

不規則な配置をもつ杭径の異なる群杭に対する 横方向群杭効果の解析法

A METHOD OF ANALYSIS OF THE LATERAL RESISTANCE OF
PILE-GROUPS WITH DIFFERENT DIAMETERS OF
PILES DISPOSED ARBITRARILY

小坪 清真*・高西 照彦**

By Seima KOTSUBO and Teruhiko TAKANISHI

1. まえがき

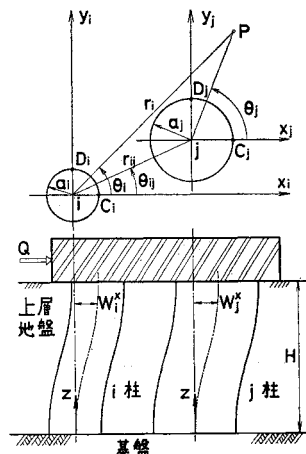
群杭が横方向水平荷重を受けたときの挙動に関する実験的研究は、現在までいろいろ行われてきているが、理論的研究はあまりなされていない。理論的研究としてはすでに著者らが前論¹⁾で言及した Penzien ら²⁾、杉村³⁾、Poulos⁴⁾の研究がその主なものとして挙げられよう。

著者らは前論^{1),5)}において、群杭の横方向群杭効果に関する理論的ならびに実験的研究を行い、著者らが導いた理論解と実験値とが比較的良好に一致することを示した。前論においては、まず上層地盤中に根入れされた単杭がその杭頭に水平荷重を受けた時の杭および杭周辺地盤の変形曲線の厳密な解析解を求め、次にこの解を用いて群杭がその杭頭に水平荷重を受けたときの各杭の変形曲線を緩和法的な考え方に従って逐次近似的に求めて、これより群杭効果の理論解を得ようとするものであった。この方法に従えば、群杭を構成する杭の本数が増大すると、各杭の変形曲線を求める手数が加速度的に増大し、しかも煩雑で、そのうえ多大の計算時間を必要とする。また、各杭の直径がまちまちであったり、あるいは杭配置が不規則であるような場合については、さらにその煩雑さはいっそう増加する。そこで本論では上述の短所を改良して、多元連立方程式を解くだけで群杭効果を容易に求めることができるという見通しのよい簡潔な群杭効果の理論的解析法を新たに提案し、本法による数値計算結果の一例を示すとともに、前論の計算結果と本論のそれとを比較して、両者がよく一致することを確かめた。また、著者らの行った群杭模型に対する群杭効果の実験値とも比較して本論の方法の有用性を実証した。

2. 解析理論

(1) 群杭効果

図一1に示す群杭に対して、いま各杭の杭頭の連結を断ち、しかし各杭の杭頭は回転拘束の状態にして、たとえば i 杭の杭頭に x 方向の単位水平荷重を加える。このとき i 杭、 j 杭… l 杭の x 方向の杭頭水平変位を δ_{ii}^{xx} , δ_{ji}^{xx} 等、 y 方向のそれを δ_{ii}^{yy} , δ_{ji}^{yy} 等と表わす。いまこれらの値が既知であるとすれば、群杭効果は次のようにしてこれを容易に求めることができる。すなわち、 N 本から構成された群杭の各杭の杭頭に、それぞれ x および y 方向の水平荷重を加えて、各杭の x 方向の杭頭変位を 1、 y 方向のそれを 0 にするに必要な荷重を、それぞれ Q_i^x , Q_i^y ($i=1, 2, \dots, N$) とおけば、 Q_i^x , Q_i^y は次の連立一次方程式の解として求めることができる。



図一1 群杭-地盤系および座標系

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 九州工業大学助教授 開発土木工学科

$$\begin{bmatrix} \delta_{11}^{xx} & \delta_{11}^{xy} & \dots & \delta_{1N}^{xx} & \delta_{1N}^{xy} \\ \delta_{11}^{yx} & \delta_{11}^{yy} & \dots & \delta_{1N}^{yx} & \delta_{1N}^{yy} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{N1}^{xx} & \delta_{N1}^{xy} & \dots & \delta_{NN}^{xx} & \delta_{NN}^{xy} \\ \delta_{N1}^{yx} & \delta_{N1}^{yy} & \dots & \delta_{NN}^{yx} & \delta_{NN}^{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1^x \\ Q_1^y \\ \vdots \\ Q_N^x \\ Q_N^y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(1)$$

したがって、単杭の杭頭を1だけ変位させるのに必要な水平荷重をたとえば i 杭について Q_{i0} とすれば、群杭効果は次式から得られる。

$$e_{N^x} = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i^x}{\sum_{i=1}^N Q_{i0}} \quad \dots\dots\dots(2)$$

また、 y 方向の群杭効果については、式(1)の右辺において1を0に、0を1に変えた式を解いて、

$$e_{N^y} = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i^y}{\sum_{i=1}^N Q_{i0}} \quad \dots\dots\dots(3)$$

から求めればよい。

以上のことから問題は結局、各杭に対する変位の影響係数 δ_{ij}^{xy} 等を求めることに帰着される。本論ではそれを以下に示すようにして求めた。

(2) 単杭の場合の変形曲線

水平方向に無限の拡がりをもつ上層地盤中に1本の杭が打設された場合を考えて、この単杭の杭頭に単位の水水平荷重を加える。このときこの単杭について、杭下端固定、杭頭回転拘束の条件のもとでの、杭とその周辺地盤の変形曲線は、すでに前論¹⁾に与えられている。いま、ここにその結果のみを示せば次のとおりである。すなわち、杭の弾性変形を支配する微分方程式と杭周面上における連続の条件とを満足する解として、杭の変形曲線は、

$$w(z) = \frac{32 H^3}{\pi^4 EI} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} \cdot m^{-4} \bar{Y}_m \sin \frac{m\pi z}{2H} \quad \dots\dots\dots(4)$$

地盤の半径方向の変形曲線は、

$$\xi(r, \theta, z) = \frac{32 H^3}{\pi^4 EI} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} \cdot m^{-4} \bar{Y}_m U_m(r) \cos \theta \sin \frac{m\pi z}{2H} \quad \dots\dots(5)$$

地盤の円周方向の変形曲線は、

$$\zeta(r, \theta, z) = \frac{32 H^3}{\pi^4 EI} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} \cdot m^{-4} \bar{Y}_m V_m(r) \sin \theta \sin \frac{m\pi z}{2H} \quad \dots\dots(6)$$

と表わされる。

ここに、

$$\bar{Y}_m = 1 / (1 + \alpha m^{-2} \Omega_m) \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\left. \begin{aligned} U_m(r) &= \frac{1}{\eta_r} [K_1(\eta_a \eta_r) + \eta_a \eta_r K_0(\eta_a \eta_r) \\ &\quad - \psi_m K_1(\phi_a \phi_r)] \\ V_m(r) &= \frac{1}{\eta_r} [K_1(\eta_a \eta_r) - \psi_m \{K_1(\phi_a \phi_r) \\ &\quad + \phi_a \phi_r K_0(\phi_a \phi_r)\}] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\psi_m = \eta_a K_2(\eta_a) / \{\phi_a K_2(\phi_a)\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\Omega_m = \{K_1(\eta_a) + \psi_m K_1(\phi_a)\} / \{K_1(\eta_a) + \eta_a K_0(\eta_a) - \psi_m K_1(\phi_a)\} \quad \dots\dots(10)$$

$$\phi_a = \frac{m\pi}{2} \frac{a}{H}, \quad \eta_a = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} \phi_a, \quad \phi_r = \eta_r = \frac{r}{a} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\alpha = \frac{4 H^2 a^2}{\pi} \frac{\mu}{EI} \quad \dots\dots\dots(12)$$

