

はり理論による鉄筋およびプレストレスト コンクリートばかりの弾塑性解析

ELASTO-PLASTIC ANALYSIS OF REINFORCED
AND PRESTRESSED CONCRETE BEAMS

太田 俊昭*・中沢 隆雄**
By Toshiaki OHTA and Takao NAKAZAWA

1. 序

近年、経済的かつ合理的な設計法としての限界状態設計法や極限設計法の認識が深まり、コンクリート構造の分野においても、その理論体系の一般的確立と早期実用化が強く望まれるようになってきた。すでに諸外国においては、ヨーロッパコンクリート委員会(C.E.B.)、国際プレストレスコンクリート協会(F.I.P.)、アメリカコンクリート学会(A.C.I.)などによって、設計施工指針が発表されており、また、わが国においても、土木学会コンクリート委員会のもとに、終局強度設計小委員会が設置され、同分野に関する調査研究が鋭意進められているのが現状である。

この分野に関する研究は数多くあり、古くは 1937 年の Whitney¹⁾、そして 1952 年の Hognestad²⁾ らによる偏心圧縮荷重を受ける RC 柱の研究が挙げられ、いずれも終局時の応力分布が直線もしくは放物線で理想化できるという仮定を取り入れている。この方法は、Moody³⁾、Viest⁴⁾、Zwoyer⁵⁾ らに踏襲され、それぞれの実験結果に照し合わせて、曲げせん断の耐力式が求められている。斜引張破壊をおもな対象とした研究には、破壊面を仮定して、破壊面での力のつり合いより終局耐力式を導いた Ruble⁶⁾、Broms⁷⁾ らの研究が挙げられ、また、せん断力と曲げモーメントの相互作用曲線を対象としたものとしては、Bernhardt⁸⁾、Bresler⁹⁾ らの理論的実験的研究が見受けられる。また、Kani¹⁰⁾ はせん断破壊機構の解明に、アーチ作用と歯歯作用の考え方を導入した独自の理論を提案し、せん断アーム比による破壊形式の類別化を試みている。

一方、PC 柱についても例は多く、応力分布を理想化した方法による Billet¹¹⁾ の曲げせん断耐力に関する研究

や、斜引張破壊に力点を置いた Kar¹²⁾ の研究、Macgregor¹³⁾、Bobrowski¹⁴⁾、Bishara¹⁵⁾ らの実験を主体とした、曲げモーメントとせん断力の相互作用曲線を求めた研究があり、さらにアーチアクションを PC 柱に応用した Lorentsen¹⁶⁾ の研究、応力-ひずみを線形分布に仮定し、ひびわれの進展の安定性を論じた Oladapo¹⁷⁾ の研究、あるいはトラス理論を用いた Leonhardt¹⁸⁾ の研究などが挙げられる。

終局耐力に関する以上の研究を一步進めて、破壊に至る変形挙動を取り扱ったものとしては、曲げと軸力が同時に作用する RC 柱の非線形不安定問題を解いた Gurfinkel¹⁹⁾ の研究、Sherbourne²⁰⁾ の PC 連続柱を対象とした研究、および山崎・太田の補正エネルギー法に基づく、軸力と曲げモーメントを受ける RC 柱の破壊に関する研究²¹⁾ と、太田・藤瀬の曲げ破壊に及ぼす載荷速度の影響を論じた研究²²⁾、さらには太田・中沢の鉄筋モルタル柱の曲げせん断破壊挙動を言及した研究²³⁾ などが挙げられる。また、最近では、種々の力学モデルを用いた Ngo²⁴⁾、Nilson²⁵⁾、黒正²⁶⁾、磯畠²⁷⁾、六車²⁸⁾、児島²⁹⁾、中沢³⁰⁾ らの一連の有限要素法による解析研究が見受けられ、それぞれ新しい知見を提供している。

以上の諸研究から明らかにされたように、コンクリート構造物の破壊挙動は、構造の種類はもちろんのこと、鉄筋や PC 鋼線の量と形状、配筋の位置等の部材断面諸量、コンクリートの性質、さらには載荷の条件などによって、異なる性状を呈するので、破壊の定義も曲げ破壊、せん断引張破壊、せん断圧縮破壊、ボンド破壊あるいは斜引張破壊などきわめて多様である。実際の柱の破壊は、これらの中間もしくは、これらが組み合わされた形で生じるので、それらを包括しうるような一般的な理論の確立が、極限設計法の実用化を促進するうえで、きわめて重要であるといえる。

