

【ノ ー ト】

開水路等流状態としての沈殿池の特性

SOME PROPERTIES OF A SETTLING TANK WITH TURBULENT  
OPEN-CHANNEL FLOW

粟谷 陽 一\*・藤 崎 一 裕\*\*

By Yōichi AWAYA and Kazuhiro FUJISAKI

して検討した。

1. はし が き

横流式沈殿池では、池内の偏流、洗掘、密度流などの理想的状況からのかたよりが除去率を大きく左右すること。沈殿池内の乱流拡散は、この種の沈殿池の設計、操作に無視できない要因であるが、池内の乱れの構造にまで立ち入った理論は現在まで確立されていない。

く形沈殿池の除去率を求めるモデルとしては、イ) 乱れを無視し、池内水流を完全押し流れと仮定するモデルと、ロ) 流入水が瞬時に池内に分散混合する完全混合モデルとが用いられている。実際の沈殿池での除去率は当然これら 2 つの中間に位置するが、この現実の除去率の説明のためには、ロ) 完全混合槽を直列にいくつか並べるといふモデル、あるいはこの考えを拡張したモデルが用いられている<sup>1),2)</sup>。

他方、沈殿池を一樣乱れの場とし、粒子の物質収支の式から除去率を求める試みも発表されている<sup>3)~5)</sup>。このモデルでは、池内の流れを鉛直方向の平均流速、平均乱れ強度を用いて表わしているが、これは流下方向に押し流れ、水深方向には完全混合という状態を想定したことにもあたり、池内の流況を取り入れた一歩進んだモデルといえよう。

しかしながら、現実の沈殿池では底面摩擦の影響が無視できない。沈殿池内の乱れに関しては、流入端の影響等種々の 2 次的な要因が考えられるが、これらの 2 次要因を考慮しない場合にも、底面摩擦の影響を考えるかぎり、現実性のある理想状態は等流状態であろう。しかも河川を含めて、一般に開水路等流状態における粒子の沈降現象は、まだ十分には調べられていないようである。

以上のことから、筆者らは池内の流れを 2 次元等流状態で近似した場合について、濃度分布および除去率に関

2. 2 次元等流場における沈降に関する検討

図-1 のように座標軸をとり、池内の流速分布が対数分布で表わされるものとする。

$$\frac{u}{u_*} = A + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* y}{\nu} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $u$  : 流速、 $u_*$  : 摩擦速度、 $\nu$  : 動粘性係数、 $\kappa$  : カルマン定数、 $A$  : 定数、 $y_0 : u=0$  となる壁面からの距離である。一方、粒子の物質収支の式は定常状態を考えると、

$$u \frac{\partial c}{\partial x} - w \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_t \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_t \frac{\partial c}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (2)$$

$$D_t = \beta \cdot \epsilon_t = \beta \cdot \kappa \cdot u_* y (1 - y/h) \dots\dots\dots (3)$$

と表わされる。ここで、 $D_t$  : 乱流拡散係数、 $\epsilon_t$  : 渦動粘性係数、 $w$  : 粒子の沈降速度、 $c$  : 時間平均濃度、 $\beta$  : 定数である。式 (2) 右辺第 1 項を他の項に比べて無視し、 $\beta=1$  とすると、次式が得られる。

$$\ln \frac{y}{y_0} \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{w\kappa}{u_*} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \frac{\partial c}{\partial y} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

このときの境界条件として、底部での沈積物のまき上げは考慮しないものとして、以下の式を用いた。

$$\text{流入端において、} c=c_0 \quad (x=0, y_0 \leq y < h) \dots\dots\dots (5.1)$$

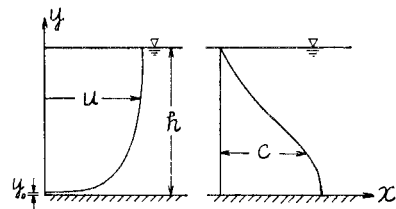


図-1 座 標 系

\* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木工学教室  
\*\* 正会員 工博 九州工業大学助教授 開発土木工学教室

