

箱桁橋のねじりによる応力の簡易計算法とその応用*

AN APPROXIMATE METHOD FOR THE EVALUATION OF TORSIONAL
AND WARPING STRESSES IN BOX GIRDER BRIDGES

中 井 博**・谷 俊 寛***

By Hiroshi NAKAI and Toshihiro TANI

1. ま え が き

最近、各国で長大鋼箱桁橋が建設される機会が多くなってきているが、この種の橋梁構造物が偏載荷重を受けるときの応力解析は、従来、曲げねじり理論をもとにした複雑な計算が必要であった^{1)~4)}。しかしながら、昭和 48 年に改訂されたわが国の道路橋示方書⁵⁾によると、いわゆるねじり定数比 $\kappa (=I\sqrt{GK}/EI_w)$ 値が 10 以上の桁橋に対しては、そりねじりによる応力が曲げによる応力に比して小さいのでそりねじり応力の計算を省略してもよいとされており、設計者にとって明解な示唆を与えている。

ところが、1973 年に英国の土木学会が中心となって開催された鋼箱桁橋に関する国際会議において発表された論文では、箱桁橋が偏載荷重を受けるとき、① そりねじりによる応力が曲げ応力の数パーセントでるほか、② 箱桁の断面変形（ずり）に伴う応力が曲げ応力の数パーセント以上発生し、両者を合計すると場合によってはかなりの応力レベルに達することが指摘されている^{6)~7)}。そのために、ねじり定数比 κ 値が比較的大きい 1 室の箱桁橋に対しても、そりねじりによる応力を算出すべきであるとの観点に立った解析が行われ、それに対する実用的な計算法が提示されている。これらの考え方は、その後 Merrison 委員会でもまとめられた鋼箱桁橋の暫定基準 (Interim Design Rule)⁸⁾ にも取り入れられている。

著者らは、以前より箱桁橋のそりねじり応力に関する解析を進めてきているが、特に文献 9) で明らかにしたように、連続箱桁橋でねじり定数比がたとえ、 $\kappa > 10$ であっても、中間支点上の断面においてはそりねじりによる応力が卓越するので、それらの計算が必要であること

を強調してきた。また、曲線箱桁橋に対するそり応力の計算を無視できる κ の限界値についても文献 10)~11) で提示したが、それはあくまで単純曲線箱桁橋を対象とし、しかも断面変形による垂直応力を無視するという前提に立ったものである。今日、各種の断面形状を有する長大箱桁橋が各地で建設されるにかんがみ、箱桁のできるだけ正確な応力状態を知ることが望ましいものと思われるので、本文では比較的ねじり定数比 κ が大きい箱桁橋でも、そりねじりによる応力をできるだけ正確に求める簡便な計算法を提案するものである。

そこで、曲げねじり理論^{1)~4)}を出発点として、鋼箱桁橋のそりねじり特性をあらゆる角度から検討する。そして、実橋についてのパラメーター値を調査し、これらのデータをもとにして κ 値が大きい場合を対象としたそりねじりによる応力の算定公式を誘導する。その結果、単純ねじりに関する断面諸量のみによってそりねじりによる応力が算定できるという簡単でしかも合理的な簡易計算法が求められた。この提案式は逆台形のような偏平な箱断面を対象とした I.D.R. 設計指針⁸⁾ とよく似た形をしているが、本文の簡易計算法のほうがわが国でしばしば使用される縦長の箱断面をも含んだ一般性をもつものである。

さらに、これらの提案式の妥当性を検討するために、各種の箱桁橋についての数値解析を行った。もちろん、断面力の算定は複雑な曲げねじり理論を用いなくてもよく、単純ねじり理論に基づいた伝達マトリックス法^{12)~20)}によってきわめて能率よく求められることを示す。さらに、本文の提案式が各種の曲線箱桁橋に対しても適用できることを数値計算例によって明らかにする。

以上によって、従来、設計者にとって繁雑であった鋼箱桁橋のそりねじりによる応力が本文の方法によってきわめて容易に求められるようになると考える。

* 土木学会第 32 回年次学術講演会で発表、I-20、昭 52.10.

** 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 大阪市立大学助手 工学部土木工学科

2. 箱桁橋のねじりによる応力

(1) 基本式

図-1 は箱桁断面を示すが、等分布トルク荷重 m_T が作用するときのねじり角 θ に関する基礎式は、周知のとおり次式で与えられる¹⁾。

$$EI_\omega \frac{d^4\theta}{dx^4} - GK \frac{d^2\theta}{dx^2} = m_T \dots\dots\dots(1)$$

ただし、 EI_ω ：そり剛度、 GK ：ねじり剛度とする。

この式から箱桁橋のねじりに関する力学的特性を以下のように種々検討することができる。

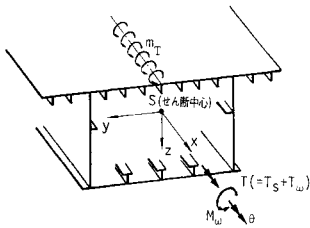


図-1 箱桁断面と作用断面力

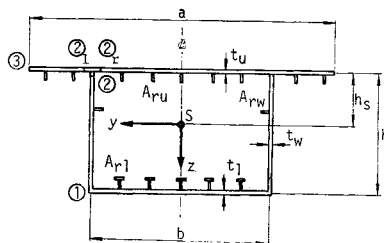


図-2 ブラケットを有する箱桁断面寸法

a) ねじりに関する断面諸定数

道路橋示方書の解説³⁾には、ブラケットが比較的小さい箱桁の断面諸定数を求める近似公式が示されているが、図-2 に示すような断面寸法を有し、縦リブおよびブラケットの影響が無視できない一般的な場合について、ねじりに関する断面諸量を文献 1)~4) の方法によって別途求めると、表-1 に示す結果が得られる。

b) ねじりに関する断面力

基本式 (1) を与えられた境界条件のもとに解くと、ねじり角 θ の解が得られるから、これより以下のような断面力が求められる。

$$\text{そりモーメント：} M_\omega = EI_\omega \frac{d^2\theta}{dx^2} \dots\dots\dots(2)$$

純ねじりモーメント：

$$T_s = GK \frac{d\theta}{dx} \dots\dots\dots(3)$$

そりねじりモーメント：

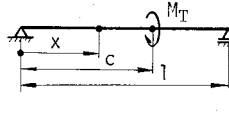
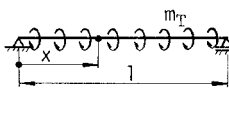
$$T_\omega = -EI_\omega \frac{d^3\theta}{dx^3} \dots\dots\dots(4)$$

たとえば、両端がねじりに対して単純支持されたはりに代表的な荷重が載荷する場合の結果は、文

表-1 箱桁の断面諸定数

純ねじりに関する諸量	中空断面積	$A = bh$
	ねじり関数	$\psi = \frac{2bh}{\left(\frac{b}{t_u} + \frac{b}{t_l} + \frac{2h}{t_w}\right)}$
	純ねじり定数	$K = 2bh \cdot \psi = \frac{4b^2h^2}{\left(\frac{b}{t_u} + \frac{b}{t_l} + \frac{2h}{t_w}\right)}$
そりねじりに関する諸量	せん断中心	$h_s = \frac{1}{r_2^2 \bar{\beta}_u + \bar{\beta}_l + 6} \left[h(\bar{\beta}_l + 9) - r_1 \left\{ \frac{1}{2}(1 - 3r_2^2)\epsilon_u + \epsilon_l + \frac{6}{\bar{\beta}_l} + \frac{6}{r_1^2} \right\} \frac{\psi}{t_w} \right]$
	そり座標値	$\omega_1 = \frac{b}{2} \left(-\frac{\psi}{t_l} + h - h_s \right), \omega_2 = \frac{b}{2} \left(\frac{\psi}{t_u} - h_s \right), \omega_3 = \frac{b}{2} \left(\frac{\psi}{t_u} - r_1 h_s \right)$ ただし、他の点に対するそり座標値は対称軸 (Z) に対して逆対称
	そりねじり関数	$S_{\omega, s} = (\omega_2 + \omega_3) \frac{a-b}{4} \bar{\epsilon}_u + \bar{S}_\omega$ $S_{\omega, sl} = -(\omega_2 + \omega_3) \frac{a-b}{4} \bar{\epsilon}_u, S_{\omega, rl} = \bar{S}_\omega$ $S_{\omega, l} = -S_{\omega, sl} + (\omega_1 + \omega_3) \frac{h}{2} \bar{\epsilon}_w + \bar{S}_\omega, S_{\omega, s} = 0$ ここに、 $\bar{S}_\omega = -\frac{1}{12} \left\{ 3 \bar{\epsilon}_u (r_2 - 1) (\omega_2 + \omega_3) \left(\frac{1}{t_w} + \frac{r_1}{2t_l} \right) + 3(\omega_1 + \omega_2) \frac{\bar{\epsilon}_w}{t_l} + 2(\omega_1 + 2\omega_2) \frac{\bar{\epsilon}_w}{t_w} \frac{1}{r_1} + r_1 \left(\frac{\bar{\epsilon}_l}{t_l} \omega_1 - \frac{\bar{\epsilon}_u}{t_u} \omega_2 \right) \right\} \psi$ ただし、他の点に対するそりねじり関数値は対称軸 (Z) に対して対称
	そりねじり定数	$I_\omega = \frac{1}{3} h \bar{\epsilon}_w (\omega_1^2 (2 + \bar{\beta}_l) + 2\omega_1 \omega_2 + \omega_2^2 (2 + \bar{\beta}_u) + (\omega_2^2 + \omega_2 \omega_3 + \omega_3^2) (r_2 - 1) \bar{\beta}_u)$
ただし、	換算板厚： $\bar{\epsilon}_u = t_u + \frac{i A_{ru}}{a}, \bar{\epsilon}_l = t_l + \frac{j A_{rl}}{b}, \bar{\epsilon}_w = t_w + \frac{k A_{rw}}{h}$ A_{ru}, A_{rl}, A_{rw} ：デッキ、ボトムプレートあるいはウェッジの補強リブ1個の断面積 i, j, k ：デッキ、ボトムプレートあるいはウェッジの補強リブの本数 パラメーター： $\beta_u = \frac{bt_u}{ht_w}, \bar{\beta}_u = \frac{b \bar{\epsilon}_u}{h \bar{\epsilon}_w}, \beta_l = \frac{bt_l}{ht_w}, \bar{\beta}_l = \frac{b \bar{\epsilon}_l}{h \bar{\epsilon}_w}, r_1 = \frac{b}{h}, r_2 = \frac{a}{b}, \epsilon_u = \frac{\bar{\epsilon}_u t_u}{t_u \bar{\epsilon}_u}, \epsilon_l = \frac{\bar{\epsilon}_l t_l}{t_l \bar{\epsilon}_l}$ とする。	

