

Legendre の多項式を用いた折板構造の一振動解析

A VIBRATION ANALYSIS ON FOLDED PLATE STRUCTURES
BY LEGENDRE POLYNOMIALS

水上 隆 男*・西 岡 隆**

By Takao MIZUKAMI and Takashi NISHIOKA

1. ま え が き

これまでの研究によれば、板要素あるいは板要素を構成要素とする構造物の振動近似解法を取り扱った論文は多い。たとえば、面外変形を受ける平板の近似解法についての論文としては、3)~6) が挙げられる。Leisso³⁾らは、静的な問題について種々の近似解法の精度の検討をしている。Warburton⁴⁾は、はりの固有関数の積の和で変位関数を仮定し、Rayleigh の原理で固有振動数を求めている。Yang⁵⁾は、内部拘束のある板の振動問題を論じている。一方、Cheung⁶⁾は、有限帯板法により種々の境界条件を有する平板の振動問題を論じている。

立体的な折板構造として薄肉はりの動的問題を取り扱った最近の論文としては、たとえば中村⁷⁾と能町ら⁸⁾の論文が挙げられる。中村は、有限帯板法を用いて、面内変形作用と面外変形作用をともに考慮した薄肉はりの振動解析を行っている。彼は一つの要素内で長手方向の軸に直交する面内方向成分を低次の多項式で近似したため、一つの要素で表現できる変形には制限がある。そのため分割数が少ないと断面変形が拘束され、固有振動数が実際の値より高くなるものと思われる。また、分割数が多すぎると固有マトリックスの階数が高くなり、固有値計算上の精度が低下することが考えられる。これらの問題は一連の有限要素法解析^{9),10)}に共通した問題であると思われる。能町ら⁸⁾は、薄肉はりの弾性波の位相速度について論じている。彼は、はりの軸方向について進行波の波形を仮定し、直交方向については、波形を仮定せずに有限フーリエ変換により解析している。したがって、有限要素法(有限帯板法)^{7),9),10)}などの近似解法と比べて変位関数の選択や精度の向上のための分割数の問題は生じないが、基礎微分方程式を忠実に解いているた

め解析法が非常に複雑になる。また、固有値が固有マトリックスの中に複雑に入り込み分離できないので、数値計算が困難になるものと思われる。

本論文では前記の有限要素法的な近似解法と有限フーリエ変換等を用いた解析的な手法の問題点に考慮を払い、重みつき残差法に基づく解法を提示する。すなわち、変位関数を直交関数で仮定することにより幾何学的に連続的な板を細分することなく、多くの自由度を有する長方形板として解析する。それらの要素を境界で座標変換マトリックスを用いて連続条件で接合すれば、折板構造を解析することができる。しかも直交関数として収束性のよい級数を用いることにより変位関数を有限個の項数で十分精度よく近似することが可能になる。さらに、固有方程式を線形な形で与えることができ、有限な自由度で固有値解析を行うことができる。ここでは数値解析例として種々の境界条件を有する長方形板について固有振動数を求め古典的理論解^{1),2)}との比較を行い、さらに立体的な折板構造としてボックスガーターを例にとり、振動モードについて解析した。

2. ルジャンドルの多項式を試行関数に用いた 重みつき残差法

弾性体が微小変位する場合、その平衡状態を記述する解は応力のつりあい条件式、ひずみ-変位関係式および弾性体としての応力-ひずみ関係式を満足するただ一つの解である。ここで上記の三条件は変位 u または内力 r に関する連立偏微分方程式を与えるから、それを所定の境界条件のもとに解くことが弾性学の主要な課題となっている。しかし、解析的な手法で解ける問題の範囲は限られており、工学的な見地で問題を解決するためには近似解によらなければならないことが多い。この近似解は一般に与えられた問題に付随する条件のすべてを満足させることはできない。そこで現在一般的に用いられて

* 正会員 工修 鹿島建設(株)土木工務部

** 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

いる有限要素法，有限帯板法では，与えられた問題の現象に考慮を払いながら，境界条件の一部あるいは全部を満足するような有限個の既知関数列で変位分布を仮定している。そして，その際に導入される未定係数を限られた自由度の範囲で最適に決定するための近似解法の一つとして，重みつき残差法が用いられてきた^{11)~13)}。

しかし，その反面重みつき残差法は，残差の重みつき平均を零とするため，仮定する試行関数や重み関数の良否が解の精度に大きな影響を与えるという問題が残る。そのため，試行関数を仮定する際にはその問題の現象に着目して適切な関数列を用いることが重要となる。

本論文で試行関数に採用した関数列は，最初は境界条件も微分方程式も満足しないが，あとから境界条件を満足するように未定係数間の一次従属関係を決めているので，最終的には内部法¹³⁾の一種であると考えられる。

弾性体の振動モードは境界に囲まれた幾何学的に連続な部分では，一般に与えられた境界条件を満足するような，なめらかな曲線となる。しかも弾性体のモード群は，互いに直交する。したがって，有限要素法などのように構造体を細分して，各要素の試行関数を限られた項数からなる低次の多項式で近似するよりは，あらかじめ試行関数に高次の項まで含む直交関数列を用いた方が有利であると思われる。

すなわち，試行関数として不連続面での境界条件を満足するような直交関数列を用いれば，その関数列が完全系であるならば，近似解を限りなく厳密解に近づけることができる。しかし，実際には無限項まで考慮することは不可能であるので，収束性のよい直交関数列を用いることが重要となる。

従来の振動解析では，直交関数系の中でも特にフーリエ級数が多く用いられてきた。両端が単純支持の場合には，フーリエ級数は静的問題でも動的問題でも威力を発揮しかなりの成果を挙げることができる。ところがそれ以外の境界値問題では，収束性およびその取り扱いにおいて問題が多い。たとえば，フーリエ級数の特性^{16), 17)}として両端の境界条件が等しくないと収束性が悪くばかりでなく微係数の一様収束性が一般には保証されない。しかも両端単純支持でないと，一般に正弦級数と余弦級数の和で試行関数を与えなければならなくなり，その取り扱いが複雑になる。以上の理由から両端が単純支持の場合を除いては，フーリエ級数は，一般に試行関数として適当ではないと思われる。

ここではフーリエ級数の欠点を克服する直交関数として，ルジャンドルの第1種の多項式^{15), 18)}を採用した。ルジャンドルの多項式

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n} (X^2 - 1)^n, \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

は， $|X| \leq 1$ で直交性があり，しかも $P_n(1)=1$ ， $P_n(-1)=(-1)^n$ ，また $|X| < 1$ で n 個の根を持つ。直交関数としてルジャンドルの多項式を領域 $|X| \leq 1$ で試行関数に用いる場合の有利な点は，

$$P_{2m+1}^{(-1)} = -P_{2m+1}^{(1)}, \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

となり，奇数番目の項は両端の境界上 ($X=\pm 1$) で値が異なるため，両端の境界条件が異なる場合でも真の境界値を与えることが可能となることである。しかし，その反面，ルジャンドルの多項式を試行関数として採用した場合， $P_n(X)$ の導関数は三角関数のように回帰的でないのでその定積分が複雑になる。この点については重みつき残差法を用いれば次のようにして解決できる。

すなわち，試行関数をルジャンドルの多項式と未定係数の積の和として与え微分方程式に代入すれば，残差 $R(X)$ が生じる。このとき重み関数としてディラックのデルタ関数を採用すれば，よく知られているように，

$$\int_{-1}^1 R(X) \cdot \delta(X - X_i) \cdot dX = R(X_i) = 0$$

となり，定積分が容易に代数方程式に変換される。このとき，試行関数に導入された未定係数を決定するため必要十分なだけの領域内の異なる点 $X_i (i=1, 2, \dots)$ を選べば，連立方程式を解くことにより最適解を求めることができる。

上記の手法はルジャンドルの多項式を用いた選点法であるが，選点 X_i を無限にふやせば領域内のすべての点で微分方程式を満足することになり，限りなく厳密解に近づけることができる。ここで選点 X_i の数を制限し，かつ収束性を高めるには，選点 X_i の選び方に制限を加える必要がある。Finlayson¹¹⁾ によれば試行関数に直交関数を用いた場合，選点すなわち $X_i (i=1 \sim K)$ を K 次の直交関数の根に選べば低次の選点法の結果はいつでも信頼できるものとなると述べている。すなわち，選点 X_i を $P_k(X_i) = 0$ を満たすルジャンドルの多項式の根とすれば低次の近似でも精度をあげることが可能となる。

なお，ルジャンドルの多項式を用いた類似の研究としては Soler の論文¹⁴⁾ が挙げられる。Soler は長方形板の面内変形問題において面内応力と変位をルジャンドルの多項式に展開する近似解法を提示している。

3. 薄肉長方形板の境界値問題

2次元的な広がりを持つ薄板で，その厚さが幅または長さのディメンションに比べて小さく，その厚さが一様であり，板の中央面が平面であるような長方形板の運動方程式を以下の仮定に基づいて与える。

(i) 平板がたわむ前に中央面に垂直であった平面は，変形後も中央面に対して垂直な平面を保つ。

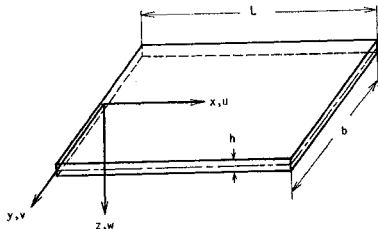


Fig. 1 Coordinate System and Rectangular Plate Element.

