土木学会論文報告集
第 277 号・1978 年 9 月

動学的施設配置計画問題に関する基礎的研究

BASIC STUDY ON THE DYNAMIC PROBLEM OF FACILITIES ALLOCATION

長 尾 義 三*・田 口 晶 一**
By Yoshimi NAGAO and Syoichi TAGUCHI

1. 緒　　言

生産費を極小にするような立地行動の分析に基づく Weber A. の立地理論は微視的施設配置計画問題の根底になっている．ここで，立地 location とはある主体によって，あるものの占める場所 space が決定されることをいう．この立地をいつ，どこに，どの程度の規模で行うかによって，効用を定義した目的関数の値が異なるとき，その差を生ずる要素を「立地因子」とよぶことにする．本研究では，あるものとは都市施設や交通施設のように場所を占める施設をいい，ある主体とは中央や地方の公共主体を意味することにする．ここで，“どこに”に関する分析を「空間的分析」とし，“いつに”に関する分析を「時間的分析」と名づけておく．

立地理論に関する研究は，従来より産業立地論を中心にかなりなされてきている[1)~3)]．しかし，そのほとんどは「空間的分析」が中心である．たとえば，倉庫・工場・ターミナル等の立地分析としては，生産地に発生する費用とそこまでの輸送費の両方を主たる立地因子とし，一般に工場配置問題 Plant Location Theory として解析されている[8)~11)]．また，公害のような社会的費用を考慮した施設の立地などについても，混合整数計画問題 Mixed Integer Programming Problem を用いて分析されることが多い[8),12)]．しかし，これらの研究のいずれも，与えられた需要のもとでの立地地点や立地規模の選択を取り扱ったものである．しかし，実際需要は時系列に変動してゆくものであり，もし異なった需要が予測されたときは，異なった地点の施設の立地が選択されるであろう．しかし，本研究で扱うような施設は一度建設されたらやりなおしが容易でなく，以後も当初計画した需要をみたすことができる性質のものであるから，時系列的に矛盾を生ずる場合が発生する．ここに，「時間的分析」の必要が生まれてくる．

しかし，施設の立地問題に時間軸を導入することは，新たな問題を提起する．すなわち，時間とともに変化する需要に対して，その場その場で追いかけていくような施設の立地選択が，一定時期まとめてみた場合，全体として最適な地点に立地された状態になっているか否かという問題である．この問題については，著者らは他の論文で，建設形態における 3 種類のパターン（追いかけ型建設・一括型建設・段階型建設）の比較分析の中で，短期間だけを最適化しても全体期間の最適化につながらない性質のことを“ダイナミズム性”と名づけ取り扱っている[14)]．このダイナミズムの発生の要因としては，① 施設を設けることによって影響を受ける需要量の変化，② 計画のフレームとして予測される計画需要量の時系列不確実性の大きさ，③ 施設規模または質の変化に伴う建設時および供用時の生産性の変化（規模の経済），④ 施設を整備する期ごとに発生する段取り費用 set up cost および手戻り費用などが論じられている．したがって，これらの要因が存在しない場合は，建設形態としては整備可能な最小の施設規模で逐次需要に応じて建設していく追いかけ型 Myopic Behavior が最適になるのである[14)]．逆に，これらのダイナミズム発生の要因が存在する場合は，一括型 Joint Construction や段階型 Stage Construction の建設形態との比較検討が必要となるわけである．

これらの研究を，前述の立地問題の時間的分析の手法として取り入れ，さらに立地因子の 1 つである輸送費用の存在が前述のダイナミズムの発生の一因になることを解明し，施設配置計画を動学的問題として一般的に取り扱うことを本研究で試みる．したがって，ここで扱うのは部分最適化が全体の最適化に一致しないという非凸環境下の施設配置計画問題であるといえる．

最近，動学的施設計画を扱った研究もいくらかなされ

* 正会員　工博　京都大学教授　工学部交通土木工学教室
** 正会員　工修　愛知県水道局

てきているが[4]，それらは一般に凸環境下における最適化問題であることが多く，建設形態としては需要追いかけ型方式の追及にとどまるといえよう．本研究では，需要は時系列のもとで与件とし，非弾力性であるとの仮定を置くなどの単純化を行っているが，以上の点で従来の研究を動学的施設配置問題として一歩前進させる端緒となることと思われる．