H は上層地盤の厚さ、 μ は上層地盤のせん断弾性定数、 ν はポアソン比、 a は杭半径、 EI は杭の曲げ剛性、 r, θ は極座標、 z は基礎からの高さ、 $K_n(\eta_a)$ は第2種第 n 次の変形ベッセル関数である。

(3) 群杭の場合の地盤の変形曲線

群杭においてその頭部の連結を断ち、しかし各杭の杭頭は回転拘束の状態のまま、たとえば i 杭の杭頭に x 方向単位水水平荷重を加えたとき、各杭および杭周辺地盤の変形曲線を表わす解析解が得られれば、これを用いて(1)に述べた変位の影響係数を求めること、したがって、群杭効果を導くことは容易である。さて、 i 杭が変形するとその周辺地盤が変形を生じ、これが i 杭以外の杭の変形を惹起する。この i 杭以外の杭の変形がまた i 杭に影響を及ぼす。すなわち、各杭の間には地盤を介して相互作用が生ずる。本論では i 杭の杭頭に x 方向単位水水平荷重を加えたときの杭周辺地盤中の任意点 P (図一1参照)の変位を、 i 杭自身の変形による地盤変位と i 杭以外の杭の変形による地盤変位とに分けて考えて、この両者を加え合わせることによって P 点の地盤変位を表わすことにする。

各杭が単独で存在して他の杭の影響をうけずに変形するときの周辺地盤の変形曲線はそれぞれ式(5)、(6)によってこれを求めることができる。しかし、実際には各杭が同時に存在して相互作用を及ぼし合うので、いま求めた地盤の変形曲線をただ単にそのまま重ね合わせただけでは、本論で求めようとする真の地盤の変形曲線を表わすことはできない。したがって、本論においては、 i 杭の杭頭に x 方向単位水水平荷重を加えたときの杭周辺地盤中の任意点 P の半径方向および円周方向の変形曲線の表示式として、次式に示すように、上記の単独杭の変形による周辺地盤の変形曲線を表わす式の各項に、それぞれ未定係数を掛けて、それらを i 杭および i 杭以外のすべての杭について重ね合わせたものを採用した。

i 杭を基準に考えた場合の P 点の半径方向変形として、

$$\begin{aligned} \xi_P &= \xi_{Pi} + \sum_{j \neq i} \xi_{Pj} \\ &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \{U_m^{ix}(r_i) \cos \theta_i \\ &\quad + U_m^{iy}(r_i) \sin \theta_i\} \sin \frac{m\pi z}{2H} \\ &\quad + \sum_{j \neq i} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} [\{U_m^{jx}(r_j) \cos \theta_j \\ &\quad + U_m^{jy}(r_j) \sin \theta_j\} \cos(\theta_j - \theta_i) \\ &\quad - \{V_m^{jx}(r_j) \sin \theta_j \\ &\quad - V_m^{jy}(r_j) \cos \theta_j\} \sin(\theta_j - \theta_i)] \sin \frac{m\pi z}{2H} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (13)$$

円周方向変形として、

$$\begin{aligned} \zeta_P &= \zeta_{Pi} + \sum_{j \neq i} \zeta_{Pj} \\ &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \{V_m^{ix}(r_i) \sin \theta_i \\ &\quad - V_m^{iy}(r_i) \cos \theta_i\} \sin \frac{m\pi z}{2H} \\ &\quad + \sum_{j \neq i} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} [\{U_m^{jx}(r_j) \cos \theta_j \\ &\quad + U_m^{jy}(r_j) \sin \theta_j\} \sin(\theta_j - \theta_i) \\ &\quad + \{V_m^{jx}(r_j) \sin \theta_j \\ &\quad - V_m^{jy}(r_j) \cos \theta_j\} \cos(\theta_j - \theta_i)] \sin \frac{m\pi z}{2H} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

上式の右辺第1項は i 杭自身の変形に基づく地盤変形を、第2項以下は i 杭以外の杭の変形による地盤変形を表わしている。

ここに、

$$\left. \begin{aligned} U_m^{ix}(r_i) &= \frac{1}{\eta_{ri}} [A_m^{ix} \{K_1(\eta_{ai}\eta_{ri}) \\ &\quad + \eta_{ai}\eta_{ri}K_0(\eta_{ai}\eta_{ri})\} \\ &\quad + B_m^{ix} K_1(\phi_{ai}\phi_{ri})] \\ V_m^{ix}(r_i) &= \frac{1}{\eta_{ri}} [A_m^{ix} K_1(\eta_{ai}\eta_{ri}) \\ &\quad + B_m^{ix} \{K_1(\phi_{ai}\phi_{ri}) \\ &\quad + \phi_{ai}\phi_{ri}K_0(\phi_{ai}\phi_{ri})\}] \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} x=x, y \\ i=1, 2, \dots, N \end{array} \right. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{ai} &= \frac{m\pi}{2} \frac{a_i}{H}, \quad \eta_{ai} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} \phi_{ai} \\ \phi_{ri} &= \eta_{ri} = \frac{r_i}{a_i} \quad (i=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$a_i (i=1, 2, \dots, N)$ は各杭の杭半径である。未定係数 A_m^{ix} 等は杭の弾性変形曲線および境界条件を満足するように定める。このことについては以下に詳論する。

(4) 杭に働く土圧

上層地盤の応力は次式によって求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_P &= \lambda \left(\frac{\partial \xi_P}{\partial r_i} + \frac{\xi_P}{r_i} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial \zeta_P}{\partial \theta_i} \right) + 2\mu \frac{\partial \xi_P}{\partial r_i} \\ \tau_P &= \mu \left(\frac{1}{r_i} \frac{\partial \zeta_P}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \zeta_P}{\partial r_i} - \frac{\zeta_P}{r_i} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここに λ, μ はラーメの定数である。したがって、たとえば i 杭の単位長さ当りに働く x 方向の土圧は、

$$P_i^x(z) = \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_P \cos \theta_i - \tau_P \sin \theta_i]_{r_i=a_i} a_i d\theta_i \quad \dots\dots\dots (18)$$

y 方向の土圧は、

$$P_i^y(z) = \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_P \sin \theta_i + \tau_P \cos \theta_i]_{r_i=a_i} a_i d\theta_i \quad \dots\dots\dots (19)$$