本研究は、このような組み合わされた形の破壊問題のうち、特に RC および PC 柱の曲げとせん断破壊が複合

* 正会員 工博 九州大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 宮崎大学助教授 工学部土木工学科

された場合に力点を置き、それに対処しうる解析手法を提案して、極限設計法の一助にせんとするものである。

さて、この種の破壊の解析手法としては、はり理論を採用したが、本来はり理論は、線材を対象とするものであり、ひびわれ破壊面が二次元的な広がりをする破壊現象を処理するには限界があるとされ、これまであまり顧みられていなかった。著者らは、Kani の櫛歯機構等のはく離作用に着目し、はく離時に生じるみかけ上の付加ひずみが、その時の力学条件より簡単に決定できることを見い出し、この力学的に等価な付加ひずみの概念を用いれば、二次元的な破壊現象を、はり理論で容易に説明することが可能であると考えた。この手法を、在来の断面分割法に基づく弾塑性はり理論^{21), 22), 31)}に導入すれば、任意の軸力と曲げモーメントの組み合わせ負荷を受けるはりの、破壊挙動ならびに終局強度が、荷重増分法により数値的に推定可能となり、しかも、はり理論の特色である簡易性と実用性（部材の断面諸量、鉄筋量、材質が任意で、任意の骨組構造物に適用できる点）がそのままいかされることになる。

著者らは過去5年間にわたり、RC単純桁およびPC単純桁を対象にして、破壊形式のめやすとされている、いわゆるせん断アーム比と主鉄筋比ならびにPC鋼線比を種々変えて30ケース（52体）の破壊試験を行ってきた。本研究は、これらの個別的に行って來た破壊試験の結果を包括し、終局強度、たわみ、ひずみ等についてはり理論解と対照することにより、さらにはまた、この分野における有力な計算手法として最近脚光を浴びてきた有限要素法による数値解析結果と比較することにより、はり理論の妥当性、有用性の検討、吟味、および問題点の指摘とその改良法の提案、示唆などを多面的に行い、本理論の一般性、実用性を明らかにし、あわせて極限設計法確立の一助にせんとするものである。

2. 基礎理論

（1）弾塑性はり理論

本解析法においては、次のような仮定を採用する。

(i) 曲げ引張ひずみがコンクリートの引張限界ひずみに達したとき、曲げひびわれが発生する。ただし、桁の長さ方向の曲げひびわれ間隔は一定とみなす。

(ii) 曲げひびわれが成長し、桁に櫛歯構造が発生すれば、各コンクリート櫛歯は、鉄筋の応力差（張力差）によって曲げられる片持ばかりとみなすものとする。

(iii) 桁の断面は、曲げひびわれ発生前では、平面保持の法則が成り立つが、曲げひびわれ発生後では、コンクリート櫛歯のたわみによる、みかけ上のひずみが付加

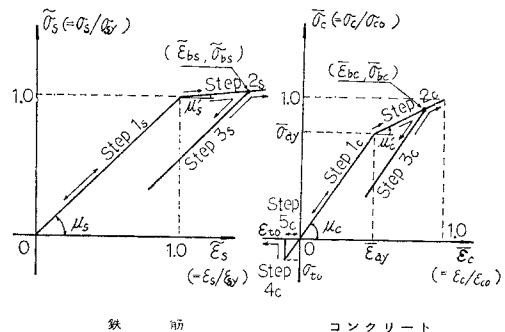


図-1 理想化した鉄筋コンクリートの応力-ひずみ曲線

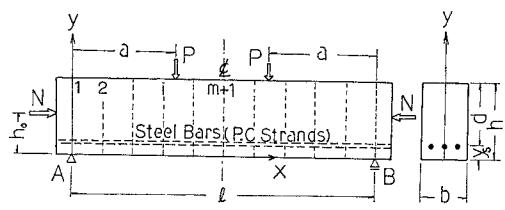


図-2 漸増荷重を受けるRC(PC)桁

的に生じるものとする。

(iv) コンクリート櫛歯の付根の曲げ引張応力が、コンクリートの引張限界応力に達したとき、櫛歯ははく離する。

(v) はく離後は、はく離部の鉄筋の張力差が消滅するとし、これと力学的に等価な付加ひずみがみかけ上存在すると考える。

(vi) 鉄筋およびコンクリートの応力-ひずみ曲線を、図-1のように理想化する。

以上の仮定に基づいて、図-2に示す桁の断面力に関するつり合い式を求めれば、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \int_0^h \sigma_{ci} dA + \sum \sigma_{si} A_s \\ -N_i h_0 + M_i &= -\int_0^h \sigma_{ci} y dA - \sum \sigma_{si} y_s A_s \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