表-2 ねじり荷重による断面力

載荷状態	断面力
集中トルク 	$M_\omega(x) = -\frac{M_T}{\alpha} \frac{\sinh\alpha(1-c)}{\sinh\alpha} \sinh\alpha x, \quad 0 \leq x \leq c$
	$T_s(x) = -M_T \left\{ \frac{\sinh\alpha(1-c)}{\sinh\alpha} \cosh\alpha x - \frac{1-c}{1} \right\}, \quad 0 \leq x \leq c$
	$T_\omega(x) = M_T \frac{\sinh\alpha(1-c)}{\sinh\alpha} \cosh\alpha x, \quad 0 \leq x \leq c$
分布トルク 	$M_\omega(x) = \frac{m_T}{\alpha^2} \left\{ \frac{\sinh\alpha x + \sinh\alpha(1-x)}{\sinh\alpha} - 1 \right\}$
	$T_s(x) = \frac{m_T}{\alpha} \left\{ \frac{\cosh\alpha x - \cosh\alpha(1-x)}{\sinh\alpha} + \alpha \left(\frac{1}{2} - x \right) \right\}$
	$T_\omega(x) = -\frac{m_T}{\alpha} \left\{ \frac{\cosh\alpha x - \cosh\alpha(1-x)}{\sinh\alpha} \right\}$
ただし、境界条件 $[\theta]_{x=0} = [\theta]_{x=1} = 0$ $[\theta']_{x=0} = [\theta']_{x=1} = 0$	

献 1) より表-2 のように与えられている。

表-2 中のパラメーター α は、

$$\alpha = \sqrt{\frac{GK}{EI_\omega}} \dots\dots\dots (5)$$

であり、この α 値によって断面力の値は左右されることになるが、その詳細は後述する。

e) 応力算定公式

以上によって断面諸定数、断面力が与えられたので、これらを用いると、次のような周知の応力算定公式を得る。

純ねじりによるせん断応力：

$$\tau_s = \frac{T_s}{2At} \dots\dots\dots (6)$$

そりねじりによる垂直応力：

$$\sigma_\omega = \frac{M_\omega}{I_\omega} \omega \dots\dots\dots (7)$$

そりねじりによるせん断応力：

$$\tau_\omega = \frac{T_\omega}{I_\omega} \cdot \frac{S_\omega}{t} \dots\dots\dots (8)$$

(2) ねじり定数比 κ による断面力の変化特性

先に明らかにしたように、式 (5) に示した α 値によって箱桁のねじり特性が左右されるが、これにスパン l を乗じて無次元化したものをねじり定数比 κ 、すなわち、

$$\kappa = \alpha l = l \sqrt{\frac{GK}{EI_\omega}} \dots\dots\dots (9)$$

とし、この値による上述の断面力の変化状態を調べる。

まず、図-3 はそりモーメント M_ω のねじり定数比 κ による変化を表-2 より計算し、それぞれ荷重強度とスパンによって無次元化してプロットしたものである。

また、この図の中には連続桁の代表断面におけるそりモ

ーメントを文献 9) の方法によって求め、同様に無次元化してプロットしてある。これらの曲線を観察すると、等分布トルクが作用するときの支間そりモーメントは単純桁、連続桁ともに κ 値が大きくなるにつれ急激に小さくなり、付録-1 に示したように実際に建設された箱桁橋の κ 値、すなわち、

$$\kappa \geq 30 \dots\dots\dots (10)$$

に対しては、 M_ω は非常に小さくなる。しかし、単純桁や連続桁で集中トルクが作用する荷重点、あるいは、等分布トルクが作用する場合の連続桁の中間支点におけるそりモーメントは、

式 (10) のように κ が大であっても完全には減衰しておらず、その値を無視することができないように思われる。したがって、このような場合に対しては、そりねじりによる応力を求めておく必要があると思われる。

次に、図-4 には単純桁、連続桁に等分布トルクが作用する場合のそりねじりモーメント T_ω 、および、純ねじりモーメント T_s のねじり定数比 κ による変化を示す。 κ 値が小さいとき、合ねじりモーメント T はほとんどそりねじりモーメント T_ω によって取られているが、式 (10) に示したように κ 値が大きい場合、合ねじりモー

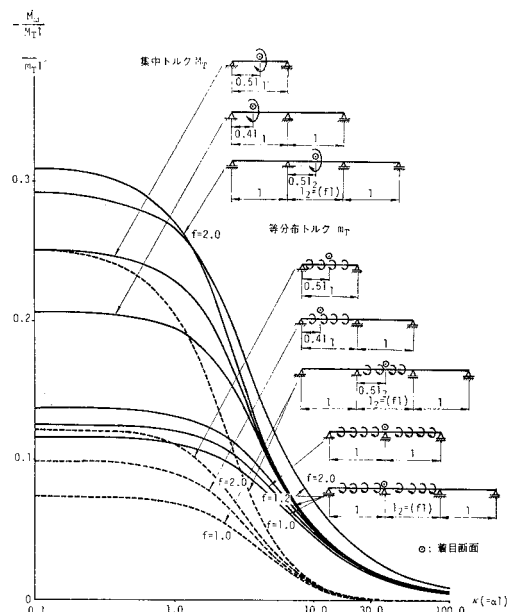


図-3 ねじり定数比 κ によるそりモーメント M_ω の変化

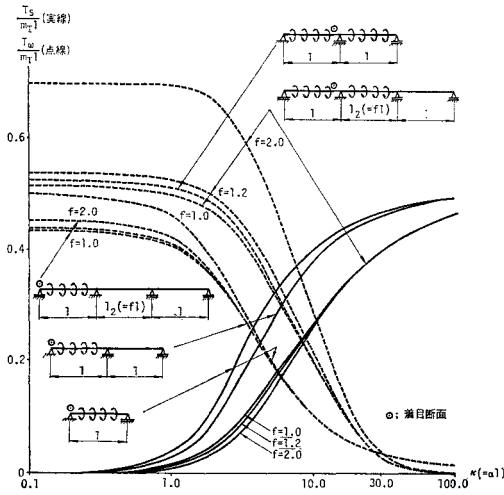


図-4 ねじり定数比 κ による純ねじりモーメント T_s およびそりねじりモーメントの T_{ω} 変化

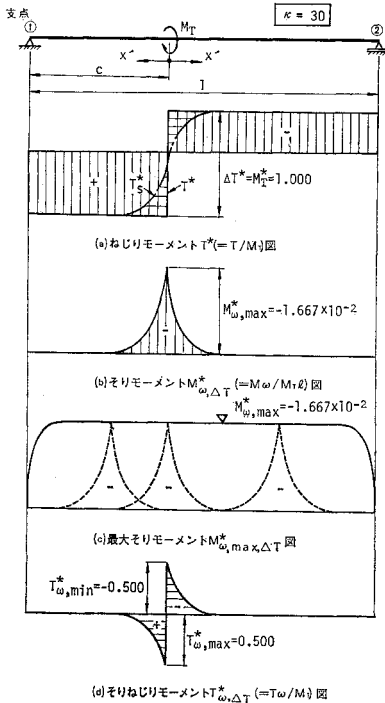


図-5 単純箱桁の断面力図 (集中トルク)

メント T の大部分が純ねじりモーメント T_s によって分担されていることがわかる。

(3) 断面力の近似解

ねじり定数比が式 (10) で示したように大きい場合について、以上の断面力の簡便な近似解を得るために、まず図-5に示すように単純ばりに集中トルク M_T が作用する場合を考える。

合ねじりモーメント

$$T = T_s + T_{\omega} \dots\dots\dots (11)$$

は、図-5 (a) に示すような分布をすることは明らかである。

次に、そりモーメント M_{ω} は図-5(b) に示すように集中トルク M_T の載荷点で最大値 $M_{\omega, \max}$ を持ち、載荷点から遠ざかると指数関数的に M_{ω} 値は激減している。このような断面力図を求めるために、表-2 よりたとえば集中トルク

$$\Delta T = M_T \dots\dots\dots (12)$$

が $c=l/2$ に載荷した場合を考え、載荷点より x' 離れた任意点における M_{ω} 値を求めると、式 (10) に示した $\kappa \geq 30$ の場合はもちろん、道路橋示方書⁵⁾ の κ の限界値 $\kappa > 10$ の場合に対しても、次のように簡素化できる。

$$\begin{aligned} M_{\omega, \Delta T} &= -\frac{\Delta T}{\alpha} \frac{\sinh \frac{\alpha l}{2}}{\sinh \alpha l} \sinh \alpha \left(\frac{l}{2} - x' \right) \\ &\cong -\frac{\Delta T}{\alpha} \frac{e^{\frac{\alpha l}{2}}}{e^{\alpha l}} \frac{1}{2} e^{\alpha \left(\frac{l}{2} - x' \right)} \\ &= -\frac{\Delta T}{2\alpha} \cdot e^{-\alpha x'} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

載荷点の位置が c でない一般的な場合についても同様に計算すると、図-5 (c) に示すように最大そりモーメント図がプロットでき、その最大値は、

$$M_{\omega, \max, \Delta T} = -\frac{\Delta T}{2\alpha} \dots\dots\dots (14)$$

とみなすことができる。したがって、式 (13)、(14) より次のような $M_{\omega, \Delta T}$ の一般式を得る。

$$M_{\omega, \Delta T} = M_{\omega, \max, \Delta T} \cdot e^{-\alpha x'} \dots\dots\dots (15)$$

一方、そりねじりモーメント T_{ω} は、表-2 から同様に次式のように表わすことができる。

$$T_{\omega, \Delta T} = T_{\omega, \max(\text{or min}), \Delta T} \cdot e^{-\alpha x'} \dots\dots\dots (16)$$

ただし、

$$T_{\omega, \max(\text{or min}), \Delta T} = \pm \frac{\Delta T}{2} \dots\dots\dots (17)$$