によって与えられる。上式に式 (13), (14) を代入すると、

$$\begin{aligned} P_i^x(z) &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{m^2 \pi^3}{4} \frac{a_i^2}{H^2} \mu \{ -A_m^{ix} K_1(\eta_{ai}) \\ &\quad + B_m^{ix} K_1(\phi_{ai}) \} \sin \frac{m\pi z}{2H} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{a_j}{a_j} \mu \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [A_m^{jx} \eta_{aj}^2 \{ K_3(\eta_{aj}\eta_{rj}) \\ &\quad \cdot \cos(3\theta_j - \theta_i) + K_1(\eta_{aj}\eta_{rj}) \cos(\theta_j - \theta_i) \\ &\quad + \frac{2}{1-2\nu} K_1(\eta_{aj}\eta_{rj}) \cos \theta_j \cos \theta_i \} \\ &\quad + B_m^{jx} \phi_{aj}^2 \{ K_3(\phi_{aj}\phi_{rj}) \cos(3\theta_j - \theta_i) \\ &\quad - K_1(\phi_{aj}\phi_{rj}) \cos(\theta_j - \theta_i) \\ &\quad + A_m^{jy} \eta_{aj}^2 \{ K_3(\eta_{aj}\eta_{rj}) \sin(3\theta_j - \theta_i) \\ &\quad - K_1(\eta_{aj}\eta_{rj}) \sin(\theta_j - \theta_i) \\ &\quad + \frac{2}{1-2\nu} K_1(\eta_{aj}\eta_{rj}) \sin \theta_j \sin \theta_i \} \\ &\quad + B_m^{jy} \phi_{aj}^2 \{ K_3(\phi_{aj}\phi_{rj}) \sin(3\theta_j - \theta_i) \\ &\quad + K_1(\phi_{aj}\phi_{rj}) \sin(\theta_j - \theta_i) \}]_{r_i=a_i} d\theta_i \\ &\quad \cdot \sin \frac{m\pi z}{2H} \quad \dots\dots\dots (18)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_i^y(z) &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{m^2 \pi^3}{4} \frac{a_i^2}{H^2} \mu \{ -A_m^{iy} K_1(\eta_{ai}) \\ &\quad + B_m^{iy} K_1(\phi_{ai}) \} \sin \frac{m\pi z}{2H} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{a_j}{a_j} \mu \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [A_m^{jx} \eta_{aj}^2 \\ &\quad \cdot \{ K_3(\eta_{aj}\eta_{rj}) \sin(3\theta_j - \theta_i) + K_1(\eta_{aj}\eta_{rj}) \\ &\quad \cdot \sin(\theta_j - \theta_i) + \frac{2}{1-2\nu} K_1(\eta_{aj}\eta_{rj}) \cos \theta_j \\ &\quad \cdot \sin \theta_i \} + B_m^{jx} \phi_{aj}^2 \{ K_3(\phi_{aj}\phi_{rj}) \\ &\quad \cdot \sin(3\theta_j - \theta_i) - K_1(\phi_{aj}\phi_{rj}) \sin(\theta_j - \theta_i) \} \\ &\quad + A_m^{jy} \eta_{aj}^2 \{ -K_3(\eta_{aj}\eta_{rj}) \cos(3\theta_j - \theta_i) \\ &\quad + K_1(\eta_{aj}\eta_{rj}) \cos(\theta_j - \theta_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{1-2\nu} K_1(\eta_{aj}\eta_{rj}) \sin \theta_j \sin \theta_i \Big\} \\
 & + B_m^{jx} \phi_{aj}^2 \{-K_2(\phi_{aj}\phi_{rj}) \cos(3\theta_j - \theta_i) \\
 & - K_1(\phi_{aj}\phi_{rj}) \cos(\theta_j - \theta_i)\} \Big]_{r_i=a_i} d\theta_i \\
 & \cdot \sin \frac{m\pi z}{2H} \dots\dots\dots (19)'
 \end{aligned}$$

上式で、それぞれ第1項は*i*杭自身の変形による土圧、第2項以下は*i*杭以外の杭の変形による土圧である。

ここで付録Iを参照すれば、式(18)', (19)'の右辺第2項は次のように書ける。

式(18)'の右辺第2項

$$\begin{aligned}
 = & - \sum_{j \neq i} \pi \mu \frac{a_i}{a_j} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[A_m^{jx} \eta_{ai}^2 \left\{ F(\eta_{ai}, \eta_{rij}) \cos 2\theta_{ij} \right. \right. \\
 & - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} I_1(\eta_{ai}) K_0(\eta_{ai}\eta_{rij}) \\
 & - \frac{1}{1-2\nu} I_1(\eta_{ai}) K_2(\eta_{ai}\eta_{rij}) \cos 2\theta_{ij} \Big\} \\
 & + B_m^{jx} \phi_{ai}^2 \{ F(\phi_{ai}, \phi_{rij}) \cos 2\theta_{ij} \\
 & + I_1(\phi_{ai}) K_0(\phi_{ai}\phi_{rij}) \} \\
 & + A_m^{jy} \eta_{ai}^2 \left\{ F(\eta_{ai}, \eta_{rij}) \sin 2\theta_{ij} \right. \\
 & - \frac{1}{1-2\nu} I_1(\eta_{ai}) K_2(\eta_{ai}\eta_{rij}) \sin 2\theta_{ij} \Big\} \\
 & \left. + B_m^{jy} \phi_{ai}^2 \{ F(\phi_{ai}, \phi_{rij}) \sin 2\theta_{ij} \} \right] \sin \frac{m\pi z}{2H} \\
 & \dots\dots\dots (20)
 \end{aligned}$$

式(19)'の右辺第2項

$$\begin{aligned}
 = & - \sum_{j \neq i} \pi \mu \frac{a_i}{a_j} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[A_m^{jx} \eta_{ai}^2 \left\{ F(\eta_{ai}, \eta_{rij}) \sin 2\theta_{ij} \right. \right. \\
 & - \frac{1}{1-2\nu} I_1(\eta_{ai}) K_2(\eta_{ai}\eta_{rij}) \sin 2\theta_{ij} \Big\} \\
 & + B_m^{jx} \phi_{ai}^2 \{ F(\phi_{ai}, \phi_{rij}) \sin 2\theta_{ij} \} \\
 & + A_m^{jy} \eta_{ai}^2 \left\{ -F(\eta_{ai}, \eta_{rij}) \cos 2\theta_{ij} \right. \\
 & - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} I_1(\eta_{ai}) K_0(\eta_{ai}\eta_{rij}) \\
 & + \frac{1}{1-2\nu} I_1(\eta_{ai}) K_2(\eta_{ai}\eta_{rij}) \cos 2\theta_{ij} \Big\} \\
 & + B_m^{jy} \phi_{ai}^2 \{-F(\phi_{ai}, \phi_{rij}) \cos 2\theta_{ij} \\
 & + I_1(\phi_{ai}) K_0(\phi_{ai}\phi_{rij}) \} \Big] \sin \frac{m\pi z}{2H} \dots\dots\dots (21)
 \end{aligned}$$

ここに、 $\eta_{rij} = r_{ij}/a_i$

(5) 杭の変形曲線

群杭を構成する各杭の弾性変形を支配する微分方程式は、*x*方向の変形に対して、

$$E_i I_i \frac{d^4}{dz^4} \{w_i^x(z)\} = P_i^x(z) + q_i^x(z) \dots\dots (22)$$

($i=1, 2, \dots, N$)

*y*方向に対しては、

$$E_i I_i \frac{d^4}{dz^4} \{w_i^y(z)\} = P_i^y(z) + q_i^y(z) \dots\dots (23)$$

($i=1, 2, \dots, N$)

と表わされる。ここに、 $E_i I_i$ は*i*杭の曲げ剛性、 $w_i^x(z)$, $w_i^y(z)$ は*i*杭の*x*, *y*方向の水平変位、 $P_i^x(z)$, $P_i^y(z)$ は*i*杭の*x*, *y*方向に働く単位深さ当りの土圧、 $q_i^x(z)$, $q_i^y(z)$ は*i*杭に働く*x*, *y*方向外力である。