(ii) たわみ変形は、板厚に比べて小さいと仮定する。

(iii) 面内変形は、板の幅または長さに比べてきわめて小さいと仮定する。

(iv) 振動の減衰は無視できるものとする。

以上の仮定より一枚の長方形板要素について面内変形と面外変形の連成を無視して、それぞれ独立に運動方程式を与えることができる。任意の長方形板要素を Fig. 1 のように右手座標系にとれば、面外振動、面内振動についての運動方程式は、

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F_z(x, y, t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_x(x, y, t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - r \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = F_y(x, y, t) \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここで r は単位面積あたりの質量であり、密度を ρ 、板厚を h とすれば $r = \rho h$ で与えられる。また、 F_z, F_x, F_y は x, x, y 方向の外力を表わしている。

式(1)でモーメント M_x, M_y 、ねじりモーメント M_{xy} と曲率の関係は、仮定より次のように与えられる。

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 ν はポアソン比、 D は板の曲げ剛性で $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 、 E はヤング率、 h は板厚である。

また、式(2),(3)で軸方向力 N_x, N_y 、せん断力 N_{xy} は、平面応力問題として、

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (9)$$

で与えられる。

自由振動問題を取り扱う場合には式(1)~(3)で $F_x =$

$F_y = F_z = 0$ とおけばよい。式(4)~(9)を式(1)~(3)に代入すれば、長方形板要素の自由振動の運動方程式は、変位 u, v, w の偏微分方程式として以下のように与えられる。

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{r}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{r h^2}{12 D} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{r h^2}{12 D} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

Fig. 1 のような局所座標系で与えられた長方形板は、 $x=0, x=L, y=\pm \frac{b}{2}$ の4辺でそれぞれ境界条件が与えられる。このとき $x=0, x=L$ が単純支持されている場合は、試行関数を変数分離形で与えることができるので、 $y=\pm \frac{b}{2}$ 上での境界条件は、 y についての一変数関数として与えることができる。これに対してその他の場合は、一般にすべての辺上で x と y についての2変数関数として境界条件を与えなければならない。したがって、相対する2辺が単純支持の場合と任意に支持条件を与える場合では、試行関数を変えて解析した方が有利である。以下2つの場合に分けて解析する。

(1) 相対する2辺が単純支持の長方形板の場合

Fig. 1 で $x=0, L$ の境界が単純支持されているときの長方形板の自由振動問題を式(10)~(12)を用いて解析する。

$x=0, L$ 上の境界条件を満足する直交関数としてフーリエ級数を導入して試行関数(変位関数) u, v, w を次のように仮定する。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_n(y, t) \cdot \sin \alpha_n \cdot x \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_n(y, t) \cdot \cos \alpha_n \cdot x \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{V}_n(y, t) \cdot \sin \alpha_n \cdot x \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし、 $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$

変位関数を前式のように仮定すれば、Fig. 1 で $y=\pm \frac{b}{2}$ 上の境界条件は、どのような条件であってもすべて変数分離形で与えることができる。式(13)~(15)を式(10)~(12)に代入してフーリエ級数の直交性を利用すれば、運動方程式は変数分離されて、

$$\alpha_n^4 \bar{W}_n - 2 \alpha_n^2 \frac{\partial^2 \bar{W}_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \bar{W}_n}{\partial y^4} + \frac{r}{D} \frac{\partial^2 \bar{W}_n}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\alpha_n^2 \bar{U}_n - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \bar{U}_n}{\partial y^2} - \frac{1+\nu}{2} \alpha_n \frac{\partial \bar{V}_n}{\partial y}$$

$$+\frac{r h^2}{12 D} \frac{\partial^2 \bar{U}_n}{\partial t^2}=0 \dots\dots\dots(17)$$

$$\frac{1-\nu}{2} \alpha_n^2 \bar{V}_n - \frac{\partial^2 \bar{V}_n}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \alpha_n \frac{\partial \bar{U}_n}{\partial y} + \frac{r h^2}{12 D} \frac{\partial^2 \bar{V}_n}{\partial t^2}=0 \dots\dots\dots(18)$$

で与えられる。さらに仮定 (iv) より時間項を変数分離すれば、

$$\bar{W}_n(y, t)=W_n(y) \cdot e^{i \omega_n t} \dots\dots\dots(19)$$

$$\bar{U}_n(y, t)=U_n(y) \cdot e^{i \omega_n t} \dots\dots\dots(20)$$

$$\bar{V}_n(y, t)=V_n(y) \cdot e^{i \omega_n t} \dots\dots\dots(21)$$

となる。ここで ω_n は x 方向について n 次の固有振動数である。前式を式 (16)~(18) に代入すれば y についての常微分方程式が得られる。

$$\frac{d^4 W_n}{d y^4}-2 \alpha_n^2 \frac{d^2 W_n}{d y^2}+(\alpha_n^4-\lambda^4) W_n=0 \dots\dots(22)$$

$$\frac{1-\nu}{2} \frac{d^2 U_n}{d y^2}+\frac{1+\nu}{2} \alpha_n \frac{d V_n}{d y}-\left(\alpha_n^2-\frac{h^2}{12} \lambda^4\right) U_n=0 \dots\dots\dots(23)$$

$$\frac{d^2 V_n}{d y^2}-\frac{1+\nu}{2} \alpha_n \frac{d U_n}{d y}-\left(\frac{1-\nu}{2} \alpha_n^2-\frac{h^2}{12} \lambda^4\right) V_n=0 \dots\dots\dots(24)$$

ただし、 $\lambda^4=\frac{r}{D} \omega_n^2$

上式を解くために、 $W_n(y), U_n(y), V_n(y)$ を直交関数に展開する。このとき $y=\pm \frac{b}{2}$ で変数分離形で与えられる境界条件を完全に満足し、しかも収束性のよい関数として、ルジャンドルの第一種の多項式を用いる。 $W_n(y), U_n(y), V_n(y)$ をルジャンドルの多項式に展開したとき、各項はそれぞれ $y=\pm \frac{b}{2}$ での境界条件を満足する必要はなく、展開した各項の総和が全体として境界条件も満足すればよい。 $W_n(y), U_n(y), V_n(y)$ について、それぞれ K 個の自由度を持たせるときは、満足すべき境界条件の個数を考慮に入れて、 $W_n(y)$ は $K+4$ 項、 $U_n(y), V_n(y)$ は $K+2$ 項で近似する。したがって、次のように与えられる。

$$W_n(y)=\sum_{m=0}^{K+3} P_m(\beta y) \bar{w}_m(n) \dots\dots\dots(25)$$

$$U_n(y)=\sum_{m=0}^{K+1} P_m(\beta y) \cdot \bar{u}_m(n) \dots\dots\dots(26)$$

$$V_n(y)=\sum_{m=0}^{K+1} P_m(\beta y) \cdot \bar{v}_m(n) \dots\dots\dots(27)$$

ただし、 $P_m(X)=\frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{d X^m}(X^2-1)^m$

$$\beta=\frac{2}{b}$$

したがって、 $|\beta y| \leq 1$

以後簡単のために $\bar{w}_m(n), \bar{u}_m(n), \bar{v}_m(n)$ は、それぞ

れ $\bar{w}_m, \bar{u}_m, \bar{v}_m$ と略記する。

式 (25)~(27) は、 $W_n(y), U_n(y), V_n(y)$ をルジャンドルの多項式に展開したとき、境界条件を満足させることのできる K 次の近似式となるので、式 (22)~(24) に代入すれば微分方程式の残差が y の関数として以下のように定義できる。

$$R_w(y)=\sum_{m=0}^{K+3}[\beta^4 P_m^m(\beta y)-2 \alpha_n^2 \beta^2 P_m^m(\beta y)+\alpha_n^4 P_m(\beta y)-\lambda^4 P_m(\beta y)] \bar{w}_m \dots\dots\dots(28)$$

$$R_u(y)=\sum_{m=0}^{K+1}\left[\left\{\frac{1-\nu}{2} \beta^2 P_m^m(\beta y)-\alpha_n^2 P_m(\beta y)\right\} \cdot \bar{u}_m+\frac{1+\nu}{2} \alpha_n \beta P_m^m(\beta y) \bar{v}_m+\frac{h^2}{12} \lambda^4 P_m(\beta y) \bar{u}_m\right] \dots\dots\dots(29)$$

$$R_v(y)=\sum_{m=0}^{K+1}\left[-\frac{1+\nu}{2} \alpha_n \beta P_m^m(\beta y) \bar{u}_m+\left\{\beta^2 P_m^m(\beta y)-\frac{1-\nu}{2} \alpha_n^2 P_m(\beta y)\right\} \cdot \bar{v}_m+\frac{h^2}{12} \lambda^4 P_m(\beta y) \bar{v}_m\right] \dots\dots\dots(30)$$

ここで残差 $R_w(y), R_u(y), R_v(y)$ に重み関数としてディラックのデルタ関数を掛けて積分し、長方形板要素の領域内で残差が零となるための未定係数 $\bar{w}_m, \bar{u}_m, \bar{v}_m$ の関係式を求める。

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} R_w(y) \delta(y-y_i) d y=R_w(y_i)=0 \dots\dots\dots(31)$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} R_u(y) \delta(y-y_i) d y=R_u(y_i)=0 \dots\dots\dots(32)$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} R_v(y) \delta(y-y_i) d y=R_v(y_i)=0 \dots\dots\dots(33)$$

ただし、 $i=1 \sim K$

K は任意に決められる自然数なので $K \rightarrow \infty$ とすれば、選点法の性質から解は限りなく厳密解に近づく。

ここで式 (31)~(33) における選点 $y_i(i=1 \sim K)$ を K 次のルジャンドル多項式の根 $P_K(\beta y)=0$ にとれば、先に述べたように低次の近似でも精度をあげることが可能になる。また、 $P_K(\beta y)=0$ の根の分布は、 $y=0$ を基準にして対称に配置され、しかも $y=\pm \frac{b}{2}$ の境界に近くなるほど密になる性質があるため、境界値問題を解く際に非常に有利であると考えられる。式 (31)~(33) をマトリックスで表示すれば、

$$a_1 \mathbf{x}_1+a_2 \mathbf{x}_2-\omega_n^2\left(c_1 \mathbf{x}_1+c_2 \mathbf{x}_2\right)=0 \dots\dots\dots(34)$$

ただし、 $\mathbf{x}_1^T=(\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_{K-1}, \bar{v}_0, \dots, \bar{v}_{K-1}, \bar{w}_0, \dots, \bar{w}_{K-1})$

$$\mathbf{x}_2^T=(\bar{u}_K, \bar{u}_{K+1}, \bar{v}_K, \bar{v}_{K+1}, \bar{w}_K, \bar{w}_{K+1}, \bar{w}_{K+2}, \bar{w}_{K+3})$$