水面において,  $wc + D_t \cdot \partial c / \partial y = 0$  ( $x > 0, y = h$ )  
 .....(5.2)

底部において,  $\partial c / \partial y = 0$  ( $x > 0, y = y_0$ ) .....(5.3)

式 (5.1) は一様流入, 式 (5.2) は水面における粒子 flux=0, 式 (5.3) は  $y = y_0$  で濃度  $c$  が有限ということから導かれる。

これらの式を無次元表示して整理すると,

$$\ln \frac{\bar{y}}{y_0} \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} = k^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left\{ Z \bar{c} + \bar{y}(1-\bar{y}) \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}} \right\}$$

.....(6)

$\bar{c} = 1, (\bar{x} = 0, \bar{y}_0 < \bar{y} < 1)$  .....(7.1)

$\bar{c} + \bar{y}(1-\bar{y}) / Z \cdot \partial \bar{c} / \partial \bar{y} = 0$  ( $\bar{x} > 0, \bar{y} = 1$ )  
 .....(7.2)

$\partial \bar{c} / \partial \bar{y} = 0$  ( $\bar{x} > 0, \bar{y} = \bar{y}_0$ ) .....(7.3)

ここで,

$\bar{x} = x/h, \bar{y} = y/h, \bar{c} = c/c_0, \bar{y}_0 = y_0/h$  .....(8)

$Z = w/\kappa u_*$  .....(9)

である。これらの式によると、現象はパラメーター  $z, \bar{y}_0$  によって特徴づけられる。Z は沈降速度と平均乱れ強度との比に対応する。

なお、ここでは  $\bar{y} > \bar{y}_0$  の領域を解析の対象としたが、通常  $\bar{y}_0 \ll 1$  であり、この取扱いで実用上問題は生じない。

沈殿池を一様乱れの場合として取扱う場合には、平均流速  $u_m$  および平均の拡散係数  $D_m$  としてそれぞれ以下の量を用いられる。

$$\frac{u_m}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{h}{y_0} - 1 \right)$$

.....(10)

$D_m = \kappa u_* h / 6$

これらの量を用いて、式(5.1)~(5.3)に対応する条件のもとに除去率を求めたものが、Camp の解<sup>1)</sup>として広く知られている。

基礎式(4)と類似な式を用いて、関連した現象を解く手法としては、直接差分表示による解法<sup>9)</sup>、モーメント変換による方法<sup>7), 8)</sup>、有限要素の手法を用いるもの<sup>9)</sup>、変数分離形の解を想定し固有関数展開の手法を用いるもの<sup>9), 10), 11)</sup>などが発表されているが、ここでは、取扱いが比較的簡単でしかも従来解と比較しやすい変数分離法によった。

式(6)の解を次のように仮定する。

$\bar{c}(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{y}) \cdot g(\bar{y})$  .....(12)

$f(\bar{x}), g(\bar{y})$  はそれぞれ  $\bar{x}, \bar{y}$  の任意関数である。

式(12)と式(6)とから、

$$\frac{f'(\bar{x})}{f(\bar{x})} = k^2 \frac{\{Z + (1-2\bar{y})\} g'(\bar{y}) + \bar{y}(1-\bar{y}) g'(\bar{y})}{g(\bar{y}) \cdot \ln(\bar{y}/\bar{y}_0)}$$

.....(13)

が得られる。分離定数を  $-\lambda_n$  とおき、任意定数を 1 とし、次の 2 つの式が得られる。

$f = e^{-\lambda_n \bar{x}}$  .....(14)

$\bar{y}(1-\bar{y}) g''(\bar{y}) + (Z+1-2\bar{y}) g'(\bar{y}) + \lambda_{n\kappa} \ln(\bar{y}/\bar{y}_0) \cdot g(\bar{y}) = 0$  .....(15)