さて、いま杭長を*H*として、*i*杭のみにその杭頭に*x*方向の単位の外力が加わる場合を考える。変位 $w_i^x(z)$, $w_i^y(z)$ および外力 $q_i^x(z)$ をフーリエ sine 級数に展開すれば、

$$\left. \begin{aligned}
 w_i^x(z) &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m^{ix} \sin \frac{m\pi z}{2H} \\
 w_i^y(z) &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m^{iy} \sin \frac{m\pi z}{2H}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

($i=1, 2, \dots, N$)

$$q_i^x(z) = \frac{2}{H} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} \sin \frac{m\pi z}{2H} \dots\dots\dots (25)$$

と表わせる。ここに Y_m^{ix} , Y_m^{iy} は境界条件から定まる未定係数である。また、いまの場合、

$$\left. \begin{aligned}
 q_i^y(z) &= 0 \\
 q_j^x(z) &= q_j^y(z) = 0 \quad (j \neq i)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

である。

後に示す式(35)の関係を考慮して、式(24)~(26)および式(18)', (19)'を式(22), (23)に代入して整理すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & Y_m^{sx} + \alpha_s m^{-2} \{K_1(\eta_{as}) + \psi_m^s K_1(\phi_{as})\} A_m^{sx} \\
 & + \sum_{j \neq s} \frac{a_s}{a_j} \alpha_s m^{-2} \left[\left\{ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} F(\eta_{as}, \eta_{rsj}) \right. \right. \\
 & - \psi_m^j F(\phi_{as}, \phi_{rsj}) \\
 & - \frac{1}{2(1-\nu)} I_1(\eta_{as}) K_2(\eta_{as}\eta_{rsj}) \Big\} \cos 2\theta_{sj} \\
 & - I_1(\eta_{as}) K_0(\eta_{as}\eta_{rsj}) \\
 & \left. - \psi_m^j I_1(\phi_{as}) K_0(\phi_{as}\phi_{rsj}) \right] A_m^{jx} \\
 & + \sum_{j \neq s} \frac{a_s}{a_j} \alpha_s m^{-2} \left[\left\{ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} F(\eta_{as}, \eta_{rsj}) \right. \right. \\
 & - \psi_m^j F(\phi_{as}, \phi_{rsj}) \\
 & \left. - \frac{1}{2(1-\nu)} I_1(\eta_{as}) K_2(\eta_{as}\eta_{rsj}) \right\} \sin 2\theta_{sj} \Big] A_m^{jy} \\
 & = \begin{cases} (-1)^{(m-1)/2} \frac{32H^3}{\pi^4 m^4 E_i I_i} & (s=i) \\ 0 & (s \neq i) \end{cases} \dots\dots (27) \\
 & \qquad \qquad \qquad (s=1, 2, \dots, N)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Y_m^{sy} + \alpha_s m^{-2} \{K_1(\eta_{as}) + \psi_m^s K_1(\phi_{as})\} A_m^{sy} \\
 & + \sum_{j \neq s} \frac{a_s}{a_j} \alpha_s m^{-2} \left[\left\{ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} F(\eta_{as}, \eta_{rsj}) \right. \right. \\
 & - \psi_m^j F(\phi_{as}, \phi_{rsj}) \\
 & \left. - \frac{1}{2(1-\nu)} I_1(\eta_{as}) K_2(\eta_{as}\eta_{rsj}) \right\} \sin 2\theta_{sj} \Big] A_m^{jx}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j \neq s} \frac{\alpha_s}{\alpha_j} \alpha_s m^{-2} \left[- \left\{ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} F(\eta_{as}, \eta_{rsj}) \right. \right. \\
 & - \psi_m^j F(\phi_{as}, \phi_{rsj}) \\
 & - \left. \frac{1}{2(1-\nu)} I_1(\eta_{as}) K_2(\eta_{as} \eta_{rsj}) \right\} \cos 2\theta_{sj} \\
 & - I_1(\eta_{as}) K_0(\eta_{as} \eta_{rsj}) \\
 & - \left. \psi_m^j I_1(\phi_{as}) K_0(\phi_{as} \phi_{rsj}) \right] A_m^{jy} = 0 \dots \dots (28) \\
 & (s=1, 2, \dots, N)
 \end{aligned}$$

ここに、

$$\alpha_s = \frac{4 H^2 \alpha_s^2}{\pi} \frac{\mu}{E_s I_s} \quad (s=1, 2, \dots, N) \dots \dots (29)$$

また、 i 杭の頭部に y 方向の単位水平荷重を加えたときは、式 (27)、(28) において、その右辺を互いに置換した式が成り立つ。

(6) 境界条件

各杭について、その杭周面上各点の変位は、それに接する土粒子の変位に等しくなければならない。しかし、この境界条件を各杭について厳密に満足するように未定係数を求めることは、非常に煩雑であり、しかもあまり実用的であるとはいえない。本論では、たとえば i 杭については、 i 杭の中心位置における変位を採用することによって、 i 杭以外の杭が i 杭に与える影響を近似的に評価した。

また、式 (13)、(14) 自身もこのままでは正確な地盤変形を与える式とはいえず、厳密には式 (13)、(14) にさらに $\cos 2\theta$ 、 $\sin 2\theta$ 、 \dots のそれぞれに未定係数を掛けた項をつけ加えなければならないが、本論では煩雑さと実用性を考慮して、これらの項をいっさい省略した。

しかし、以上の近似的取扱いに対して、それが群杭効果に及ぼす影響は、後に示すように群杭中の最小の杭中心点間距離 l と杭直径 d との比 l/d が 1.5 以上であれば、これをほとんど無視してよい。

このように考えれば、各杭に対してその周面上の代表的な 2 点における地盤と杭との変位が等しくなるように未定係数を定めればよいことになる。いまこの 2 点を、図-1 に示すように C_i 、 D_i ($i=1, 2, \dots, N$) に選べば、式 (13)、(14) と式 (24) を用いて、上述の境界条件は次式のように表わせる。

$$\xi P_i \Big|_{\theta_i=0}^{r_i=a_i} + \sum_{j \neq i} \xi P_j \Big|_{\theta_i=0}^{r_i=0} = w_i^x(z) \dots \dots (30)$$

$$\xi P_i \Big|_{\theta_i=\pi/2}^{r_i=a_i} + \sum_{j \neq i} \xi P_j \Big|_{\theta_i=\pi/2}^{r_i=0} = w_i^y(z) \dots \dots (31)$$

$$\zeta P_i \Big|_{\theta_i=0}^{r_i=a_i} + \sum_{j \neq i} \zeta P_j \Big|_{\theta_i=0}^{r_i=0} = w_i^y(z) \dots \dots (32)$$

$$\zeta P_i \Big|_{\theta_i=\pi/2}^{r_i=a_i} + \sum_{j \neq i} \zeta P_j \Big|_{\theta_i=\pi/2}^{r_i=0} = -w_i^x(z) \dots \dots (33) \\
 (i=1, 2, \dots, N)$$

ここで、式 (30) と (33) および式 (31) と (32) からそれぞれ次の関係式が成り立つことが導かれる。

$$\left. \begin{aligned}
 U_m^{jx}(a_j) + V_m^{jx}(a_j) &= 0 \\
 U_m^{jy}(a_j) + V_m^{jy}(a_j) &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots \dots (34) \\
 (j=1, 2, \dots, N)$$