となる (a_1, a_2, c_1, c_2 は付録 A・1 を参照)。

一枚の長方形板の振動は、面外振動と面内振動とに分

けて考えることができると仮定しているので、面外振動のみを扱うときは、 e_3, e_8, f_5, f_8 以外のサブマトリックスを $\mathbf{0}$ マトリックスで置き換えればよい。これに対していくつかの板要素を連続条件で接合して薄肉はりなどの折板構造を解析するときは、座標変換マトリックスを用いて面外振動と面内振動を表示する成分をともに考慮しなければならない(付録 A・1 参照)。

式(34)で未定係数を列ベクトル \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 に分けたのは、 \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 は独立ではなく境界条件を介して一次従属の関係があるからである。以下境界条件について述べるが、板要素を境界で接合するための連続条件については次章に譲る。

Fig. 1 において $y = \pm \frac{b}{2}$ の境界上で板が固定、自由、あるいは単純支持されているときの境界条件を与え、そのときの列ベクトル \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 の関係式を求める。境界条件は、1つの境界線上で w について2個、 u, v について2個あり、それらは次のように与えられる。

固定端

$$W_n(y)=0, W_n'(y)=0, U_n(y)=0, V_n(y)=0 \dots\dots\dots(35)$$

自由端

$$\left. \begin{aligned} W_n''(y) - \nu \alpha_n^2 W_n(y) &= 0 \\ W_n''(y) - (2-\nu) \alpha_n^2 W_n'(y) &= 0 \\ V_n'(y) - \nu \alpha_n U_n(y) &= 0 \\ U_n'(y) + \alpha_n V_n(y) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

単純支持

$$\left. \begin{aligned} W_n''(y) - \nu \alpha_n^2 W_n(y) &= 0 \\ W_n(y) &= 0 \\ V_n'(y) - \nu \alpha_n U_n(y) &= 0 \\ V_n'(y) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

式(35)~(37)に式(25)~(27)を代入すれば列ベクトル \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 の関係式が与えられる(ただし、 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6$ は付録 A・2 参照)。

固定端

$$\mathbf{b}_1(y) \mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_2(y) \mathbf{x}_2 = 0 \dots\dots\dots(38)$$

自由端

$$\mathbf{b}_3(y) \mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_4(y) \mathbf{x}_2 = 0 \dots\dots\dots(39)$$

単純支持

$$\mathbf{b}_5(y) \mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_6(y) \mathbf{x}_2 = 0 \dots\dots\dots(40)$$

Fig. 1 の長方形板で $y = \pm \frac{b}{2}$ が境界となるときは、式(38)~(40)を適当に組み合わせればよい。たとえば、 $y = \frac{b}{2}$ が自由端で、 $y = -\frac{b}{2}$ が固定端の場合は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_3\left(\frac{b}{2}\right) \\ \mathbf{b}_1\left(-\frac{b}{2}\right) \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_4\left(\frac{b}{2}\right) \\ \mathbf{b}_2\left(-\frac{b}{2}\right) \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 = 0$$

上式を一般的に書けば、

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{x}_2 = 0 \dots\dots\dots(41)$$

となる。ここで \mathbf{B}_1 は $8 \times 3K$, \mathbf{B}_2 は 8×8 のマトリックスである。したがって、 \mathbf{B}_2 の逆マトリックスを求めれば、 \mathbf{x}_2 と \mathbf{x}_1 の一次従属関係式が求まる。

$$\mathbf{x}_2 = -\mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{D}_1 \mathbf{x}_1 \dots\dots\dots(42)$$

式(42)を式(34)に代入して \mathbf{x}_2 を消去すれば、振動数方程式が得られ、

$$(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{D}_1)^{-1} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{D}_1) \mathbf{x}_1 - \omega_n^2 \mathbf{I} \mathbf{x}_1 = 0 \dots\dots(43)$$

となる。ここで \mathbf{I} は、 $3K \times 3K$ の単位マトリックスである。

式(43)の固有値解析を行えば固有振動数 ω_n を求めることができる。

(2) 任意支持長方形板の場合

Fig. 2 に示すように $x = \pm \frac{L}{2}$ と $y = \pm \frac{b}{2}$ で境界条件が任意に与えられる長方形板の面外振動について述べる。

時間項を変数分離して変位関数を次のように仮定する。

$$w = \bar{W}(x, y) e^{i\omega t} \dots\dots\dots(44)$$

上式を式(10)に代入すれば、

$$\frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial y^4} - \frac{\gamma}{D} \omega^2 \bar{W} = 0 \dots\dots(45)$$

となる。ここで4つの辺上の任意境界条件を満足させることができるように、試行関数(変位関数) \bar{W} を x 方向、 y 方向の第一種のルジャンドルの多項式の積の和で支える。このとき x 方向の自由度を N , y 方向の自由度を M とすれば、境界条件の個数を考慮に入れて、

$$\bar{W}(x, y) = \sum_{n=0}^{N+3} \sum_{m=0}^{M+3} P_n(\beta y) \cdot P_n(\alpha x) \bar{w}_{nm} \dots\dots\dots(46)$$

ただし、 $\alpha = \frac{2}{L}$, $\beta = \frac{2}{b}$

となる。上式を式(45)に代入すれば残差 $R(x, y)$ が定義される。

$$R(x, y) = \sum_{n=0}^{N+3} \sum_{m=0}^{M+3} \left[\alpha^4 P_n^{IV}(\alpha x) P_m(\beta y) + 2 \alpha^2 \beta^2 P_n''(\alpha x) P_m''(\beta y) \right]$$

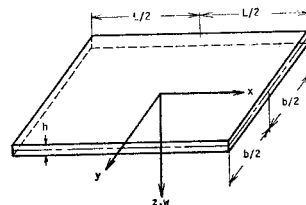


Fig. 2 Rectangular Plate Bending-Element considered Arbitrary Edge Conditions.

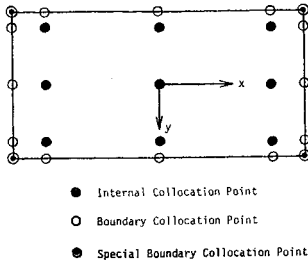


Fig. 3 Internal Collocation Point and Boundary Collocation Point (when $N=M=3$)

$$+ \beta^4 P_n(\alpha x) P_n^N(\beta y) \left. \begin{aligned} & - \frac{\gamma}{D} P_n(\alpha x) P_m(\beta y) \omega^2 \right] \bar{w}_{nm} \dots \dots \dots (47)$$

残差 $R(x, y)$ に重み関数 $g(x, y)$ を掛けて領域内 $(|x| \leq \frac{L}{2}, |y| \leq \frac{b}{2})$ で 2 重積分を行う。そして残差を平均的に零と置くことにより、限られた自由度で最適な解を求める。このとき積分が非常に複雑になるので選点法を用いて 2 重積分を代数方程式に変換する。

すなわち、 $g(x, y) = \delta(x - x_i) \cdot \delta(y - y_j)$ とおけば、

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} R(x, y) \cdot \delta(x - x_i) \cdot \delta(y - y_j) dy \cdot dx = R(x_i, y_j) = 0 \dots \dots \dots (48)$$

となる。ここで (1) と同様に $x_i (i=1 \sim N)$, $y_j (j=1 \sim M)$ をルジャンドルの多項式 $P_N(\alpha x) = 0$, $P_M(\beta y) = 0$ の根とすれば低次の近似でもよい結果が得られる。

Fig. 3 に示したように内部選点で式 (48) を満足させ、境界選点で境界条件を満足するような解を求める。このとき境界選点で 2 個、四隅の境界選点で 4 個 (となりあう 2 辺が固定—固定、固定—単純支持、あるいは単純支持—単純支持の組み合わせとなるときは 3 個) の境界条件を満足させる。内部選点は $N \times M$ 個、境界選点は $2 \times (M+N)$ 個、四隅の境界選点は 4 個ある。したがって、四隅の境界選点がそれぞれ 4 個の境界条件を満足する場合には、満足すべき境界条件の個数と式 (48) を満足する方程式の個数の和は、 $(M+4) \times (N+4)$ 個となり、式 (46) で導入した未定係数の数と一致する。その他の場合は、式 (46) で適当に未定係数の数を増減させて方程式の数と未定係数の数を一致させなければならない。

式 (48) をマトリックス表示すれば次のようになる。

$$a_3 x_3 + a_4 x_4 - \omega^2 (c_3 x_3 + c_4 x_4) = 0 \dots \dots \dots (49)$$

ただし、

$$x_3^T = (\bar{w}_{0,0}, \bar{w}_{0,1}, \bar{w}_{1,0}, \bar{w}_{0,2}, \bar{w}_{1,1}, \dots, \bar{w}_{N-2}, \bar{w}_{N-1}, \bar{w}_{N-1}, \bar{w}_{N-1})$$

$$x_4^T = (\bar{w}_{0,M}, \dots, \bar{w}_{N+3,M}, \bar{w}_{0,M+1}, \dots, \bar{w}_{N+3}, \bar{w}_{M+1}, \bar{w}_{0,M+2}, \dots, \bar{w}_{N+3,M+3})$$

(a_3, a_4, c_3, c_4 は 付録 A・3 を参照のこと)

ここで未定係数 w_{nm} を x_3 と x_4 の 2 つのベクトルに分割したのは、 x_3 と x_4 が一次独立ではなく境界条件を介して一次従属な関係があるからである。

境界条件については、すべての境界線上 ($x = \pm \frac{L}{2}$, $y = \pm \frac{b}{2}$) で境界条件を満足させることはできないので、境界選点上でのみ所定の境界条件を満足させる。なお境界選点は、 $x = \pm \frac{L}{2}$ 上においては $P_M(\beta y) = 0$ の根および $y = \pm \frac{b}{2}$, $y = \pm \frac{b}{2}$ 上では $P_N(\alpha x) = 0$ の根および $x = \pm \frac{L}{2}$ とする。ここで境界選点では任意の境界条件を満足させることが可能である。境界選点为满足する種々の境界条件と、そのときの列ベクトル x_3 と x_4 の一次従属関係を付録 A・4 に示す。付録 A・4 で x_3 と x_4 にかかる行ベクトル b_7 と b_8, b_9 と b_{10}, b_{11} と b_{12}, b_{13} と b_{14}, b_{15} と b_{16}, b_{17} と b_{18} は、それぞれ要素数および添字 n, m が異なるだけで各要素は、同一の式で表わすことができる。