とする。したがって、図-5 (d) のような $T_{\omega, \Delta T}$ 図が得られる。さらに、純ねじりモーメントは、式 (11) より次のように表わすことができる。

$$T_s = T - T_{\omega, \Delta T} = T \mp \frac{\Delta T}{2} \cdot e^{-\alpha x'} \dots\dots\dots (18)$$

ただし、複号は T が正のとき負をとり、 T が負のとき正をとるものとする。このようにして得られた純ねじりモーメント T_s の分布図は図-5 (a) 中に鎖線で示すようになる。

等分布トルクが作用する場合についても、表-2 から図-6 に示すように断面力図をプロットすることができる。

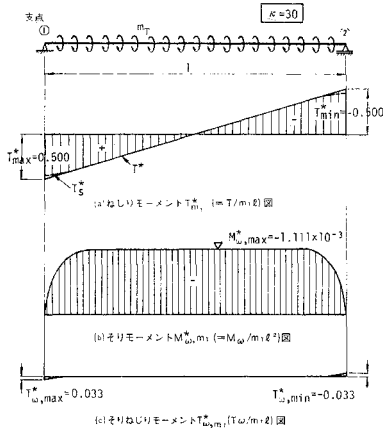


図-6 単純箱桁の断面力図(分布トルク)

まず、図-6(a)より、この場合は純ねじりモーメント T_s が合ねじりモーメント T に等しいと考えてよく、

$$T_{s,mT} = T_{mT} \dots\dots\dots (19)$$

と置くことができる。また、そりモーメント M_ω は径間中央 ($x=l/2$) に着目すると、表-2 より、

$$M_{\omega,mT} = -\frac{m_T}{\alpha^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh \frac{\alpha l}{2}}\right) \cong -\frac{m_T}{\alpha^2} \dots\dots\dots (20)$$

と書ける。そして、この式は図-6(b)に示すように両端付近を除き有効である。

さらに、そりねじりモーメント $T_{\omega,mT}$ は、図-6(c)に示すように等分布トルクが作用する場合には両端でわずかな値を生ずるだけであるから、

$$T_{\omega,mT} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

とおくことができる。

以上の近似公式(14)~(21)を用いると、連続箱桁橋のそりねじりによる断面力を容易に求めることができる。これを図-7に示すように3径間連続箱桁橋の第1, 第2径間に等分布トルク m_T が作用する場合について例示する。まず、合ねじりモーメントは図-7(a)に示すように単純ねじり理論によって容易に求められる(これについては後述する)。次に、等分布トルク m_T によ

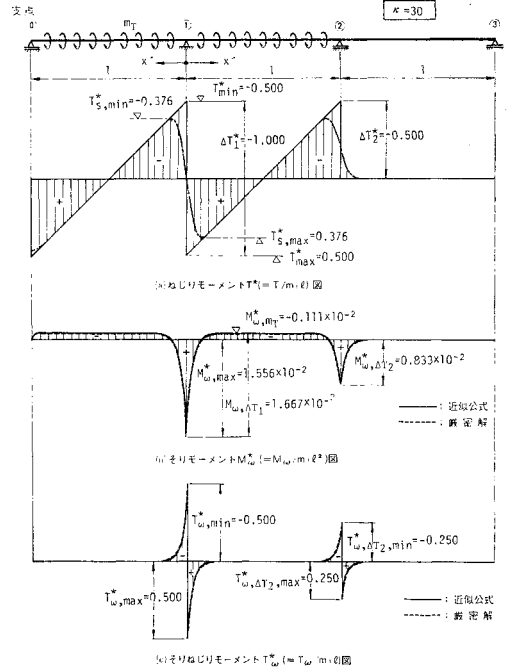


図-7 連続箱桁のねじりによる断面力図

って第1, 第2径間には、端部を除き式(20)に示したような一定のそりモーメント $M_{\omega,mT}$ が生ずる。また、この場合、中間支点1,2にはそれぞれ $\Delta T_1, \Delta T_2$ なるねじりモーメントのステップ(集中トルクとみなす)が発生するから、これらによるそりモーメント $M_{\omega,\Delta T}$ は式(14)~(15)を使用して容易に求めることができる。したがって、最終的なそりモーメント図は、図-7(b)に示すような分布となる。そして、等分布トルク m_T によるそりねじりモーメント $T_{\omega,mT}$ は、式(21)に示したように考えなくてよいから、式(16)~(17)より $\Delta T_1, \Delta T_2$ によるそりねじりモーメント $T_{\omega,\Delta T}$ のみを求めると、図-7(c)に示すような T_ω の分布図が得られる。さらに、純ねじりモーメント T_s は式(18)より求めることができ、この分布図は図-7(a)中に示したようになる。

このような近似公式で求められた断面力の精度を確かめるために、支点1付近の断面力の値につき計算し、こ

表-3 支点1近傍の断面力の近似解と厳密解との比較(図-7 参照)

断面力 x'	そりモーメント $M_{\omega}^*(M_{\omega}/m_T l^2) \times 10^{-2}$			そりねじりモーメント $T_{\omega}^*(T_{\omega}/m_T l) \times 10^{-1}$		純ねじりモーメント $T_s^*(T_s/m_T l) \times 10^{-1}$		
	簡易式(13)(20)による解			文献9)による 厳密解	簡易式(16)(7) による解	文献9)による 厳密解	簡易式(18) による解	文献9)による 厳密解
	$M_{\omega,\Delta T}^*$	$M_{\omega,mT}^*$	M_{ω}^*					
0	1.6667	-0.1111	1.5556	1.5958	5.0000	5.1207	0.0000	-0.0389
0.05 l	0.3809	-0.1111	0.2698	0.2698	1.1157	1.1426	3.3843	3.4393
0.10 l	0.0850	-0.1111	-0.0261	-0.0261	0.2489	0.2550	3.7511	3.8269
0.15 l	0.0190	-0.1111	-0.0921	-0.0922	0.0555	0.0569	3.4431	3.5250
0.20 l	0.0042	-0.1111	-0.1069	-0.1069	0.0124	0.0127	2.9873	3.0692

れと文献 9) による厳密解とを比較したものを表-3 に示す。いずれの場合も両者よく一致し、近似解でも良好な結果が得られていることがわかる。上では等分布トルクのみが作用する場合のみを示したが、支間内に集中トルクが作用する場合、その点のねじりモーメントのステップ ΔT を求め、それによる断面力 $M_{\omega, \Delta T}$, $T_{\omega, \Delta T}$, $T_{s, \Delta T}$ を上述の近似公式によって算出して追加すればよい。

(4) そりねじりによる垂直応力

a) 集中トルク ΔT を受ける場合

支間内で集中トルク $\Delta T = M_T$ を受けたり、あるいは連続箱桁橋の中間支点でねじりモーメント T が ΔT だけステップする場合を対象としてそりねじりによる垂直応力を求める。一般に、箱桁橋では、図-2 に示す下フランジと腹板の結合点 1 における垂直応力が大きいので、この点の垂直応力 $\sigma_{\omega, 1}$ に着目する。上フランジと腹板の結合点 2 における垂直応力 $\sigma_{\omega, 2}$ 、および、ブラケットの先端 3 における垂直応力 $\sigma_{\omega, 3}$ はいずれも $\sigma_{\omega, 1}$ を基準として算定できるが、これについては後述する。

そこで、いま図-2 の下フランジと腹板の結合点におけるそり座標値 ω_1 を文献 10) の結果を参照にして、次のように仮定する。

$$\omega_1 = \lambda \frac{bh}{4}, \text{ あるいは, } \lambda = \frac{4\omega_1}{bh} \dots\dots\dots (22)$$

ただし、 λ は箱桁の断面形状・寸法 (図-2 に示す a/b , b/h , t_u/t_w , $t_l/t_w \dots$ 等) によって左右される無次元パラメータとする。すると、基本式 (7), 式 (14) ~ (15) および (5) より、 $\sigma_{\omega, 1}$ は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \sigma_{\omega, 1, \Delta T} &= \frac{M_{\omega, \Delta T}}{I_{\omega}} \omega_1 = -\frac{\Delta T}{2\alpha} e^{-\alpha x'} \frac{1}{I_{\omega}} \frac{\lambda bh}{4} \\ &= -\frac{\Delta T}{8I_{\omega}} \frac{\lambda bh}{\sqrt{\frac{GK}{EI_{\omega}}}} \cdot e^{-\sqrt{\frac{GK}{EI_{\omega}}} \cdot x'} \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ここで、さらに新しい無次元パラメータ

$$\eta = \lambda b \sqrt{\frac{K}{I_{\omega}}} \dots\dots\dots (24)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot \frac{\eta}{\lambda} \dots\dots\dots (25)$$

を導入し、鋼箱桁に対して、

$$\sqrt{\frac{G}{E}} = \sqrt{\frac{8.1 \times 10^6}{2.1 \times 10^6}} \cong 0.62 \dots\dots\dots (26)$$

と近似すれば、式 (23) は次のように書くことができる。

$$\sigma_{\omega, 1, \Delta T} \cong -\frac{\eta h}{5K} \Delta T \cdot e^{-\xi \frac{x'}{b}} \dots\dots\dots (27)$$

ここで、パラメータ η , ξ の具体的な値を知るために、表-1 の解より数値計算を行ったものを以下に示す。まず、図-8 は 2 種の断面寸法比 a/b , t_u/t_w , t_l/t_w に対してパラメータ η が b/h によってどのように変

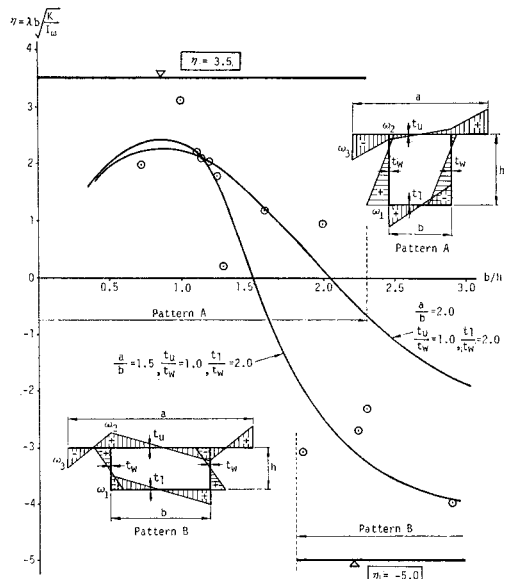


図-8 そり座標値の分布とパラメータ η 値

化するかを調べたものである。断面形状が縦長で b/h が小さいとき、そり座標値が図-8 中に示すように $\omega_1 > 0$ となる pattern A 型の分布をし、これに伴ってパラメータは $\eta > 0$ となる。これに反し、断面形状が扁平で b/h が大きい場合にはそり座標値が $\omega_1 < 0$ となる pattern B 型の分布となり、したがって、この場合は $\eta < 0$ となる。