したがって、式 (15) を参照すれば、

$$\left. \begin{aligned}
 B_m^{ix} &= -\psi_m^i A_m^{ix} \\
 B_m^{iy} &= -\psi_m^i A_m^{iy} \quad (i=1, 2, \dots, N)
 \end{aligned} \right\} \dots (35)$$

が得られる。ここに、

$$\psi_m^i = \frac{\eta_{ai} K_2(\eta_{ai})}{\phi_{ai} K_2(\phi_{ai})} \quad (i=1, 2, \dots, N) \dots \dots (36)$$

とおいた。

なお、式 (34) の関係は、式 (13)、(14) を用いて各杭において杭周面と接している地盤は、杭の変形後も円形を保たねばならないという条件からもこれを導くことができる。

さて、式 (35) の関係を用いれば、結局、式 (30)、(31) は次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}
 Y_m^{ix} + \{K_1(\eta_{ai}) + \psi_m^i K_1(\phi_{ai}) - \eta_{ai} K_2(\eta_{ai})\} A_m^{ix} \\
 - \sum_{j \neq i} \frac{1}{\eta_{rji}} [\eta_{ai} \eta_{rij} K_2(\eta_{ai} \eta_{rij}) \cos^2 \theta_{ij} \\
 + \psi_m^j \phi_{ai} \phi_{rji} K_2(\phi_{ai} \phi_{rji}) \sin^2 \theta_{ij} \\
 - K_1(\eta_{ai} \eta_{rji}) - \psi_m^j K_1(\phi_{ai} \phi_{rji})] A_m^{jx} \\
 - \sum_{j \neq i} \frac{1}{\eta_{rji}} [\{\eta_{ai} \eta_{rij} K_2(\eta_{ai} \eta_{rij}) \\
 - \psi_m^j \phi_{ai} \phi_{rji} K_2(\phi_{ai} \phi_{rji})\} \sin \theta_{ij} \cos \theta_{ij}] A_m^{jy} \\
 = 0 \dots \dots (37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_m^{iy} + \{K_1(\eta_{ai}) + \psi_m^i K_1(\phi_{ai}) - \eta_{ai} K_2(\eta_{ai})\} A_m^{iy} \\
 - \sum_{j \neq i} \frac{1}{\eta_{rji}} [\{\eta_{ai} \eta_{rij} K_2(\eta_{ai} \eta_{rij}) \\
 - \psi_m^j \phi_{ai} \phi_{rji} K_2(\phi_{ai} \phi_{rji})\} \sin \theta_{ij} \cos \theta_{ij}] A_m^{jx} \\
 - \sum_{j \neq i} \frac{1}{\eta_{rji}} [\eta_{ai} \eta_{rij} K_2(\eta_{ai} \eta_{rij}) \sin^2 \theta_{ij} \\
 + \psi_m^j \phi_{ai} \phi_{rji} K_2(\phi_{ai} \phi_{rji}) \cos^2 \theta_{ij} \\
 - K_1(\eta_{ai} \eta_{rji}) - \psi_m^j K_1(\phi_{ai} \phi_{rji})] A_m^{jy} = 0 \\
 (i=1, 2, \dots, N) \dots \dots (38)
 \end{aligned}$$

(7) 変位の影響係数

変位の影響係数 δ_{ij}^{xy} 等を得るためには、未定係数 A_m^{ix} 、 Y_m^{ix} 等を定めることが必要である。 i 杭がその杭頭に x 方向の単位水平荷重を受けた場合について考えると、式 (27)、(28) および式 (37)、(38) を用いて $m=1, 2, \dots$ に対して、それぞれ未定係数 A_m^{ix} 、 Y_m^{ix} 等に関する連立一次方程式を立てて、これを解けばよい。このとき採用すべき m の値は、必要な精度を考慮して適当に定める。

Y_m^{ix} 等が得られれば、変位の影響係数は、式 (24) を用いて次式によってこれを求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ji}^{xx} &= w_j^x(H) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} Y_m^{jx} \\ \delta_{ji}^{yy} &= w_j^y(H) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} Y_m^{jy} \end{aligned} \right\} (j=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots (39)$$

次に、同様にして上述の手順を各杭 ($i=1, 2, \dots, N$) について繰返せば、結局各杭に対する影響係数がすべて求められる。したがって、式 (1) を用いて Q_i^x, Q_i^y ($i=1, 2, \dots, N$) を得ることができる。 Q_i^x, Q_i^y が得られれば、式 (2) より多柱基礎の x 方向群杭効果を求めることができる。なお、式 (2) 中の Q_{i0} は式 (4) を用いれば次式によって与えられる。

$$Q_{i0} = \frac{1}{w_i(H)} = \frac{\pi^4 E_s I_i}{32 H^3} \left\{ \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4 (1 + \alpha_i m^{-2} Q_m^i)} \right\} \dots (40)$$

ここに、

$$Q_m^i = \frac{K_1(\eta_{ai}) + \psi_m^i K_1(\psi_{ai})}{K_1(\eta_{ai}) + \eta_{ai} K_0(\eta_{ai}) - \psi_m^i K_1(\psi_{ai})} (i=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots (41)$$

Q_{i0} はまた、単杭の杭頭ばね定数とよんでもよい。単杭の杭頭抵抗力に対する群杭を構成する各杭の杭頭抵抗力の比は、

$$f_i^{xx} = \frac{Q_i^x}{Q_{i0}}, f_i^{yy} = \frac{Q_i^y}{Q_{i0}} (i=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots (42)$$

によって与えられる。

さらに、各杭に対する荷重方向 (x 方向) の荷重分担率は、

$$v_i^x = Q_i^x / \sum_{i=1}^N Q_i^x \dots\dots\dots (43) (i=1, 2, \dots, N)$$

と表わせる。

y 方向の群杭効果についてもまったく同様にしてこれを求めることができる。

いま述べた方法に従えば、1本の杭について未定係数

は4個必要であるから、この未定係数を定める連立一次方程式の元数は $4N$ 元となり、 $4N$ 元の連立一次方程式を $m=1, 2, \dots$ について解くことが必要である。

式 (27) と (37) および式 (28) と (38) から Y_m^{ix}, Y_m^{iy} を消去すれば、杭1本については2個の未定係数 A_m^{ix}, A_m^{iy} のみになるから、結局、 $2N$ 元の連立一次方程式を解けばよいことになる。しかし、この場合は、直接には Y_m^{ix}, Y_m^{iy} が得られないから、影響係数を求めるための計算量が増すことになる。

いずれにしても、杭本数の4倍あるいは2倍の元数をもつ連立一次方程式を解けば、群杭の横方向群杭効果を容易に求めることができる。さらに本論の方法は、前論のそのように煩雑で見通しの悪い計算方法と異なり、一定の規則で上述の連立方程式の各係数を簡単に定めることができるので、杭配置が不規則であったり、杭径が互いに異なっているような円柱群から構成された群杭の群杭効果をも容易に解析することができる。

3. 数値計算結果および実験値との比較

図-2 (a)~(c) は著者等が模型杭を用いて行った実験結果⁵⁾と本論によって求めた理論値とを対比したものである。同図は横軸に最小の杭中心点間距離 l と杭直径 d との比をとって群杭効果を表わした。縦軸の群杭効果を示す記号 e の下つき添字は杭本数を、上つき添字は荷重方向を示す。