2. 施設配置形態の分析

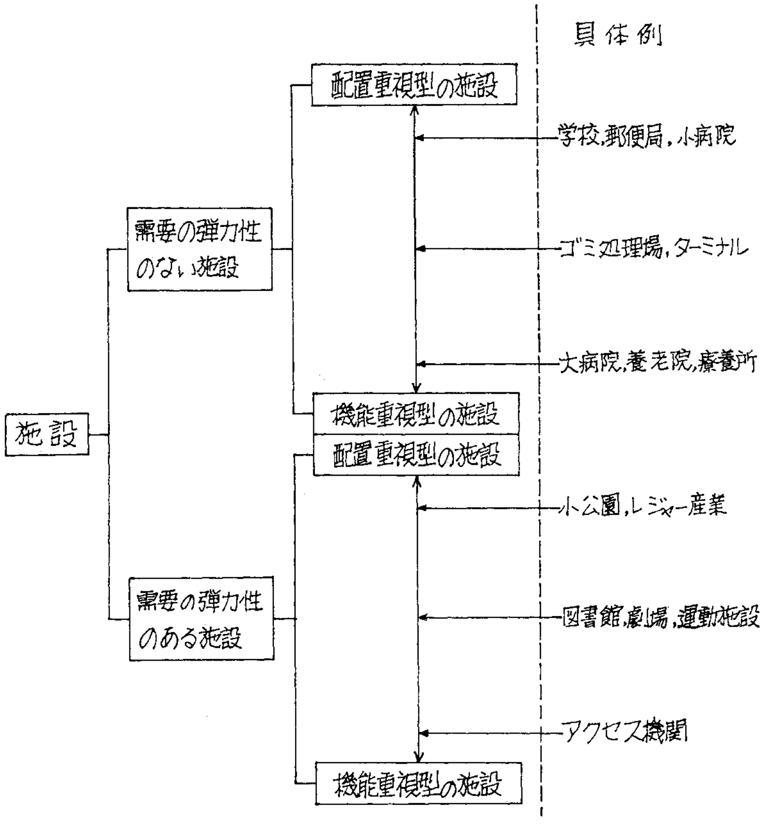
(1) 立地因子と施設の分類

a) 立地因子

一般に産業立地因子は，経済的因子と非経済的因子に大別される[1),2)]．さらに経済的因子は，収入因子と費用因子に分けられる．このうち費用因子について，Isard はさらに次の3グループに類別した[3)]．この類別における第1は，輸送費用や移転費用のように一定の点からの距離につれて規則的に変化する費用である．第2は，労働・エネルギー・水・租税・保険・気候・大気質・水質・騒音・地形さらに社会構造かく乱など各種の環境からその地点の特性値として付与される費用である．第3としては，規模の経済もしくは集積のもたらす効用・非効用の費用で，細分すると規模の経済 Scale Economy，地域特化の経済 Localization Economy，都市化の経済 Urbanization Economy からなっている．本研究において都市および交通施設の配置問題を分析していくうえで，簡単のため第1グループの因子としては施設までの輸送費，第2グループとしては配置可能地点における建設費，第3グループとしては規模の経済のみを考える．このように単純化を行っても，以上考慮した諸種の費用をモデルの拡張の中に含ましめることは可能であり，その一般性を失うことはない．

b) 施設の分類

a) において分類された費用項目に着目して，都市および交通施設を図—1 のように分類することができる．この中で，需要の弾力性による分類とは費用の大小がたとえば利用者への料金に反映し，それが需要量に及ぼす影響の程度による類別である．たとえば，公園・図書館などについては費用の大小によって需要の変動を考える必要があるが，学校・郵便局などは輸送などに要する費用に対して非弾力性需要のもとでの考察が許容される．さらに，図—1 における配置重視型の施設とは，前述の費用因子の分類中の第1グループの施設までの輸送費の大小・遠近が問題になり，そのため施設の配置形態が重要視される施設である．また，機能重視型の施設とは，第1グループより第3グループの費用因子の規模による施設機能が重視される施設群である．



図—1 施設の分類

(2) 施設配置問題への段階開発理論の適用

緒言で述べたように，施設配置問題の時間的分析を行うために，従来，建設における投資形態の分析において用いられている「段階開発理論」の概念を用いる[13),14)]．そのため，その言葉の定義を配置問題に適用すべく若干変更して次のようにする．

追いかけ型配置：需要の要請に応じて，各期において最適と思われる地点に逐次施設を配置すること．

一括型配置：数期にわたる需要をみたすべく，全体として最

適な地点に施設を一括して配置すること.

段階型配置：施設を数期にわたってみたとき最適になるような地点へ逐次配置していくこと.

ただし，これらのおのおのにおける最適化とは，規模の経済が働く利用費用や建設費用だけでなく，それに加えて全期における輸送費用の増減などをも含んだ利用形態全体でのメリットを考慮した最適行動を意味する．そして，この「利用形態全体でのメリットというものが，緒言で述べたような追いかけ型が一括型や段階型と配置地点が異なるという「配置問題におけるダイナミズム」発生の要因となるわけである．このことを次に単純な2都市間2段階モデルで確かめてみよう.

（3） 2都市間の施設配置形態

2都市間で，配置重視型あるいは機能重視型の施設を需要の増加に合わせて整備していく問題を考える．ここでは，その配置形態の類別を行うことを主眼としているため，以下の単純化の仮定を置くものとする.

① 2都市間での2段階開発モデルとする.

② 2都市は同規模で，Hだけ離れており都市の中心から離れるほど建設費は安い.

③ t 期の需要 $D(t)$ は非弾力性とし，施設の需要量は2都市で各期とも等しい.

前述のように考慮すべき費用因子としては，Isard の分類中の第1グループ因子としては，輸送費用を考え C_1 とする．この単位輸送費は都市の中心からの距離 h の関数 $f(h)$ となる．第2グループ因子を代表する施設建設費 C_2 は，距離 h と規模 s の関数 $F(h, s)$ と表わされる．第3の規模の経済を表わす因子としては，利用費用 C_3 と混雑費用 C_4 が考えられる．ともに単位費用は，規模 s の関数 $C_3(s)$, $C_4(s)$ で表わされる．以上の費用因子に対して，収入因子として施設の利用に対する利用者の支払い対価 willing to pay を $\overline{U}$ とすれば，総収入は $\overline{U} \cdot D(t)$ で表わされる．したがって，t 期での費用便益基準での最適行動は次のように表わされる.

$$\max_{hs}\{\overline{U}\cdot D(t)-(C_1+C_2+C_3+C_4)\} \quad \cdots(1)$$

このとき，仮定より需要は非弾力性であり $s \cdot h$ に無関係であるので，式(1)は次式と同等である.

$$\min_{hs}[C_1+C_2+C_3+C_4] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

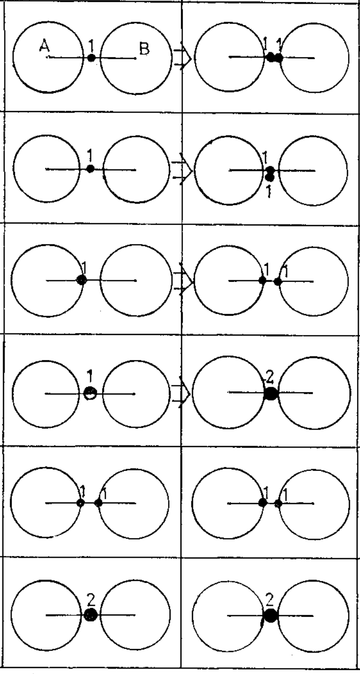
こうした費用最小化の最適行動下において，規模の経済や輸送費の存在などのダイナミズムの発生により，2段階開発の場合，図―2 のような6種の施設配置のパターンのいずれかが選択される．図―2 の説明の前に，より基礎的な場合について説明をしておく.

（イ） 1都市において規模 s なる施設を1か所に建設する場合――都市の中心から離れるに従って輸送費用は大きくなるが，逆に地価が低くなるために，費用最小立地点の最適距離 h^* が存在する（図―3).