また、図-8 中には実際に建設された箱桁橋の η 値も \odot 印でプロットしてあるが、pattern A 型は $b/h < 2.3$ で起こり、そのときの η の最大値は $\eta \cong 3.5$ である。一方、pattern B 型は $b/h > 1.8$ で起こり、その最大値は $\eta \cong -5.0$ である。このように、pattern A 型と B 型のおこる範囲がオーバー・ラップしており、一概に比 b/h のみで η 値を判定することができないが、上述の η 値はそり応力を概算するとき重要な示唆を与えるものであると思われる。

次に、パラメータ ξ を同様に計算し、プロットしたものを図-9 に示す。この場合も pattern A 型と pattern B 型とで ξ 値が若干異なる。そこで、そりねじりによる垂直応力をできるだけ安全側に評価するための ξ 値を求めると、前者に対して $\xi = 2.0$ 、後者に対して $\xi = 4.0$ となる。

ところで、Merrison 委員会でもとめられた I.D.R.⁸⁾ によると、 η 値としては pattern B 型の扁平断面に対する $\eta = -5.0$ を採用し、 ξ 値としては pattern A 型の縦長断面に対する $\xi = 2.0$ を用いているように思われる。したがって、式 (27) より、

$$\sigma_{\omega, 1, \Delta T} \cong \frac{h}{K} \Delta T \cdot e^{-2 \frac{x'}{b}} \dots\dots\dots (28)$$

と書けることになる。この式は、上述の結果によると $b/h \geq 2.5$ の偏平な箱型断面に対してのみ有効であり、わが国でよく使用される $b/h \leq 1.5$ の箱型断面に対しては、そりによる垂直応力の符号が逆となるという誤った結果を与えることになるように思われる。

b) 等分布トルク m_T を受ける場合

基本式 (7)、および、式 (20)、(5)、(26) より、等分布トルク m_T を受ける場合の下フランジと腹板の結合点における垂直応力 $\sigma_{\omega,1,m_T}$ を求めると、次式が得られる。

$$\sigma_{\omega,1,m_T} = \frac{M_{\omega,m_T}}{I_{\omega}} \omega_1 = -\frac{E}{4G} \lambda \frac{bh}{K} m_T \cong -\frac{3}{5} \frac{\lambda h}{K} b m_T \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで、無次元パラメーター λ は、すでに示した式 (22) で定義したものである。

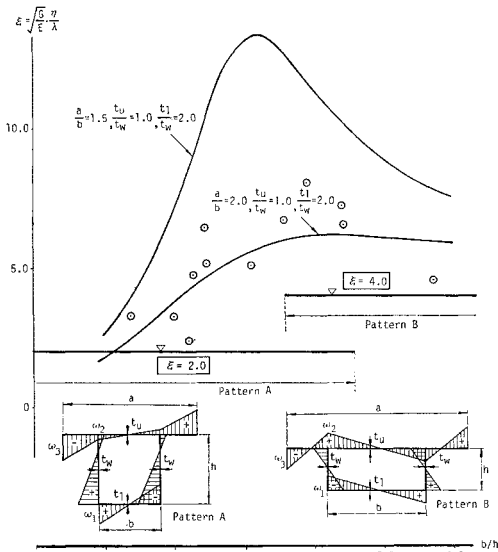


図-9 そり座標値の分布とパラメーター ϵ 値

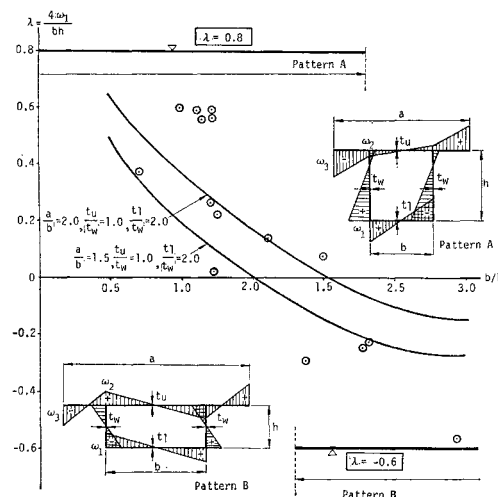


図-10 そり座標値の分布とパラメーター λ 値

断面寸法を表わすパラメーター a/b , t_u/t_w , t_l/t_w および b/h の種々な値に対する λ 値の変化、ならびに実橋に対する λ 値を 図-10 に \odot 印で示したが、この場合にもそり座標値の pattern に応じて λ 値は異なる。すなわち、断面が縦長の pattern A 型は $b/h \leq 2.3$ で起こり、安全側の $\sigma_{\omega,1,m_T}$ を与えるには $\lambda=0.8$ に取る。また、断面が偏平な pattern B 型は $b/h \geq 1.8$ で起こり $\lambda=-0.6$ に取れば安全側であるように思われる。

なお、Merrison 委員会でも定められた I.D.R.⁸⁾ では、等分布トルク m_T による垂直応力は一般に集中トルクによるものと比較すると小さいものとして無視している。

(5) ねじりによるせん断応力

純ねじりによるせん断応力 τ_s は、基本式 (6) に与えたとおりであるが、式 (25) を考慮のもとに、式 (18) を用いてこれを表わすと、

$$\tau_s = \frac{T_s}{2At} = \frac{1}{2At} \left(T \mp \frac{\Delta T}{2} \cdot e^{-\epsilon x'} \right) \quad \dots\dots\dots (30)$$

と書くことができる。

一方、そりねじりによるせん断応力 τ_{ω} も基本式 (8) で算定することができるが、これを上式と類似させて表わすと、次のように表わすことができる。

$$\tau_{\omega} = \frac{S_{\omega}}{I_{\omega} t} T_{\omega} = \frac{\chi}{2At} T_{\omega} = \pm \frac{\chi}{2At} \frac{\Delta T}{2} e^{-\epsilon x'} \quad \dots\dots\dots (31)$$

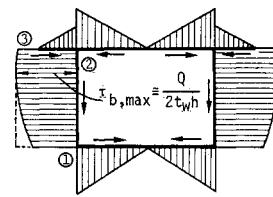
ここで、新しく導入した無次元パラメーター χ は、

$$\chi = \frac{2AS_{\omega}}{I_{\omega}} \quad \dots\dots\dots (32)$$

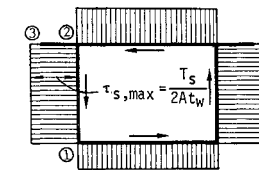
と置いたものである。

したがって、式 (30) と (31) を合計した合せん断応力 $\tau_{s+\omega}$ は、

$$\tau_{s+\omega} = \tau_s + \tau_{\omega} = \frac{1}{2At} \left\{ T \pm (\chi - 1) \frac{\Delta T}{2} e^{-\epsilon x'} \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$



(a) 曲げによるせん断応力



(b) 純ねじりによるせん断応力

図-11 曲げとねじりによるせん断応力

で与えられる。上式からパラメーター χ の値を知り得たならば、単純ねじりに関する断面諸量を用いて合せん断応力 $\tau_{s+\omega}$ を求めることができる。

ところが、式 (32) の S_{ω} は断面内で値が変化し、流れの方向も考慮しなければならない。図-11 は曲げ、および、純ねじりによる箱桁のせん断応力の流れの方向を示したものであり、図-12

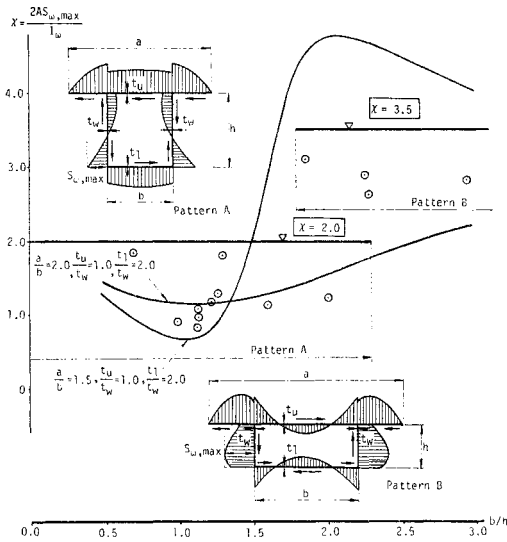


図-12 そりねじり関数とパラメーター χ 値

にはそりねじりによるせん断応力の流れの方向を示してある。そりねじりによるせん断応力はこの場合も、断面が縦長と偏平な場合について2つのパターンがあることを示している。しかしながら、図-11と図-12のせん断流の方向を考えれば、その最大値は pattern A 型においては下フランジと左側腹板の結合点で起こり、pattern B 型においては左側腹板内で起こることがわかる。

そこで、図-12中に示した点における $S_{w,max}$ を求め、そのときの χ 値をパラメトリック解析したものを図中にプロットしてある。ここで、ちなみに $\chi=1$ と仮定すると、式(33)より、

$$\tau_{s+w} = \frac{T}{2At_w} \dots\dots\dots(34)$$

が得られる。この場合は、合ねじりモーメントを単純ねじりモーメント T_s とみなして計算すれば、合せせん断応力 τ_{s+w} が求められるという従来の設計公式とも一致する。しかし、図-12より pattern A 型に対しては $\chi \approx 2$ 、pattern B 型に対しては $\chi \approx 3.5$ となるから、合せせん断応力 τ_{s+w} の最大値は式(33)より、

$$\tau_{s+w} = \frac{T}{2At_w} \left\{ 1 + \nu \frac{|dT|}{2|T|} e^{-\xi \frac{x'}{b}} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

ただし、pattern A 型に対して $\nu=1.0$
 pattern B 型に対して $\nu=2.5$
 と表わすことができる。上式は合せせん断応力が式(34)で求められるものより若干大きくなることを示している。

