

## 降雨-流出系における非線形流出核の理論的導出について

THEORETICAL DERIVATION OF NONLINEAR RUNOFF  
KERNELS OF RAINFALL-RUNOFF SYSTEM

日野 幹 雄\*・灘 岡 和 夫\*\*

By Mikio HINO and Kazuo NADAOKA

## 1. 序 論

降雨-流出系における非線形性の問題は、水文現象の確率性などの問題とともに、重要な課題である。とりわけ、わが国のように河川が比較的急峻な場合には、非線形性が強く現われるので、従来の単位図法に代表される線形モデルの適用性はかなり限定される。

近年、流出解析の面において、流出モデルに非線形性を取り入れることにより、予測精度の向上を図るさまざまな努力がなされるようになってきている。実用面においては、従来の単位図法に代わって、パラメトリックな形で非線形性を取り込んでいる貯留関数法やタンクモデルなどが用いられるようになってきている。

これらは、いわゆる“Parametric Hydrology”に属する手法であるが、より理論的な観点からいえば、流出解析における非線形性の問題は、以下に述べるように、“Stochastic Hydrology”と“Dynamic Hydrology”の2つの方法論的立場から取り扱われていると考えられる。

## (1) Stochastic Hydrology

Stochastic Hydrology は、流出システムに関する情報を、確率理論を用いることにより、観測された水文データから客観的に導き出すことを目的とするものである、と著者らは考えている。この立場からは、近年に至って大きな進歩がみられ、特に、水文データの解析に、Wiener の確率的非線形理論<sup>1)</sup>を適用しようとする種々の試みがなされてきている(たとえば、日野・鋤柄・吉川<sup>2),3)</sup>(1970, 1971)— $\delta$  遅延 フィルター 相関法、Amorocho and Brandstetter<sup>4)</sup>(1971)—重回帰分析、および Meixner 関数展開法、Bidwell<sup>5)</sup>(1971)—stepwise regression 法、Kuchment and Borshchevsky<sup>6)</sup>(1971)—

アナログ回路による Laguerre 関数展開、Zand and Harder<sup>7)</sup>(1973)—Forsythe 多項式展開、白石・大西・伊藤<sup>8)</sup>(1974)—重回帰分析、四ヶ所・田中・戸原<sup>9)</sup>(1974)—相互相関および三重相関法、日野・砂田<sup>10)</sup>(1976)—拡張  $\delta$  遅延フィルター相関法、等々)。

これらの解析は、すべて実データに基づいて行われているが、このことは、stochastic な方法の一つの欠点にもなっている。すなわち、これらの解析方法によって導出された非線形核は、個々の水文データに依存しており、一般性に欠けるといううらみがある。

## (2) Dynamic Hydrology

一般的にいて、現象を支配する基礎方程式が与えられていれば、その現象は原理的には数学的方法によって理論的に解けるはずである。降雨-流出現象は、明らかに、流体運動に関する基礎方程式によって支配される自然現象であるから、その基礎方程式から演繹的に現象を説明することは原理的に可能である。このような考え方に基本をおくのが、いわゆる“Dynamic Hydrology”である。

ところで、流出現象の非線形性は、本質的には基礎方程式が非線形であることに起因している。したがって、現象の解明にあたっては、系の基礎方程式から出発する Dynamic Hydrology の立場が有効であることが予想されるが、反面、方程式の非線形性は、閉じた形の解析解を得ることを困難にさせる大きな要因となっている。そのため、ほとんどの場合、数値的に解が求められているが、このことは、流出系の全般的な理解を困難にする結果となっている。いいかえると、力学的方法は、局所的な力学的過程を記述する方程式に基づくものであるが、方程式の非線形性のゆえに閉じた形の解析解が得られないということから、入力に対する非線形システムの全応答を overall な形で理解することが難しい。

一方、stochastic な方法は、流出系を Black Box シ

\* 正会員 工博 東京工業大学 教授 土木工学科

\*\* 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所水工部

システムとして扱うものであるが、いくつかの有利な点も持っている。たとえば、システムへの入力の効果は、降雨に対する流出系の全応答を把握しようとする積分形で与えられる。

このように、Dynamic hydrology と Stochastic hydrology は、まったく対照的な性格を有しているように思われる。すなわち、前者は基礎方程式を解析的にあるいは数値的に解こうとするものであるが、後者においては、観測データにまったく依存した方法がとられる。しかしながら、著者らは、これらの二つの方向は、決して互いに背反しあうものではないと考え、これまでもその努力を続けてきた<sup>11),12)</sup>。

そこで本論文では、これらの二つの方向を結合させることを試みた。すなわち、線形核と非線形核の解析的表現が、流出系の力学的過程を支配する基礎方程式から導出される。なお、すでに述べたように、水文観測量の解析に有効であった Wiener の確率的非線形理論—“直交汎関数”展開法が本論文においても用いられている。

## 2. 理 論

### (1) 流出系のモデル

ここでは、以下のような仮定を設ける。

- a) 降雨変動は、定常確率過程であり、かつ正規ホワイトノイズとする。
- b) 降雨は、空間的に一様とする。
- c) 有効降雨に対する表面流出のみを考える。
- d) 流域の特性を表わすパラメーター（たとえば、粗度係数など）は、時間不変とする。
- e) 流域は、勾配一定の理想的流域とする（図-1）。

上記 a)~e) のうち、a), d) の仮定は、Wiener の非線形確率過程の理論を適用するにあたって要請される制限である。しかし、b) の仮定（降雨の空間的一様性）は、数学的な煩雑さをいとわなければ取り除くことは可能である。

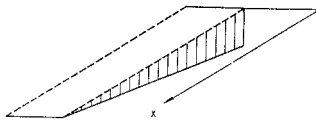


図-1 流域のモデル

### (2) 基礎方程式

流体運動を記述する基礎方程式は、連続式(1)と運動方程式であるが、本論文では、運動方程式の代わりに抵抗則(2)を用いる。すなわち、いわゆる“kinematic wave”理論としての approach である。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = R(t) \dots\dots\dots (1)$$

$$u(x, t) = \alpha h^m(x, t) \dots\dots\dots (2)$$

あるいは、

$$q(x, t) = \alpha h^{m+1}(x, t) \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $h(x, t)$ ：水深、 $q(x, t)$ ：単位幅当りの流量、

$R(t)$ ：降雨強度、 $u(x, t)$ ：平均流速、 $\alpha$ ：摩擦係数、 $m$ ：定数パラメーター

式(3)は、式(4)のようなべき級数の形で表わせる。

$$q = \alpha h + b h^2 + c h^3 + \dots\dots\dots (4)$$

式(4)を式(1)に代入すると、基礎方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (\alpha + 2bh + 3ch^2 + \dots) \frac{\partial h}{\partial x} = R(t) \dots\dots (5)$$

単純に考えると、流量  $q$  は第1次近似として、降雨強度  $R$  に比例するとみなせるので、従属変数としては、単位図法におけるように、流量  $q$  を用いる方が適しているように思われる。しかし実はそうではない。それは、次のような理由による。

(i) 式(4)のような、 $q$  の  $h$  に関するべき級数展開は、もし、第二項までで打ち切ったとしても、実際の  $q$  と  $h$  の関係に対してよい近似を与える。一方、 $q$  の二次のべきまでで打ち切った  $h$  のべき級数展開 ( $h \cong \alpha'q + b'q^2 + 0(q^3)$ ) ではよい近似を得ることはできない。

(ii) ピーク流量  $q_m$  は、ピーク降雨強度  $R_m$  と近似的に次のような関係のあることが経験的に知られている<sup>13)</sup>。

$$q_m \propto \alpha R_m + \beta R_m^2$$

上式と式(4)を合わせて考えると、 $R$  の  $h$  に関する線形領域は、 $q$  に関するものよりもより広くなると考えられる。

(iii)  $h$  と  $R$  の間の非線形関係を二次の項までで打ち切って式(4)に代入すると、 $q$  は  $R$  の4次の項まで含むことになり、強い非線形性が考慮されたことになる。以上の理由により、本論文では、流量  $q$  ではなく水深  $h$  を従属変数として採用した。

### (3) 核関数に関する関係式の導出

降雨強度  $R(t)$  を、次式のように分離して表わす。

$$R(t) = \bar{R} + r(t) \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $\bar{R}$  と  $r(t)$  は、それぞれ平均値および白色雑音成分である ( $R > 0$  でなくてはならないので  $\bar{R} \gg r$  とする)。すなわち、

$$E[R(t)] = \bar{R} \dots\dots\dots (7)$$

$$E[r(t_1) \cdot r(t_2)] = k \delta(t_1 - t_2) \dots\dots\dots (8)$$

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} E[r(t) \cdot r(t-\sigma)] d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} C_{ii}(\sigma) d\sigma \dots\dots\dots (9)$$

上式中,  $E[\cdot]$  は, ensemble average,  $\delta(t)$  は Dirac のデルタ関数を意味している. また,  $C_{ii}(\sigma)$  は  $r(t)$  の自己相関関数であり,  $k$  は降雨変動強度を表わしている.