ここに、

N_i, M_i : 断面 i に作用する軸力と曲げモーメント

h_0 : 桁下縁から軸力が作用する点までの高さ

σ_{ci}, σ_{si} : 断面 i におけるコンクリートおよび鉄筋の応力

h : 桁の高さ

y_s : 桁下縁から鉄筋中心までの高さ

y : 桁下縁からコンクリート断面の任意点までの高さ

dA : 桁断面の微小面積

A_s : 鉄筋の断面積

式(1)の断面力 N_i と M_i に対する曲率 ϕ_i と図心

点のひずみ ϵ_0 の算定公式誘導は、すでに文献 21), 22) などで詳しく述べられているが、ここで問題とする付加ひずみの導入手順に対する理解を容易にするため、以下にその骨子のみ略述する。

すなわち、桁断面 i の曲げひびわれ発生前のひずみ分布を、図-3 のように仮定し、断面を高さ方向に n 等分すれば、分割点 $k(k=1, 2, \dots, n+1)$ におけるコンクリートのひずみ ϵ_{ci_k} は、

$$\epsilon_{ci_k} = (1 - \bar{y}_k) \epsilon_{li} + \bar{y}_k \epsilon_{ui} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

ここに、

$\epsilon_{ui}, \epsilon_{li}$: 断面 i におけるコンクリート上、下縁のひずみ
 y_k : コンクリート下縁から分割点 k までの高さ
 $\bar{y}_k = y_k/h$

同様にして、鉄筋のひずみ ϵ_{si} は、

$$\epsilon_{si} = (1 - \bar{y}_s) \epsilon_{li} + \bar{y}_s \epsilon_{ui} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

また、桁断面 i の鉄筋応力 σ_{si} および高さ k のコンクリート応力 σ_{ci_k} は、次の一般式²¹⁾で示される。

$$\sigma_{si} = \nu_{si} (\epsilon_{si} - \epsilon'_{si}), \quad \sigma_{ci_k} = \nu_{ci_k} (\epsilon_{ci_k} - \epsilon'_{ci_k}) \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

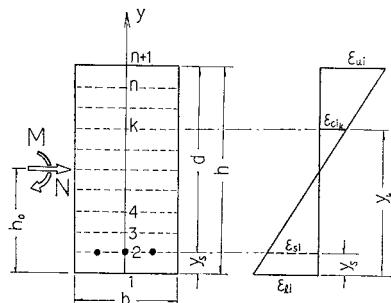


図-3 断面の分割およびひずみ分布

ここに、 ν, ϵ' は 図-1 の無次元化した $\sigma-\epsilon$ 関係を用いて、各応力状態の内容を示せば、それぞれ表-1 のようになる。

さて、荷重が増大し、桁下縁部のコンクリートのひずみが引張限界ひずみを越えて、曲げひびわれが発生すれば、桁は図-4 に示すようないわゆる櫛歯状構造に移行する。このとき、コンクリート櫛歯は、鉄筋の張力差 $\Delta T_i (= T_{i+1} - T_i)$, T_{i+1}, T_i : 断面 $i+1$ および断面 i における鉄筋の引張力) を受ける短い片持ばりと考えられる(仮定 (ii))。このコンクリート櫛歯 ④ のたわみ $\delta_{④}$ とすれば、 $\delta_{④}$ は 図-5 を参照して、

$$\delta_{④} = \Delta T_i S_i^3 / 3 E_c I_{ci} \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

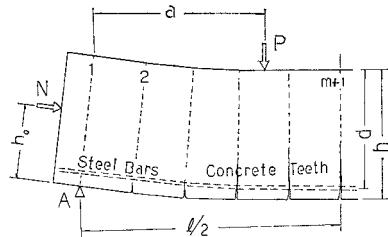


図-4 櫛歯構造への移行

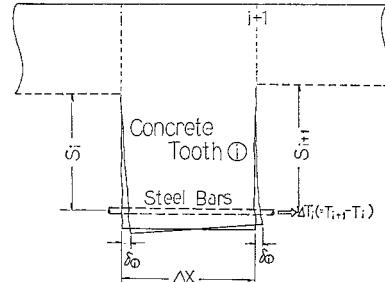


図-5 櫛歯の変形

表-1 応力-ひずみ方程式に関する ν と ϵ'