ただし,  $\lambda_{n\kappa} = \lambda_n / \kappa^2$

このときの境界条件は以下ようになる。

$g(\bar{y}) + \bar{y}(1-\bar{y}) g'(\bar{y}) / Z = 0, (\bar{y} = 1)$  .....(16.1)

$g'(\bar{y}) = 0 (\bar{y} = \bar{y}_0)$  .....(16.2)

したがって、解を求めるためには式(15)を(16.1), (16.2)の条件のもとに解かなければならない。

解のほしいの様子を知るために、まず  $\bar{y} = 1$  (確定特異点)の水面近傍で解のべき級数展開を行う。

$\eta = 1 - \bar{y}, g(1-\bar{y}) = g(\eta) = \eta^s \sum_{i=1}^{\infty} a_i' \eta^{i-1}$

とおき、上式を式(15)に代入して、 $s=0, Z$  が得られる。他方、式(7.2)の境界条件から  $\eta=0$  の近傍では、

$g(\bar{y}) = A'' \{ \eta / (1-\eta) \}^Z = A' \eta^Z$  .....(17)

となる。A'', A' は 0 でない定数である。ゆえに水面近傍での級数解  $g_u(\eta)$  が次のように与えられる。

$g_u(\eta) = \eta^Z \sum_{i=1}^{\infty} a_i' \eta^{i-1}$  .....(18)

$$\left. \begin{aligned} a_2' &= \frac{Z(Z+1) - \lambda_{n\kappa}(b_1' - \ln \bar{y}_0)}{Z+1} a_1' \\ a_i' &= \frac{-1}{(i-1)(i-1+Z)} \left[ \lambda_{n\kappa} \sum_{j=1}^{i-1} a_j' b_{i-j}' \right. \\ &\quad \left. - \{(Z+i-2)(Z+i-1) + \lambda_{n\kappa} \ln \bar{y}_0\} a_{i-1}' \right] \end{aligned} \right\}$$

.....(19)

底部近傍での級数解  $g_l(\bar{y})$  も同様にして求められる。

$\xi = \bar{y} - \bar{y}_0$

とおいて、 $\xi=0$  で  $g_l$  が有限であることを考慮すると、

$g_l(\bar{y}) = g_l(\xi + \bar{y}_0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\xi + \bar{y}_0)^{i-1}$  .....(20)

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \frac{-\lambda_{n\kappa}(b_1 - \ln \bar{y}_0)}{Z+1} a_1 \\ a_i &= \frac{-1}{(i-1)(i-1+Z)} \left[ \lambda_{n\kappa} \sum_{j=1}^{i-1} a_j b_{i-j} \right. \\ &\quad \left. - \{(i-2)(i-1) + \lambda_{n\kappa} \ln \bar{y}_0\} a_{i-1} \right] \end{aligned} \right\} \dots(21)$$

となる。式(19), (21)における  $b_i', b_i$  はそれぞれ対応する区間で  $\ln \bar{y}$  をべき級数近似したときの係数である。 $\bar{y}_0 < y < 1$  の適当な点  $\bar{y}_c$  (たとえば  $\bar{y}_c = 0.3$ ) で次式を満たす固有値  $\lambda_{nc}$  を逐次近似法で順次求めた。

$g_u'(\bar{y}_c) / g_u(\bar{y}_c) = g_l'(\bar{y}_c) / g_l(\bar{y}_c)$  .....(22)

Z の値が大きくなるにつれて、より高次の固有値および固有関数を求める必要が生じるので、以上の方法のほかに、式(15), (16.1), (16.2)を直接差分化して固有値を求める方法も併用した。このとき、水深方向の分割数は 40~50 とし、実係数非対称行列の固有値の計算には QR 法を、固有ベクトルの計算にはガウスの消去法を用いた。