実験については前論⁵⁾において詳細に述べているが、いま一度ここで実験装置 (図-3 参照) ならびに実験方法について簡単に述べると次のとおりである。

振動台上にのせた $1.5\text{m} \times 2.5\text{m} \times 1\text{m}$ (深さ) の鋼製箱の中に深さ 60cm まで乾燥砂を入れて、模型杭を建て込み、杭頭に水平荷重を加える。そしてそのときの水平荷重と杭頭の水平変位および回転変位を計測した。荷重はひずみリングに貼付したひずみゲージを用いて、変

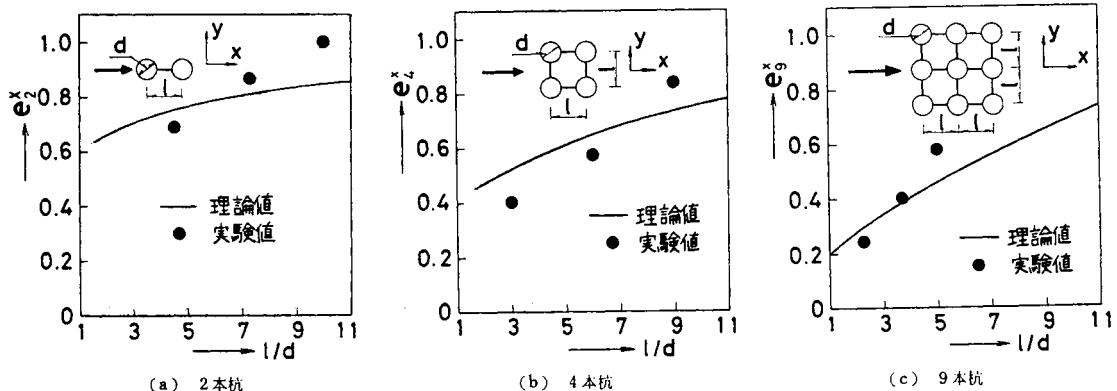


図-2 群杭効果の理論値と実験値 ($\alpha_0=1.4 \times 10^{-4}$, $\nu=0.3$, $H/d=50.0$)

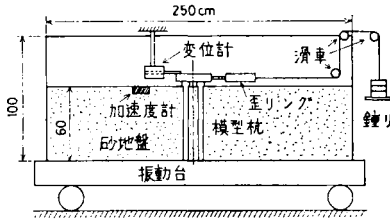


図-3 実験装置

位は差動トランス型変位計を用いて計測を行い、これらに電磁オシログラフに記録した。

実験は杭頭を完全回転拘束の状態にして、2, 4, 9 本杭の3通りの場合について、それぞれ杭間隔をいろいろ変えて行った。

模型杭としてはベークライトチューブを用いた。杭の形状は円形で、外径 12 mm、肉厚 2 mm、長さ 60 cm である。また、曲げ剛性は $1.45 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ であった。頂板は $15 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} \times 2.3 \text{ cm}$ (厚さ) の鋼製板で、所定の杭間隔を示す位置にボルト穴があけてある。

実験に用いた砂地盤のせん断弾性定数は 20 kg/cm^2 であった。

それぞれの実験について、できるだけ一般的な砂地盤が得られるように、模型杭を砂地盤中に建て込んだ後、砂地盤を常に一定の条件で、すなわちその表面における加速度が 500 gal になるようにして 10 Hz で 12 分間加

振して締め固めを行った。

群杭効果 e を求めるためには、単杭についてその杭頭における荷重と変位の関係が必要である。単杭に対してその杭頭の回転を拘束した状態のまま水平荷重を加えて、杭頭水平変位を測定することは、実験的には非常に困難である。本実験においては 2 本杭について、両杭の間隔をできるだけ大きく (いまの場合 $l/d=10$ を採用した) とって実験を行い、このとき得られた水平荷重の $1/2$ と水平変位との関係を単杭に対する荷重-変位曲線として用いた。

実験は砂地盤が弾性変形をする範囲で行ったので、杭頭変位の計測は非常に小さな領域 (0~60 ミクロン) で行う必要があった。また、杭の砂地盤への建込みが各実験ごとに一樣になるようにすることが非常に難しく、実験値には多少のばらつきが生じた。

同一の杭配置に対して実験を 3 回行い、それぞれの荷重-変位曲線からその勾配を求めて 3 者の平均値を求めた。図-2 (a)~(c) はその結果を示したものである。

杭本数が少なく、杭間隔が小さい場合には実験値のばらつきが大きくなる傾向があった。

以上のことを考慮すれば、いずれの場合も理論値は実験値に比較的よく一致しているといえよう。実験値は、理論値と比べて一般に、杭相互間に働く影響の大きさが、 l/d が大きくなるに従ってより早く減少する傾向を

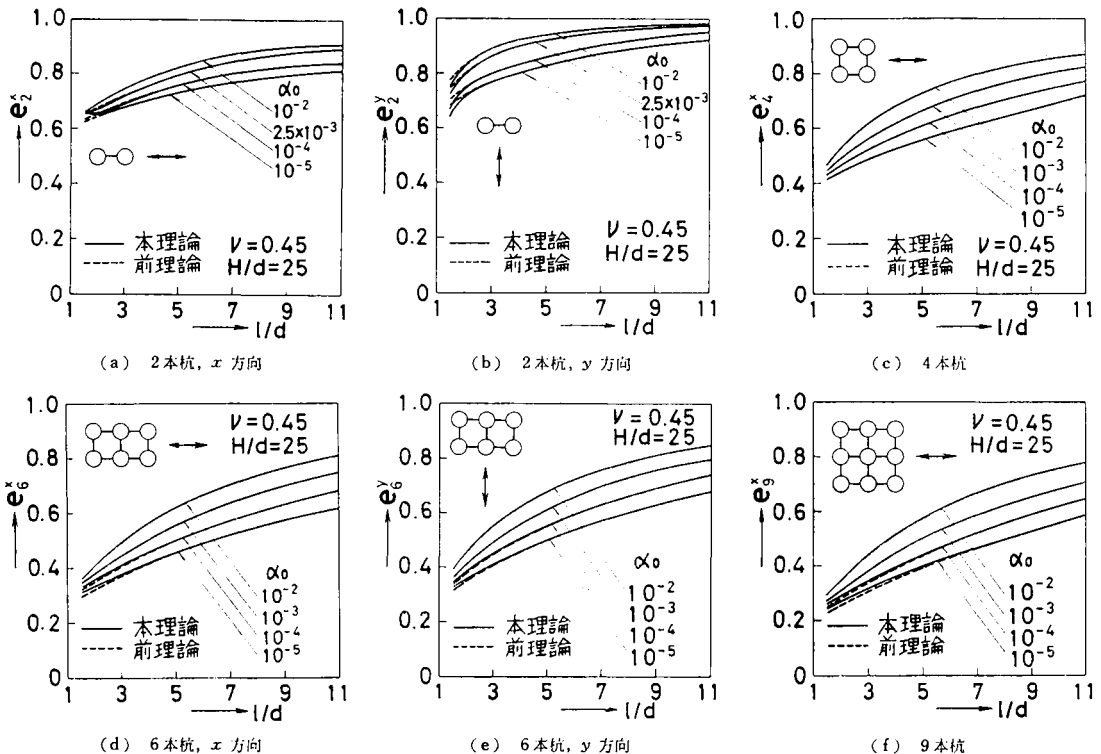


図-4 群杭効果

示している。

杭および地盤の剛性、杭配置等をいろいろ変えた場合について、それぞれ前論⁹⁾の方法と本論の方法とに従って行った数値計算結果の一例を 図-4 (a)~(f) に示した。図中 α_0 は地盤のせん断弾性係数と杭の曲げ剛性ととの関係を表わす定数で、次のように定義した。

$$\alpha_0 = \frac{\mu I_0}{EI}, \quad I_0 = \frac{\pi}{64} d^4 \dots\dots\dots(44)$$