(6) ねじりによる実用的応力算定公式

以上の応力算定公式をまとめると、以下のように単純

ねじりに関する断面諸量のみを使って実用的な応力算定公式が得られる。

$$\sigma_{w,1} = -\frac{h}{5K} [\eta \Delta T \cdot e^{-\xi \frac{x'}{b}} + 3 \lambda b m_T] \dots(36)$$

$$\tau_{s+w} = \tau_s + \tau_w = \frac{T}{2At_w} \left\{ 1 + \frac{|dT|}{2|T|} (\chi - 1) e^{-\xi \frac{x'}{b}} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

(ただし、腹板における最大せん断応力)

ここに、 T ：合ねじりモーメント

ΔT ：合ねじりモーメントのステップ量

m_T ：分布トルクの強度

$$K = \frac{4b^2h^2}{\left(\frac{b}{t_u} + \frac{b}{t_l} + \frac{2h}{t_w} \right)} \dots\dots\dots(38)$$

b ：腹板の間隔

h ：桁高

t_u, t_l ：それぞれ上下フランジの板厚

t_w ：腹板の厚さ

$$A = bh \dots\dots\dots(39)$$

：薄肉中心線で囲まれる部分の断面積

x' ： ΔT が起こる点から着目点までの橋軸方向の距離

また、パラメーター η, ξ, λ および、 χ 値は今後も数多くの資料によって確認する必要があるが、付録-1の実橋を対象とした範囲内では、以下のように取ることができると思われる。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 3.5 \quad (\text{pattern A, } b/h < 2.5) \\ &= -5.0 \quad (\text{pattern B, } b/h > 1.5) \\ \xi &= 2.0 \quad (\text{pattern A, } b/h < 2.5) \\ &= 4.0 \quad (\text{pattern B, } b/h > 1.5) \\ \lambda &= 0.8 \quad (\text{pattern A, } b/h < 2.5) \\ &= -0.6 \quad (\text{pattern B, } b/h > 1.5) \\ \chi &= 2.0 \quad (\text{pattern A, } b/h < 2.5) \\ &= 3.5 \quad (\text{pattern B, } b/h > 1.5) \end{aligned} \right\} \dots\dots(40)$$

ただし、上でも明らかにしたように、 $b/h=1.5 \sim 2.5$ に対しては pattern A 型と B 型が共存するので、このような範囲内では表-1より断面諸定数を正確に求めて各種のパラメーターを別途計算するか、あるいは、概略設計で詳細な計算が不必要なときには pattern A 型と B 型の両方について計算し、そのうち大きい方の値を採用すればよいように考える。

さらに、図-2に示した点2、および点3における垂直応力 $\sigma_{w,2}, \sigma_{w,3}$ を求めたいときは、式(36)で求められた垂直応力 $\sigma_{w,1}$ に次のような補正を行えばよい。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\omega,2} &= \frac{1}{3r_2^2 + \frac{6}{r_1} - 1} \left\{ \frac{(r_2 - 1)^2 (2r_2 + 1)}{\lambda} \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{3}{r_1} + 1 \right) \right\} \sigma_{\omega,1} \\ \sigma_{\omega,3} &= - \frac{1}{3r_2^2 + \frac{6}{r_1} - 1} \left\{ \frac{(r_2 - 1) \left(r_2^2 + r_2 + \frac{6}{r_1} \right)}{\lambda} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{3}{r_1} + 1 \right) \right\} \sigma_{\omega,1} \\ &\dots\dots\dots (41) \end{aligned} \right\}$$

ただし、パラメーター r_1, r_2 は表-1 にも示した
たように、

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{b}{h} \\ r_2 &= \frac{a}{b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

とする。

3. 単純ねじり理論による各種箱桁橋の断面力解析

上で明らかにしたように、箱桁橋のねじりによる応力は合ねじりモーメントがわかれば容易に算定できるので、以下では合ねじりモーメントを求めることを主眼とした解析方法について述べる。合ねじりモーメント T の解析方法としては各種の方法があげられるが、ここでは直線箱桁橋のみならず曲線箱桁橋への拡張も容易な伝達マトリックス法^{12)~20)}を用い、統一的に断面力を求める。

(1) 単純箱桁橋・連続箱桁橋

a) 伝達マトリックス法による解析

図-13 に示すように、箱型断面のせん断中心 S において座標軸 (x, y, z) をとり、これらの軸に関する変位量・断面力を図示のように定義する。また、以上の変位量・断面力は、表-4 に指示したようにそれぞれ対応する基準量で無次元化しておく。

すると、図-14 に示すように箱桁橋をスパン方向に分割した第 k パネルの右端(記号 l で表わす)の状態ベクトル $y_{l,k}^* = \{w \ \varphi \ \theta \ T \ M \ Q \ 1\}_{l,k}^*$ はそのパネルの左端(記号 0 で

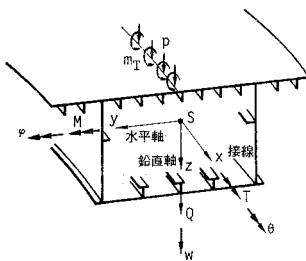
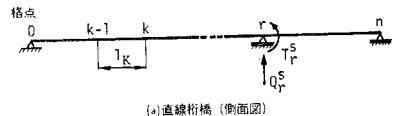


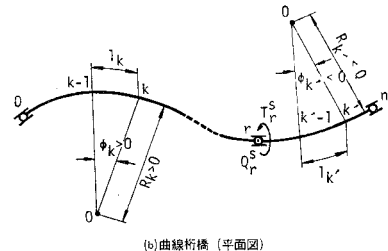
図-13 変位と断面力

表-4 変位量・断面力の無次元化

変位量・断面力	記号	無次元化された変位量・断面力	
たわみ	w	$w^* = (EI_c)/(P_c l_c^3) \times w$	
たわみ角	φ	$\varphi^* = (EI_c)/(P_c l_c^2) \times \varphi$	
ねじり角	θ	$\theta^* = (EI_c)/(P_c l_c^2) \times \theta$	
合ねじりモーメント	T	$T^* = 1/(P_c l_c) \times T$	
曲げモーメント	M	$M^* = 1/(P_c l_c) \times M$	
せん断力	Q	$Q^* = 1/P_c \times Q$	
格点不静定トルク	T^s	$T^{s*} = 1/(P_c l_c) \times T^s$	
格点不静定力	Q^s	$Q^{s*} = 1/P_c \times Q^s$	
荷重	分布荷重	p	$p^* = l_c/P_c \times p$
	分布トルク	m_T	$m_T^* = 1/P_c \times m_T$
	集中荷重	P	$P^* = 1/P_c \times P$
	集中トルク	M_T	$M_T^* = 1/(P_c l_c) \times M_T$
基準量		P_c : 基準荷重 l_c : 基準スパン E : ヤング係数	



(a) 直線箱桁橋 (側面図)



(b) 曲線箱桁橋 (平面図)

図-14 パネル l_k の取り方

表わす)の状態ベクトルを $y_{0,k}^* = \{w \ \varphi \ \theta \ T \ M \ Q \ 1\}_{0,k}^*$ とすると、次式によって求められる。

$$y_{l,k}^* = F_k^* \cdot y_{0,k}^* \dots\dots\dots (43)$$

ここに、 F_k^* は格間行列で、次式によって与えられる。

$$F_k^* = \begin{bmatrix} 1 & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & f_{17} \\ 0 & c & -s & f_{24} & f_{25} & f_{26} & f_{27} \\ 0 & s & c & f_{34} & f_{35} & f_{36} & f_{37} \\ 0 & 0 & 0 & c & s & f_{46} & f_{47} \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & f_{56} & f_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & f_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_k \dots\dots (44)$$

ただし、 c_k^*, s_k^* は表-5 に示すように直線桁¹⁷⁾と曲線桁¹⁸⁾に対して区分されるパラメーターである。また、要素 f_{ij}^* は、付録-2 に示したようになる。特に、曲

表-5 S_k^*, C_k^* の値

直線箱桁橋	曲線箱桁橋
$s_k^* = 0$	$s_k^* = \sin \phi_k$
$c_k^* = 1$	$c_k^* = \cos \phi_k$

線箱桁橋の場合で図-13(b)に示すように第 k' パネルがS字橋のように反対に曲っている場合(曲率中心が O' にある)には、 $\phi_{k'}$, $R_{k'}$ をともに負の値に設定すればよい。

次に、第 $k+1$ パネルの左端の状態ベクトル $y_{0,k+1}^* = \{\omega \ \varphi \ \theta \ T \ M \ Q \ 1\}_{k+1}^*$ は、

$$y_{0,k+1}^* = P_k^* \cdot y_{l,k}^* \dots \dots \dots (45)$$

と書ける。ここに、 P_k^* は格点行列であり、次式で与えられる。

$$P_k^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_k \dots \dots \dots (46)$$

ただし、 M_T , P はそれぞれ格点 k に作用する集中トルクおよび集中荷重とする。

したがって、式(43)と(45)とを組み合わせると、

$$y_{l,n}^* = F_n^* P_{n-1}^* \dots P_k^* F_k^* \dots P_2^* F_2^* P_1^* F_1^* y_{0,1}^* \dots \dots \dots (47)$$

となるから、箱桁全体の構造解析を容易に行うことができる。

初期条件としては、格点0(パネル1の左端)が単純支持のとき、 $y_{0,1}^* = \{\varphi \ T \ Q \ 1\}_{0,1}^*$ となるが、中間支点などに発生する不静定反力 T_r^{s*} , Q_r^{s*} (図-13参照)等を考慮して、次のような状態マトリックス $Y_{0,1}^*$ として表わしておくとう便利である。

$$Y_{0,1}^* = \begin{array}{c|c} \text{初期条件} & \text{中間未知量} \\ \hline \varphi_{0,1}^* \ T_{0,1}^* \ Q_{0,1}^* \ 1 & \dots \ T_r^{s*} \ Q_r^{s*} \ \dots \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \dots \dots \dots (48)$$

そして、これに順次格間行列、格点行列を式(47)に従って乗じていくが、図-13に示すように r 点が剛支点 r のときには、状態マトリックス $Y_{0,r+1}^* = P_r^* Y_{l,r}^* = P_r^* F_r^* \dots Y_{0,1}^*$ を次のように修正しておく。

$$Y_{0,r+1}^* = \begin{array}{c|c} \varphi_{0,1}^* \ T_{0,1}^* \ Q_{0,1}^* \ 1 & \dots \ T_r^{s*} \ Q_r^{s*} \ \dots \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \dots \dots \dots (49)$$