Steel				
Condition	Step	$\bar{\nu}_{si}$	$\bar{\epsilon}_{si}'$	$\bar{\epsilon}_{bs}, \bar{\sigma}_{bs}, W_s$
if ($0 \leq \bar{\epsilon}_s \leq 1, W_s = -1$) Go To Step 1 _s	1 _s	1.0	0	
if ($\bar{\epsilon}_s \geq \bar{\epsilon}_{bs} \geq 1$) Go To Step 2 _s	2 _s	μ_s'	$1 - 1/\mu_s$	$\bar{\epsilon}_{bs} = \bar{\epsilon}_s, \bar{\sigma}_{bs} = \mu_s'(\bar{\epsilon}_{bs} - 1) + 1, W_s = 1$
if ($\bar{\epsilon}_s \leq \bar{\epsilon}_{bs}, W_s = 1$) Go To Step 3 _s	3 _s	1.0	$\bar{\epsilon}_{bs} - \bar{\sigma}_{bs}/1.0$	
Initial Condition $W_s = -1, \bar{\epsilon}_{bs} = 1.0, \bar{\sigma}_{bs} = 1.0$				
Concrete				
Condition	Step	$\bar{\nu}_{ci}$	$\bar{\epsilon}_{ci}'$	$\bar{\epsilon}_{bc}, \bar{\sigma}_{bc}, W_c, V_c$
if ($\bar{\epsilon}_{to} \leq \bar{\epsilon}_c \leq \bar{\epsilon}_{ay}, W_c = -1, V_c = -1$) Go To Step 1 _c	1 _c	μ_c	0	$\bar{\epsilon}_{bc} = \bar{\epsilon}_c, \bar{\sigma}_{bc} = \mu_c(\bar{\epsilon}_{bc} - \bar{\epsilon}_{ay}) + \bar{\sigma}_{ay}, W_c = 1$
if ($\bar{\epsilon}_c > \bar{\epsilon}_{bc} \geq \bar{\epsilon}_{ay}$) Go To Step 2 _c	2 _c	μ_c'	$\bar{\epsilon}_{ay} - \bar{\sigma}_{ay}/\mu_c$	
if ($\bar{\epsilon}_c < \bar{\epsilon}_{bc}, W_c = 1$) Go To Step 3 _c	3 _c	μ_c	$\bar{\epsilon}_{bc} - \bar{\sigma}_{bc}/\mu_c$	
if ($\bar{\epsilon}_c \leq \bar{\epsilon}_{to}, W_c = -1$) Go To Step 4 _c	4 _c	0	0	$V_c = 1$
if ($\bar{\epsilon}_{to} < \bar{\epsilon}_c \leq 0, W_c = -1, V_c = 1$) Go To Step 5 _c	5 _c	0	0	
Initial Condition $W_c = -1, V_c = -1, \bar{\epsilon}_{bc} = \bar{\epsilon}_{ay}, \bar{\sigma}_{bc} = \bar{\sigma}_{ay}$				
W_s, W_c and V_c represent the non-dimensional values for discrimination of the step.				

で求められることになるが、特に二点集中荷重を受ける単純桁の場合には、 $N=0$ であり、桁全体で次のようになる。

$$U = \int_0^l \int \phi dM dx \quad \dots \dots \dots (17)$$

このとき、桁中央点のたわみ w_c は、変分原理より次の無次元式で与えられる。

$$\bar{w}_c = \frac{1}{2} \phi_{yc} l \int_0^l f(\bar{x}) d\bar{x} \quad \dots \dots \dots (18)$$

ここに、

ϕ_{yc} ：初期曲げひびわれ発生時の曲率

$$\bar{w}_c = w_c/l, f(\bar{x}) = \bar{\phi} \bar{x}, \bar{x} = x/l, \bar{\phi} = \phi/\phi_{yc}$$

l ：桁のスパン長

以上の諸式を用いれば、通常の弾塑性はり理論に準じた手法により、漸増荷重を受ける場合の R C 桁および P C 桁の、ひずみ、応力分布やたわみなどが、破壊に至るまで連続的に追跡でき、この解析手順を図示したもののが図-7 のフローチャートである。