次に Fig. 2 で $x = \pm \frac{L}{2}$ が固定で $y = \pm \frac{b}{2}$ が自由端となるときの系全体の境界条件を例として以下に示す。

$$\begin{bmatrix} b_7 \left(\frac{L}{2}, y_i \right) \\ \vdots \\ b_7 \left(-\frac{L}{2}, y_i \right) \\ \vdots \\ b_9 \left(\frac{L}{2}, y_i \right) \\ \vdots \\ b_9 \left(-\frac{L}{2}, y_i \right) \\ \vdots \\ b_{17} \left(x_i, \frac{b}{2} \right) \\ \vdots \\ b_{17} \left(x_i, -\frac{b}{2} \right) \\ \vdots \\ b_{19} \left(x_i, \frac{b}{2} \right) \\ \vdots \\ b_{19} \left(x_i, -\frac{b}{2} \right) \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} b_8 \left(\frac{L}{2}, y_i \right) \\ \vdots \\ b_8 \left(-\frac{L}{2}, y_i \right) \\ \vdots \\ b_{10} \left(\frac{L}{2}, y_i \right) \\ \vdots \\ b_{10} \left(-\frac{L}{2}, y_i \right) \\ \vdots \\ b_{18} \left(x_i, \frac{b}{2} \right) \\ \vdots \\ b_{18} \left(x_i, -\frac{b}{2} \right) \\ \vdots \\ b_{20} \left(x_i, \frac{b}{2} \right) \\ \vdots \\ b_{20} \left(x_i, -\frac{b}{2} \right) \end{bmatrix} x_4 = 0$$

ただし、 x_i は $P_N(\alpha x) = 0$ の根および $x = \pm \frac{L}{2}$ ($i=1 \sim N+2$)

y_i は $P_M(\beta y) = 0$ の根および $y = \pm \frac{b}{2}$ ($j=1 \sim M+2$)

前式を一般的に書けば、

$$B_3 x_3 + B_4 x_4 = 0 \dots \dots \dots (50)$$

となる。ここで B_3 は $4(M+N+4) \times MN$, B_4 は $4(M+N+4) \times 4(M+N+4)$ の正方マトリックスとなる。 B_4 の逆マトリックスを求めれば、 x_3 と x_4 の一次従属関係式が得られる。

$$\mathbf{x}_4 = -\mathbf{B}_4^{-1}\mathbf{B}_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{D}_2\mathbf{x}_3 \dots\dots\dots (51)$$

式 (51) を式 (49) に代入して \mathbf{x}_4 を消去すれば、振動数方程式が得られ、

$$(\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_4\mathbf{D}_2)^{-1}(\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4\mathbf{D}_2)\mathbf{x}_3 - \omega^2\mathbf{I}\mathbf{x}_3 = 0 \dots\dots (52)$$

となる。ここで \mathbf{I} は $M \cdot N \times M \cdot N$ の単位マトリックスである。

式 (52) を解けば任意境界条件を有する長方形板の固有振動数を求めることができる。

ここでは一例として長方形板の面外振動について述べたが、同様な手法で面内振動や内部拘束を有する板の振動問題⁹⁾にも拡張することができる。

4. 折板構造への適用

ここでは数枚の長方形板要素から構成されている折板構造の振動解析に適用した場合について述べる。取りあげた構造体は両端が剛なダイヤフラムで補強されたボックスガダーとした。ダイヤフラムの面内剛性を無限大、面外剛性を零と仮定し、各長方形板要素の両端の境界条件は単純支持とする。

Fig. 4 に局所座標系と全体座標系の関係を示した。

Fig. 4 の節線 L_{ij} で 2 枚の板要素 i, j を接合させるための条件として、力学的境界量と幾何学的境界量を考慮する。局所座標系 (x_i, y_i, z_i) で定義された境界量 $\mathbf{F}_i(x, y, t)$, $\mathbf{U}_i(x, y, t)$ と全体座標系 (X, Y, Z) で定義された節線 L_{ij} 上の境界量 $\tilde{\mathbf{F}}_{ij}(X, Y, t)$, $\tilde{\mathbf{U}}_{ij}(X, Y, t)$ を以下のように与える。

$$\mathbf{F}_i(x, y, t)^T = [N_{xx}^i, N_{yy}^i, V_y^i, M_y^i] \dots\dots (53)$$

$$\mathbf{U}_i(x, y, t)^T = \left[u_i, v_i, w_i, \frac{\partial w_i}{\partial y} \right] \dots\dots (54)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{ij}(X, Y, t)^T = [N_{XY}^i, N_Y^i, V_Y^i, M_Y^i] \dots\dots\dots (55)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{ij}(X, Y, t)^T = \left[u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}, \frac{\partial w_{ij}}{\partial Y} \right]$$

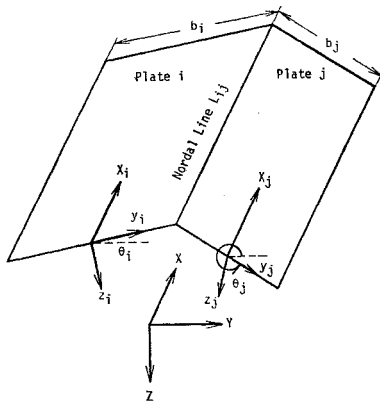


Fig. 4 Global Coordinate System and Local Coordinate Systems.

局所座標系を全体座標系に変換するための座標変換マトリックス \mathbf{T}_i は、次のようになる。

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_i & \mu_i & 0 \\ 0 & -\mu_i & \nu_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (57)$$

ただし、 $\nu_i = \cos \theta_i$, $\mu_i = \sin \theta_i$

以上より節線 L_{ij} 上の境界条件は次式で与えられる。

$$\tilde{\mathbf{F}}_{ij} = \mathbf{T}_i \mathbf{F}_i|_{y_i=b_i} + \mathbf{T}_j \mathbf{F}_j|_{y_j=-b_j} = 0 \dots\dots (58)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{ij} = \mathbf{T}_i \mathbf{U}_i|_{y_i=b_i} + \mathbf{T}_j \mathbf{U}_j|_{y_j=-b_j} \dots\dots\dots (59)$$

ただし、節線 L_{ij} 上で外力 $\tilde{\mathbf{F}}_{ij}$ が作用している場合は式 (58) で $\tilde{\mathbf{F}}_{ij} = \tilde{\mathbf{f}}_{ij}$ とすればよい。ここで境界量 $\mathbf{F}_i, \mathbf{U}_i$ は、式 (34) で定義した局所座標系のベクトル $\mathbf{x}_1^i, \mathbf{x}_2^i$ を用いて次のように表わすことができる。

$$\mathbf{F}_i(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{S}_n(x) [\mathbf{q}_{n-1}^i(y) \cdot \mathbf{x}_1^i + \mathbf{q}_{n-2}^i(y) \cdot \mathbf{x}_2^i] e^{i\omega n t} \dots\dots (60)$$

$$\mathbf{U}_i(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{S}_n(x) [\mathbf{r}_{n-1}^i(y) \cdot \mathbf{x}_1^i + \mathbf{r}_{n-2}^i(y) \cdot \mathbf{x}_2^i] e^{i\omega n t} \dots\dots (61)$$

ただし、 $\mathbf{S}_n(x) = (\cos \alpha_n x, \sin d_n x, \sin \alpha_n x, \sin \alpha_n x)$, $d_n = \frac{n\pi}{L}$

$\mathbf{q}_{n-1}^i, \mathbf{q}_{n-2}^i, \mathbf{r}_{n-1}^i, \mathbf{r}_{n-2}^i$ は 3. (1) の同様の手法で求めることができる。

式 (60), (61) を式 (58), (59) に代入すれば $(\mathbf{x}_1^{iT}, \mathbf{x}_1^{jT})$ と $(\mathbf{x}_2^{iT}, \mathbf{x}_2^{jT})$ の一次従属関係式が求まる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_i \mathbf{q}_{n-1}^i \left(\frac{b_i}{2} \right) & \mathbf{T}_j \mathbf{q}_{n-1}^j \left(\frac{b_j}{2} \right) \\ \mathbf{T}_i \mathbf{r}_{n-1}^i \left(\frac{b_i}{2} \right) & \mathbf{T}_j \mathbf{r}_{n-1}^j \left(\frac{b_j}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1^i \\ \mathbf{x}_1^j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_i \mathbf{q}_{n-2}^i \left(\frac{b_i}{2} \right) & \mathbf{T}_j \mathbf{q}_{n-2}^j \left(\frac{b_j}{2} \right) \\ \mathbf{T}_i \mathbf{r}_{n-2}^i \left(\frac{b_i}{2} \right) & \mathbf{T}_j \mathbf{r}_{n-2}^j \left(\frac{b_j}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_2^i \\ \mathbf{x}_2^j \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots (62)$$

系全体のすべての節線について上式を計算し重ね合わせれば系全体の連続条件式が求まる。

$$\mathbf{B}_5 \mathbf{X}_1 + \mathbf{B}_6 \mathbf{X}_2 = 0 \dots\dots\dots (63)$$

ただし、 $\mathbf{X}_1^T = (\mathbf{x}_1^{1T}, \mathbf{x}_1^{2T}, \dots, \mathbf{x}_1^{MT})$

$$\mathbf{X}_2^T = (\mathbf{x}_2^{1T}, \mathbf{x}_2^{2T}, \dots, \mathbf{x}_2^{MT})$$

ここで M は系全体の板要素の枚数を表わしている。 \mathbf{B}_6 は正方マトリックスであるから、

$$\mathbf{X}_2 = -\mathbf{B}_6^{-1} \mathbf{B}_5 \mathbf{X}_1 = \mathbf{D}_3 \mathbf{X}_1 \dots\dots\dots (64)$$

また、系全体の運動方程式は、式 (34) を重ね合わせて次のように与えられる。

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2 - \omega_n^2 (\mathbf{C}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{X}_2) = 0 \dots\dots (65)$$

ただし、

Table 1 Values of μ_{1m} for Modes of a Rectangular Plates.