（ロ） 2都市間で規模 s の1施設を共有して建設する場合――2都市の中心を結ぶ線上のどこに立地しても2都市での輸送費の総額は一定であるので，建設費最小の $H/2$ 地点に立地される（図―4).

（ハ） 2都市間で規模 s の2施設を建設する場合――図―5 において [1] より [2] の形態の方が有利であろうが，[1] の規模 s が [3] のように一体化して機能すれば，規模の経済が働き，[2] と [3] の形態の優劣比較は一概にいえなくなる（図―5).

以上の3つの場合から判断すると，2都市間の2段階

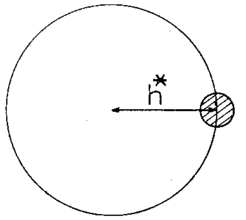


◎有利　○少し有利　×不利

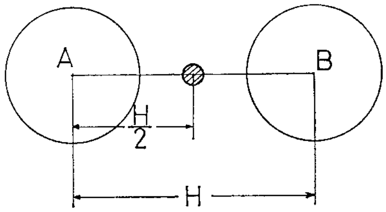
パターン	建設地点 第1期	建設地点 第2期	輸送費用 第1期	輸送費用 第2期	建設費用 第1期	建設費用 第2期	利用費用 第1期	利用費用 第2期	混雑費用 第1期	混雑費用 第2期
(a)	A 1 B	1 1		○	◎	○				
(b)	1	1 1			◎	◎				
(c)	1	1 1		◎	○	○				
(d)	1	2			×	◎		◎		◎
(e)	1 1	1 1	◎	◎	××					
(f)	2	2			×××		◎	◎	◎	◎

（注）●が施設の立地点，数字（1, 2）は施設規模

図―2 各パターンの行動様式とそのメリット



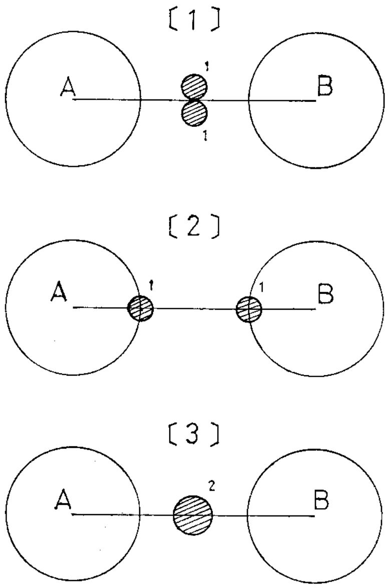
図―3　1都市において1施設建設の場合



図―4　2都市において1施設建設の場合

表―1　各配置パターンの分類

施設の性格／建設形態	配置重視型	機能重視型
追いかけ型	(a)	(b)
段階型	(c)	(d)
一括型	(e)	(f)



図―5　2都市において2施設建設の場合

での施設建設形態として図―2の6種類のパターンが考えられる．おのおののパターンは図―2に表わしたようにメリット・デメリットがあるので，最適パターンとしてはおのおのを比較分析する必要がある．しかし，この分析は比較的容易なので，ここでは各パターンの性格を明らかにするに留める．

図―2の (a)～(f) の配置パターンのうち，(a), (b) は需要に合わせて第1期の最適化に試みたのち第2期の最適化を行っている意味で前述の「追いかけ型配置」といえる．これに対し，(c), (d) は第1期，第2期を通じた最適配置を指向して第1期の配置を行っているので，「段階型配置」，(e), (f) は最終における最適配置を初期に一括して建設してしまうので「一括型配置」といえる．また，別の観点からみると，(a),(c),(e) はそのパターンをとるに至った要因が輸送費用という第1グループの因子であり，配置重視型の施設の性格をもっていると考えることができる．一方，(b),(d),(f) は規模により変わる利用費用や混雑費用によるもので，機能重視型施設の施設をもっていると考えられる．これらをまとめたのが表―1である．こうして，(b), (d), (f) の立地パターンは第1費用因子の影響は同じであるから第2，第3の費用因子のみの分析でよく，従来の規模の経済によるダイナミズムを扱った段階開発理論で分析できるに対し，(a), (c), (e) は逆に第1費用因子の輸送費用のみによるダイナミズム性で分析評価を行うことになる．したがって，本研究では，次にこの (a),(c),(e) の配置重視型施設の比較を多地域多段階に拡張していく中で分析してみよう．

3．配置重視型施設の動学的分析

（1）　仮定および記号の説明

n 個に分割された地域における m 個の配置可能地点のうち T 期に分けられた期間においてどのような時期にどの地点に施設（配置重視型施設）を配置していくのがよいかを考える．

そのために以下の仮定を置くことにする．

仮定 1　計画期間を T 期に分割し，施設の建設は各期の最初の年だけ行えるものとする．

仮定 2　需要は価格もしくは費用に関して非弾力性であるとし，各期の各地域において一様な伸び率をもつ指数増加関数とする．

仮定 3　施設の耐用年数は 50 年とする．さらに全体におけるサービス・ライフは最初の施設の寿命である 50 年とする．

仮定 4　各施設の利用費用や外部不経済は各施設とも一定とする．

仮定 5　施設は規模の経済が全然働かないものとし，ゆえに将来における一体化利用をめざす施設の拡張は行われないものとする（これは，施設が純粋な配置重視型施設であることを意味する）．

ここでは前節同様，仮定1より需要は非弾力性であるから収入については考慮せず総費用の最小化が最適行動となる．さらに，施設は仮定5より純粋な配置重視型であるので，規模による利用費用の差が存在せず全輸送費と全建設費の総額最小化を試みればよい．