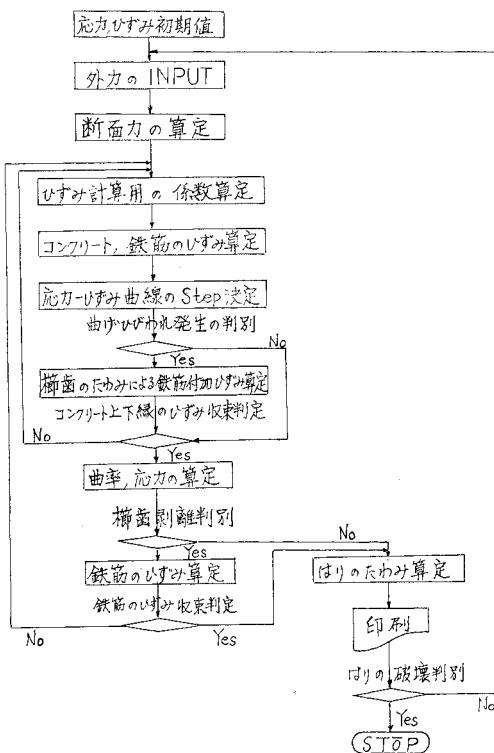


図-7 破壊過程解析のフローチャート

(2) 有限要素法の解析モデル

R C 桁の破壊現象を数値的に追跡解明する 1 つの有力な方法として、有限要素法^{24)~27)}があげられる。著者らも以下に述べる二次元解析モデルを用いて、有限要素法による弾塑性数値解析を行い、はり理論の解析例との比

較検討を試みるものとする。

解析はひずみ増分理論によるものとし、コンクリートの圧縮領域での非線形力学特性ならびに鉄筋の塑性力学特性は、ひずみ硬化材料で表わされるものとし、前者については H. Kupfer らの実験公式³²⁾を、後者については Mises の降伏条件式³³⁾をそのまま採用する。すなわち、平面応力下の塑性ポテンシャル $f(\sigma)$ として、それぞれ次式を採用する。すなわち、 (x, y) 座標の垂直応力を σ_x, σ_y とし、せん断応力を τ_{xy} とするとき、

$$\text{コンクリート: } f = \alpha(\sigma_x + \sigma_y) + J_2^{1/2} \dots \dots \dots (19)$$

ここに、 α ：係数

$$J_2 = \frac{1}{6} \{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2\} + \tau_{xy}^2$$

$$\text{鉄筋: } f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \dots \dots \dots (20)$$

ところで、コンクリートの場合は鉄筋のように明確に降伏応力は定められないで、応力-ひずみ曲線を bilinear の折線で近似し、その変曲点の応力を降伏応力 σ_{cy} とし、式 (19) の f 値が σ_{cy} に達したときを判定の基準とする。

また、コンクリート引張領域でのひびわれ力学モデルとしては、主応力がコンクリートの一軸引張限界強度に達したときにひびわれが生じるものとし、その方向は主応力に直角であると仮定する。そして、ひびわれの発生したコンクリートは、等価直交異方性弾性体であるとする。すなわち、図-8 に示すような平面応力場において、ひびわれに直角方向(図の 1 軸方向)に応力は伝達できず、

ボアソン効果が無視できるものとし、かつひびわれの発生したコンクリートは、せん断応力を伝達できない(ひびわれ面のかみ合い効果を無視する)とする(文献 26)参照)。

次に、鉄筋とコンクリートの間には相対すべりが発生するが、この力学的特性を表わすために、コンクリートと鉄筋の間に、それらを連結する大きさ零のボンドリンク

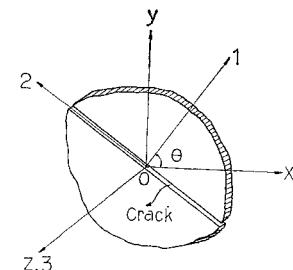


図-8 ひびわれと座標系

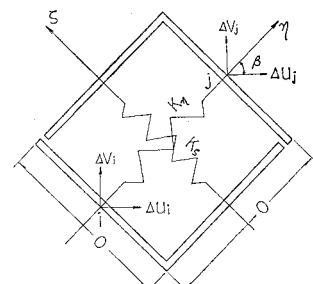


図-9 ボンドリンク

$\varepsilon^{24)}$ なる仮想要素の力学モデルを採用する。すなわち、ボンドリンクは図-9に示すような互いに直交した η 方向(鉄筋軸方向)と、 ζ 方向(鉄筋に垂直方向)の2つのねからなりたっているものとする。通常、付着の解析は、このボンドリンクのね剛性、すなわち、付着応力相対すべり関係を(非線形性を含めて)求めることに帰着するが、ここでは文献24), 28)に準じ、線形であるとした。