L/b	0.5		1.0		2.0		3.0		5.0		10.0
	Author	Iguchi	Author	Iguchi	Author	Iguchi	Author	Iguchi	Author	Author	
1	3.946	3.946	0.9759	0.9759	0.2409	0.2410	0.1066	0.1066	0.03824	0.009545	
2	4.736	4.736	1.635	1.635	0.6971	0.6972	0.4484	0.4484	0.2639	0.1308	
3	7.167		3.721	3.721	2.672		2.452		2.335	2.284	
4	11.25		7.628	7.628	6.608		6.410		6.307	6.263	
5	17.18		13.55	13.55	12.58		12.40		12.30	12.26	

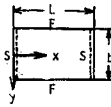
where.

$$\mu_{1m} = \omega_{1m} / \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

m = Mode Number of y Direction

K = Number of Collocation Points

Boundary Condition



F: Free Edge

S: Simply Supported Edge

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_1^M \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_2^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_2^M \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_1^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_1^M \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} c_2^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_2^M \end{bmatrix}$$

ここで上つきの添字は板要素の番号を示す。

式 (65) に式 (64) を代入して X_2 を消去すれば、

$$(D_3 C_2 + C_2)^{-1} (D_3 A_2 + A_1) X_1 - \omega_n^2 I X_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (66)$$

となる。ただし、 I は $3(K_1 + \dots + K_M) \times 3(K_1 + \dots + K_M)$ の単位行列であり、 K_i は板要素 i の選点数である。

式 (66) の固有値解析を行えば、固有振動数 ω_n とそれに対応するモード $X_{n,1}$ が求められる。さらに式 (64) より一次従属なベクトル $X_{n,2} = D \cdot X_{n,1}$ が求まる。したがって、 $X_{n,1}$ と $X_{n,2}$ を用いることにより振動モードを決定することができる。

5. 数値解析例

式 (43), (52), (66) の固有行列は、試行関数の未定係数をベクトル量として取り扱っているため、非対称実行列となる。そこで、ガウスの消去法による同次変換で、固有行列を Hessenberg 行列に変換し、QR 法²¹⁾で固有値解析を行った。計算モデルの材料定数は、 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.3$, $\rho = 8.01 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4$ とした。

(1) 長方形板

相対する2辺が単純支持の場合の解析例として、他端が自由境界となる長方形板の自由振動問題を式 (43) を用いて解析した。なお、選点数は、 $K=10$ とした。

面外振動 (曲げ振動) について、固有振動数 ω_{nm} に関する無次元量 $\mu_{nm} = \omega_{nm} / \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ を求め、井口¹⁾の解析結果と比較した。井口は、三角関数と双曲線関数を用いることにより、式 (10) を厳密に解いている。波数 $n=1$ のとき、

縦横比 L/b に対応する μ_{1m} を **Table 1** に示し、正方形板の波数 n に対応する μ_{nm} を **Table 2** に示した。選点数 $K=10$ より、10 個の固有値が求まるが、そのうち1次から5次までの固有値を表に示した。**Table 1, 2** から明らかのように、固有振動数は、井口の結果とほぼ完全に一致した。

また、**Table 2** で、 $n=1$ のときの振動モードを **Fig. 5** に示した。**Fig. 5** では、A-A 断面の Z 方向の変位モードを実線で示し、さらに m 次のモード曲線の上に、 $m-1$ 次のルジャンドルの多項式 $P_{m-1}(\beta y)$ を破線で示してある。

Fig. 5 より m 次のモードと $P_{m-1}(\beta y)$ の形状は、非常によく似ている。一般に波数 n や縦横比 L/b が変われば、振動モードは、わずかながら変化するが、いずれの場合も同様の傾向があり、特に次数 m が小さいとき、 m 次のモードとルジャンドルの多項式 $P_{m-1}(\beta y)$ はよく似ている。以上のことより、両端が自由端の場合、試行関数のその方向の成分をルジャンドルの多項式で近似することは、非常に有利であると思われる。

面内振動については、正方形板の固有振動数 ω_n とその振動モードを **Fig. 6** に示した。**Fig. 6** より面内振動についても妥当な結果が得られている。

式 (43) を用いて、他の境界条件についても種々の計算を行った。その結果、選点数を K とすれば、固有マトリックスの階数とは無関係に、 $[K/2]$ 次以下の固有振

Table 2 Values of μ_{nm} for Modes of a Square Plates. $K=10$

n \ m	1		2		3		4		5	
	Author	Iguchi	Author	Iguchi	Author	Iguchi	Author	Author	Author	Iguchi
1	0.9759	0.9759	3.946	3.946	8.915	8.915	15.88	24.85	24.85	
2	1.635	1.635	4.736	4.736	9.731	9.731	16.70	25.65	—	
3	3.721	3.721	7.167	7.167	12.37	12.37	19.44	28.46	28.46	
4	7.628	7.628	11.25	11.25	16.69	16.69	23.94	33.07	—	
5	13.55	13.55	17.18	17.18	22.77	22.77	30.20	39.49	39.49	

where.

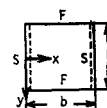
$$\mu_{nm} = \omega_{nm} / \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

n = Mode Number of x Direction

m = Mode Number of y Direction

K = Number of Collocation Points

Boundary Condition



F: Free Edge

S: Simply Supported Edge

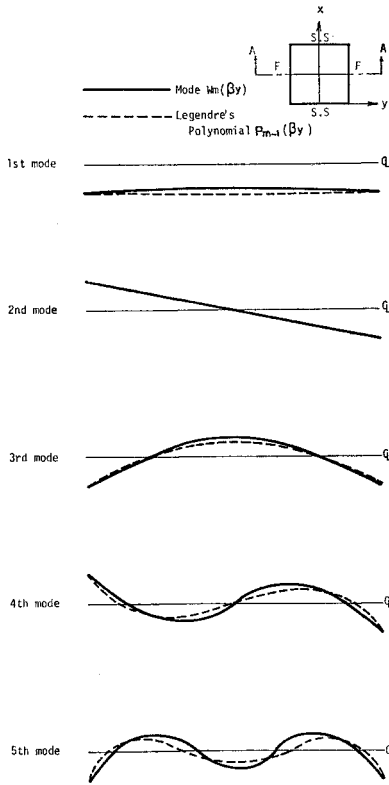


Fig. 5 Lateral Vibration Modes of Square Plate.

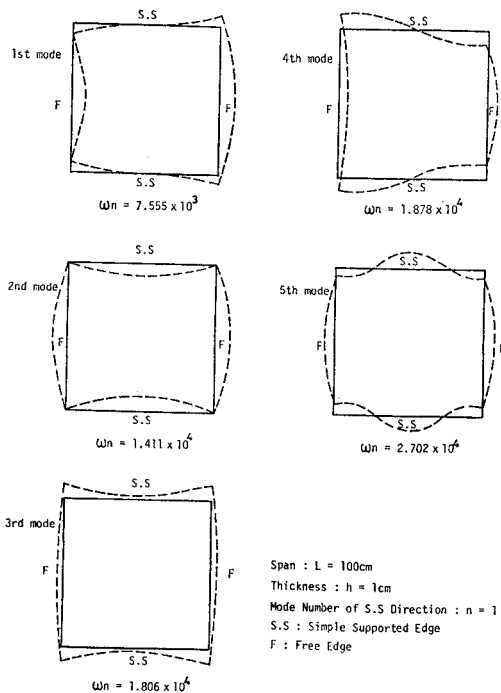


Fig. 6 In-Plane Vibration Modes and Natural Frequency ω_n of Square Plate.

動数に対しては、十分な精度が得られることがわかった。また、 $[K/2]$ 次より高次の固有振動数については、精度が落ちる場合があるが、それは計算手法に問題があるのではなく、仮定した試行関数の最高次数により制限をうけるからである。

任意支持長方形板の場合の解析例として、式 (52) を用いて、相対する 2 辺が固定で他辺が自由となる正方形板の曲げ振動問題を取り上げ、固有振動数 ω_{nm} に関する無次元量 μ_{nm} を求めた。選点数は $M=K$ とし、 $K=7$ と $K=8$ について μ_{nm} を求め、 $K=8$ のときの μ_{nm} と Warburton⁴⁾ による μ_{nm} との相対誤差を Table 3 に示した。ここで μ_{nm} の添字 n, m は、それぞれ x 方向、 y 方向の波数を示している。

Warburton は、板とはりの波形がそれぞれ類似していると仮定し計算を行っている。そして所定の境界条件を満足するはりの 2 方向の固有関数の積で、板のモードを仮定し、Rayleigh の原理で固有振動数を求めている。したがって、彼の理論では、固有振動数は厳密解の上界を与えることになり、しかも振動モードは、固定端と単純支持端では板としての境界条件を満足するが、自由端では近似的にしか満足しないという問題がある。

Table 3 より本解析法で求めた μ_{nm} は、すべて Warburton の値に比べて小さく、相対誤差 ϵ は、0.4~4% の範囲にある。厳密解は、Warburton の値より小さいはずであるので、厳密解に対して相対誤差を求めれば、 ϵ はより小さくなると思われる。

この計算手法は、 x 方向のルジャンドルの多項式と y 方向のルジャンドルの多項式の積の和で試行関数を仮定しているため、任意境界条件に対して適用できるという利点があるが、その反面選点数が多くなると式 (51) で

Table 3 Comparisons of Proposed Analysis with G.B. Warburton's.