ただし、これらの不静定力 T_r^{s*} , Q_r^{s*} を求めるための中間条件は、剛支点に対して、

$$\left. \begin{array}{l} w_{l,r}^* = 0 \\ \theta_{l,r}^* = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (50)$$

とおけばよい。ここに、 $w_{l,r}^*$, $\theta_{l,r}^*$ は状態マトリックスの第1, 第3行目を表わすものである。

最後に、最右端の格点 n が剛支点のときには、境界条件式は、

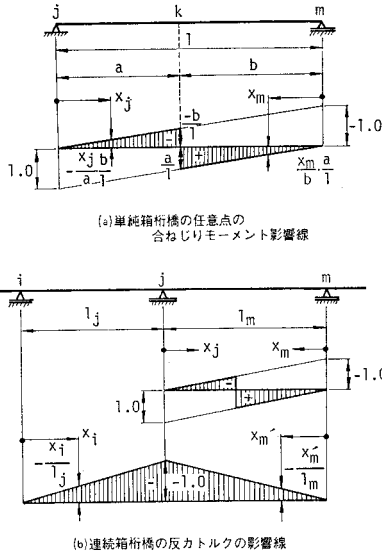
$$\left. \begin{array}{l} w_{l,n}^* = 0 \\ \theta_{l,n}^* = 0 \\ M_{l,n}^* = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (51)$$

と置けばよい。このようにして、未知量 $\varphi_{0,1}^*$, $T_{0,1}^*$, $Q_{0,1}^*$, \dots , T_r^{s*} , Q_r^{s*} , \dots が式(50), (51)の境界条件より求められるから、再びこれより初期ベクトル $y_{0,1}^*$ を組み立てると、式(43), (45)によって各格点の状態ベクトルを決定することができる。したがって、表-4より次元を戻すと求める変位量・断面力が算定されることになる。

b) 直線箱桁橋の合ねじりモーメントの影響線について

直線箱桁橋で斜支持されていない場合には、曲げとねじりは連成しないので、式(44), (46), (48), (49)等の点線で囲んだねじりに関する項は曲げの問題と独立して取扱うことができる。そこで、ねじりに関する要素を分離して解式を求め、Müller-Breslauの定理によって合ねじりモーメントの影響線を求めると、図-15に示すような簡明な図が得られる。

まず、図-15(a)に示す単純箱桁橋の場合は、合ねじりモーメント T に関する基礎式は $dT/dx = -m_T$ となり、これはせん断力に関する基礎式 $dQ/dx = -p$ と類似しているから、任意点 m の合ねじりモーメントの影響線はせん断力の影響線とまったく同様にプロットすればよい。次に、図-15(b)に示す連続箱桁橋の支間内の任意点 m の合ねじりモーメントも、ねじり定数比 $\kappa \geq 30$ では隣接スパンの影響がほとんど及ぶことがないから、単純箱桁橋の場合と同様にプロットすることができる。一方、中間剛支点 j (ねじり角 $\theta_j = 0$) に生ずる反



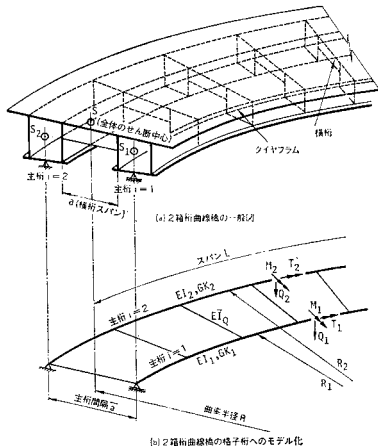
図一15 直線箱桁橋の合ねじりモーメントの影響線

カトルク T_j^s の影響線も、 $\kappa \geq 30$ のとき着目支点到隣接する2つのスパン内のみで図示のように直線変化すると考えてよい。この分布は、文献 9) による厳密な方法と比較しても、誤差は僅少である。

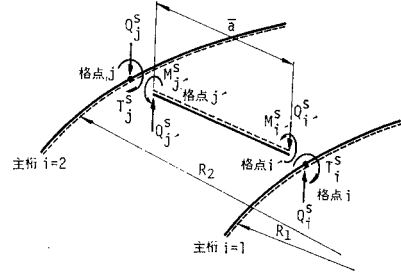
このように曲げとねじりが連成しない直線箱桁橋では、合ねじりモーメントの影響線を容易にかけるから、別に複雑な構造解析をしなくても、手計算によって応力解析がただちに行えることになる。しかし、直線箱桁橋でも斜支支持されている場合、格子箱桁橋の場合、あるいは、曲線箱桁橋や斜支支持曲線箱桁橋のように曲率を有する場合には、曲げとねじりが著しく連成するから、以上に示したような曲げとねじりを同時に考えた構造解析を行う必要がある。

(2) 格子箱桁橋への応用

格子箱桁橋の代表的なものとして、図一16(a) に示す



図一16 曲線格子箱桁橋 (2箱桁曲線橋)



図一17 主桁と横桁の結合点に生ずる格点力

2箱桁曲線橋を示す。この種の構造物では2箱桁断面全体(せん断中心 S) で考えたねじり定数比は $\kappa < 30$ となるから、通常、曲げねじり理論によって厳密な解析が必要であるとされてきている。

しかしながら、文献 10) で明らかにしたように 図一16 (b) に示す格子箱桁橋に置換しても、十分厳密な解析が可能である。すなわち、個々の主桁 $i=1, 2$ は箱桁(せん断中心 S_i) であるため $\kappa > 30$ の条件を満たすから、曲げ剛度 EI_i とねじり剛度 GK_i のみを持ち、これが曲げ剛度 $E\bar{I}_Q (=EI_Q(\bar{a}/a)^3)$, I_Q : 横桁の断面2次モーメント, a : 横桁スパン, \bar{a} : 主桁間隔) の横桁で連結された曲げとねじりを受ける構造物とみなしうる。したがって、この種の格子箱桁橋は本文で取り扱える構造物となり、もとの2箱桁断面に作用する荷重は各主桁 $i=1, 2$ に曲げモーメント M_i , ねじりモーメント T_i , および、せん断力 Q_i として分配されて算定されることになる。このようにして得られた個々の主桁の断面力の中には構造物全体に生ずる曲げねじりの影響が分担されて求められており、格子桁として解析しても、曲げねじり理論で解析しても、結局、同じ結果を与えることになる¹⁰⁾。

格子箱桁橋の解析手順を示すと以下のようである。まず、個々の主桁 ($i=1, 2$) を (1) で述べた伝達マトリックス法で解析する。その際、主桁と横桁の結合点 i または j には、図一17 に示すように格点力 T_i^s, Q_i^s または T_j^s, Q_j^s が生ずるから、式 (48)~(49) に示したようにそれを不静定力として組み入れる。横桁は、通常、曲げ部材であるから、(1) で示した解析式すべてにおいて点線で囲んだ要素を省略し、図一17 に示した格点力 $M_j^s (=T_i^s)$, $Q_i^s (=Q_i^s)$, および、 $M_j^s (=T_j^s)$, $Q_j^s (=Q_j^s)$ を不静定力として導入すると、主桁の場合と同様に伝達マトリックス法によって容易に解析することができる(詳細は文献 19) 参照)。そして、格点では、次の変位の適合条件式

$$\left. \begin{aligned} w_{1,i}^* &= -w_{0,i}^* \\ \theta_{1,i}^* &= -\varphi_{0,i}^* \\ \text{および} \\ w_{1,j}^* &= -w_{1,j}^* \\ \theta_{1,j}^* &= -\varphi_{1,j}^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

を満足するようにすれば、構造物全体の解析を行うことができる。これらの解析方法の詳細も文献 19) で述べたのとほぼ同様であるので、ここでは省略する。

4. 数値計算例

2., 3. で述べた応力解析式の妥当性を調べるために、以下では具体的に数値計算結果を示し、あわせて箱桁橋の応力特性に関して種々な考察を行う。

(1) 直線箱桁橋 (1 箱桁橋)

a) TT-43 あるいは L-20 荷重を受ける単純箱桁橋
 まず、もっとも簡単な場合として、図-18 に示す断面を有し、スパン $l=50.0\text{m}$ の単純箱桁橋の応力解析を行う。ただし、活荷重としては従来の L-20 荷重のほか、最近建設省より通達として出された TT-43 荷重を載荷して、両者による応力値を比較してみる。

図-18 の箱桁断面の b/h の値は約 2.27 であり、これに対するパラメーター η, ξ, λ, χ を計算すると、図中に示したような値となる。これより、本断面のそりねじり特性は pattern B 型に属するものと考えられる。したがって、応力計算は正確なパラメーター値を使った場合 (厳密解) と式 (40) の pattern B 型に対する概略値を使った場合 (近似解) の 2 つに対して比較してみる。

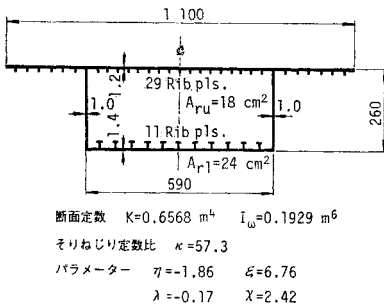


図-18 偏平な箱桁断面の例 (寸法: cm)

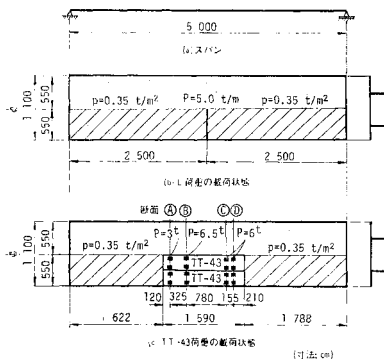


図-19 単純箱桁橋と載荷状態

表-6 単純箱桁橋の応力計算例
 (図-19 参照, () 内の値は簡略式によるもの)

荷重	着目断面	応力度 (kg/cm²)			
		σ_b	σ_w	τ_b	τ_{s+w}
L 荷重	径間中央	301.1	12.4(34.4)	26.4	29.8(37.0)
TT-43 荷重 (L 荷重含む)	Ⓐ	325.3	5.1(13.9)	84.8	47.2(50.7)
	Ⓑ	358.5	10.6(28.7)	61.7	45.0(50.9)
	Ⓒ	373.6	11.3(30.4)	11.7	23.3(28.5)
	Ⓓ	364.8	11.3(30.4)	-34.5	-3.4(3.9)