以下用いられる記号の定義は次のようである．

i：需要の発生地域（$i=1, \cdots, n$）

j：施設の建設可能地点（$j=1, \cdots, m$）

t：期（$t=1, \cdots, T$）

P_t：t 期の需要の年間伸び率（%）

r：割引率（%）

したがって，t 期における最初の年から数えた年数 t' 年の基準年への建設費などの現価係数は $e^{-rt'}$ で表わされる．

$F(j)$：j 地点の建設費（円）

$f(j)$：j 地点の建設費を 50 年間の毎年等価になおした毎年費用（円/年）

$Q(j)$：j 地点の最大利用容量

$C(i, j)$：i 地域から j 地点への単位輸送費

$D(i, t)$：i 地域の t 期の最後の年における需要量

$x(i, j, t)$：i 地域の j 地点の施設に対する t 期の最後の年における利用量

l_t：t 期の年数

L_t：t 期の最初の年までの全年数

$$L_t=\begin{cases} 0 & (t=1 \text{ のとき}) \\ \sum_{t=1}^{t-1} l_t & (t \neq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

α_t：t 期の総輸送費の $x(i, j, t)$ に対する換算係数

β_t：建設費をサービス・ライフが 50 年であるために修正する係数

このうち，動学化のための係数である α_t と β_t の詳しい説明を行う．

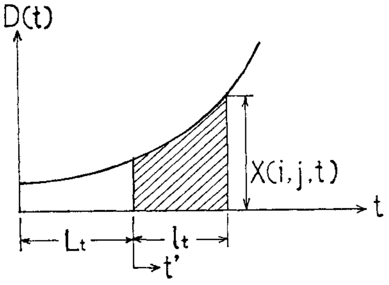
a） α_t の説明（**図―6** 参照）

いま t 期における最初の年から数えた年数を t' とすると，t' 年次の i 地域の j 地点の施設に対する需要量は **仮定 2** より，

$$\frac{x(i, j, t)}{e^{P_t \cdot l_t}} \cdot e^{P_t \cdot t'} \qquad \cdots\cdots(3)$$

で表わされる．これより t 期における i 地域から j 地点への総輸送費を t 期の最初の年（$=L_t$）を基準にしてなおした総費用は，

$$\int_0^{l_t} C(i, j) \cdot \frac{x(i, j, t)}{e^{P_t \cdot l_t}} \cdot e^{P_t \cdot t' Ti} \cdot e^{-r \cdot t'} dt'$$
$$=C(i, j)x(i, j, t)\{e^{-r \cdot l_t}-e^{-P_t \cdot l_t}\}/(P_t-r)$$
$$\cdots\cdots(4)$$



図―6　t 期の i から j への総需要量

したがって，

$$\alpha_t=(e^{-r \cdot l_t}-e^{-P_t \cdot l_t})/(P_t-r) \qquad \cdots\cdots(5)$$

とおくと t 期の総輸送費を L_t 年を基準にした価値は，

$$\alpha_t \cdot C(i, j) \cdot x(i, j, t) \qquad \cdots\cdots(6)$$

となる．

b） β_t の説明

本来 j 地点の施設の建設費は $F(j)$ で耐用年数はいつ建設されても 50 年もっているのだが，全体のサービス・ライフが 50 年であるので後の期に建設されたものほど 50 年以後に価値が残る．このことを防ぐために，毎年等価になおした $f(j)$ なる費用を全体のサービス・ライフの間の分だけ建設時期の現在価値になおすための係数が β_t である．t 期に建設された j 地点の施設の L_t 年における建設費は，

$$\int_0^{50-L_t} f(j) \cdot e^{-r \cdot t'} dt' = f(j) \cdot \{1-e^{-(50-L_t) \cdot r}\}/r$$
$$\cdots\cdots(7)$$

で表わされる．したがって，

$$\beta_t=\{1-e^{-(50-L_t)r}\}/r \qquad \cdots\cdots(8)$$

となる．

（2） 動学的配置モデルの定式化

以上の仮定および記号を用いて n 地域における m 個の配置可能地点のうち T 期に分けられた期間においてどの時期にどの地点に施設を配置していくかについて，段階型・追いかけ型・一括型のそれぞれの行動様式に基づく総費用を定式化してみよう．すなわち，段階型は全期における費用最小化であり［Problem A］で表わされ，追いかけ型は各期ごとの最適化を追って配置していく［Problem B］で，一括型は何期分かを一括して配置する［Problem C］で定式化される．これらの費用項目は，いずれも j 地点の施設の建設費と i 地域からのこの施設への輸送費用の総計からなり，一般の工場配置問題 Plant-Location Problem[9)~11)] と同種のものである．このうち，［Problem A］で示される段階型の動学的配置モデルは，前述に指摘したような従来の静学的分析の問題点を克服すると同時に，全期を通じた総費用での最適化を行っているので，追いかけ型と段階型を比較してどちらかを用いるという従来の場合と異なり，いつも全体としてはここでいう段階型の方が最適と判断される．したがって，問題はそのような最適段階型が，同条件下の追いかけ型の配置順の解から隔離してくるのはどんな条件によるものかが分析の中心となり，その時がダイナミズムが強く作用していると考えられ，純粋な意味での段階型が存在しているといえる．また，初めから一括して配置してしまう一括型があるが，仮定より手戻り費用

などの建設費の減少が発生しないので初期需要が大きくない場合は現実性があまりない．

こうして考えられた3形態の配置問題の定式化を述べることにする．

a) （最適）段階型配置モデル［Problem A］

このモデルは全期を通しての総費用最小化であり，総費用は各期の建設費と輸送費の総計の現在価値である．

$$TC^* = \min_{y,x}\left[\sum_{t=1}^{T} e^{-rL_t}\sum_{j=1}^{m}\beta_t\cdot f(j)y(j,t) + \sum_{t=1}^{T} e^{-rL_t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_t'\cdot C(i,j)x(i,j,t)\right] \quad \cdots\cdots(9)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{m} x(i,j,t) = D(i,t) \quad (i=1,\cdots,n,\ t=1,\cdots,T) \quad \cdots\cdots(10)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x(i,j,t) \leq Q(j)\left\{\sum_{l=1}^{t} y(j,l)\right\} \quad (j=1,\cdots,m,\ t=1,\cdots,T) \cdots\cdots(11)$$

$$x(i,j,t) \geq 0 \quad (i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m,\ t=1,\cdots,T) \quad \cdots\cdots(12)$$

$$\sum_{t=1}^{T} y(j,t) \leq 1 \quad (j=1,\cdots,m) \quad \cdots\cdots(13)$$

$$y(j,t) = 0 \text{ or } 1 \quad (\text{binary}) \quad (j=1,\cdots,m) \quad \cdots\cdots(14)$$