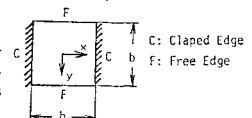
Mode Number		Author		G. B. Warburton	$\epsilon = \frac{3-\mu}{\mu} \times 100$ [%]
		1	2		
n	m	$K=7$	$K=8$		
1	1	2.230	2.247	2.268	0.926
1	2	2.675	2.674	2.769	3.43
1	3	4.420	4.422	4.609	4.06
2	1	6.193	6.200	6.249	0.784
2	2	6.781	6.807	6.963	2.24
1	4	8.095	8.089	8.310	2.66
2	3	8.874	8.874	9.224	3.79
3	1	11.88	12.20	12.25	0.408
2	4	12.62	12.60		
3	2	12.68	12.86		

where.

$$\mu_{nm} = \omega_{nm} / \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

n = Mode Number of x Direction
 m = Mode Number of y Direction
 K = Number of Collocation Points

Boundary Condition



B_4 の階数が高くなり逆行列の計算で誤差が生じるとい
う問題がある。それは、ルジャンドルの多項式の微分
 $P_N'(x), P_N''(x), \dots$ が、 N が大きくなると境界 $X =$
 ± 1 で急激に大きくなるため、 B_4 のマトリックスの中
で大きな数値と小さな数値がともに介在することになり
計算精度が落ちるからである。

この点に関しては、たとえば **Table 3** で取り上げた
ような対称な境界条件を有する問題では、初めから対称
モードと逆対称モードに分けて計算することにより、 B_4
を $1/4$ あるいは $1/16$ の容量におとして計算し、逆行列
の計算精度を高めることができる。その他の問題では、
一枚の板を数枚に分割することにより、ルジャンドルの
多項式の高次項の微係数を含まないような形で計算すべ
ば、精度のよい解が得られるものと思われる。

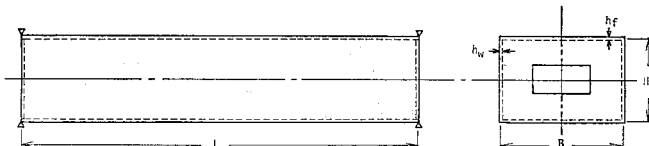
(2) ボックスガーダー

折板構造の解析例として、**Fig. 7** に示すような両端
単純支持のボックスガーダーを 4 枚の板要素の集合体と
考え、各板要素に K 個の選点を配置し、式 (66) を用
いて $12K$ 自由度の固有値解析を行った。ボックスガー
ダーの断面形状は、板厚 $h_w = h_f = h$ 、幅-高さ比 $B/H =$
 1.5 、高さ-板厚比 $H/h = 30, 300$ 、スパン-高さ比 $L/H =$
 $0.5 \sim 20$ とした。

Fig. 8 にスパン-高さ比 $L/H = 10$ 、 $K = 7$ 、波数 $n =$
 1 の場合の基本的なモードを示す。**Fig. 8** において、
 a は厚肉 ($h/H = 1/30$)、 b は薄肉 ($h/H = 1/300$) の場合
の振動モードである。断面変形はボックスガーダーの中
央で最大になり、桁軸方向の面内変形は端部で最大にな
るので、 $x = L/2$ での断面変形を実線で示し、 $x = 0$ で
の桁軸方向の面内変位 u を波線で示した。面内変位 u
は、 u がプラスの時はボックス断面の内側に、 u がマイ
ナスの時は外側に示した。ただし、面内変形は、比較的
大きなもののみ描いてある。**Fig. 8** に示すように、高
さ-板厚比が変われば同じ分類のモードでもその形状は
少しずつ異なる。この性質は、スパン-高さ比 L/H や
波数 n の変化に対しても見られる。

一般に構造体の振動モードは、その構造体の形状、振
動の次数などによって異なる固有の関数である。したが
って、種々のパラメーターが変われば、モードも変化す
るが、これらのモードを共通した特性を持つようなタイ

Fig. 7 Details of Box Girder.



a: Thick ($h/H = 1/30$)
b: Thin ($h/H = 1/300$)
— Cross-Sectional Deformation at $x = L/2$
- - - In-Plane Deformation at $x = 0$

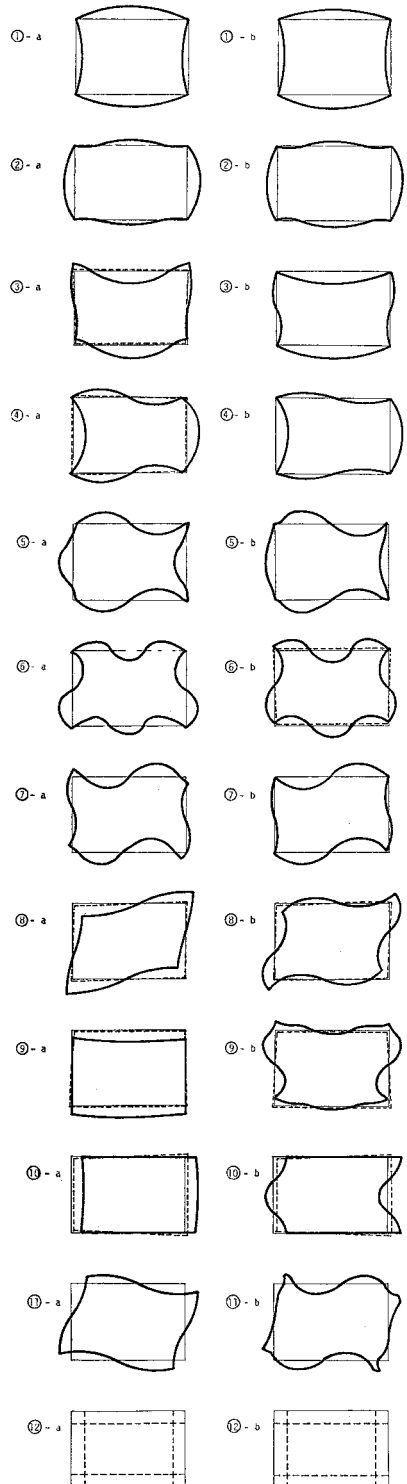


Fig. 8 Vibration Modes of Box Girder.

Table 4 Vibration Modes of Box Girder.

振動モード	断面形状	タイプ	モードの形状 (Fig. 8)
板としての曲げ振動	二軸対称 一軸対称一軸逆対称 点対称	I	①② ③④⑤⑥ ⑦
せん断振動	点対称	II	⑧
横振動	一軸対称一軸逆対称	III	⑨⑩
ねじり振動	点対称	IV	⑪
縦振動	二軸対称	V	⑫

に分類することは可能である。

すなわち、ボックスガダーの振動モードを基本的な板としての曲げ振動モード(I),せん断振動モード(II), および、はり理論に対応する横振動モード(III), ねじり振動モード(IV), 縦振動モード (V) に分類し, それらを **Table 4** に示した。

Table 4 で板としての曲げ振動 (I) とは, はりとしての性質より, むしろ, 板としての性質が顕著であるような振動を意味している. II, III, IV, V のタイプに属するモードは, タイプ I に比べてはりとしての性質が顕著である. タイプ II, III, IV は, 板厚が薄くなるほど断面変形が大きくなる傾向がある. これに対して, タイプ V は, ほとんど断面変形を起こさない。

本解析法の収束性を検討するために, 選点数 K に対応する固有振動数 $\omega_n(K)$ の収束性を, $K=9$ の時の $\omega_n(9)$ に対する相対誤差として **Table 5** に示した. ただし, 計算モデルは, 高さ-板厚比 $H/h=300$, スパン-高さ比 $L/H=10$, そして, 波数は $n=1$ とした. また, **Table 5** で各モードは, **Fig. 8** $b(H/h=300)$ に対応している. **Table 5** で, 11 番目のモードは, 他のモードに比べて収束性が悪い. それは計算モデルが非常に薄肉 ($H/h=300$) であるため, 断面変形が複雑になり, モードが高次関数で表現されるためであると思われる。

Table 5 Relative Error ϵ of Natural Frequency ω .

Mode Type	K	n=1					
		N=36	48	60	72	84	96
1	0.776	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	2.43	-1.54	0.069	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.39	-0.232	0.077	0.000	0.000	0.000	0.000
4	-3.39	0.265	-0.044	0.000	0.000	0.000	0.000
5		3.46	-1.96	0.159	0.000	0.000	0.000
6	-8.53	-14.5	3.13	-1.18	0.121	-0.015	
7	-21.6	2.71	-0.817	0.058	0.000	0.000	
8	-22.9	-0.763	-0.661	-0.182	0.034	0.000	
9	1.03	-1.50	0.281	-0.094	0.000	0.000	
10	-19.6	1.04	-0.471	0.075	0.000	0.000	
11	0.622	-1.15	15.5	1.48	9.54	1.30	
12	0.280	0.037	0.075	0.056	0.037	0.279	

where.

$$\epsilon = \frac{\omega(9) - \omega(K)}{\omega(9)} \times 100\%$$

$\omega(K)$ = Natural Frequency when the Number of Collocation Points is K

n = Mode Number of x Direction

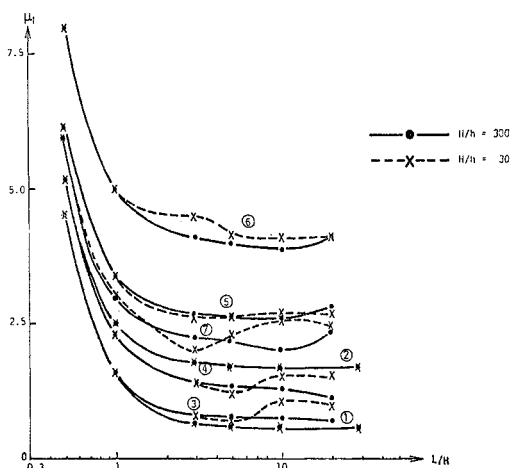
N = Degree of Freedom

のモードについては $K \geq 6$ で, ほぼ収束している。

Table 4 で分類したモードとその固有振動数 ω_n の特性をさらに調べるために, スパン-高さ比 L/H を変えて種々の計算を行った. 固有振動数 ω_n に関する無次元パラメーターは, タイプ I, II では $\mu_n = \omega_n \sqrt{\frac{\pi^2}{H^2}}$, $\sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ を用いた. ここで $\frac{\pi^2}{H^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ は, 幅が H , スパンが L , 板厚が h で, $\left(\frac{L}{H}\right)^2 \gg \pi^2$ なる関係を有する四辺単純支持板の 1 次の固有振動数である. タイプ III は $\kappa_n = \omega_n \left(\frac{H}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$, タイプ IV は $\eta_n = \omega_n \left(\frac{H}{L}\right) \sqrt{\frac{GI}{\rho I_p}}$, タイプ V は $\xi_n = \omega_n \left(\frac{H}{L}\right) \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ を用いた. パラメーター κ_n, η_n, ξ_n の分母は, それぞれスパン L のボックスガダーをはりの初等理論を用いて計算した横振動, ねじり振動の 1 次の固有振動数である. したがって, パラメーター κ_n, η_n, ξ_n の性質を調べれば断面変形を考慮した本解析法とはり理論との比較をすることができる。