出力  $h(x, t)$  は, 入力  $r(t)$  に応じて定常な確率変量となるが, それを直交汎関数展開表示とすると,

$$h(x, t) = K_0(x) + \int_{-\infty}^t K_1(x; t-\sigma) R_1(\sigma) d\sigma + \iint_{-\infty}^t K_2(x; t-\sigma_1, t-\sigma_2) R_2(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + \dots \dots \dots (10)$$

ここで,  $K_0, K_1, K_2, \dots$  は, 非確率的核関数で, 特に次の性質がある.

$$K_0(x) = E[h(x, t)] \dots \dots \dots (11)$$

$$K_2(x; t_1, t_2) = K_2(x; t_2, t_1) \dots \dots \dots (12)$$

また,  $R_1, R_2, \dots$  は, 式 (13) で定義される確率関数  $r(t)$  の Hermite 多項式表示である.

$$\left[ \begin{array}{l} R_0 = 1 \\ R_1(t) = r(t) \\ R_2(t_1, t_2) = r(t_1)r(t_2) - k\delta(t_1 - t_2) \\ R_3(t_1, t_2, t_3) = r(t_1)r(t_2)r(t_3) - kr(t_1)\delta(t_2 - t_3) \\ \quad - kr(t_2)\delta(t_1 - t_3) - kr(t_3)\delta(t_1 - t_2) \\ R_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = r(t_1)r(t_2)r(t_3)r(t_4) \\ \quad - k\sum r(t_i)r(t_j)\delta(t_k - t_l) \\ \quad + k^2\sum\delta(t_i - t_j)\delta(t_k - t_l) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \dots \dots \dots (13)$$

上記のうち, summation  $\Sigma$  は,  $i, j, k, l$  のすべての可能な組み合わせ (ただし,  $i \neq j \neq k \neq l$  とする) についての和をとることを意味している.

関数  $R_i$  は, 以下のような ensemble average の意味での直交性を有する.

$$E[R_m \cdot R_n] = 0 \quad (m \neq n, m, n = 0, 1, 2, \dots) \dots \dots \dots (14)$$

$$\begin{aligned} E[R_1(t_1) \cdot R_1(t_2)] &= k\delta(t_1 - t_2) \\ E[R_2(t_1, t_2) \cdot R_2(t_3, t_4)] &= k^2\delta(t_1 - t_3)\delta(t_2 - t_4) + k^2\delta(t_1 - t_4)\delta(t_2 - t_3) \\ \text{etc.} &\dots \dots \dots \end{aligned} (15)$$

次に, 抵抗則 (4) は第2項までとるものとし, さらに,  $h$  の直交汎関数展開表示 (10) を2次の項までで打ち切り, 式 (5) に代入する. そうすると次式を得る.

$$K_1(x; 0)R_1(t) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial K_1(x; t-\sigma)}{\partial t} R_1(\sigma) d\sigma + \int_{-\infty}^t K_2(x; 0, t-\sigma_2) R_2(t, \sigma_2) d\sigma_2 + \int_{-\infty}^t K_2(x; t-\sigma_1, 0) R_2(\sigma_1, t) d\sigma_1 + \iint_{-\infty}^t \frac{\partial K_2(x; t-\sigma_1, t-\sigma_2)}{\partial t} R_2(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2$$

$$\begin{aligned} &+ \{a + 2bK_0(x)\} \frac{d}{dx} K_0(x) \\ &+ 2b \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x} \{K_0(x) \cdot K_1(x; t-\sigma)\} R_1(\sigma) d\sigma \\ &+ 2b \iint_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x} \{K_0(x) K_2(x; t-\sigma_1, t-\sigma_2)\} \\ &\cdot R_2(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + a \int_{-\infty}^t \frac{\partial K_1(x; t-\sigma)}{\partial x} R_1(\sigma) d\sigma \\ &+ a \iint_{-\infty}^t \frac{\partial K_2(x; t-\sigma_1, t-\sigma_2)}{\partial x} R_2(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \\ &+ 2b \int_{-\infty}^t K_1(x; t-\sigma_1) \frac{\partial K_1(x; t-\sigma_2)}{\partial x} \\ &\cdot R_2(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + bk \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x} \{K_1(x; t-\sigma)\}^2 d\sigma \\ &+ 2b \iiint_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x} \{K_1(x; t-\sigma) K_2(x; t-\sigma_1, t-\sigma_2)\} \\ &\cdot R_3(\sigma, \sigma_1, \sigma_2) d\sigma d\sigma_1 d\sigma_2 + 4bk \iint_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x} \\ &\cdot \{K_1(x; t-\sigma) \cdot K_2(x; t-\sigma_1, t-\sigma_2)\} \\ &\cdot R_1(\sigma_1) d\sigma_1 d\sigma_2 + 2b \iiint_{-\infty}^t K_2(x; t-\sigma_1, t-\sigma_2) \\ &\cdot \frac{\partial K_2(x; t-\sigma_3, t-\sigma_4)}{\partial x} R_4(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \\ &\cdot d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 d\sigma_4 + 8bk \int_{-\infty}^t K_2(x; t-\sigma_1, t-\sigma_1) \\ &\cdot \frac{\partial K_2(x; t-\sigma, t-\sigma_2)}{\partial x} R_2(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma d\sigma_1 d\sigma_2 \\ &+ 2bk^2 \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x} \{K_2(x; t-\sigma_1, t-\sigma_2)\}^2 d\sigma_1 d\sigma_2 \\ &= \bar{R} + R_1(t) \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

上記の方程式の導出の過程において, 次式で示すような微分演算に関する関係式を用いている.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{A(t)}^{B(t)} f(t, \sigma) d\sigma &= \int_{A(t)}^{B(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, \sigma) d\sigma \\ &+ f(t, B(t)) \frac{dB(t)}{dt} - f(t, A(t)) \frac{dA(t)}{dt} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{C(t)}^{D(t)} \int_{A(t)}^{B(t)} g(t, \sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \\ &= \int_{C(t)}^{D(t)} \int_{A(t)}^{B(t)} \frac{\partial}{\partial t} g(t, \sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \\ &+ \int_{C(t)}^{D(t)} g(t, B(t), \sigma_2) \frac{dB(t)}{dt} d\sigma_2 \\ &+ \int_{A(t)}^{B(t)} g(t, \sigma_1, D(t)) \frac{dD(t)}{dt} d\sigma_1 \\ &+ \int_{D(t)}^{C(t)} g(t, A(t), \sigma_2) \frac{dA(t)}{dt} d\sigma_2 \\ &+ \int_{B(t)}^{A(t)} g(t, \sigma_1, C(t)) \frac{dC(t)}{dt} d\sigma_1 \\ &\dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

式 (16) から, 核関数  $K_0, K_1, K_2$  を決定する関係式を得るために,  $R_i$  に関する直交性を利用する. そのために, まず式 (16) の両辺に順次  $R_0, R_1(\tau), R_2(\tau_1, \tau_2)$  をかける. そうした後, それぞれの場合について ensemble average をとると, 以下の式 (18)~(20) に示す

ような核関数  $K_0, K_1, K_2$  を決定する連立微積分方程式を得る。

$$\left\{ \begin{aligned} & \{a+2bK_0(x)\} \frac{d}{dx} K_0(x) + bk \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x} \\ & \cdot \{K_1(x; t-\tau)\}^2 d\tau + 2bk^2 \iint_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x} \\ & \cdot \{K_2(x; t-\tau_1, t-\tau_2)\}^2 d\tau_1 d\tau_2 = \bar{R} \dots\dots\dots (18) \\ & K_1(x; 0) \delta(t-\tau) + \frac{\partial K_1(x; t-\tau)}{\partial t} \\ & + a \frac{\partial K_1(x; t-\tau)}{\partial x} + 2b \frac{\partial}{\partial x} \{K_0(x) K_1(x; t-\tau)\} \\ & + 4bk \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x} \{K_1(x; t-\sigma) K_2(x; t-\tau, t-\sigma)\} \\ & \cdot d\sigma = \delta(t-\tau) \dots\dots\dots (19) \\ & K_2(x; 0, t-\tau_2) \delta(t-\tau_1) + K_2(x; t-\tau_1, 0) \delta(t-\tau_2) \\ & + \frac{\partial K_2(x; t-\tau_1, t-\tau_2)}{\partial t} + a \frac{\partial K_2(x; t-\tau_1, t-\tau_2)}{\partial x} \\ & + 2b \frac{\partial}{\partial x} \{K_0(x) \cdot K_2(x; t-\tau_1, t-\tau_2)\} \\ & + b \frac{\partial}{\partial x} \{K_1(x; t-\tau_1) K_1(x; t-\tau_2)\} \\ & + 4bk \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x} \{K_2(x; t-\sigma, t-\tau_1) \\ & \cdot K_2(x; t-\sigma, t-\tau_2)\} d\sigma = 0 \dots\dots\dots (20) \end{aligned} \right.$$