このようにして求めた各固有値  $\lambda_n$  に対する  $g_n(\bar{y})$  および  $f_n(\bar{x})$  を用いれば、任意の流入条件に対応する濃度分布は式 (23) で与えられる。

$$\bar{c} = \sum_n \bar{c}_n f_n(\bar{x}) g_n(\bar{y}) = \sum_n \bar{c}_n e^{-\lambda_n \bar{x}} g_n(\bar{y}) \dots (23)$$

3. 計算結果

表-1 は  $\lambda_n$  と  $Z$  との関係を示し、図-2 は 0 次の固有関数を示す。このときのレイノルズ数  $R_e = u_m \cdot h/\nu = 30\,000$ , ( $\bar{y}_0 = 0.000\,226$ ) である。Z は前述のように、沈降速度と乱れ強度との比を表わす量と考えられるが、この値が小さいものほど乱れの影響が強く、水深方向の混合が進み、一様分布に近くなっている様子がみられる。図-3 は 1 次の固有関数を記したもので、Z が大きくなるほど  $\bar{y} = 1$  の近くでの関数値の変化が小さくなる傾向が出てくる。また、図-2, 3 の曲線の  $\bar{y} = 1$  の近傍は Rouse 分布と類似していることは式(16.1)からも理解される。

濃度分布の流下方向の変化は、流入端の条件を固有関数展開して求められる。式 (15), (16.1), (16.2) を満たす固有関数  $g_n$  が、

$$r(\bar{y}) = \{\bar{y}/(1-\bar{y})\}^Z \cdot \ln(\bar{y}/\bar{y}_0) \dots (24)$$