さて、図-19 は載荷状態を示したものであるが、図-19(b) は L 荷重を示し、図-19(c) は 2 台の TT-43 荷重の重心がスパン中央にくるように載荷したものである。

これらの荷重状態に対する各種応力の計算値を表-6 に示す。この表で () 内に示す近似解による値は、上述したようにパラメーターの値として式 (40) の概略値を用いた場合で、当然のことながらいくぶん安全側に計算されている。予備設計であり具体的な断面寸法が決まっていなかったときには、式 (40) のパラメーター値はこのように若干安全側に計算されるものであるが、簡易計算式として役立つものと思われる。

次に、L 荷重と TT-43 荷重とを載荷した場合のそりねじりによる応力値 σ_w, τ_w について比較すると、両者にあまり大きい差異がないようである。TT-43 荷重は L-20 荷重よりも全体の荷重強度が大きいため曲げによる垂直応力度 σ_b は大きいですが、輪荷重が分散しているため、ねじりモーメントは輪荷重のところで小さく、せん断応力 τ_w も予想したほど大きくならない。

b) 連続箱桁橋

連続箱桁橋の例として、今度は図-20 に示す $b/h \approx 1.28$ の比較的縦長断面を示す。この断面では、パラメーター値は式 (40) に示したように pattern A 型に属するものであるが、正確なパラメーター値を図中に示した。

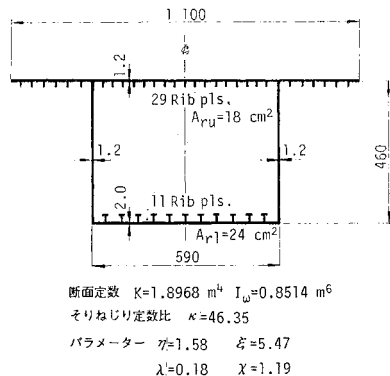


図-20 縦長断面の例 (寸法: cm)

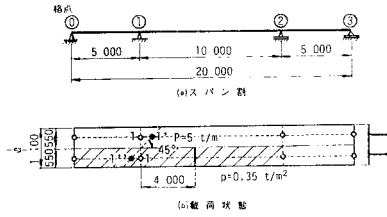


図-21 連続箱桁橋

表-7 連続箱桁橋中間支点の応力計算例
(図-21 参照, () 内の値は簡略式によるもの)

応力度(kg/cm ²)	σ_b	σ_w	τ_b	τ_{s+w}
着目断面				
中間支点 ①	-224.0	33.5(72.4)	-74.6	-27.6(-55.5)
中間支点 ②	-176.0	23.2(51.3)	-93.8	-49.6(-67.9)
斜支持中間支点 ①'	-212.8	30.2(65.8)	-72.3	-8.5(-33.6)

図-21(a)はこの連続桁のスパン割を示したものである。支間内の応力については a) で詳しく調べたので、この場合は図-7でも明らかにしたように支点 1, 2 近傍の応力を求めることが重要である。それで、荷重状態としては図-21(b)に示すように、L 荷重のみを載荷することにする。さらに、斜支持されている場合の影響を調べるために、支点 1 のみが図-20(b)で 1', 1'' のように桁軸線に対して 45° 傾いている斜支持連続箱桁橋としての応力も算定することにした。

表-7 はこれらの計算結果を示したものである。表中で () 内に示す数値は、式 (40) で pattern A 型としてのパラメーターの概略値を用いたものであり、傾向としては単純箱桁橋と同様である。また、直橋と斜橋とのそりねじりによる応力 σ_w, τ_w を比較すると、両者はそれほど大差はないようである。一般に斜橋は直橋より大きいねじりモーメントを受けるものであるが、 ΔT が 2 つの支点で分担されるので、そりねじりによる応力 σ_w, τ_w

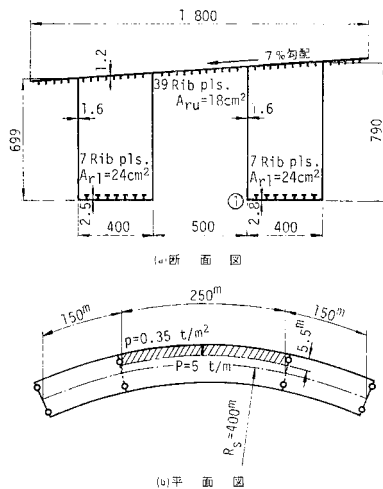


図-22 曲線格子箱桁橋の例

もそれほど大きくならないからであると思われる。

(2) 曲線格子箱桁橋 (2 箱桁橋)

格子箱桁橋でしかも曲げとねじりが著しく連成する例として図-22 に示す 2 箱桁曲線橋についての計算結果を以下に示す。この曲線箱桁橋に対しては文献 20) で全橋断面を 1 体とした詳細な数値計算結果が報告されているので、ここでは図-15 に示したような曲線格子桁に置換して解析し、それに本文の公式 (36)~(40) を適用した結果とを比較して考察を行うことにする。

まず各主桁についての断面定数およびパラメーター値を計算したものを表-8 に示す。もちろん各主桁は縦長断面であるから、pattern A 型に対応するものである。

荷重状態としては各種のものを考えるべきであるが、ここでは簡単のために図-22(b)に示すように中央径間のみに L 荷重が載荷する場合に限定することにした。

図-23(b)はこのときの外桁に対して計算されたねじりモーメント $T(x)$ の変化図である。当然のことながら、この種の曲線橋では曲げとねじりが著しく連成するために直線の連続箱桁橋に比べると相当異なった分布をする。しかしながら、中間支点および支間中央では明確なねじりモーメントのステップ $\Delta T_1, \Delta T_2$ が現われて

表-8 断面定数とパラメーター

項目	主 桁	内 桁	外 桁
主	断面 2 次モーメント $I(m^4)$	4.252	5.334
	純ねじり定数 $K(m^4)$	2.350	2.665
	そりねじり定数 $I_w(m^4)$	3.883	5.547
桁	パラメーター		
	η	1.79	1.74
	ξ	1.93	1.72
	λ	0.57	0.63
	χ	1.56	1.49
横	断面 2 次モーメント $I_Q(m^4)$	0.026	
桁	横桁スパン $a(m)$	5.00	
	主桁間隔 $\bar{a}(m)$	9.00	

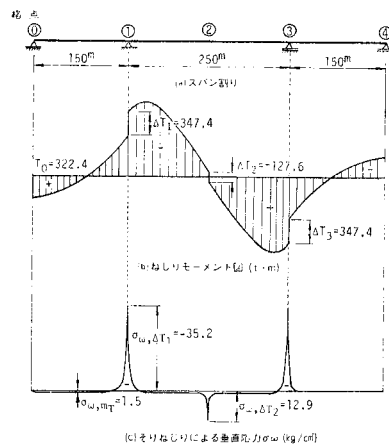


図-23 ねじりモーメント図とそれに伴って発生するそりねじり垂直応力 σ_w 。

表一9 曲げねじり理論（全橋断面1体）と格子桁理論（そり応力を含む）の比較

着目断面	応力度 (kg/cm ²)	垂 直 応 力 度				せ ん 断 応 力 度			
		格 子 桁 理 論		曲げねじり理論	格 子 桁 理 論		曲げねじり理論		
		σ_b	σ_w		τ_b	τ_{b+s+w}			
径 間 中 央	362.3	14.4 (27.5)	376.7 (389.8)	395.4	- 3.2	- 9.6 (-12.8)	-12.8 (-16.0)	- 4.4	
中 間 支 点	-420.8	-33.7 (-69.3)	-454.5 (-490.1)	-458.2	-18.3	-81.8 (-91.2)	-100.1 (-109.5)	-99.6	

おり、これが原因となってそりねじり応力が発生することになる。そこで、本文の式 (36)~(40) が曲線箱桁橋に対しても準用できるものとして、そりねじり応力を算定してみる。断面内の着目点としては 図一22(a) に示したように最大応力が生ずる点1に着目する。すると、そりねじりによる垂直応力 σ_w のスパン方向の変化図は、 図一23(c) に示すようにプロットすることができる。

このようにして得られた垂直応力 σ_w を曲線格子桁理論によって得られる曲げ応力 σ_b に加算すると、この曲線格子桁橋のそりを含んだ垂直応力度が求められる。

表一9 はこれらの応力を総括したものである。

表一9 から、本文の簡易計算法を適用すると、格子桁理論によっても全橋断面を一体とした曲げねじり理論によってもほとんど同じ結果が得られることがわかる。また、() 内の値はパラメーターとして式 (40) による概略値を用いた場合であるが、いずれも安全側の値として応力を評価できることになっており、概算設計等において有効であるものと思われる。

以上のように、いずれの場合も良好な結果が算定されており、本文の提案公式 (36)~(40) は曲線箱桁橋に対しても広く利用できることが明らかにできたように思われる。

5. 結 言

本文は、従来、繁雑であった箱桁橋のそりねじりによる応力をできるだけ簡素な算定公式で求めることを主眼にして研究したものである。解析の出発点としては厳密な曲げねじり理論をもとにして行ったが、そりねじり定数が比較的大きい1箱桁断面を対象とした断面力に関するパラメトリック解析によると、そりねじり応力 σ_w はおもに着目断面のねじりモーメント T のステップ量 ΔT に比例することが明らかにできた。

このような事実をもとにして、そりねじり応力の簡易計算式を誘導することができた。それによると、着目断面のねじりモーメント T の分布状態と断面形状 (b/h) によって左右される4種のパラメーター η, ξ, λ, χ がわかれば、そりねじりによる応力状態が容易に算定できることになる。それで、あまり資料の数は多くなく今後も検討する余地が多分にあるが、14の実橋をもとにパラメーターの調査を行い、それらに対する一応の概略的な提案値も示した。従来、この種の問題に対しては、そりモーメント M_w やそりねじりモーメント T_w ならびにそれに関連した断面諸定数を算定する必要があったが、本文の方法によると簡明な単純ねじり理論を基礎とすればよく、それに伴って設計計算手数も著しく軽減できることになるものと考えている。