なお、数値計算においては、 m に関する無限級数の和を求めることが必要であるが、本論では $m=1, 3, 5, \dots, 99$, すなわち 50 項までの和を採用した。計算時間については、それぞれの場合で多少の違いがあるので一概にはいえないが、本論の場合は前論の場合に比べて約半分の時間しかかからないといつてよいようである。

図-4 において、実線が本論による計算結果を、点線が前論によるそれを表わしている。両者は l/d が 1.5 に近い場合を除いてほとんど一致している。また、杭本数の多い場合、図-4 (d)~(f) に現われた両者の差は、前論の計算方法において次のような近似的取扱いをしたことによって生じたものである。すなわち、 N 本の杭を 2 本ずつ $N(N-1)/2$ 組の組合せに分けて、この 2 本の杭の間についてだけ前論の方法における境界条件の補正を逐次行って、これらの結果を重ね合わせて N 本杭の群杭効果を求めた。したがって、いま選んだ 2 本の杭に対する他の杭の影響はこれをまったく無視したことになる。このようにすれば、当然杭間隔が小さくなるほどその誤差は大きくなる。

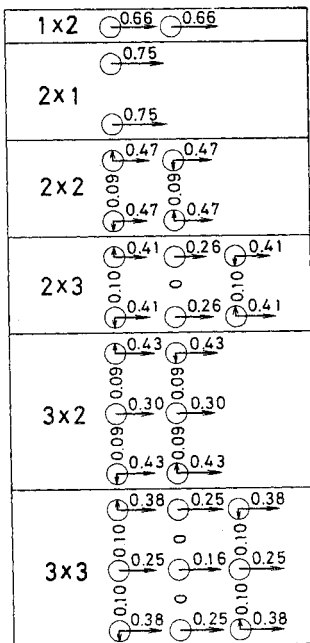
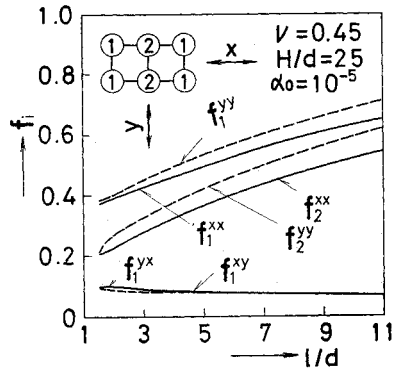


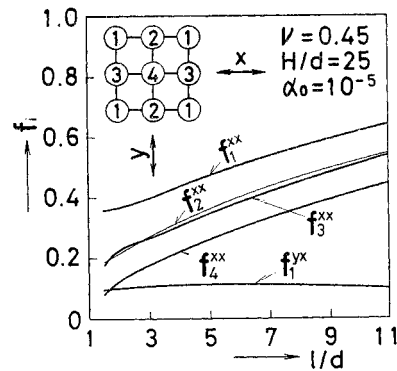
図-5 f_i ($\nu=0.45, H/d=25, \alpha_0=10^{-5}, l/d=2.5$ の場合)

図-5 は 2, 4, 6, 9 本杭について、式 (42) によって求めた f_i^{xx}, f_i^{yy} (単杭の杭頭抵抗力に対する群杭を構成する各杭の杭頭抵抗力の比) の一例を示したものである。 $l/d=2.5$ のときは、荷重直角方向の f_i^{yy} は $\max(f_1^{xx}, f_2^{xx}, \dots, f_N^{xx})$ の約 1/4 であることがわかる。

この f_i^{xx}, f_i^{yy} は l/d によっても変化するし、さらに各杭についてその変化の傾向は異なっている。図-6 (a), (b) に 6 本杭および 9 本杭について、その構成各杭の f_i^{xx}, f_i^{yy} の l/d に対する変化を示した。図中



(a) 6 本杭



(b) 9 本杭

図-6 f_i の変化

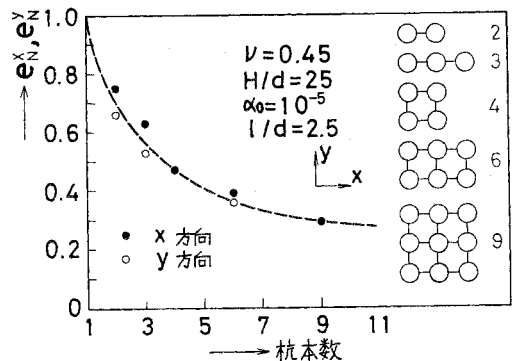


図-7 杭本数と群杭効果

f_i^{yx} は群杭が x 方向荷重をうけたときの i 杭の y 方向の杭頭抵抗力の比を表わす。荷重直角方向の f_i^{yx} はいずれの場合もほぼ一定とみなしてよい。

図-7 は群杭を構成する杭本数と群杭効果の関係を、一例として $l/d=2.5$ の場合について示した。

4. おわりに

以上に詳論したように、本論の解析法はその結果において前論のそれとの間にほとんど差はみとめられないが、解析法自身についてはその見通しよさと簡潔さ、さらには不規則な杭配置および種々の杭径に対しても、そのために解法上に特別な考慮を必要とせず、一定の手順に従って数値計算が行えるという一般性のある点で本論の解析法はまさっているといえる。すなわち、本論の見通しよさと簡潔さおよび一般性は、式 (27), (28), (37), (38) で示される $4N$ 元の連立一次方程式を作成して、これを解くことによって群杭を構成する各杭の荷重分担力および群杭効果を容易に求めることができることにある。

付録 I 式 (18)', (19)' に現われる積分

$$(1) \quad I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} [K_3(\eta_{aj}\eta_{rj}) \cos(3\theta_j - \theta_i)]_{r_i=a_i} d\theta_i \quad \dots\dots\dots (I-1)$$

について

図-1 を参照すれば、 i, j 座標の間には次の関係式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} r_i \sin(\theta_i - \theta_{ij}) &= r_j \sin(\theta_j - \theta_{ij}) \\ r_i \cos(\theta_i - \theta_{ij}) &= r_{ij} + r_j \cos(\theta_j - \theta_{ij}) \\ r_i \cos \theta_i &= r_{ij} \cos \theta_{ij} + r_j \cos \theta_j \\ r_i \sin \theta_i &= r_{ij} \sin \theta_{ij} + r_j \sin \theta_j \\ r_j^2 &= r_{ij}^2 + r_i^2 - 2 r_{ij} r_i \cos(\theta_i - \theta_{ij}) \end{aligned} \right\} (I-2)$$