(4) 核関数の一般的性質

式 (18)~(20) をみると、わざわざこれらを解くまでもなく、以下のような核関数に関する一般的性質を知ることができる。

(i) 核関数の決定に関連するパラメーターは、抵抗則の中の係数  $a, b$  と入力情報の確率的特性量すなわち、 $\bar{R} = E[R(t)]$  および  $k = \int_{-\infty}^{\infty} E[r(t)r(t+\tau)] dt$  である。したがって、応答核を、その流域の特性のみによって決定される固有のものとする見方には問題があるといえる。また、このことは、線形核  $K_1$  に対応する単位図を降雨レベル  $\bar{R}$  に応じて変化させねばならないという石原・金丸ら<sup>14)</sup>の指摘に一つの理論的根拠を与えるものであると思われる。ただし、線形核  $K_1$  は、平均入力レベル  $\bar{R}$  だけでなく、変動レベル（二次モーメント） $k$  にも依存しており、 $\bar{R}$  に対する依存性のみを考慮するのでは十分とはいえない。もっとも、入力情報を  $\bar{R}, k$  値だけで代表させ得るのは、入力として定常な正規ホワイトノイズを用いているからであって、したがって、一般の降雨のような場合には、核関数は、skewness, flatness 等々のさらに高次のモーメントに依存して決定されることになる。

(ii) 式 (18)~(20) の中で、降雨変動レベル  $k$  は、

\* 線形系の核を、非線形系のそれと区別するために  $\hat{K}_0, \hat{K}_1$  と書く。もちろん、 $\hat{K}_2$  以下はない。

常に非線形パラメーター  $b$  と結びついて現われている。このことは、 $k$  値が線形（あるいは一次）および非線形（二次以上）応答核の決定に関連してくるのは系が非線形系の場合のみであるということの意味している。

また、非線形系での各次の応答核は、それぞれ独立に決定されず、互いに他との連関をもっている。換言すれば、各次の応答核間には interaction が存在する。

(iii) 非線形系では、 $K_0$  と  $K_1$  は互いに連関をもち、(i) で述べたように、 $\bar{R}$  と  $k$  の値に影響されるが、線形系では、それらは独立に決定され、平均降雨レベル  $\bar{R}$  は、 $K_0$  のみ影響する。また、式 (19) において  $b \equiv 0$  (および、 $K_2 \equiv 0$ ) とすればわかるように、線形系\* での線形核  $\hat{K}_1$  は、 $\bar{R}, k$  値には関係せず、流域のパラメーター  $a$  のみによって決定される。いいかえると、線形系では、 $\hat{K}_1$  は入力情報のパラメーターにまったく依存しないで決定される。

上記 (ii), (iii) で述べたことは、次のような事情によるものと解釈される。すなわち、もし系が線形だとある時点に降った一滴降雨は、その前後の雨の降り方に関係なく、いまの時点に独立に影響するのに対し、非線形の場合には、その影響の仕方が、いままでの全歴史に関係してくる。

3. 線形流出系の流出核\*

(1) 核関数  $\hat{K}_0$  および  $\hat{K}_1$  について

式 (18) において、 $b=0$  とし、それを  $\hat{K}_0=0$  (at  $x=0$ ) の境界条件のもとに解けば、

$$\hat{K}_0(x) = \frac{\bar{R}}{a} x \dots\dots\dots (21)$$

となり、平均水深が上流端からの距離  $x$  に比例して増大していくことがわかる。

次に式 (19) において  $b=0$  とすれば、次のような線形核  $\hat{K}_1$  に関する偏微分方程式を得る。

$$\frac{\partial \hat{K}_1(x; t-\tau)}{\partial t} + a \frac{\partial \hat{K}_1(x; t-\tau)}{\partial x} = \delta(t-\tau) \dots\dots (22)$$

境界条件として、

$$\hat{K}_1(x; t) = 0 \text{ (at } x=0, \text{ for } t \geq 0) \dots\dots\dots (23)$$

を与えれば、式 (22) の解は次のようになる。

$$\hat{K}_1(x, t) = \frac{1}{2} \text{sgn}[(x-at)/a] + \frac{1}{2} \text{sgn}[t] \dots\dots (24)$$

ここで、 $\text{sgn}[\cdot]$  は、符号関数 (sign function) である。式 (24) の関係を図示すると 図-2 のようになる。これは次のことを意味している。すなわち、線形流出系におけるある点  $x$  での応答は、最上流端での降雨がその点に流達するまで、一定強度で継続する (集中時間  $x/a$ )。換言すれば、流域に単位降雨があったときの流出は、変形することなく速さ  $a$  で流下する。すなわち、線形系の

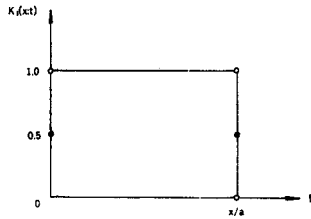


図-2 線形系に対する応答核  $\hat{K}_1(x, t)$

場合には流出の分散性は現われない。

(2) hydrograph について

式 (21), (24) で表わされる流出核を用いて, 一定降雨  $\bar{R}$  に加えて, 強度  $q_0$  の雨が  $\tau_0$  時間降り続いた時の, 流域長さ  $L$  の下流端での hydrograph を求めてみると, 式 (25) のようになる。

$$\begin{aligned}
 h(L, t) &= \hat{K}_0(L) + \int_0^{\tau_0} \hat{K}_1(L, t-\sigma) q_0 d\sigma \\
 &= \frac{\bar{R}}{a} L + \frac{q_0}{2} \int_0^{\tau_0} \text{sgn} \left[ \frac{L}{a} + \sigma - t \right] d\sigma \\
 &\quad + \frac{q_0}{2} \int_0^{\tau_0} \text{sgn} [t - \sigma] d\sigma \dots\dots\dots (25)
 \end{aligned}$$

これから,  $t, \tau_0$  の種々の組み合わせを考えて  $h(L, t)$  を示すと, 以下のようになる。

a)  $\tau_0 \leq L/a$  の場合

$$h_1(L, t) \begin{cases} = q_0 t & (0 \leq t \leq \tau_0) \\ = q_0 \tau_0 & (\tau_0 < t \leq L/a) \\ = q_0 (\tau_0 + L/a - t) & (L/a < t \leq L/a + \tau_0) \\ = 0 & (L/a + \tau_0 < t) \end{cases} \dots\dots\dots (26 \cdot a)$$

b)  $\tau_0 > L/a$  の場合

$$h_1(L, t) \begin{cases} = q_0 t & (0 \leq t \leq L/a) \\ = q_0 L/a & (L/a < t \leq \tau_0) \\ = q_0 (\tau_0 + L/a - t) & (\tau_0 < t \leq \tau_0 + L/a) \\ = 0 & (\tau_0 + L/a < t) \end{cases} \dots\dots\dots (26 \cdot b)$$

ここに,  $h_1(L, t) = h(L, t) - \hat{K}_0(L)$

式 (26) の結果によると, 線形流出系での降雨  $q_0$  に対する応答は, ちょうど, 合理式によるものと同じとなることがわかる。

また, 式 (26) は, 矩形流域の線形流出系に対する単位図の形が, 前後対称な台形 ( $L/a$  と  $\tau_0$  が等しいときには三角形) となることを示している。流域形状として, 実際のものにより近い扇形状を選んで上述の方法を再展開しても, 立ち上がり部分と逓減部分の形は変化するが, その時間は等しい。一方, 室内実験により, 地下水流出のない矩形流域に対して得られた単位図は, 逓減部に長いすそをもつことがわかっている (たとえば, Morgali and Linsley<sup>15)</sup> (1965), Morgali<sup>16)</sup> (1970))。したがって, 実際の単位図が長く尾を引く逓減部をもつと

いう事実は, 地下水流出成分が部分的に逓減部に含まれているとしても, 実際の流出系が力学的ないしは水理的 (注: タンクモデルはこれらに含まない) に線形でないによりの証拠を提出するものである。