そこで、単純ねじり理論による各種の形式の箱桁橋、すなわち、直橋および斜橋あるいは曲線橋を含む ① 単純箱桁橋、② 連続箱桁橋、③ 格子箱桁橋の伝達マトリ

付録一1 実橋の各種パラメーターの調査結果

桁 No.	スパン割 (m)	基 本 寸 法 (cm)							パ ラ メ ー タ ー				
		h	b	a	$t_u(\bar{E}u)$	$t_w(\bar{E}w)$	$t_l(\bar{E}l)$	b/h	η	ξ	λ	χ	ϵ
1	100+150+100	630	450	850	1.4(2.4)	1.6(1.6)	1.9(2.3)	0.714	2.02	3.30	0.38	1.81	73.3
2	80+140+140+80	600	600	1095	3.6(4.5)	1.9(1.9)	3.8(4.2)	1.000	3.16	3.22	0.61	0.86	42.9
3	85	380	434	1094	1.2(1.7)	1.3(1.3)	3.8(4.0)	1.142	2.19	2.30	0.59	0.80	45.1
4	85	380	434	1107	1.2(1.7)	1.3(1.3)	3.2(3.4)	1.142	2.19	2.40	0.57	0.93	47.0
5	75+55	260	300	834	1.5(2.5)	1.6(1.6)	2.9(3.5)	1.154	2.09	2.30	0.57	1.08	57.4
6	100+150+100	366	450	850	1.4(2.4)	1.3(1.3)	2.2(2.6)	1.230	2.00	4.69	0.27	1.11	104.1
7	75+55	260	330	626	1.2(2.0)	1.1(1.1)	1.7(2.0)	1.269	1.81	5.08	0.22	1.25	115.4
8	55+90+55	350	450	840	1.2(1.6)	1.4(1.4)	1.7(2.5)	1.286	0.21	6.39	0.02	1.79	78.0
9	58+115+58	470	750	1450	1.4(2.3)	1.4(1.4)	2.8(3.2)	1.596	1.18	5.06	0.15	1.10	39.0
10	70+86+70	242	450	952	1.8(2.2)	1.2(1.2)	0.9(1.1)	1.860	-3.09	6.62	-0.29	3.09	103.0
11	80+140+140+80	300	600	1095	2.2(3.1)	1.3(1.3)	2.2(2.6)	2.000	0.94	7.96	0.07	1.18	106.2
12	55+90+55	200	450	840	1.2(1.4)	1.0(1.0)	1.2(1.4)	2.250	-2.71	7.14	-0.24	2.87	87.3
13	34	197	450	850	1.3(2.0)	1.0(1.0)	1.2(1.7)	2.284	-2.34	6.48	-0.22	2.60	49.0
14	81+216+81	300	875	1690	1.2(1.8)	1.4(1.6)	1.2(1.6)	2.917	-4.05	4.46	-0.57	2.77	41.3

付録—2 格間行列の要素 f_{ij}^*

項 目		直 線 桁		曲 線 橋 (ただし, $\phi_k = l_k/R_k$, $\alpha_k = GK_k/El_k$)	
一般項	f_{12}^*	$= -f_{36}^* = -\frac{l_k}{l_c}$	$= -f_{36}^* = -\frac{R_k}{l_c} \sin \phi_k$		
	f_{13}^*	$= f_{46}^* = 0$	$= f_{46}^* = \frac{R_k}{l_c} (1 - \cos \phi_k)$		
	f_{14}^*	$= f_{35}^* = 0$	$= f_{35}^* = \frac{El_c R_k^2}{2 GK_k l_c^2} (1 + \alpha_k) (\sin \phi_k - \phi_k \cos \phi_k)$		
	f_{15}^*	$= -f_{26}^* = -\frac{El_c l_k^2}{2 I_k l_c^2}$	$= -f_{26}^* = -\frac{El_c R_k^2}{2 GK_k l_c^2} \{(1 + \alpha_k) \phi_k \sin \phi_k + 2 \cos \phi_k - 2\}$		
	f_{16}^*	$= \frac{I_c l_k^3}{6 I_k l_c^3}$	$= \frac{El_c R_k^3}{2 GK_k l_c^2} \{(3 + \alpha_k) \sin \phi_k - (1 + \alpha_k) \phi_k \cos \phi_k - 2 \phi_k\}$		
	f_{34}^*	$= f_{35}^* = 0$	$= -f_{35}^* = -\frac{El_c R_k}{2 GK_k l_c} (1 + \alpha_k) \phi_k \sin \phi_k$		
f_{ij}^*	f_{35}^*	$\frac{I_c l_k}{I_k l_c}$	$\frac{El_c R_k}{2 GK_k l_c} \{(1 + \alpha_k) \phi_k \cos \phi_k - (1 - \alpha_k) \sin \phi_k\}$		
	f_{34}^*	$\frac{El_c l_k}{GK_k l_c}$	$\frac{El_c R_k}{2 GK_k l_c} \{(1 - \alpha_k) \sin \phi_k + (1 + \alpha_k) \phi_k \cos \phi_k\}$		
	荷重	p^*	m_T^*	p^*	m_T^*
荷重	f_{17}^*	$\frac{I_c l_k^4}{24 I_k l_c^4}$	0	$\frac{El_c R_k^4}{2 GK_k l_c^3} \{2(2 + \alpha_k)(1 - \cos \phi_k) - (1 + \alpha_k) \phi_k \sin \phi_k - \phi_k^2\}$	$-\frac{El_c R_k^3}{2 GK_k l_c^2} (1 + \alpha_k) \{2(1 - \cos \phi_k) - \phi_k \sin \phi_k\}$
	f_{37}^*	$-\frac{I_c l_k^3}{6 I_k l_c^3}$	0	$-\frac{El_c R_k^3}{2 GK_k l_c^2} \{(3 + \alpha_k) \sin \phi_k - (1 + \alpha_k) \phi_k \cos \phi_k - 2 \phi_k\}$	$\frac{El_c R_k^2}{2 GK_k l_c} (1 + \alpha_k) (\sin \phi_k - \phi_k \cos \phi_k)$
項	f_{37}^*	0	$-\frac{El_c l_k^3}{2 GK_k l_c^2}$	$-\frac{El_c R_k^3}{2 GK_k l_c^2} (1 + \alpha_k) \{2(1 - \cos \phi_k) - \phi_k \sin \phi_k\}$	$-\frac{El_c R_k^2}{2 GK_k l_c} \{(1 + \alpha_k) \phi_k \sin \phi_k - 2 \alpha_k (1 - \cos \phi_k)\}$
	f_{47}^*	0	$-\frac{l_k}{l_c}$	$-\frac{R_k^2}{l_c^2} (\phi_k - \sin \phi_k)$	$-\frac{R_k}{l_c} \sin \phi_k$
f_{i7}^*	f_{37}^*	$-\frac{l_k^2}{2 l_c^2}$	0	$-\frac{R_k^2}{l_c^2} (1 - \cos \phi_k)$	$\frac{R_k}{l_c} (1 - \cos \phi_k)$
	f_{67}^*	$-\frac{l_k}{l_c}$	0	$-\frac{R_k}{l_c} \phi_k$	0

ックス法による統一的な構造解析法について述べ、また、単純ねじりモーメントの特性について考察した。

さらにこれらの橋梁形式に対する具体的な数値計算例を二、三示し、本文の簡易計算法の適用性を検討するとともに各種の形式の箱桁橋にも本文の簡易公式が応用できることを明らかにすることができたように思われる。

参 考 文 献

- 1) 小松定夫：薄肉構造物の理論と計算，山海堂，1969。
- 2) 小西一郎：鋼橋（設計編 I，II），丸善，1975。
- 3) Heins, C.P. : Bending and Torsional Design in Structural Members, Lexington Books, 1975.
- 4) Kollbrunner, C.F. and Hajin, N. : Dünwandige Stäbe, Bd I, Springer-Verlag, 1972.
- 5) 道路橋示方書・同解説，日本道路協会，1973.2。
- 6) Miranda, F.DE. and Mele, M. : Some basic design principles for steel box girder bridges, Steel box girder bridges, Proc. of International Conference organized by I.C.E., The Institution of Civil Engineers, London, pp. 21~31, 1973.
- 7) Flint, A.R. and Horne, M.R. : Conclusions of research programme and summary of parametric studies, Steel box girder bridges, Proc. of International Conference organized by I.C.E., The Institution of Civil Engineers, London, pp. 173~191, 1973.
- 8) Inquiry into the Basis of Design and Method of Erection of Steel Box Girder Bridges, Interium design and workmanship rules, Part I and II, London, Her Majesty's Stationary Office, 1973.

- 9) 中井 博・事口寿男：伝達マトリックス法による曲げねじりを受ける薄肉直線桁橋の解析と断面力，変形量に関する研究，土木学会論文報告集，No. 233, pp. 50~70, 1975.1.
- 10) 小松定夫・中井 博・田井戸米好：ねじり定数比とねじり曲げ剛比から考察した曲線桁橋設計計算法への一提言，土木学会論文報告集，No. 224, pp. 55~66, 1974.4.
- 11) Nakai, H. and Heins, C.P. : Analysis Criteria for Curved Bridges, Proc. of ASCE, Vol. 103, ST 7, pp. 1419~1427, July 1977.
- 12) Kersten, R. : Das Reduktion Verfahren in Baustatik, Springer-Verlag, 1962.
- 13) Pestel, C.E. and Leckie, A.E. : Matrix Method in Elastomechanics, McGraw-Hill, 1963.
- 14) 成岡昌夫・遠田良喜：伝達マトリックス法，日本鋼構造協会編，培風館，1971。
- 15) Dabrowski, R. : Gekrümmte dünnwandige Träger, Springer-Verlag, 1968.
- 16) Vlasov, V.Z. : Thin Walled Elastic Beams, National Science Foundation, Washington, D.C., 1961.
- 17) 小松定夫・中井 博・向山寿孝：斜支持箱桁橋の静的解析，土木学会論文報告集，No. 189, pp. 27~38, 1971.5.
- 18) 小松定夫・中井 博・中西正昭：斜支持曲線箱桁橋の静的特性の解析，土木学会論文報告集，No. 193, pp. 1~12, 1971.9.
- 19) 中井 博・谷田玲二・奥村敏久：伝達マトリックス法の不整格子桁橋の解析への応用と模型実験，土木学会論文報告集，No. 243, pp. 7~18, 1975.11.
- 20) 中井 博・事口寿男・谷 俊寛：任意荷重を受ける薄肉曲線桁橋のマトリックス構造解析，土木学会論文報告集，No. 255, pp. 1~15, 1976.11.