式 (9) における β_t は，式 (8) によって求められたもので，

$$\beta_t = \frac{1-e^{-(50-L_t)\cdot r}}{r} \quad \cdots\cdots(15)$$

また，α_t' は式 (5) から，

$$\alpha_t' = \begin{cases} \alpha_t = \dfrac{e^{-r\cdot l_t} - e^{-P_t\cdot l_t}}{(P_t - r)} & (t=1,\cdots,T-1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{e^{-r\cdot l_T} - e^{P_T\cdot l_T}}{(P_T - r)} + \dfrac{e^{-r\cdot l_T} - e^{-r(50-L_T)}}{r} & (t=T \text{ のとき}) \end{cases} \quad \cdots\cdots(16)$$

と表わされる．$t=T$ のとき α_t' が α_t と異なるのは，建設費の場合全体のサービス・ライフが 50 年であるので，輸送費用の場合も T 期に施設が建設されてから全体のサービス・ライフの 50 年までは T 期の最後の需要量の分だけ施設が利用されていると考えたためである．さらに，［Problem A］における 0・1 変数である $y(j,t)$ は，

$$y(j,t) = \begin{cases} 1: t \text{ 期に } j \text{ 地点の施設を建設する場合} \\ 0: t \text{ 期に } j \text{ 地点の施設を建設しない場合} \end{cases} \quad \cdots\cdots(17)$$

であるとし，したがって式 (11) における $\sum_{l=1}^{t} y(j,l)$ は，

$$\sum_{l=1}^{t} y(j,l) = \begin{cases} 1: t \text{ 期までに } j \text{ 地点の施設が建設されている．} \\ 0: t \text{ 期までに } j \text{ 地点の施設が建設されていない．} \end{cases} \quad \cdots\cdots(18)$$

を表わしている．結局，［Problem A］の各式は，式 (10) の需要制約式，式 (11) の容量制約式，式 (13) の施設の建設時期の代替案に対する相互排他式などの制約の中で式 (9) で表わされる全期における総費用の最小化を追求する混合整数計画問題である．さらに，［Problem A］の制約式のうち式 (10) と (11) を結合することによって次の代理制約式が作られる．ここで，代理制約式とは，いくつかの制約条件式の線形結合を使って収束を早めようとするものである．

$$\sum_{j=1}^{m} Q(j)\left\{\sum_{l=1}^{t} y(j,l)\right\} \geq \sum_{i=1}^{n} D(i,t) \quad \cdots\cdots(19)$$

式 (19) は，実際にあてはめるなら全地域レベルでの容量制約式にあたる．

b) 追いかけ型配置モデル

t 期におけるその期での追いかけ型による最適行動は t 期のみの総費用の最小化であり，次式で表わされる．

［Problem B］

$$CI^*(t) = \min_{y,x}\left[\sum_{j=1}^{m}\beta_t\cdot f(j)\cdot y(j,t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_t''\cdot C(i,j)x(i,j,t)\right] \quad \cdots\cdots(20)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{m} x(i,j,t) = D(i,t) \quad (i=1,\cdots,n) \quad \cdots\cdots(21)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x(i,j,t) \leq Q(j)\left\{\sum_{l=1}^{t} y(j,l)\right\} \quad (j=1,\cdots,m) \quad \cdots\cdots(22)$$

$$x(i,j,t) \geq 0 \quad (i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m) \quad \cdots\cdots(23)$$

$$\sum_{t=1}^{T} y(j,t) \leq 1 \quad (j=1,\cdots,m) \quad \cdots\cdots(24)$$

$$y(j,t) = 0 \text{ or } 1 \quad (j=1,\cdots,m) \quad \cdots\cdots(25)$$

このうち式 (22) および (24) が静学的分析と異なり，時間軸上矛盾なく，追いかけ型で配置されていくことを意味する．また，式 (20) における α_t'' とは，追いかけ型はその期に配置された施設が 50 年間その需要を満たすと考えたうえで，その期だけの最適行動を行うことによる換算係数であり，次のように表わされる．

$$\alpha_t'' = \alpha_t + \frac{e^{-r\cdot l_t} - e^{-r\cdot(50-L_t)}}{r} \quad \cdots\cdots(26)$$

なお，このような追いかけ型の配置様式をとった場合の全期の総費用は［Problem B］にて求められた $y(j,t)$, $x(i,j,t)$ を次式に代入した値となる．

$$TC=\sum_{t=1}^{T} e^{-r\cdot L_t}\left\{\sum_{j=1}^{m} \beta_t\cdot f(j)\cdot y(j,t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_t'\cdot C(i,j)\cdot x(i,j,t)\right\} \cdots(27)$$

この式における α_t' は，式 (5) により求められたものである．

c） 一括型配置モデル

目標の t 期までの施設を一括して建設する場合の最適行動は次のように表わされる．

[Problem C]

$$C\mathrm{II}^*(t)=\min_{y,x}\left[\sum_{j=1}^{m} F(j)\cdot y(j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_t\cdot C(i,j)x(i,j,t)\right] \cdots\cdots(28)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{m} x(i,j,t)=D(i,t) \quad (i=1,\cdots,n) \cdots\cdots(29)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x(i,j,t)\le Q(j)y(j) \quad (j=1,\cdots,m) \cdots\cdots(30)$$

$$x(i,j,t)\ge 0 \quad (i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m) \cdots\cdots(31)$$

$$y(j)=0 \text{ or } 1 \text{ (binary)} \quad (j=1,\cdots,m) \cdots\cdots(32)$$

このうち，式 (28) における r_t は一括型になおすための換算係数であり，t 期までの総輸送費を現在価値になおすためのものであり，次式で表わされる．

$$r_t=\alpha_1'\frac{1}{e^{\sum_{t=2}^{T} P_t\cdot l_t}}+\alpha_2'\cdot\frac{1}{e^{\sum_{t=3}^{T} P_t\cdot l_t}} + \cdots + \alpha_T'\cdot\alpha^{-L_T\cdot r} \cdots\cdots(33)$$