を重み関数として、直交することは Sturm-Louville の微分方程式の性質より示されるか

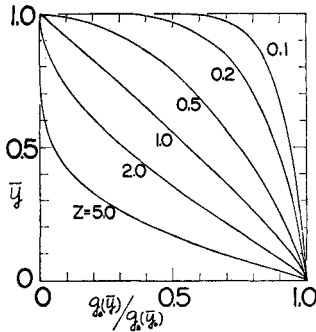


図-2 0 次の固有関数

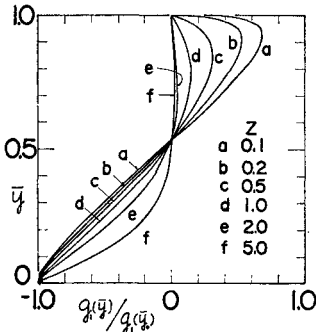


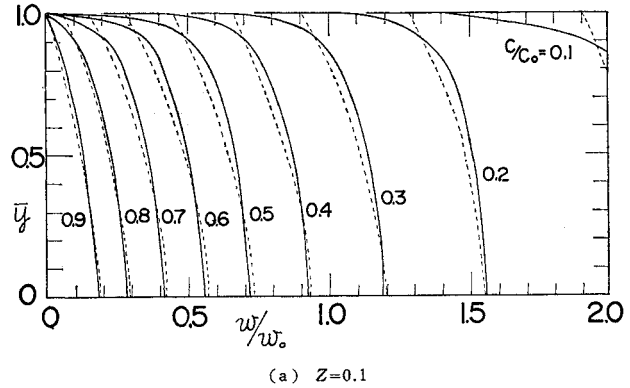
図-3 1 次の固有関数

表-1 Z と  $\lambda_n$  との関係

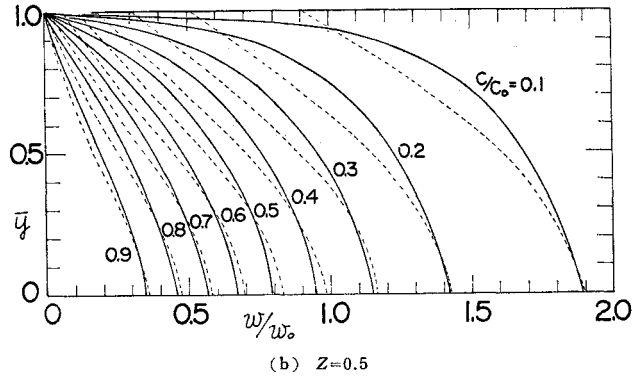
Z	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0
次数						
0	0.00238	0.00518	0.0160	0.0421	0.125	0.630
1	0.0567	0.0632	0.0856	0.131	0.256	0.889
2	0.168	0.178	0.209	0.270	0.431	1.19
3	0.340	0.351	0.388	0.463	0.653	1.54
4	0.573	0.585	0.626	0.710	0.924	1.94

ら、流入端の条件、 $\bar{x}=0$  で  $\bar{c}=1$  は、式(25), (26) で表わされる。

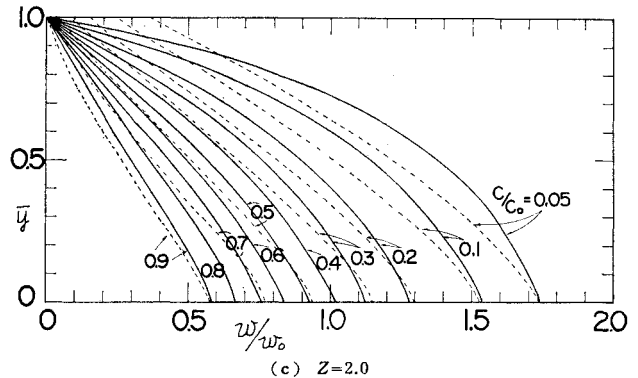
$$1 = \sum_n \bar{c}_n g_n(\bar{y}) \dots (25)$$



(a) Z=0.1



(b) Z=0.5



(c) Z=2.0

図-4 濃度分布

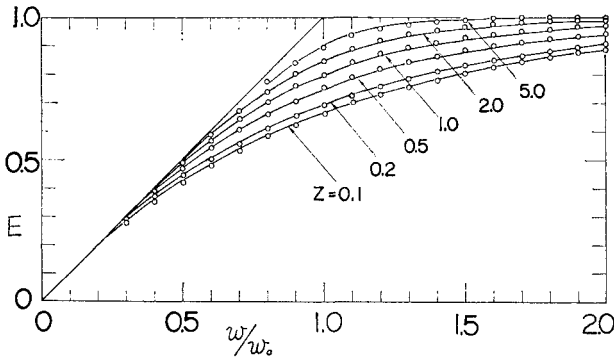


図-5 除去率と  $w/w_0$ ,  $Z$  との関係

$$\bar{c}_n = \int_{\bar{y}_0}^1 1 \cdot \tau(\bar{y}) \cdot g_n(\bar{y}) d\bar{y} / \int_{\bar{y}_0}^1 \tau(\bar{y}) \{g_n(\bar{y})\}^2 d\bar{y} \dots\dots\dots (26)$$

図-4(a)~(c) 中の実線は、流下方向の濃度分布の変化を示す。Z が小さい場合には、 $\lambda_0 < \lambda_n$  (表-1 参照)、 $\bar{c}_0 > \bar{c}_n$  ( $n \geq 1$ ) であるから、0 次の固有成分が 1 次以上の固有成分に卓越する。したがって、池内の濃度分布は式 (23) の第 1 項のみで近似できる。逆に Z が大きい場合には式 (25) の固有関数展開のときに、より高次の項まで必要になり、しかも展開の精度も悪くなる。しかし、固有値  $\lambda_n$  の値も次数が増すにつれて大きくなり、 $\bar{x}$  の値が大きくなるにつれて  $\exp(-\lambda_n \bar{x})$  の方からの高次の項の減衰も早い。