ところで, 線形核  $\hat{K}_1(x, t)$  は, 通常の単位図に対応するものであるが, 厳密に言えば, それは単位図そのものではなく, いわゆる瞬間単位図 (instantaneous unit hydrograph) にあたる。線形核  $\hat{K}_1(x, t)$  と通常の単位図の関係は, 次のようにして求まる。

$$h_1(x, t) = \int_{-\infty}^t \hat{K}_1(x, t-\tau) R_1(\tau) d\tau$$

であるから, 時間単位  $\tau_0$  の間の降雨を一定として上式を離散表示すると,

$$\begin{aligned}
 h_1(x, t) &= \sum R_1(\tau_i) \int_{\tau_i}^{\tau_i + \Delta\tau} \hat{K}_1(x; t-\tau) d\tau \\
 &= \sum R_1(\tau_i) \int_0^{\Delta\tau} \hat{K}_1(x; t-\tau-\tau_i) d\tau
 \end{aligned}$$

一方, 単位図  $u(x, t)$  を用いて  $h_1(x, t)$  を表示すると,

$$h_1(x, t) = \sum_i R_1(\tau_i) u(x, t-\tau_i) \dots\dots\dots (27)$$

したがって,

$$u(x, t) = \int_0^{\Delta\tau} \hat{K}_1(x; t-\tau) d\tau \dots\dots\dots (28)$$

となる。

式 (26) と (28) によれば, 単位図  $u(x, t)$  は, 単位時間  $\Delta\tau$  の選び方と流達時間  $L/a$  に依存することがわかる。このことは, Newton and Vinyard<sup>17)</sup> (1967), 竹内・吉川<sup>18)</sup> (1970) らが実測データあるいは特性曲線法による数値計算から, 単位図が単位時間の選び方や流達時間の関係により異なることを示したことに對して, 一つの理論的根拠を与えている。

4. 非線形流出系の流出核

さきに導出した方程式系 (18)~(20) は, 非線形の連立微積分方程式であるが, これを解く方法として筆者ら<sup>12)</sup>はさきに, 式 (18)~(20) を時間に関して Fourier 変換し,  $(x-\omega)$  空間上での常微分方程式系に写しかえただうえで, それを差分法で解く方法を示している。しかし, その方法では, 収束性や計算機の記憶容量等の面で問題が生じ, むしろ物理空間すなわち  $(x-t)$  空間のまま扱う方が好ましいと考えられた。そこで本論文では, 式 (18)~(20) を Galerkin 法で解くことを試みた。

(1) 一定降雨の場合の 0 次流出核

降雨変動がない場合には  $k=0$  である。このとき式 (18) は, 次式のようになる。

$$\{a + 2b\bar{K}_0\} \frac{d\bar{K}_0(x)}{dx} = \bar{R} \dots\dots\dots (29)$$

上式中の  $K_0$  に付してある記号  $-$  は、すぐ次の (2) に述べる一般の場合の  $K_0$  と区別するためのものである。上式を、境界条件  $\bar{K}_0(x)=0$  (at  $x=0$ ) のもとに解けば式 (30) となる。

$$\bar{K}_0(x) = [-a + \sqrt{a^2 + 4b\bar{R}x}] / 2b \dots\dots\dots (30)$$

(2) 一般の非線形流出系に対する流出核

さきに述べたように、ここでは Galerkin 法を適用する。まず、流出核  $K_1$  および  $K_2$  を次のように展開表示する。

$$\begin{cases} K_1(x; t-\tau) = \sum_n w_n(x) \psi_n(t-\tau) \\ K_2(x; t-\tau_1, t-\tau_2) \\ = \sum_{n_1, n_2} z_{n_1, n_2}(x) \psi_{n_1}(t-\tau_1) \psi_{n_2}(t-\tau_2) \end{cases} \dots\dots (31)$$

ここに、

$$\psi_n(t-\tau) = \exp\left[-\frac{1}{2}(t-\tau)\right] \cdot L_n(t-\tau) \dots\dots (32)$$

$L_n$  : Laguerre 多項式

式 (32) を trial function として採用したのは、それが、区間  $[0, \infty)$  において定義されていて、さらに  $t \rightarrow \infty$  で零に収束する性質をもっていることによる。

関数  $\psi_n$  は、次のような直交性を有する。

$$\int_{-\infty}^t \psi_m(t-\tau) \cdot \psi_n(t-\tau) d\tau = \delta_{m,n} \dots\dots\dots (33)$$

ここに、 $\delta_{m,n}$  は Kronecker のデルタである。

また、 $\psi_n(t-\tau)$  の  $t$  に関する偏微分は、以下のようにして求まる。すなわち、漸化式

$$\frac{\partial}{\partial t} L_n(t-\tau) = \frac{\partial}{\partial t} L_{n-1}(t-\tau) - L_{n-1}(t-\tau) \dots\dots (34)$$

より、

$$\frac{\partial}{\partial t} L_n(t-\tau) = -\sum_{i=0}^{n-1} L_i(t-\tau) \dots\dots\dots (35)$$

であるから、結局、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi_n(t-\tau) &= \exp\left[-\frac{1}{2}(t-\tau)\right] \\ &\cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t} L_n(t-\tau) - \frac{1}{2} L_n(t-\tau) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \psi_n(t-\tau) - \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i(t-\tau) \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

となる。

以上の関係式を用い、次に示す手順に従って計算を行えば、後に示すような  $K_0(x)$ ,  $w_n(x)$ ,  $z_{n_1, n_2}(x)$  に関する連立常微分方程式が得られる。

(i) 式 (31) を、式 (18)~(20) へ代入する。

(ii) 式 (36) の関係を代入する。

(iii) そうして得られた方程式系の両辺に、順次、 $\psi_n(t-\tau)$ ,  $\psi_{n_1}(t-\tau_1) \psi_{n_2}(t-\tau_2)$  をかける。

(iv) その後、それぞれ、 $\int_{-\infty}^t \cdot d\tau$ , および  $\iint_{-\infty}^t \cdot d\tau_1 d\tau_2$  の積分を施す。その時、 $\psi_n$  の直交性 (式 (33)), および以下に示す関係式が利用される。

$$\psi_n(0) = 1 \quad (\text{for all } n) \dots\dots\dots (37)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \delta(t-\tau) \psi_n(t-\tau) d\tau &= \frac{1}{2} \psi_n(0) \\ &= \frac{1}{2} \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

以上の計算の結果、最終的に得られた連立常微分方程式を記すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} &\{a + 2bK_0(x)\} \frac{dK_0}{dx} + bk \sum_i \frac{dw_i^2}{dx} \\ &+ 2bk^2 \sum_i \sum_j \frac{dz_{ij}^2}{dx} = \bar{R} \dots\dots\dots (39) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2bw_n(x) \frac{dK_0}{dx} + \{a + 2bK_0(x)\} \frac{dw_n}{dx} \\ &+ 4bk \sum_i \frac{dw_i \cdot z_{n,i}}{dx} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x) + \sum_{i=n+1}^{\infty} w_i(x) \right\} \dots\dots (40) \end{aligned}$$

( $n=0, 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} &2bz_{n_1, n_2}(x) \frac{dK_0}{dx} + b \frac{dw_{n_1} w_{n_2}}{dx} + \{a + 2bK_0(x)\} \\ &\cdot \frac{dz_{n_1, n_2}}{dx} + 4bk \sum_i \frac{dz_{i, n_1} z_{i, n_2}}{dx} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\sum_{i=0}^{n_1-1} z_{n_1, i}(x) + \sum_{i=n_2+1}^{\infty} z_{n_1, i}(x) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{n_2-1} z_{i, n_2}(x) + \sum_{i=n_1+1}^{\infty} z_{i, n_2}(x) \right\} \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

( $n_1, n_2=0, 1, 2, \dots$ )

(3) Runge-Kutta-Gill 法による数値積分

非線形連立常微分方程式 (39)~(41) は、以下に示す手順により、Runge-Kutta-Gill 法により数値積分できる。

式 (31) の中の高次の項を省略して有限な項数で打ち切れば ( $n, n_1, n_2 \leq m$ )、式 (39)~(41) は次式のようにマトリックス表示できる。

$$A(x) \frac{d}{dx} f(x) = B \cdot f(x) + d \dots\dots\dots (42)$$

ここに、

$A(x)$  :  $f(x)$  の要素により構成される係数マトリックス (Appendix 参照)

$B$  : 係数マトリックス (Appendix 参照)

$$\begin{aligned} f(x) &= \{K_0(x), w_0(x), \dots, w_n(x), z_{0,0}(x), \dots, \\ &\quad \cdot z_{0,m}(x), z_{1,1}(x), \dots, z_{1,m}(x), \dots, \\ &\quad \cdot z_{m-1,m}(x), z_{m,m}(x)\}^T \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

: 未知の重み関数よりなるベクトル

$$d = \{\bar{R}, \underbrace{1/2, 1/2, \dots, 1/2}_m, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_m\}^T \dots\dots (44)$$