いま、式 (I-1) の積分の積分範囲を $(-\pi, \pi)$ から $(-\pi + \theta_{ij}, \pi + \theta_{ij})$ に変え、さらに積分変数を θ_i から $\theta = \theta_i - \theta_{ij}$ に変換すれば、 $r_i = a_i$ とおいたとき $K_3(\eta_{aj} \cdot \eta_{rj})$ は θ に関して偶関数であるから、積分 I_1 を計算するためには $\cos(3\theta_j - \theta_i)$ を奇関数と偶関数に分けて、その偶関数部のみを考えればよい。式 (I-2) を参照すれば、

$$\begin{aligned} &\cos(3\theta_j - \theta_i) \text{ の偶関数部} \\ &= \frac{1}{r_j^3} \{ a_i^3 \cos 2\theta - r_{ij}(3a_i^2 + r_{ij}^2) \cos \theta \\ &\quad + 3a_i r_{ij}^2 \} \cos 2\theta_{ij} \dots\dots\dots (I-3) \end{aligned}$$

一方、数学公式 III⁶⁾ から、

$$\frac{K_3(\eta_{aj}\eta_{rj})}{r_j^3} = \frac{\eta_{ai}^3}{a_i^3} \frac{K_3(\eta_{aj}\eta_{rj})}{\eta_{ai}^3 \eta_{rj}^3}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\eta_{ai}^3}{a_i^3} \cdot 8 \Gamma(3) \sum_{n=0}^{\infty} (n+3) C_n^3(\cos \theta) \\ &\quad \cdot \frac{K_{n+3}(\eta_{aj}\eta_{rj})}{\eta_{ai}^3 \eta_{rj}^3} \cdot \frac{I_{n+3}(\eta_{ai})}{\eta_{ai}^3} \dots\dots\dots (I-4) \end{aligned}$$

ここに、 $C_n^3(\cos \theta)$ は Gegenbauer の多項式で、

$$\begin{aligned} C_n^3(\cos \theta) &= \sum_{\kappa=0}^n \frac{\Gamma(3+\kappa)\Gamma(n+3-\kappa)}{\kappa!(n-\kappa)! \{\Gamma(3)\}^2} \\ &\quad \cdot \cos(2\kappa - n)\theta \dots\dots\dots (I-5) \end{aligned}$$

である。また、 $\Gamma(\kappa)$ はガンマ関数、 $I_n(\eta_{ai})$ は第 1 種第 n 次の変形ベッセル関数である。さらに、

$$\eta_{rj} = \frac{r_{ij}}{a_i} \dots\dots\dots (I-6)$$

とおいた。

いま、式 (I-3) と式 (I-5) とから次の積分を計算すると

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} C_n^3(\cos \theta) \{ a_i^3 \cos 2\theta - r_{ij}(3a_i^2 + r_{ij}^2) \cos \theta \\ &\quad + 3a_i r_{ij}^2 \} d\theta \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} (k+1)(k+2) a_i \{ k(k+3) a_i^2 \\ \quad + 3(k+1)(k+2) r_{ij}^2 \} & (n=2k \text{ のとき}) \\ -\frac{\pi}{2} k(k+1)^2 (k+2) (3a_i^2 + r_{ij}^2) r_{ij} & (n=2k-1 \text{ のとき}) \end{cases} \\ &\quad (k=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (I-7) \end{aligned}$$

であるから、結局、求める積分 I_1 は、

$$I_1 = 2\pi F(\eta_{ai}, \eta_{rj}) \cos 2\theta_{ij} \dots\dots\dots (I-8)$$

と表わせる。ここに、

$$\begin{aligned} F(\eta_a, \eta_r) &= \frac{4}{\eta_a^2 \eta_r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)(k+2)(2k+3) \{ k(k+3) \right. \\ &\quad + 3(k+1)(k+2)\eta_r^2 \} \frac{K_{2k+3}(\eta_a \eta_r)}{\eta_a \eta_r} I_{2k+3}(\eta_a) \\ &\quad - 2k(k+1)^2 (k+2) (3+\eta_r^2) \\ &\quad \left. \cdot K_{2k+2}(\eta_a \eta_r) \frac{I_{2k+2}(\eta_a)}{\eta_a} \right] \dots\dots\dots (I-9) \end{aligned}$$

$$(2) \quad I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} [K_3(\eta_{aj}\eta_{rj}) \sin(3\theta_j - \theta_i)]_{r_i=a_i} d\theta_i \quad \dots\dots\dots (I-10)$$

について

(1) の場合と同様にすれば、

$$I_2 = 2\pi F(\eta_{ai}, \eta_{rj}) \sin 2\theta_{ij} \dots\dots\dots (I-11)$$

を得る。

(3) 式 (18)', (19)' に現われる他の積分についても、(1) とまったく同様に考えればよい。以下に結果のみを示す。

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\pi}^{\pi} [K_1(\eta_{aj}\eta_{rj}) \cos(\theta_j - \theta_i)]_{r_i=a_i} d\theta_i \\ &= -2\pi I_1(\eta_{ai}) K_0(\eta_{ai}\eta_{rj}) \dots\dots\dots (I-12) \end{aligned}$$

$$I_4 = \int_{-\pi}^{\pi} [K_1(\eta_{aj}\eta_{rj}) \sin(\theta_j - \theta_i)]_{r_i=a_i} d\theta_i = 0 \dots\dots\dots (I-13)$$

$$I_5 = \int_{-\pi}^{\pi} [K_1(\eta_{aj}\eta_{rj}) \cos \theta_j \cos \theta_i]_{r_i=a_i} d\theta_i = -\pi I_1(\eta_{ai}) \{K_0(\eta_{ai}\eta_{rij}) + K_2(\eta_{ai}\eta_{rij}) \cos 2\theta_{ij}\} \dots\dots\dots (I-14)$$

$$I_6 = \int_{-\pi}^{\pi} [K_1(\eta_{aj}\eta_{rj}) \cos \theta_j \sin \theta_i]_{r_i=a_i} d\theta_i = \int_{-\pi}^{\pi} [K_1(\eta_{aj}\eta_{rj}) \sin \theta_j \cos \theta_i]_{r_i=a_i} d\theta_i = -\pi I_1(\eta_{ai}) K_2(\eta_{ai}\eta_{rij}) \sin 2\theta_{ij} \dots\dots (I-15)$$

$$I_7 = \int_{-\pi}^{\pi} [K_1(\eta_{aj}\eta_{rj}) \sin \theta_j \sin \theta_i]_{r_i=a_i} d\theta_i = \pi I_1(\eta_{ai}) \{-K_0(\eta_{ai}\eta_{rij})$$

$$+ K_2(\eta_{ai}\eta_{rij}) \cos 2\theta_{ij}\} \dots\dots\dots (I-16)$$

参 考 文 献

- 1) 小坪清真・高西照彦：横方向群杭効果の理論的考察，土木学会論文報告集，No. 241，1975.9.
- 2) Penzien, J., C.F. Scheffey and R.A. Parmelee: Seismic analysis of bridges on long piles, Proc. A.S.C.E., Vol. 90, No. EM 3, 1964.
- 3) 杉村義広：群ぐい基礎における水平地盤係数の低減効果，第7回土質工学研究発表会，昭 47.6.
- 4) Poulos, H.G.: Behavior of laterally loaded piles II—Pile groups, Proc. A.S.C.E., Vol. 97, No. SM 5, 1971.
- 5) 小坪清真・高西照彦・河島正治：横方向群杭効果に関する模型実験，土木学会論文報告集 研究ノート，No. 248，1976.4.
- 6) 森口繁一・宇田川銈久・一松 信：数学公式 III，岩波全書。

(1977.7.25・受付)