（3） 動学的配置モデルの解法

a） Bender の分割法とその改良

前節において [Problem A]～[Problem C] によって定式化されたモデルはすべて混合整数計画問題であり，これを本研究では Bender の分割を利用した方法により解析することにする[15)～17)]．

Bender の分割法とは，混合整数計画問題を双対定理を利用することにより線形計画問題（L.P.）と全整数計画問題（I.P.）に分割して解こうとするものである．このうち IP 部分は LP 部分制約領域の端点 extreme point と極線 extreme ray の集合を代入して解くのであるが，さらにその極線の集合が許容解を持つための条件式が加わる．しかしながら，[Problem A] においては式 (19) で示される代理制約式を満足するなら [Problem A] は最適解 optimal solution をもつと判断される．

したがって，極線の条件式は式 (19) で代理され，実際の IP・LP 部分は次のようになる．

[Problem A′]：LP 部分

$$TC^*(y(j,t))=\sum_{t=1}^{T} e^{-L_t\cdot r}\sum_{j=1}^{m}\beta_t\cdot f(j)y(j,t) + \max\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{m} D(i,t)u(i,t) - \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{m} w(j,t)Q(j)\left\{\sum_{t=1}^{T} y(j,t)\right\}\right] \cdots\cdots(34)$$

subject to

$$u(i,t)-w(j,t)\le e^{-r\cdot L_t}\cdot\alpha_t'\cdot C(i,j) \quad (i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m,\ t=1,\cdots,T) \cdots\cdots(35)$$

$$u(i,t)\ge 0 \quad (i=1,\cdots,n,\ t=1,\cdots,T) \cdots\cdots(36)$$

$$w(j,t)\ge 0 \quad (j=1,\cdots,m,\ t=1,\cdots,T) \cdots\cdots(37)$$

となる．この $TC^*(y(j,t))$ は [Problem A] の TC^* に対して，

$$TC^*=\min_{\substack{y(j,t)=0\mathrm{or}1\\ \text{かつ許容解}}} TC^*(y(j,t)) \cdots\cdots(38)$$

という関係になる．ここで新たに TC という変数を目的関数に用いるなら [Problem A″] となって表わされる．

[Problem A″]：IP 部分

$$TC^*=\min TC$$

$$TC\ge\sum_{t=1}^{T} e^{-r\cdot L_t}\sum_{j=1}^{m}\beta_t f(j)y(j,t) + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m} D(i,t)u^t(i,t) - \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{m} w^t(j,t)Q(j)\left\{\sum_{t=1}^{t} y(j,t)\right\}$$

$u^t(i,t)$, $w^t(j,t)\in$LP 部分の制約式の端点の集合 $\cdots\cdots(39)$

$$y(j,t)\ge 0 : 0 \text{ or } 1 \text{ (binary)} \quad (j=1,\cdots,m,\ t=1,\cdots,T) \cdots\cdots(40)$$

$$\sum_{t=1}^{T} y(j,t)\le 1 \quad (j=1,\cdots,m) \cdots\cdots(41)$$

$$\sum_{j=1}^{m} Q(j)\left\{\sum_{t=1}^{t} y(j,t)\right\}\ge\sum_{i=1}^{n} D(i,t) \quad (t=1,\cdots,T) \cdots\cdots(42)$$

となる．これらの [Problem A′], [Problem A″] における $u(i,t)$, $w(j,t)$ とは [Problem A] の式 (10)，(11) の制約条件に対応する双対変数である．さらに IP 部分を実際に解くにあたっては，分岐限定法，平面切除法などの方法があるが，ここでは整数であるところの $y(j,t)$ が 0・1 変数であり，式(13) で示される相互排

他式をもつことなどを考慮して，$y(j, t)$ の可能な組合せを列挙することが比較的簡単にできるので，それを利用して IP 部分を解析する．

b） 双対変数 $u(i, t)$, $w(j, t)$ の経済的意味

[Problem A′] における双対変数 $u(i, t)$ は，最適な $y(j, t)$ のもとで，

$$u(i, t)=\partial TC^*/\partial D(i, t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (43)$$

で示される．これは，i 地域の t 期の需要が1単位少なかったときの総経費の減少量を示す．同様に，$w(j, t)$ は，

$$w(j, t)=\partial TC^*/\partial\{Q(j)\sum_{t=1}^{t} y(j, t)\} \cdots\cdots (44)$$

となり，これは j 地域の t 期の施設能力が1単位だけ多かったときの j 地点近くの需要者が遠くの施設に行かなくてすむことによる総経費の減少量を示す．一般に，双対問題は価格賦与の問題であるから，$u(i, t)$, $w(j, t)$ は需要1単位についての各 i, j 地点における影の価格 shadow price を意味するであろう．したがって，いま施設を中央公共体が建設配置するものと考えるなら，$u(i, t)$ は i 地域の t 期の人が中央公共体に需要が満たすために払ってよいと考えられる金額（willing to pay）とも考えられ，$w(j, t)$ は t 期の j 地点の施設を利用するために支払ってもよい金額と考えられる．

4．配置重視型施設の動学的配置モデルの具体的適用

前節で定式化されたモデルの具体的適用を行ってみることにする．このモデルは仮定 **5** によりあくまで配置重視型施設について適用したものであるから，図―**1** で分類したように学校・郵便局などに適用すべきである．しかしながら，これらの施設のデータは，過去あまり収集されておらず，本研究では交通施設の1つとして国際貨物空港の配置問題を例として取り上げる．厳密には，このようなターミナルの立地は規模の経済についての考慮も必要な施設であるが，ここではターミナルを配置重視型とみなすことによりこのモデルが実際に解き得ることを示すと同時に，各立地形態の解の変化について調べることとする．

（1） 利用数値と計算データ

まず全国を表―**2** の i 欄のように6ブロックに分割した．これが需要発生地域 i に相当する．施設の配置候補地点 j としては，東京・大阪・名古屋・北九州の4地点を考え，各建設費用は文献 8）より順に 2 000 億円・1 700 億円・1 700 億円・1 300 億円と仮定した．これに割引率 r，耐用年数 N としたとき，次式で表わされる