$m+1 \quad \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$

: 係数ベクトル

式 (42) の両辺に、 $A$  の逆行列  $A^{-1}$  をかければ次式となる。

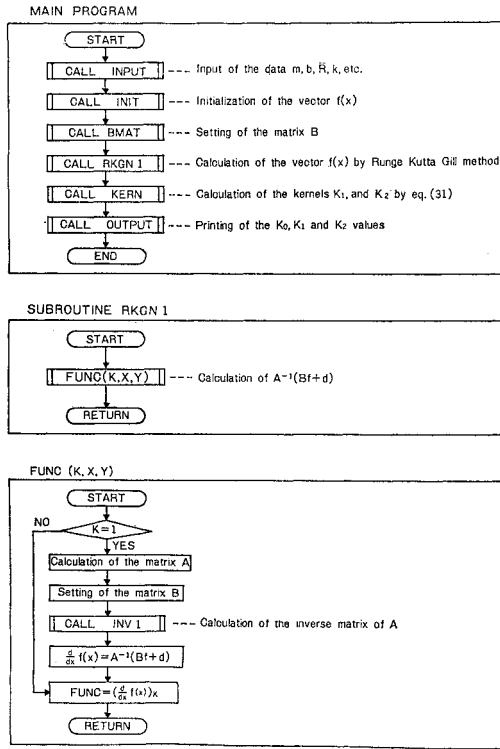


図-3 フローチャート

$$\frac{d}{dx} f(x) = A^{-1}(x) \cdot (B \cdot f(x) + d) \dots\dots (45)$$

式 (45) は、 $A(x)$  の逆行列の計算を連動させることにより、Runge-Kutta-Gill 法によって容易に数値積分できる。その際、初期条件は次式で与えられる。

$$f(x) = \{0, \dots, 0\}^T \quad (\text{at } x=0) \dots\dots (46)$$

図-3 に、この方法による流出核の計算のおおまかなフローチャートを示す。

### 5. 計算結果—線形および非線形流出核の特性

計算結果は、無次元量で表わす方が好ましいので、以下のような変数の無次元化を行う。代表スケールとしては、特徴長さ ( $L$ ) と速度の次元をもつ抵抗則中の最初の係数 ( $a$ ) を採用する。

$$\left. \begin{aligned} x/L = x', \quad t/(L/a) = t', \quad h/L = h', \quad \bar{R}/a = \bar{R}', \\ r/a = r', \quad k/(aL) = k', \quad bL/a = b', \quad (cL^2/a = c') \end{aligned} \right\} \dots\dots (47 \cdot a)$$

$$R_0 = R_0', \quad R_1/a = R_1', \quad R_2/a^2 = R_2' \dots\dots (47 \cdot b)$$

$$K_0/L = K_0', \quad K_1 = K_1', \quad K_2L = K_2' \dots\dots (47 \cdot c)$$

現象を左右するパラメーターは、 $\bar{R}'$ ,  $k'$ ,  $b'$ , ( $c'$ ) であるので、数値計算は、これらのパラメーターのいろいろな組合せについて行った。図-4 から 図-6 および 図-9, 10 に示す図は、その計算結果である。この中で、

$\bar{R}'$ ,  $b'$ ,  $k'$  に付してある添字 0 は reference value であり、次に示す値がとられている (竹内・吉川<sup>18)</sup> を参考に選んだ)。

$$\bar{R}'_0 = 2 \times 10^{-4}$$

$$b'_0 = 1300$$

$$k'_0 = 4 \times 10^{-9}$$

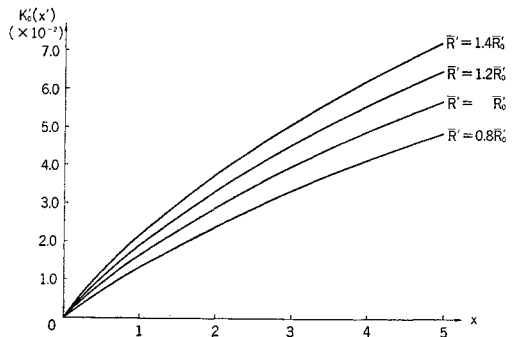
また、Laguerre 多項式の最高次数  $m$  は、 $m=5$  としている。

これらの計算結果より、以下に述べる事が結論される。

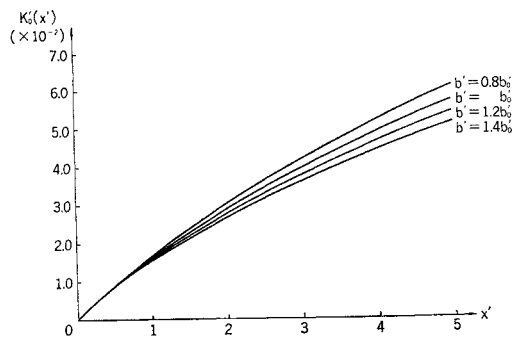
[ $K_0$ : Mean Runoff Level について]

(i) 平均降雨  $\bar{R}$  の増加は、平均出力レベル  $K_0(x)$  の増加をもたらす (図-4 (a))。

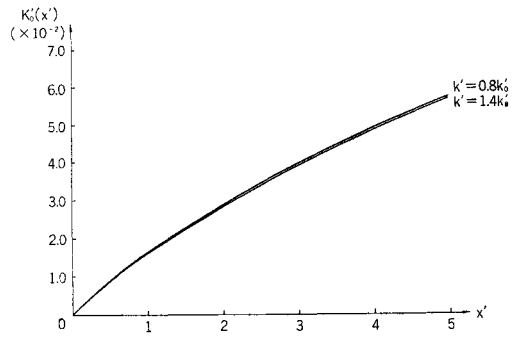
(ii) 非線形パラメーター  $b$  を増大させると  $K_0$  は



(a) 平均降雨強度  $\bar{R}'$  の変化に対する平均流出  $K_0'$  の変化



(b) 非線形パラメーター  $b'$  の変化に対する平均流出  $K_0'$  の変化



(c) 降雨変動レベル  $k'$  の変化に対する平均流出  $K_0'$  の変化

図-4

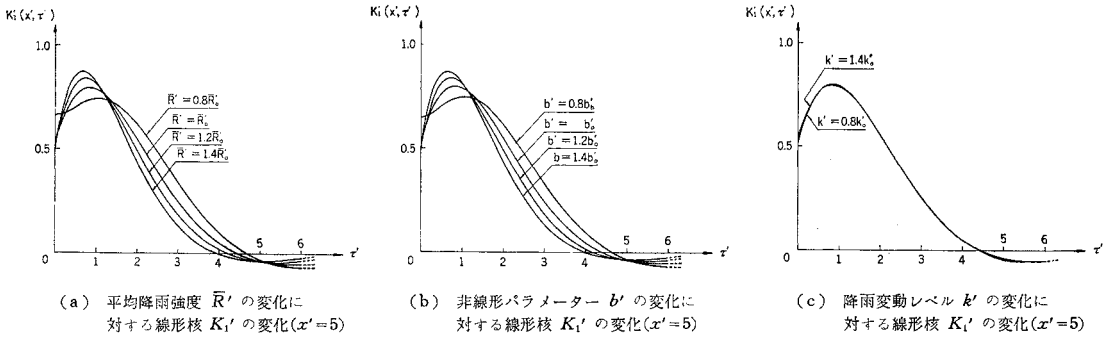


図-5

減少する。すなわち、 $b$  の増大による抵抗の減少の結果として、流達時間が減少する (図-4 (b))。

(iii) 降雨変動レベル  $k$  の変化は、 $K_0(x)$  にはほとんど影響を与えない。これは、 $k \ll \bar{R}$  という制限を設けたことによっている (図-4 (c))。よって、 $K_0(x)$  は、近似的に式 (30) によって計算できる。

[ $K_1$ : Linear Runoff Kernel について]

(i) 平均降雨の増加は、流達時間を早め、ピーク水深を増大させる (図-5 (a))。

(ii) 非線形パラメーター  $b$  は、 $\bar{R}$  と同様の効果をもつ (図-5 (b))。

(iii) 降雨変動レベル  $k$  は、 $K_1$  にあまり影響を与えない (図-5 (c))。

(iv)  $K_1(x, 0) \equiv 0$  である。これは  $K_1$  が瞬間単位図 IUH (instantaneous unit hydrograph) であるからで、有限の降雨継続時間単位  $\tau_0$  で定義される通常の単位図  $u(x, t)$  では、

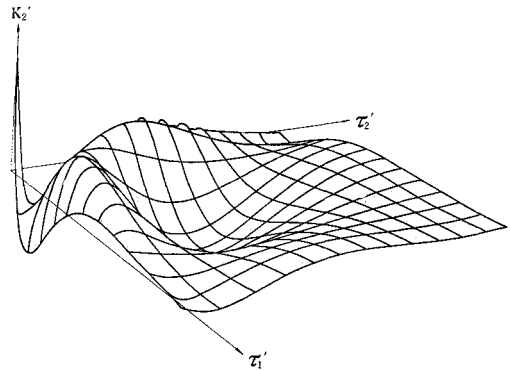
$$u(x, t) = \int_0^{\tau_0} K_1(x, t-\tau) d\tau = \int_{t-\tau_0}^t K_1(x, \tau) d\tau \dots \dots \dots (48)$$

