \cdot B_1 + 12 B_4) - \lambda^2 \cdot \frac{1}{3} m^2 \cdot \zeta$$

$$a_{12} = (6 m \cdot B_2 - 6 m \cdot B_5)$$

$$a_{13} = (2 m^2 \cdot B_1 - 12 B_4) - \lambda^2 \cdot \frac{1}{6} m^2 \cdot \zeta$$

$$a_{14} = (-6 m \cdot B_2 - 6 m \cdot B_5)$$

$$a_{22} = (12 B_3 + 4 m^2 \cdot B_6) - \lambda^2 \cdot \frac{1}{3} m^2 \cdot \zeta$$

$$a_{24} = (-12 B_3 + 2 m^2 \cdot B_6) - \lambda^2 \cdot \frac{1}{6} m^2 \cdot \zeta$$

$$a_{23} = -a_{14}, \quad a_{33} = a_{11}, \quad a_{34} = -a_{12}, \quad a_{44} = a_{22}$$

ここで、

$$B_1 = \left(\frac{b^*}{t^*}\right)^2 \cdot \left(\frac{t_e}{t^*}\right) \cdot \left(\frac{b_e}{b^*}\right) \cdot \frac{k_{11}}{\pi^2}$$

$$B_2 = \left(\frac{b^*}{t^*}\right)^2 \cdot \left(\frac{t_e}{t^*}\right) \cdot \left(\frac{a_0}{b^*}\right) \cdot \frac{k_{12}}{\pi^3}$$

$$B_3 = \left(\frac{b^*}{t^*}\right)^2 \cdot \left(\frac{t_e}{t^*}\right) \cdot \left(\frac{b^*}{b_e}\right) \cdot \left(\frac{a_0}{b^*}\right)^2 \cdot \frac{k_{22}}{\pi^4}$$

$$B_4 = \left(\frac{b^*}{t^*}\right)^2 \cdot \left(\frac{t_e}{t^*}\right) \cdot \left(\frac{b^*}{b_e}\right) \cdot \left(\frac{a_0}{b^*}\right) \cdot \frac{k_{33}}{\pi^4}$$

$$B_5 = \left(\frac{b^*}{t^*}\right)^2 \cdot \left(\frac{t_e}{t^*}\right) \cdot \left(\frac{a_0}{b^*}\right) \cdot \frac{k_{33}}{\pi^3}$$

$$B_6 = \left(\frac{b^*}{t^*}\right)^2 \cdot \left(\frac{t_e}{t^*}\right) \cdot \left(\frac{b_e}{b^*}\right) \cdot \frac{k_{33}}{\pi^2}$$

参考文献

- 1) たとえば、前田幸雄：海外における最近の橋梁事故について、生産と研究、25巻、3号、1973年3月。
- 2) たとえば、DIN 4114—Stahlbau, Stabilitätsfälle (Knickung, Kippung, Beulung), RdErl. d. Innenministers v. 30. 5. 1973, Der Stahlbau, 43 Jg., H. 2, S. 62 ~63, Feb. 1974.
- 3) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説、1973年2月。
- 4) Giencke, E : Über die Berechnung regelmäßiger Konstruktionen als Kontinuum, Der Stahlbau, 33, Jg., H. 2, Feb. 1964.
- 5) 土木学会：鋼鉄道橋設計標準解説、1974年改訂版、1974年4月。
- 6) 長谷川彰夫・大田孝二・西野文雄：補剛された板要素の座屈強度に関する二、三の考察、土木学会論文報告集、第232号、1974年12月。
- 7) Fukumoto, Y., T. Usami and Y. Okamoto : Ultimate compressive strength of stiffened plates, the ASCE Specialty Conf. on Metal Bridges, St. Louis, Nov. 1974.
- 8) 土木学会：本州四国連絡橋鋼上部構造に関する調査研究

報告書、別冊1、補剛材つき圧縮板の設計要領(案)、1974年3月。

- 9) 日本国有鉄道構造物設計事務所：鋼橋設計内規 8-1 A, 板要素の幅厚比と補剛材、1975年9月。
- 10) 藤原 稔・原 道彦・雨宮栄一郎：補剛された板の圧縮耐荷力に関する実験的研究、土木学会第30回年次学術講演会概要集第1部、1975年10月。
- 11) 金子忠男・井上啓一・雨宮栄一郎：補剛された板の圧縮耐荷力に関する実験的研究(第2報)、土木学会第31回年次学術講演会概要集第1部、1976年10月。
- 12) 金子忠男・金井道夫・雨宮栄一郎：補剛された板の圧縮耐荷力に関する実験的研究(第3報)、土木学会第32回年次学術講演会概要集第1部、1977年10月。
- 13) 小松定夫・牛尾正之・北田俊行：補剛材を有する圧縮板の極限強度に関する実験的研究、土木学会論文報告集、第255号、1976年11月。
- 14) 小松定夫・牛尾正之・北田俊行：補剛板の溶接残留応力および初期たわみに関する実験的研究、土木学会論文報告集、第265号、1977年9月。
- 15) 宇佐美勉：補剛材つき板の弾性ならびに非弾性圧縮座屈強度、土木学会論文報告集、第228号、1974年8月。
- 16) Cheung, Y.K. : Finite strip method analysis of elastic slabs, Jour. of Engineering Mechanics Div., Proc. of the ASCE, Vol. 94, No. EM 6, Dec. 1968.
- 17) 吉田宏一郎：帯板要素による平板構造の座屈解析、日本造船学会論文集、130号、1971年12月。
- 18) Stowell, E.Z. : A unified theory of plastic buckling of columns and plates, NACA, Technical Note, No. 1556, Apr. 1948.
- 19) Bijlaard, P.P. : Theory and tests on the plastic stability of plates and shells, Jour. of the Aeronautical Science, Vol. 16, No. 9, Sep. 1949.
- 20) Cheung, Y.K. : Folded plate structures by finite strip method, Jour. of the Structural Div., Proc. of the ASCE, Vol. 95, No. ST 12, Dec. 1969.
- 21) DIN 4114 Blatt 1 : Stahlbau, Stabilitätsfälle (Knickung, Kippung, Beulung), Berechnungsgrundlagen, Vorshriften, Juli 1952, Blatt 2 : Richtlinien, Feb. 1953.
- 22) 阿部英彦・阪本謙二・寺田博昌：補剛材付き板の座屈強度、構造物設計資料、No. 48, 1976年12月。

(1977.11.16・受付)