表―2 輸送費用 （単位円/トン）

i ＼ j		1 東京	2 大阪	3 名古屋	4 北九州
1	北海道・東北	4 402	5 251	4 931	4 761
2	関東	708	3 233	2 303	4 979
3	中部	2 223	1 820	746	4 281
4	近畿	3 585	949	1 949	2 963
5	中国・四国	4 541	2 426	3 326	1 842
6	九州	4 911	3 824	4 165	437

資本回収係数 capital recover factor : c.r.f. を乗じたものが毎年等価の建設費 $f(j)$ に相当する[18]．

$$\text{c.r.f.}=\frac{r(1+r)}{(1+r)^N-1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (45)$$

各空港は1滑走路しか持たないとし，規模の経済が働かないので容量 $Q(j)$ はおのおの 300 万トン/年と考え，i から j への需要1単位当りの輸送費用 $C(i, j)$ は運賃および時間価値を考慮して表―**2** に示すとおりとした．また，計画期間については全期を3つに分け，第1期を昭和 50 年から 60 年，第2期が 60 年～65 年，第3期が 65 年～70 年とした．

これらの数値を利用し，前節で定式化した [Problem A]～[Problem C] および従来の方法の静学分析のモデルを Bender の分割法を若干改良したアルゴリズムを用いて解いたものの一部が表―**3** である．ここにおいて，丸印で表わされているのが配置地点であり，静学分析の場合は 60 年・65 年・70 年のその年1年を対象とした配置地点を示し，段階型・追いかけ型では各期において新たに建設されたものとすでに建設されているものの両方を示している．また，一括型については最初の年に各期の需要を見通して配置した地点を示している．

（2） 考　　察

需要量の伸び・割引率・建設費にかける乗数値等を変化させることにより得られた多数の解析結果より以下のことが判断される．

① 静学的分析では，表―**3** にも表われているように目標年次が変わることにより別々の立地地点が選択され，一貫した配置計画を立てることができない．

② 追いかけ型と段階型の配置形態の相違で示される「ダイナミズムの発生」状況は，建設費の費用全体に占める割合が低いほど大きく表われている．

③ さらに，ダイナミズムの発生状況は割引率が低いほど，容量内における需要量が多いほど大きく表われる．

④ たとえば，もっとも建設費が少なくてすむ北九州から配置し始めるのは段階型・追いかけ型とも建設費の占める割合が大きくなるほどそうなるが，段階型の方がその傾向が強い結果が表われた．これは，段階型は将来

表—3 解析結果の一例（丸印がその期に建設されていることを示す）

（その 1）

需要量（万トン/年）	S60	S65	S70	割引率		0.07	$F(j)=RF(j)$, $R=1.0$					
	170	400	890									
建設形態	静学的な配置			一括型配置			追いかけ型配置			段階型配置		
期	S60	S65	S70	1	2	3	1	2	3	1	2	3
東京			○			○			○			○
大阪			○			○						
名古屋	○	○	○		○	○		○	○		○	○
北九州		○		○	○		○	○	○	○	○	○
Total Cost（単位 10 億円）				195	386	673	158	251	372	158	251	372

（その 2）

需要量（万トン/年）	S60	S65	S70	割引率		0.05	$F(j)=RF(j)$, $R=0.8$					
	170	400	890									
建設形態	静学的な配置			一括型配置			追いかけ型配置			段階型配置		
期	S60	S65	S70	1	2	3	1	2	3	1	2	3
東京			○			○			○			○
大阪			○			○					○	○
名古屋	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
北九州		○			○			○	○			
Total Cost（単位 10 億円）				180	346	570	150	226	386	150	241	376

（注） R は建設費の見積り誤差を表わす乗数であり，R が小さくなれば建設費の全体に占める割合も少なくなる．

の輸送費の軽減の考慮によって建設費の大小にかかわらず分散的な施設の配置を初期に促進する性質が加わっているためであろう．

（3） 仮定の吟味

分析した動学的配置モデルの定式化にあたって用いた**仮定 1～5** を吟味し，今後の方向を探ってみよう．

仮定 1 は，問題を離散的に扱う場合（たとえば DP モデル）に必ず必要となる仮定である．目的関数や制約式を積分形などの連続式で求められるなら，t^* なる最適投資時期などの分析がなされる．しかし，このような形は前の 2 都市 2 段階モデルならば可能であるが，多地域多段階へ拡張するのは非常に困難である．ポントリャーギンの最大原理などの利用する方法も考えられるが，本研究のようなダイナミズム発生による非凸環境下の分析には利用しにくいと思われる．今後への課題である．

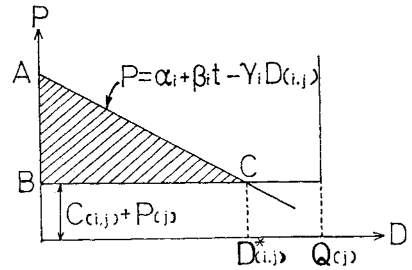
仮定 2 は，施設を利用する需要量が，距離や規模などから無関係に決定されることを意味する．これを公園などの需要の弾力性のある施設に適用する場合は，需要曲線はある傾きをもって表わされ，図—7 における斜線部分が消費者余剰 consumer surplus となり，これから建設費を引いたものが目的関数の基本型となろう．しかし，これらの需要曲線の実際のデータはほとんどなく，その妥当性は確かめられない．これらの施設については，データ収集などが当面の課題となるであろう．

仮定 3 においては，施設の耐用年数は 50 年でなくともよい．また，全体の評価のために必要であるのでサービス・ライフを初めの施設の寿命である50年としたのであって，これらは一般の土木施設について用いられているのと同様である．

仮定 4 は，各施設での利用費用の違いが輸送費用の違いから比較して非常に小さいとき妥当性を持つ．しかし，この利用費用も規模によらないその地点の特性的なもの（外部不経済など）である場合は，それらを建設費や輸送費に含ませ定義しなおすことにより仮定を取り除くことも可能である．