であるから、 $t=0$  で常に  $u=0$  である。

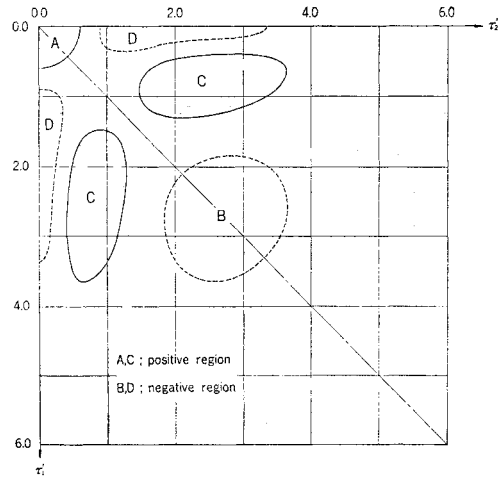
[ $K_2$ : Second-Order Nonlinear Runoff Kernel について]

(i) 二次の非線形流出核の一般的な形は、図-6 (a) のようになり、その平面的なパターンは、図式的に図-6 (b) のように表わせる。すなわち、 $K_2$  は、(A) 部分に正の強い応答領域をもち、(B) 部分に浅いくぼみがある。また、対角線に関して対称な形の (C) と (D) は、それぞれ低い峯と、深いみぞの部分である。

ここで理論的に得られた二次の非線形流出核の特性は定性的に、たとえば、Hino, Sukigara & Kikkawa<sup>(2), (3)</sup> (図-7) および Amorocho & Brandstetter<sup>(1)</sup> (図-8) らによって実測データから得られたものと非常によく一致している。ただ、唯一の相違点は、Hino らによって得られた非線形核に、(B) 部分にあたる浅いくぼみが見当



(a) 非線形流出核  $K_2'$  の一般の形状



(b) 非線形流出核  $K_2'$  の平面的パターン

図-6

らないことである。なお、図-7 の対角線上に現われている第二番目のピークは、流域の降雨特性に存在する比較的強い相関に帰因するものであると思われる。

(ii) 平均降雨  $\bar{R}$  を増加させること、これらの山や谷の部分は原点に近づいていく傾向をもち、特に、(D) の領域は他の領域より早く近づいて行く。また、これらの山や谷の部分の高さあるいは深さは、 $\bar{R}$  の増大によって減ってくる (図-9 (a), 図-10 (a))。

(iii) 非線形パラメーター  $b$  を増加させていくと、山



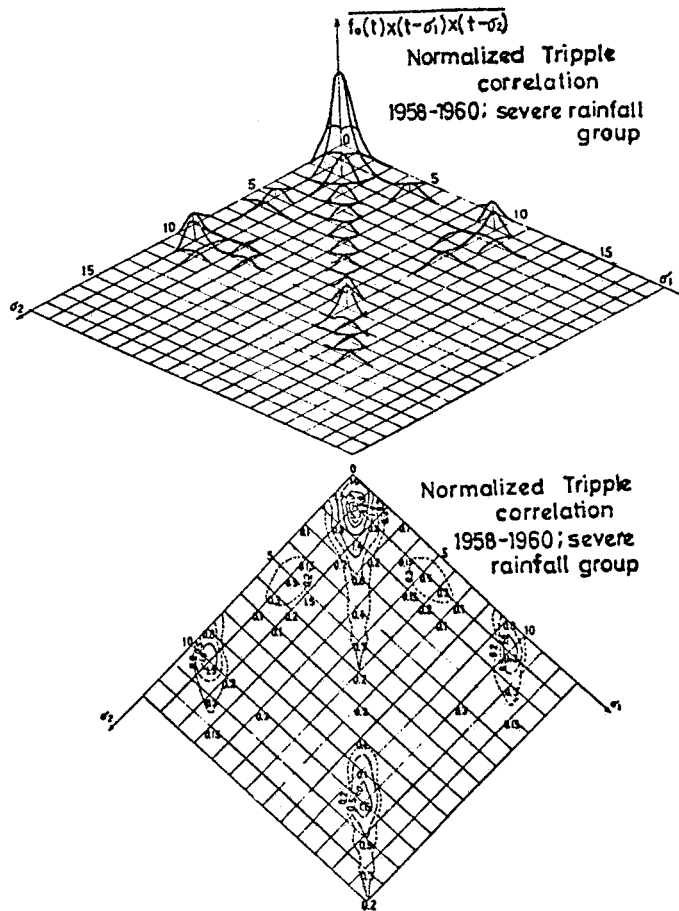


図-7 Hino らによって求められた非線形核

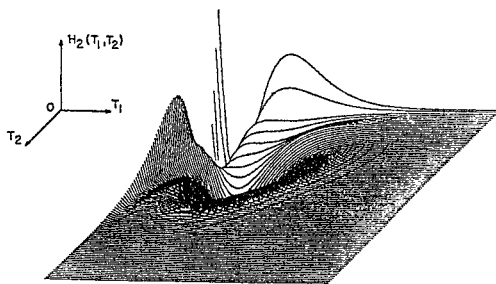


図-8 Amorocho らによって求められた非線形核

や谷の部分と同様に原点に近づいて行くが、(B)と(C)の部分の深さあるいは高さは、わずかながら増加する(図-9 (b), 図-10 (b)).

(iv) 降雨変動レベル  $k$  は、この計算の範囲では、 $K_2$  にはほとんど影響を与えない(図-9 (c), 図-10 (c)).

なお、Diskin & Boneh<sup>19)</sup> は、降雨-流出を Volterra 展開で表わすとき、入力  $R(t)$  を一定とするときの連続条件から、 $K_1 \cdot K_2$  の区間  $(0, \infty)$  での積分が満たすべき条件を挙げている。本論文は降雨-流出系を Wiener-

Hermite 展開で表わし、入力の変動分(白色雑音)に対する応答核を意味しており、 $R(t)$  = 一定の場合は考えないので、彼らの示した条件は必ずしも満たす必要はない。換言すれば、Diskin & Boneh の  $K_1, K_2$  は、本論文の  $K_1, K_2$  とは別のものである。

## 6. 結 論

本論文で用いた線形および非線形核の導出法は、Wiener-Hermite 直交汎関数展開法を適用することによって、流体運動を支配する基礎方程式から演繹的に流出核を求めるという方法である。その点、従来の empirical な流出核の導出方法に比べておおいに性格を異にしている。しかし、ここで得られた線形および非線形核の種々の特徴は、empirical な方法で求められた核関数の特徴と非常によく一致するものとなっている。このことは、方法的にもまた結果的にも本論文においてとられた方法が、流出現象に対する dynamic なアプローチと stochastic なアプローチとを結びつけるものであることを示