計算結果は **Fig. 9(a)~(e)** に示した. **Fig. 9(a)~(e)** はスパン-高さ比 L/H が無次元化したそれぞれの固有振動数に与える影響を表示したもので, 横軸にいずれも L/H をとり縦軸におおの μ, η, ξ をとっている. 丸印に示した数字は **Fig. 8** の各振動モードに対応する番号を示している. また, **Fig. 9(a)~(e)** で, 無次元パラメーター $\mu_n, \kappa_n, \eta_n, \xi_n$ は $H/h=300$ のときは実線で, $H/h=30$ のときは破線で, そして初等はり理論は一点鎖線で表している. **Fig. 9(a)** において破線で表示された $H/h=30$ の場合には, 板としての性質のほか, はりとしての性質も表われるため, かならずしも単調な曲線とはなっていない. しかし, $L/H < 1$ の範囲では板厚による相異はほとんど認められない。

Fig. 9(b) より, スパン-高さ比 L/H が $1 < L/H$



(a) Lateral Vibration Mode as Plate Element

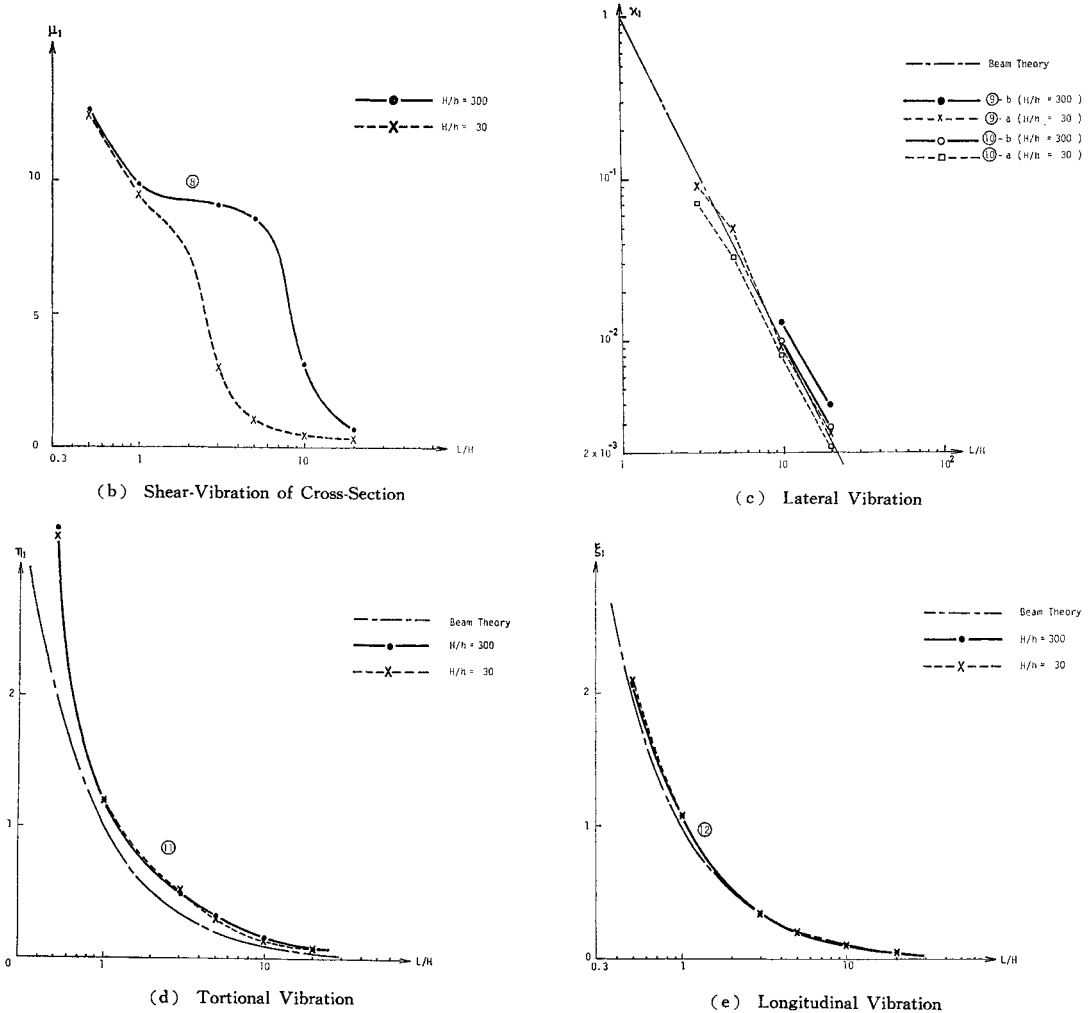


Fig. 9

$L/H < 20$ の範囲にあるときは、固有振動数は板厚に大きく左右され、振動モード (Fig. 8 ⑧) も大きく異なっているため、振動モードの判定が困難になる。しかし、スパンが長くなり $L/H \geq 20$ となると、薄肉でも厚肉でもはりとしてのせん断変形が卓越し四隅の変位が大きくなる。一方、 $L/H \leq 1$ となると板厚によらず四隅の変位が零となり非常に複雑な断面変形が起こる。

Fig. 9(c) は Bernoulli-Euler ばりの横たわみ振動に相当するモードである。はり理論による κ_1 と断面変形を考慮に入れた本解析法の κ_1 とは一致しないが、厚肉の場合は断面変形が小さいので、はり理論により κ_1 はある程度の近似を与えている。薄肉の場合は $L/H < 10$ で、厚肉の場合は $L/H < 3$ で、断面変形がさらに複雑になるためモードの判別が困難となり、 κ_1 が判定できない。すなわち、 L/H が小さくなると複雑な断面変形が起こり、はり理論に対応するような横振動モードは存在

しなくなる。

ねじり振動については Fig. 8 の ⑩ と Fig. 9(d) より明らかなように、薄肉であるほど断面変形が複雑であるが、板厚が固有振動数に与える影響は小さいようである。しかし、本解析法で求めた η_1 は、St. Venant のねじり理論による η_1 より大きく、特に L/H が小さいときは、その差が大きい。

縦振動については Fig. 9(e) より、 ϵ_1 はスパン-高さ比が $L/H < 3$ のときを除けば、はり理論による値とほぼ一致すると考えられる。

6. 結 論

以上において各構成要素が面内変形ならびに面外変形を受けるような折板構造に対してその動的挙動を解明するために、ルジャンドルの第一種の多項式を試行関数と

する解析理論を誘導し、薄肉長方形板およびボックスガ-
ーダーの応用例を示した。

その結果、ルジャンドルの多項式は、相対する2辺が
自由端となる板の面外振動のモード成分に非常に近い関
数であるばかりでなく、任意境界条件を有する長方形板
に対しても少ない項数でモードを表現できること、直交
関数を試行関数に用いたため固有マトリックスの階数が
高い場合でも固有値計算の精度がよいこと、また、この
手法は、座標変換マトリックスを用いて連続条件を考慮
すれば、立体的な折板構造に対しても容易に拡張できる
ことなどが明らかとなった。

以上のことから、ルジャンドルの多項式を試行関数に
用いる本解析法は、折板構造の動的挙動を解明するた
めの一般性および有用性をおねそなえた手法であると思
えられる。

なお、数値計算にあたって、東京大学大型計算機セン
ター HITAC 8800/8700 を用いて行われたものである
ことを付記する。

付録 A・1

$$a_1 = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & 0 \\ e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_5 \end{bmatrix} \quad c_1 = \begin{bmatrix} e_6 & 0 & 0 \\ 0 & e_7 & 0 \\ 0 & 0 & e_8 \end{bmatrix}$$

付録 A・2

$$b_1(y) = \begin{bmatrix} \cdots, & P_{j-1}(\beta y), & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \cdots, & P_{j-1}(\beta y), & \cdots & 0 \\ & 0 & & 0 & \cdots, & P_{j-1}(\beta y), \cdots \\ & 0 & & 0 & \cdots, & \beta P_{j-1}(\beta y), \cdots \end{bmatrix}$$

$$b_3(y) = \begin{bmatrix} \cdots, & \beta P_{j-1}'(\beta y), & \cdots, & \alpha_n P_{j-1}'(\beta y), & \cdots & 0 \\ \cdots, & -\nu \alpha_n P_{j-1}(\beta y), & \cdots, & \beta P_{j-1}'(\beta y), & \cdots & 0 \\ & 0 & & 0 & \cdots, & \beta^2 P_{j-1}'(\beta y) - \nu \alpha_n^2 P_{j-1}(\beta y), \cdots \\ & 0 & & 0 & \cdots, & \beta^3 P_{j-1}'''(\beta y) - (2-\nu) \alpha_n^2 \beta P_{j-1}'(\beta y), \cdots \end{bmatrix}$$

$$b_5(y) = \begin{bmatrix} \cdots, & -\nu \alpha_n P_{j-1}(\beta y), & \cdots, & \beta P_{j-1}'(\beta y), & \cdots & 0 \\ & 0 & \cdots, & P_{j-1}(\beta y), & \cdots & 0 \\ & 0 & & 0 & \cdots, & P_{j-1}(\beta y), \cdots \\ & 0 & & 0 & \cdots, & \beta^2 P_{j-1}''(\beta y) - \nu \alpha_n^2 P_{j-1}(\beta y), \cdots \end{bmatrix}$$