以上の力学モデルを用いて、要素の剛性マトリックスを求め、有限要素法による数値解析^{24)~30)}を行うものとする。

2. 実験および計算結果

(1) 実験の概要

はり理論で用いた仮定の妥当性を立証し、かつその実用性を確かめるため、計52本の2点漸増集中荷重を受ける桁の破壊実験を試みた。

実験Aシリーズでは、仮定(ii)~(v)の妥当性を調べるために、均一性の高いモルタルの単鉄筋矩形断面2種類(各2本で計4本)の破壊実験を行った。断面諸量を表-2に示す。

次に、理論の実用性を検討するため、実験BおよびCシリーズを計画した。Bシリーズでは、単鉄筋矩形断面コンクリート桁を対象としたもので、せん断アーム比 a/d として、きざみを0.5で $a/d=1.0\sim4.0$ とし、鉄筋比を $p=1.47\%$, $p=0.53\%$ に変え、計14ケース(28本)の破壊実験³⁴⁾を行った。

実験Cシリーズでは、より実体に即するため、スターラップのあるRC桁を対象にし、 $a/d=2.57$ 、鉄筋比 $p=0.90\%$, 1.52% の2種類を2本ずつ、計4本の実験を行った³⁵⁾。

表-2 桁の形状寸法およびコンクリートの示方配合と圧縮試験結果(Aシリーズ桁)

	実験例1	実験例2
桁長	l (cm)	90.0
桁高	h (cm)	20.0
桁幅	b (cm)	12.0
せん断アーム	a (cm)	20.0
有効高さ	d (cm)	18.0
せん断アーム比	a/d (cm)	1.11
使用鉄筋	SR 30, 4φ6	SD 30, 3 D 10
鉄筋比	(%)	0.52
材令	(日)	28
単位セメント量	C (kg/m ³)	586.0
単位水量	W (kg/m ³)	293.0
単位細骨材量	S (kg/m ³)	1318.5
水セメント比	W/C (%)	50.0
圧縮強度	σ_{cc} (kg/cm ²)	334
圧縮ひずみ	ϵ_{cc} ($\times 10^{-6}$)	2.988
		2.988

また、実験Dシリーズでは、プレテンション方式の矩形断面PC桁を対象とし、 $a/d=1.0$, 2.0, 3.0, 4.0の4ケース各3本の計12本について実験³⁶⁾した。さらに、Eシリーズでは、スターラップのある台形断面PC桁について、 $a/d=7.0$ で $p=0.36\%$ (ほかに組立筋としてφ9を4本使用)のプレテンション方式の桁2本および $a/d=5.6$ で $p=2.09\%$ (ほかに組立筋としてφ9を4本使用)のポストテンション桁2本の合計4本を作製し、破壊実験^{37), 38)}を行った。

RC桁の破壊実験は、いずれも通常の漸増曲げ載荷試験であるので、説明は省略する。PC桁についても同様であるが、若干の補足説明を以下に加える。まず、矩形断面桁のプレストレス導入方法としては、PC鋼線(SWPR 2)に緊張応力(約11000kg/cm²)を加えた状態のまま、コンクリート(早強ポルトランドセメント使用)が所定の強度(350kg/cm²以上)に達するまで14日間散水養生し、かかる後にプレストレスを与えるプレテンション方式を採用した。また、台形断面桁は、実際に現場で土止め壁に使用された桁であり、蒸気養生によるプレファブリケートされた製品である。そこで、通常工場で行われている方法と同一の工程で桁を作製し、これを破壊実験に用いた。この場合は、プレストレス導入後、ポストテンション桁で一週間、プレテンション桁で40日間を経て載荷試験を行ったため、プレストレスの減少量等についてはコンクリートおよびPC鋼線にゲージをはり、その時間的変動を実測し、有効プレストレス量を得た。なお、コンクリートの応力ひずみ曲線は、すべて円柱供試体の圧縮試験により、また、鉄筋およびPC鋼線の応力ひずみ曲線は、単軸引張試験を行って、おののの力学特性を定めた。結果の一部を表-3に示す。