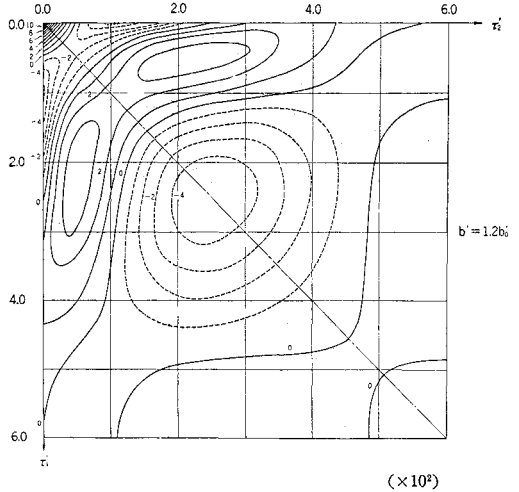
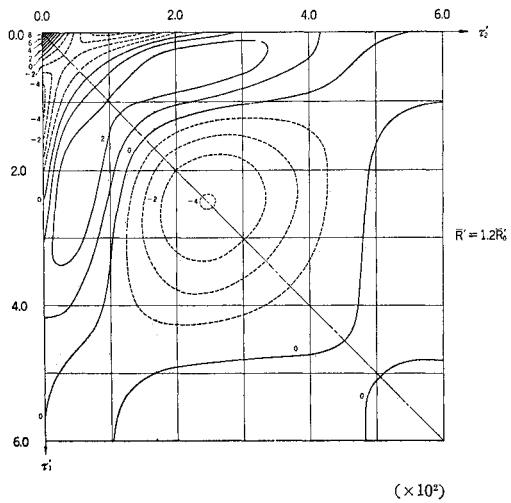
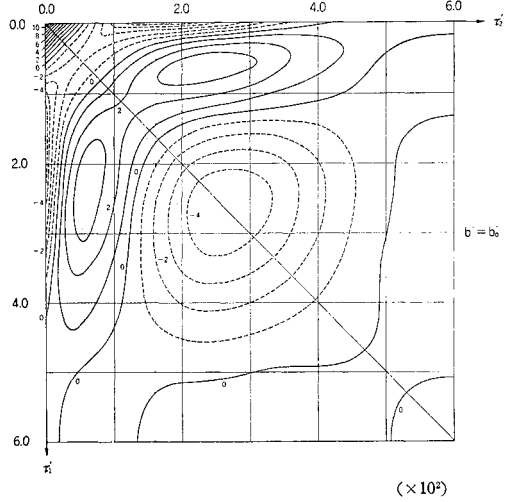
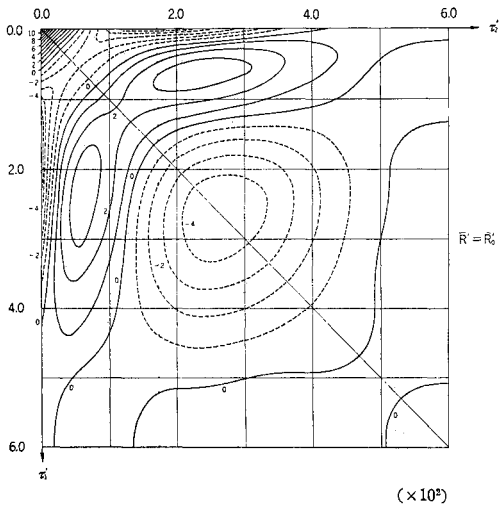
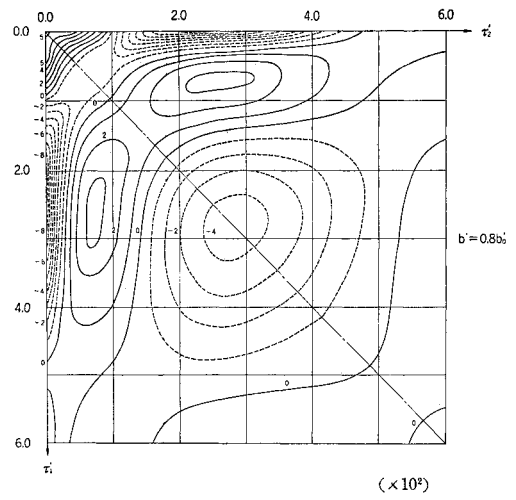
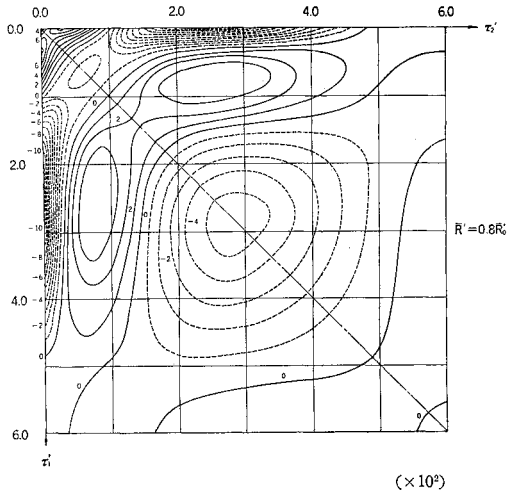


図-9:(a) 平均降雨強度  $\bar{R}'$  の変化に対する  
非線形核  $K_2'$  の変化 ( $x'=5$ )

図-9:(b) 非線形パラメーター  $b'$  の変化に対する  
非線形核  $K_2'$  の変化 ( $x'=5$ )

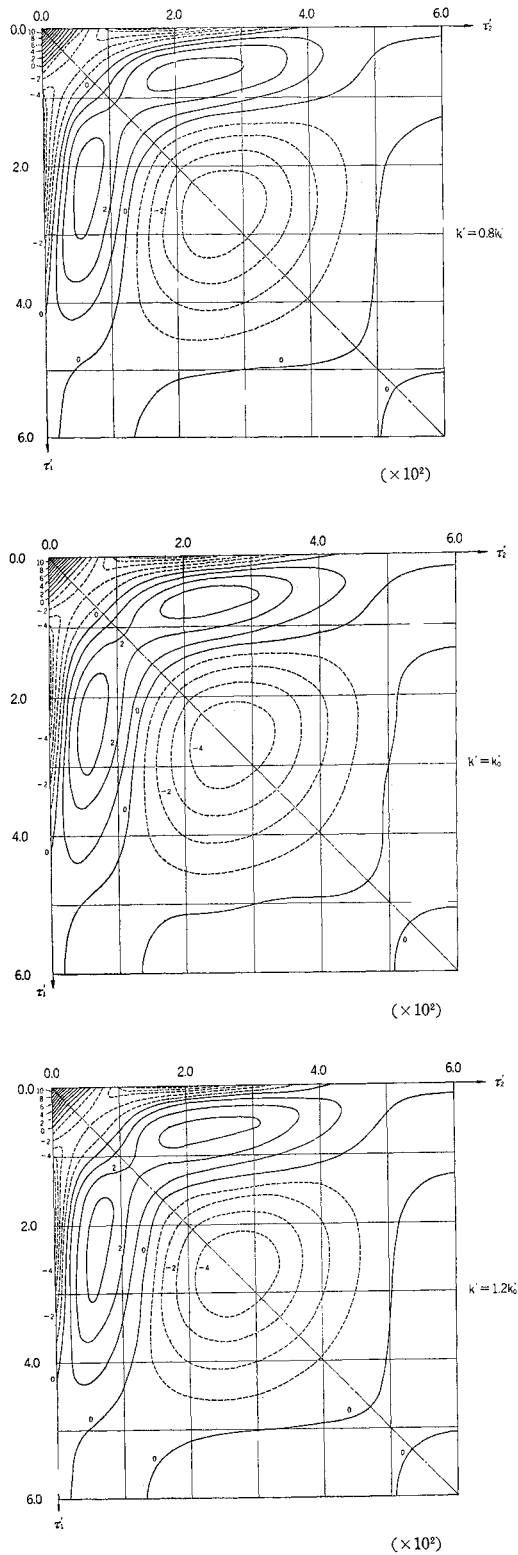
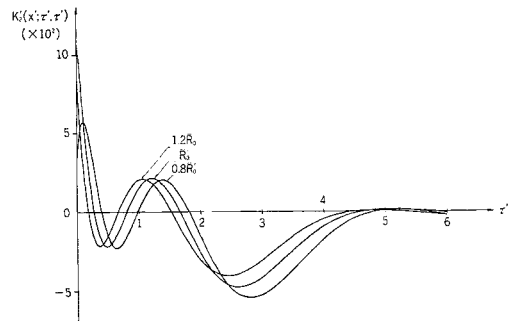


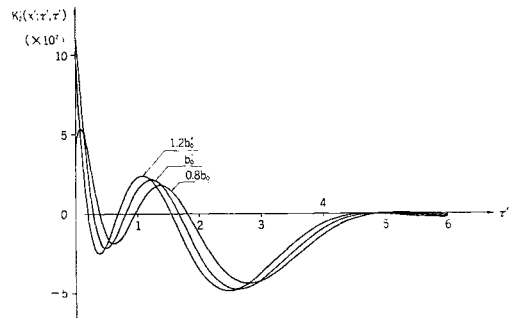
図-9 : (c) 降雨変動レベル  $k'$  の変化に対する非線形核  $K_2'$  の変化 ( $x'=5$ )

している。

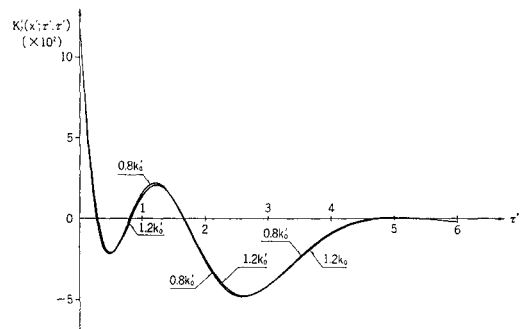
また、ここで得られた結果によれば、これまでの empirical data より得られた非線形核にみられるいくつかの特徴的な起伏は、data に固有の誤差によるものではなく、また、表面流出以外の成分による相互作用によるものでもなくて、理論的に要請される場所のものであることが示された。



(a) 平均降雨強度  $\bar{R}'$  の変化に対する非線形核の対称軸成分  $K_2'(x', r', r')$  の変化 ( $x'=5$ )



(b) 非線形パラメーター  $b'$  の変化に対する非線形核の対称軸成分  $K_2'(x', r', r')$  の変化 ( $x'=5$ )