なお、図中では流下方向の無次元距離  $x/h$  の代りに  $w/w_0$  を用いた。両者の間には、

$$\frac{w}{w_0} = \frac{x}{h} \cdot \frac{w}{u_m} = \frac{Z \cdot \kappa \cdot u_*}{u_* / \kappa \cdot \left( \ln \frac{1}{\bar{y}_0} - 1 \right)} \cdot \frac{x}{h} \dots\dots\dots (27)$$

の関係があり、 $w_0$  はいわゆる over flow rate である。

図-5 は、除去率 E を次の式 (28) で定義して、E と Z および  $w/w_0$  との関係を求めたものである。

$$E = 1 - \int_{\bar{y}_0}^h u \cdot \bar{c} dy / \int_{\bar{y}_0}^h u \cdot 1 \cdot dy \dots\dots\dots (28)$$

0 次の固有値、固有関数のみを用いて求めた除去率は、図-5 の値に比べて  $w/w_0 \geq 1$  の場合たかだか 1.5% ( $Z=5$ ) 程度の誤差しか生じない。

これまでの結果を、一様乱れの場合と比較するため、図-4 (a)~(c) に破線で一様乱れの場合の値を記入した。図によると、濃度分布に関しては、一様乱れの場合

には水面で一定の濃度を有することが顕著な相違点であり、また、分布形についても両者の間に系統的な差がみられる。図-5 にプロットした点は、一様乱れの場合の除去率であるが、実線で示した等流近似による値と比べて、両者は非常に近く実用上問題となるほどの差は表われていない。式 (28) による除去率は、流下方向の粒子 flux を底部から水面まで積分して求められるが、この flux の計算の際に、乱れ強度や流速分布に関する仮定の差が相殺しあうためと考えられる。

以上は、沈殿池のレイノルズ数  $Re = 30\,000$  の場合について Z の影響を調べたが、パラメーター  $\bar{y}_0$  についても一応の検討を行った。滑面法則によると、 $\bar{y}_0$  は  $Re$  の関数でもあるから、 $5\,000 \leq Re < 100\,000$  の範囲で  $Re$  の影響について検討した。その結果、固有関数に関しては  $g_0(\bar{y})/g_0(\bar{y}_0)$  の値は  $Re$  が小さいほど  $\bar{y}$  の中間部で少し大きめに出る傾向があるが、その差はたかだか 6~7% である。また、除去率についてはその値は非常に近く、値の差はほぼ 1% 以下である。このように、現象を  $w/w_0$  で基準化して考えるとき、現象に及ぼす  $\bar{y}_0$  の影響は非常に小さい。これは、流速分布として仮定した対数分布が  $\bar{y}_0$  または  $Re$  によってその形を変えることが少ないためであろう。

参 考 文 献

- 1) 土木学会編：水理公式集，1971.
- 2) 高松武一郎・内藤証明：土木学会論文集，No. 139, 1967.
- 3) Dobbins, W.E. : Trans. ASCE, Vol. 109, 1944.
- 4) Camp, T.R. : Proc. ASCE, Vol. 71, 1945.
- 5) Takeshi Goda : Memories of the faculty of Engrg., Kyoto Univ., Vol. 15, No. 4, 1953.
- 6) Harvey E. Jobson and William W. Sayre : J. of the Hydr. Div., ASCE, Vol. 96, No. HY 10, October 1970.
- 7) William W. Sayre : J. of the Hydr. Div., ASCE, Vol. 95, No. HY 3, May 1969.
- 8) B. Mutlu Sumer : J. Fluid Mech., Vol. 65, Part 1, 1974.
- 9) Ranjan Ariathurai and Ray B. Krone : J. of the Hydr. Div., ASCE, Vol. 102, No. HY 3, March 1976.
- 10) Allen T. Hjelmfelt and Charles W. Lennau : J. of the Hydr. Div., ASCE, Vol. 96, No. HY 7, July 1970.

(1977.11.18・受付)