(2) Aシリーズ桁

Aシリーズ($a/d=1.11$, 1.50)では、いずれの桁も、曲げひびわれ発生後、斜めひびわれが支配的となり、典

表-3 PC鋼材、鉄筋およびコンクリートの強度試験結果

	Dシリーズ桁		Eシリーズ桁	
	$a/d=2.0$	$a/d=3.0$	プレテンション桁	ポストテンション桁
PC鋼線	降伏応力(kg/cm ²)	17400	17400	18400
	引張強度(kg/cm ²)	20600	20600	20400
	弾性係数(kg/cm ²)	2.04×10^6	2.04×10^6	2.18×10^6
付加鉄筋	降伏応力(kg/cm ²)	—	—	2130
	引張強度(kg/cm ²)	—	—	3330
	弾性係数(kg/cm ²)	—	—	2.26×10^6
コンクリート	圧縮強度(kg/cm ²)	475	560	735
	曲げ強度(kg/cm ²)	—	—	73.1
	引張強度(kg/cm ²)	32.0	33.0	—
	弾性係数(kg/cm ²)	2.29×10^6	2.44×10^6	2.94×10^6
				3.25×10^6

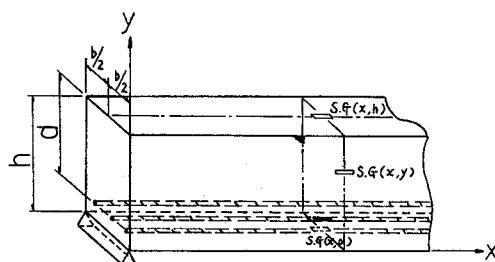
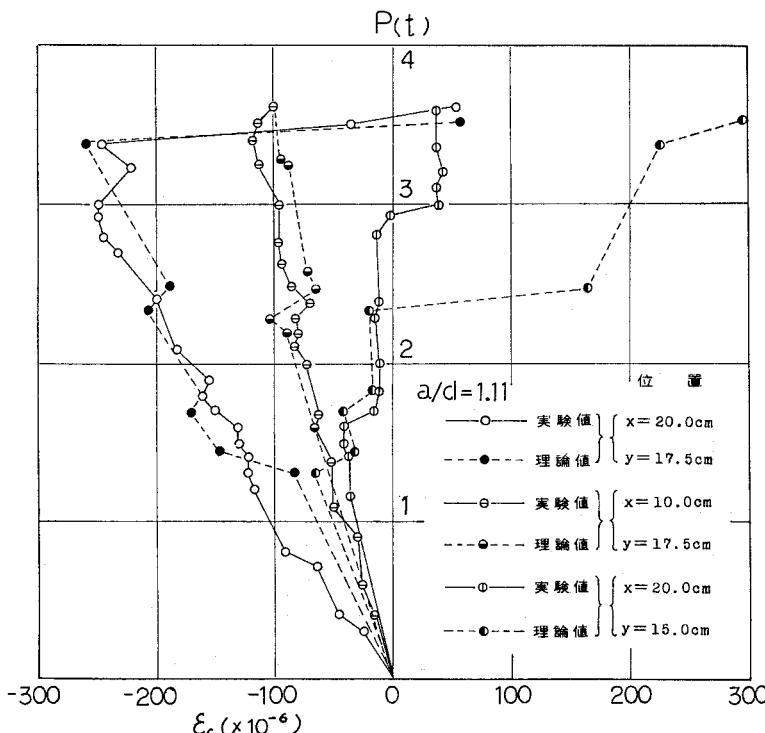
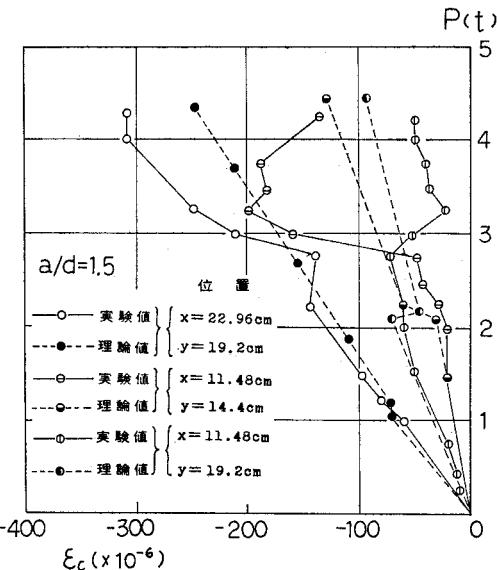