仮定 5 は，施設が純粋な配置重視型の施設であることを示している．しかし，モデルの具体的適用例として用いたターミナルのような施設は機能重視型の施設の性格ももっており，規模についての考慮が必要である．この場合，[Problem A] の $y(i, t)$ に対して，t 期に s 規模の j 地点の施設を建設する場合 1 となる $y(j, t, s)$ の 0・1 整数が導入され，建設費や容量については規模 s に対する $f(j, s)$, $Q(j, s)$ を用いることにより，規模の経済が建設費の減少や容量の増大に表われる影響を考察することができ，問題を定式化することが可能となる．しかしながら，これらの定式化における変数は多くの次元をもち膨大な容量となる．したがって，現代の計算技術を越えてしまうことが考えられ，この面で新たなアルゴリズムなどの開発が必要となるであろう．いずれにせよ，この規模の経済の考慮と需要の弾力性への拡張は，施設一般の配置問題の拡張において大きな課題と考えられる．

以上のように，仮定においていくつかの課題を有して



図—7 i 地域の人の j 地点の施設に対する総便益量

いるが，これらのことを認識したうえにおいて，求められた結果を構想計画や基本計画作成に一つの定量的情報として用いることに意義があると思われる．

5．結　　論

本研究は，施設の長期にわたる配置形態を従来の段階開発理論の概念を用いて分類し分析したものである．さらに，このことを通じ都市および交通施設の配置問題を動学的に取り扱っていくための基礎的考察を行ってきた．本研究で得られた主要な結論は次のようになる．

（1） 施設の配置問題を動学的に扱うことによる「ダイナミズムの発生」の要因には，従来段階開発理論で分析されてきた規模に関するもの（第3グループの費用因子）だけでなく，輸送費用の存在（第1グループの費用因子）もまた大きな要因となっている．

（2） このダイナミズム発生の因子の種類により施設の性格が定義され，それを「配置重視型」「機能重視型」と名づける．これらをまとめたのが**図―1**である．

（3） 2都市間での2段階開発における立地形態を例とすると6種類のパターンが考えられる．これを従来の段階開発理論の投資形態の相違と施設の性格分類を組み合わせてあてはめると**表―1**のようによくあてはまる．

（4） このうち，配置重視型施設についてのみ多地域多段階の動学的モデルを開発した．これは，混合整数計画問題で定式化され Bender の分割法を改良することにより解くことができる．

（5） このモデルを実際例として国際貨物空港の配置問題に適用した．結果として特に建設費の割合が低いほど，割引率が低いほどダイナミズムの発生が強く発生していた．

（6） 今後の問題として，特に規模の経済の考慮のための定式化やアルゴリズムの開発，需要の弾力性のある施設に対する基礎的なデータの収集などの必要性が示された．

最後に，本研究で扱ってきた都市および交通施設の需要はますます増大するであろう．また，公害問題や受益者負担の問題など都市・交通施設をめぐる環境も本研究で仮定したものよりはるかに複雑になっていくものと思われる．また，本研究では取り扱わなかったが，需要予測の不確実性などの問題も考慮する必要があろう．このような条件下の中で貴重な施設を有効にかつ経済的に配置していくことの必要性は自治体などの建設主体に強く求められることであろう．本研究ではこのことに対し，わが国でもっとも一般的に用いられている需要追いかけ型配置計画法の不備などを指摘し，動学的検討の必要性を述べてきた．さらに，他の多くの研究や調査に有機的に結びついて都市および交通施設の現実的な分析を可能とすることが重要な課題であるとし，その基礎的事項を明らかにした．

参考文献

1) 福地崇生編：地域経済学，有斐閣双書，昭和 49 年．
2) グリーンハット（西岡久雄監訳）：工場立地―理論と実際，大明堂，昭和 47 年．
3) アイサード（木内信蔵監訳）：立地と空間経済，朝倉書店，昭和 39 年．
4) 藤田昌久：都市施設の長期的最適配置過程に関する研究，土木学会論文報告集第 222 号，pp. 105～120, 1974 年．
5) 青山吉隆・秋山　寛：線型計画法による都市公園の配置に関する基礎的研究，土木学会論文報告集第 235 号，pp. 71～79, 1975 年 3 月．
6) 長尾義三・森杉寿芳・佐藤信秋：工業開発地の選定とその規模の決定法に関する研究，土木学会論文報告集第 212 号，pp. 65～75, 1973 年 3 月．
7) 長尾義三・森杉寿芳・山田孝嗣：外部不経済を考慮したターミナル立地選定とその分権的達成，土木学会論文報告集第 255 号，pp. 93～102, 1976 年 11 月．
8) 山田孝嗣：ターミナルの立地選択に関する基礎的研究，昭和 50 年度京都大学修士論文．
9) M.A. Efroymson and T.L. Ray : A Branch-Bound Algorithm for Plant Location, Operation Research, May-June, 1966.
10) Kurt Spielberg : Algorithms for Simple Plant-Location Problem with Some Side Condition, Operation Research, June 9, 1967.
11) A.A. Kuehn and M.T. Hamburger : Heuristic Program for Location Ware Houses, Management Science, Vol. 9, No. 4. 1963.
12) 長尾義三・若井郁次郎・林恒一郎：環境インパクトをもつプロジェクト周辺地域の整備計画手法，土木学会論文報告集第 243 号，pp. 61～70, 1975 年 11 月．
13) 吉田　滋：高速道路の段階建設計画の基準，高速道路と自動車，Vol. XII, No. 3, 1969.4.
14) 長尾義三・森杉寿芳・吉田哲生：非弾力性需要のもとにおける段階開発について，土木学会論文報告集第 250 号，pp. 73～83, 1976 年 6 月．
15) Robert S. Garfinkal and Geoge L. Nemhauser : Integer Programming, John Wiley & Sons, 1972.
16) Balas, E. : Min-max and Duality for Linear and Non-linear Mixed Integer Programming, Integer and Non-linear Programming (J. Abodia ed.), 1970.
17) 茨木俊秀：整数計画法 (1)～(5)，オペレーションリサーチ，1970 年 9 月～1971 年 1 月．
18) 長尾義三：土木計画序論，共立出版，昭和 47 年．
19) 長岡　毅：航空貨物，運輸と経済，pp. 25～33, 昭和 50 年 12 月．

（1977.10.13・受付）