ただし、 $j=1 \sim K$

b_1 と b_2 , b_3 と b_4 , b_5 と b_6 は、添字 j が異なるだ
けで、同一の式で表現される。すなわち、 \bar{u}_i, \bar{v}_i に対応
する成分は、 $j-1$ を $l+K-1$ ($l=1, 2$), \bar{w}_i に対応す
る成分は、 $j-1$ を $m+K-1$ ($m=1 \sim 4$) とおきかえれ
ば、 b_2, b_4, b_6 が与えられる。

$$a_2 = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & 0 \\ f_3 & f_4 & 0 \\ 0 & 0 & f_5 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} f_6 & 0 & 0 \\ 0 & f_7 & 0 \\ 0 & 0 & f_8 \end{bmatrix}$$

a_1, c_1 は、 $3K \times 3K$ の正方マトリックス、サブマト
リックス $e_1 \sim e_8$ は、 $K \times K$ の正方マトリックスとなる。
また、 a_2, c_2 は、 $3K \times 8$, サブマトリックス $f_1 \sim f_4, f_6,$
 f_7 は、 $K \times 2$, f_5, f_8 は $K \times 4$ のマトリックスとなる。
サブマトリックス e_m と f_m ($m=1 \sim 8$) の要素は、添字
が異なるだけで同一の式で表現できるので、 e_m の成分
のみを以下に示す。

$$e_{ij}^1 = \frac{1-\nu}{2} \beta^2 P_{j-1}''(\beta y_i) - \alpha_n^2 P_{j-1}(\beta y_i)$$

$$e_{ij}^2 = \frac{1+\nu}{2} \alpha_n \beta P_{j-1}'(\beta y_i)$$

$$e_{ij}^3 = -e_{ij}^2$$

$$e_{ij}^4 = \beta^2 P_{j-1}''(\beta y_i) - \frac{1-\nu}{2} \alpha_n^2 P_{j-1}(\beta y_i)$$

$$e_{ij}^5 = \beta^4 P_{j-1}(\beta y_i) - 2 \alpha_n^2 \beta^2 P_{j-1}''(\beta y_i) \\ + \alpha_{j-1}^4(\beta y_i)$$

$$e_{ij}^6 = \frac{(1-\nu^2)\rho}{E} P_{j-1}(\beta y_i)$$

$$e_{ij}^7 = e_{ij}^6$$

$$e_{ij}^8 = \frac{12(1-\nu)^2 \rho}{Eh^2} P_{j-1}(\beta y_i)$$

ただし、 $e_m = [e_{ij}^m]$ $m=1 \sim 8, i=1 \sim K, j=1 \sim K$

付録 A・3

$$a_3 = [f(x_1, y_1), \cdots, f(x_N, y_1), f(x_1, y_2), \cdots, \\ f(x_N, y_M)]^T$$

$$c_3 = [g(x_1, y_1), \cdots, g(x_N, y_1), g(x_1, y_2), \cdots, \\ g(x_N, y_M)]^T$$

ただし、行ベクトル $f(x_i, y_j)$, $g(x_i, y_j)$ は要素数 $N \times M$ の行ベクトルであり、 x_i, y_j はそれぞれ $P_N(\alpha x) = 0, P_M(\beta y) = 0$ の根である。行ベクトル $f(x_i, y_i)$, $g(x_i, y_i)$ の w_{nm} に対応する成分を以下に示す。

$$f(x_i, y_j) = [\dots, \alpha^4 P_n^{IV}(\alpha x_i) \cdot P_m(\beta y_j) + 2\alpha^2 \beta^2 P_n''(\alpha x) P_m''(\beta y) + \beta^4 P_n(\alpha x) P_m^{IV}(\beta y), \dots]$$

$$g(x_i, y_j) = [\dots, -\frac{r}{D} P_n(\alpha x_i) \cdot P_m(\beta y_j), \dots]$$

ただし、 $n=0 \sim N-1, m=0 \sim M-1$

マトリックス a_i, c_i は上式で添字の nm が異なり行ベクトルの要素数が $4 \times (N+M+4)$ となるだけで、あとはそれぞれ a_3, c_3 と同一の式で表わすことができる。

付録 A・4

境界選点	境界条件	境界条件式	境界条件式のマトリックス表示	列ベクトル $x_3 \cdot x_4$ の要素 w_{nm} に対応する b_r の要素
$x = \pm \frac{l}{2}$ 上の境界選点	固定端	$w=0$ $\frac{\partial w}{\partial x}=0$	$b_7(x, y)x_3 + b_8(x, y)x_4 = 0$ $b_9(x, y)x_3 + b_{10}(x, y)x_4 = 0$	$P_n(\alpha x) \cdot P_m(\beta y)$ $\alpha P_n'(\alpha x) \cdot P_m(\beta y)$
	自由端	$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$ $V_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} = 0$	$b_{11}(x, y)x_3 + b_{12}(x, y)x_4 = 0$ $b_{13}(x, y)x_3 + b_{14}(x, y)x_4 = 0$	$\alpha^2 P_n''(\alpha x) \cdot P_m(\beta y) + \nu \beta^2 P_n(\alpha x) \cdot P_m''(\beta y)$ $\alpha^3 P_n'''(\alpha x) \cdot P_m(\beta y) - (2-\nu) \alpha \beta^2 P_n'(\alpha x) \cdot P_m''(\beta y)$
	単純支持	$M_x = 0$ $w = 0$	$b_{11}(x, y)x_3 + b_{12}(x, y)x_4 = 0$ $b_7(x, y)x_3 + b_8(x, y)x_4 = 0$	$\alpha^2 P_n''(\alpha x) \cdot P_m(\beta y) + \nu \beta^2 P_n(\alpha x) \cdot P_m''(\beta y)$ $P_n(\alpha x) \cdot P_m(\beta y)$
$y = \pm \frac{b}{2}$ 上の境界選点	固定端	$w=0$ $\frac{\partial w}{\partial y}=0$	$b_7(x, y)x_3 + b_8(x, y)x_4 = 0$ $b_{15}(x, y)x_3 + b_{16}(x, y)x_4 = 0$	$P_n(\alpha x) \cdot P_m(\beta y)$ $\beta P_n(\alpha x) \cdot P_m'(\beta y)$
	自由端	$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$ $V_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} = 0$	$b_{17}(x, y)x_3 + b_{18}(x, y)x_4 = 0$ $b_{19}(x, y)x_3 + b_{20}(x, y)x_4 = 0$	$\beta^2 P_n(\alpha x) \cdot P_m''(\beta y) + \nu \alpha^2 P_n''(\alpha x) \cdot P_m(\beta y)$ $\beta^3 P_n(\alpha x) \cdot P_m'''(\beta y) + (2-\nu) \alpha^2 \beta P_n''(\alpha x) \cdot P_m'(\beta y)$
	単純支持	$M_y = 0$ $w = 0$	$b_{17}(x, y)x_3 + b_{18}(x, y)x_4 = 0$ $b_7(x, y)x_3 + b_8(x, y)x_4 = 0$	$\beta^2 P_n(\alpha x) \cdot P_m''(\beta y) + \nu \alpha^2 P_n''(\alpha x) \cdot P_m(\beta y)$ $P_n(\alpha x) \cdot P_m(\beta y)$

参考文献

- 1) 井口鹿象：相対する 2 辺が単純支承他の 2 辺が自由なる矩形板の振動について，土木学会誌，第 26 卷，第 4 号，pp. 427~440, 1940.4.
- 2) Merser, C.A. and Server, M.C. : Prediction of Natural Frequencies and Normal Modes of Skin-Stringer Panel Rows, Journal of Sound Vib., 6(1), pp. 149~165, 1967.
- 3) Leissa, A.W., Clausen, W.E., Hubbert, L.E. and Hopper, A.T. : A Comparison of Approximate Methods for the Solution of Plate Bending Problems, AIAA, No. 68~296, 1968.
- 4) Warburton, G.B. : The Vibration of Rectangular Plates, Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 12, No. 12, pp. 371~384, 1954.
- 5) Yang, W.H. : Vibration of a Plate with Internal Constraints, Journal of Applied Mechanics, pp. 1072~1074, 1974.
- 6) Cheung, Y.K. and Cheung, M.S. : Flexural Vibration of Rectangular and Other Polygonal Plates, Journal of ASCE, Vol. 97, EM 2, pp. 391~411, 1971.
- 7) 中村秀治：断面変形を考慮した薄肉はりの振動解析，土木学会論文報告集，第 223 号，pp. 11~22, 1974.
- 8) 能町純雄・角田与史雄・岸 徳光：薄肉 H 形断面はりの弾性波の位相速度について，土木学会論文報告集，第 244 号，pp. 37~45, 1975.
- 9) Hooker, R.J. and O'Brieff, D.J. : Natural Frequencies

- of Box-Type Structures by a Finite-Element Method, Journal of Applied Mechanics, pp. 363~365, 1974.
- 10) Lees, A.W., Thomas, D.L. and Wilson, R.R. : Analysis of the Vibration of Box Beams, Journal of Sound Vib., 45(4), pp. 559~568, 1976.
- 11) Finlayson, B.A. : The Method of Weighted Residual and Variational Principles, Academic Press, 1972.
- 12) Prenter, P.M. : Splines and Variational Methods, John Wiley & Son.
- 13) 川井忠彦：重みつき残差法と有限要素法の将来性，数理科学，No. 144, pp. 5~11, June, 1975.
- 14) A.I. Soler : Higher-Order Theories for Structural Analysis Using Legendre Polynomial Expansions, Journal of Applied Mechanics, pp. 757~762, 1969.
- 15) 寺沢寛一：自然科学者のための数学概論，岩波書店，1954.
- 16) 末岡清市：級数および直交関数系，コロナ社，1957.
- 17) スミノルフ：高等数学教程 II 巻第一分冊，共立出版，1959.
- 18) Timoshenco, S. and Woinowsky-Krieger : Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, 1959.
- 19) 栖原二郎：平板の曲げ理論，コンピュータによる構造工学講座 II-5-A, 培風館，1972.
- 20) Timoshenco, S. and Goodier, J. : Theory of Elasticity 3rd ed., McGraw-Hill, 1970.
- 21) Wilkinson, J.H. : The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, 1965.