(c) 降雨変動レベル  $k'$  の変化に対する非線形核の対称軸成分  $K_2'(x', r', r')$  の変化 ( $x'=5$ )

図-10

## Appendix Coefficient matrices $A(x)$ and $B$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a+2bK_0 & 2bkW_0 & 2bkW_1 & \dots & 2bkW_m & 4bk^2Z_{0,0} & 8bk^2Z_{0,1} & \dots & 8bk^2Z_{0,m} & 4bk^2Z_{1,1} & 8bk^2Z_{1,2} & \dots & 8bk^2Z_{1,m} & \dots & \dots & 4bk^2Z_{m-1,m-1} & 8bk^2Z_{m-1,m} & 4bk^2Z_{m,m} \\ a+2bK_0 & 2bW_0 & 2bW_1 & \dots & 2bW_m & a+2bK_0 & 4bkZ_{0,0} & \dots & 4bkZ_{0,m} & 4bkW_0 & 4bkW_1 & \dots & 4bkW_m & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a+2bK_0 & 4bkZ_{0,0} & 4bkZ_{0,1} & \dots & 4bkZ_{0,m} & a+2bK_0 & 4bkZ_{1,1} & \dots & 4bkZ_{1,m} & 4bkW_0 & 4bkW_1 & \dots & 4bkW_m & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2bW_0 & 4bkZ_{0,0} & 4bkZ_{0,1} & \dots & 4bkZ_{0,m} & a+2bK_0 & 4bkZ_{1,1} & \dots & 4bkZ_{1,m} & 4bkW_0 & 4bkW_1 & \dots & 4bkW_m & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2bW_m & 4bkZ_{0,m} & 4bkZ_{1,m} & \dots & 4bkZ_{m,m} & a+2bK_0 & 4bkZ_{1,m-1} & 4bkZ_{1,m} & 4bkZ_{1,m} & 4bkW_{m-1} & 4bkW_m & \dots & 4bkW_m & 0 & \dots & 4bkW_{m-1} & 4bkW_m & 4bkW_m \\ 2bZ_{0,0} & 2bW_0 & \dots & \dots & \dots & a+2bK_0 & 8bkZ_{0,1} & \dots & 8bkZ_{0,m} & 4bkZ_{0,1} & 4bkZ_{0,2} & \dots & 4bkZ_{0,m} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2bZ_{0,1} & bW_1 & bW_0 & \dots & \dots & a+2bK_0 & 4bkZ_{0,1} & \dots & 4bkZ_{0,m} & 4bkZ_{0,1} & 4bkZ_{0,2} & \dots & 4bkZ_{0,m} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2bZ_{0,m} & bW_m & \dots & \dots & \dots & a+2bK_0 & 4bkZ_{0,m-1} & 4bkZ_{0,m} & 4bkZ_{0,m} & 0 & 4bkZ_{0,m-1} & 4bkZ_{0,m} & 4bkZ_{0,m} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2bZ_{1,1} & 2bW_1 & \dots & \dots & \dots & a+2bK_0 & 8bkZ_{1,1} & \dots & 8bkZ_{1,m} & 4bkZ_{1,1} & 8bkZ_{1,2} & \dots & 8bkZ_{1,m} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2bZ_{1,2} & bW_2 & bW_1 & \dots & \dots & a+2bK_0 & 4bkZ_{1,1} & 4bkZ_{1,2} & 4bkZ_{1,2} & 4bkZ_{1,1} & 4bkZ_{1,2} & \dots & 4bkZ_{1,m} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2bZ_{1,m} & bW_m & \dots & \dots & \dots & a+2bK_0 & 4bkZ_{1,m-1} & \dots & 4bkZ_{1,m} & 4bkZ_{1,1} & \dots & 4bkZ_{1,m} & 4bkZ_{1,m} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2bZ_{m-1,m-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a+2bK_0 & 8bkZ_{m-1,m-1} & \dots & 8bkZ_{m-1,m} & 4bkZ_{m-1,m-1} & 4bkZ_{m-1,m} & \dots & 4bkZ_{m-1,m} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2bZ_{m-1,m} & \dots & \dots & \dots & \dots & a+2bK_0 & 4bkZ_{m-1,m-1} & 4bkZ_{m-1,m} & 4bkZ_{m-1,m} & 4bkZ_{m-1,m-1} & 4bkZ_{m-1,m} & \dots & 4bkZ_{m-1,m} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2bZ_{m,m} & \dots & \dots & \dots & \dots & a+2bK_0 & 4bkZ_{m,m-1} & 4bkZ_{m,m} & 4bkZ_{m,m} & 4bkZ_{m,m-1} & 4bkZ_{m,m} & \dots & 4bkZ_{m,m} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \\ \dots & \dots & 0, \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}, 0 \\ \dots & \dots & 0 & 1, 1, \dots, 1 \\ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} & \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \\ \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}, 0 & \dots & \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \dots & \dots & 0 & 0, \frac{1}{2} \\ \dots & \dots & -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} & 0, 1, \dots, 1 \\ \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0, \frac{1}{2} \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & -\frac{1}{2}, 0 \\ \dots & \dots & 0 & -1, 0 & \dots & 0, 1 \\ \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} & \dots & -\frac{1}{2}, 0 \\ \dots & \dots & 0 & -1 & \dots & 0, -1 \end{pmatrix}$$

## 参 考 文 献

- 1) Wiener, N. : Nonlinear Problems in Random Theory, MIT Press, Cambridge, Mass., 1958.
- 2) 吉川秀夫・日野幹雄・鋤柄 徹 : 降雨-流出系における非線形予測の研究-情報理論的水文学への序説 IV-, 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 8, pp. 97~104, 1970.
- 3) Hino, M., Sukigara, T. and Kikkawa, H. : Nonlinear runoff kernels of hydrologic system, Proc. 1st U.S.-Japan Seminar in Hydrology, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, 1971.
- 4) Amoroch, J. and Brandstetter, A. : Determination of nonlinear functional response functions in rainfall-runoff processes, Water Resources Research, Vol. 7, No. 5, pp. 1087~1101, 1971.
- 5) Bidwell, V.J. : Regression analysis of nonlinear catchment system, Water Resources Research, Vol. 7, No. 5, pp. 1118~1126, 1971.
- 6) Kuchment, L.S. and Borshchevsky, E.N. : Identification of nonlinear hydrologic systems, Meteorol. Gidrol., No. 1, pp. 42~47, 1971.
- 7) Zand, S.M. and Harder, J.A. : Application of nonlinear system identification to the Lower Meckong River, South-east Asia, Water Resources Research, Vol. 9, No. 2, pp. 290~297, 1973.
- 8) 白石英彦・大西亮一・伊藤喜一 : 重回帰式による非線形降雨流出の解析法-重回帰式による水系解析の方法(I)-, 農業土木学会論文集, 第 63 号, pp. 43~49, 1976.
- 9) 四ヶ所四男美・田中宏平・戸原義男 : 非線形システムモデルによる流出解析, 農業土木学会論文集, 第 50 号, pp. 20~23, 1974.
- 10) 日野幹雄・砂田憲吾 : 非線形応答系の同定における遅延フィルター相関法の拡張と実河川の流出予測への適用(速報), 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 20, pp. 31~46, 1976.
- 11) 日野幹雄 : 流出の非線形性について-流出現象の質的理理解への寄与-, 第 16 回水理講演会講演集, pp. 105~110, 1972.
- 12) 日野幹雄・砂田憲吾・灘岡和夫 : 非線形流出の理論解析について, 第 20 回水理講演会論文集, pp. 15~21, 1976.
- 13) 日野幹雄 : 情報理論的水文学への序説(III), 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 6, p. 145, 1968.
- 14) 石原藤次郎・金丸昭治 : 降雨条件の変動による単位図の変化について, 土木学会論文集, 第 32 号, pp. 50~56, 1956.
- 15) Morgali, L.S. and Linsley, R.K. : Computer analysis of overland flow, J. Hydr. Div., ASCE, Vol. 91, pp. 81~100, 1965.
- 16) Morgali, L.S. : Laminar and turbulent overland flow hydrographs, J. Hydr. Div., ASCE, Vol. 96, pp. 441~460, 1970.
- 17) Newton, D.W. and J.W. Vinyard : Computer-determined unit hydrograph from floods, J. Hydr. Div., ASCE, Vol. 93, pp. 219~235, 1967.
- 18) 竹内俊雄・吉川秀夫 : 特性曲線法を利用した流出解析についての考察, 流出機構モデルの総合化に関する研究, 文部省科学研究費特定研究(水文学)最終報告書, pp. 1~12, 1970.
- 19) Diskin, M.H. and Boneh, A. : Properties of the kernels for time invariant, initially relaxed, second order, surface runoff systems, J. of Hydrology, Vol. 17, 115~141, 1972.

(1977.12.20・受付)