図-10 ひずみゲージ貼付位置

型的な歛歛のはく離現象が見受けられ、ついで、モルタルの圧壊と鉄筋の降伏が同時に生じ、最終的に破壊した。なお、計測は、ひずみと桁中央点のたわみについて行ったが、前者は図-10に示す位置のひずみゲージ(以下記号 $S.G(x, y)$ で一般的に表示することにする)で、後者はダイアルゲージでそれぞれ測定した。

さて、解析にあたっては、主曲げひびわれ間隔が問題となる(鉄筋比、コンクリート性状、荷重条件、スターラップの位置などの種々のファクターに左右され、一義的に定まらない)が、ここでは実験の傾向から、主曲げひびわれ間隔を桁高の約 1/2 とした。また、分割数は桁方向に 8 分割、桁高方向に 10 分割とした。推定破壊荷重と実験値との差は 10% 弱で、かなりよい一致が見られた。

図-11 は、 $a/d=1.11$ の桁に対する荷重-ひずみ曲線図-11 荷重-ひずみ曲線(A シリーズ桁: $a/d=1.11$)図-12 荷重-ひずみ曲線(A シリーズ桁: $a/d=1.5$)

($S.G(x=20 \text{ cm}, y=17.5 \text{ cm})$, $S.G(x=10 \text{ cm}, y=17.5 \text{ cm})$ および $S.G(x=20 \text{ cm}, y=15 \text{ cm})$) を、理論値と実験値について比較したものであり、また、図-12 は、 $a/d=1.50$ の桁の荷重-ひずみ曲線 ($S.G(x=22.96 \text{ cm}, y=19.2 \text{ cm})$, $S.G(x=11.48 \text{ cm}, y=14.4 \text{ cm})$ および $S.G(x=11.48 \text{ cm}, y=19.2 \text{ cm})$) を示したものである。

これらの図からわかるように、曲げひびわれ発生 ($a/d=$

1.11 の桁: $P=1.3 \text{ t}$, $a/d=1.50$ の桁: $P=0.75 \text{ t}$) から破壊に至るまで、はり理論は実験曲線をよく追跡しているといえる。また、図-13 に桁中央点の荷重-たわみ曲線を示すが、この図から理論値と実験値とは定性的にも定量的にもよく一致していることがわかる。はり理論によれば、 $a/d=1.11$ の桁では $P=2.3 \text{ t}$ で 2 つの歛歛がはく離し、 $a/d=1.50$ の桁では $P=2.1 \text{ t}$ で 1 つの歛歛がはく離した。

以上から、本理論で用いた仮定(iv), (v) がおおむね妥当なものであるといえよう。

(3) B シリーズ桁

A シリーズで行った破壊実験による検証から、一応、はり理論の妥当性が立証されたが、対

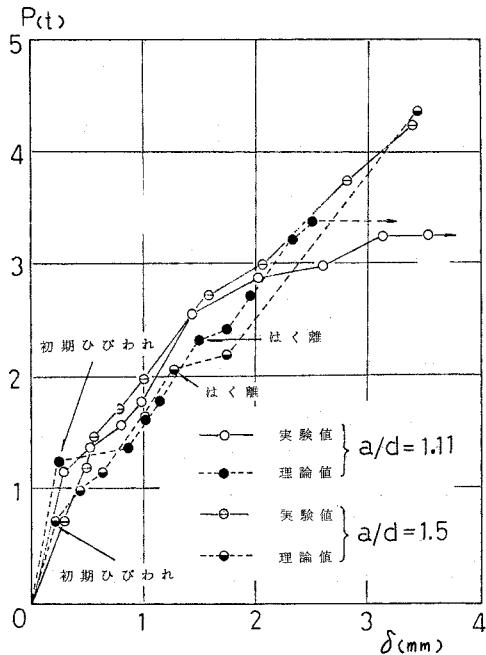


図-13 荷重-たわみ曲線（A シリーズ柱）

象とした柱はモルタル柱で、しかも a/d が小さい柱に限られているため、本シリーズでは、さらに実際に即して材質をコンクリートとし、 a/d を 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0 と変化させ、かつ鉄筋比を $p=0.53\%$, 1.47% の 2 種類とする計 14 種類の矩形断面単鉄筋コンクリート柱を対象にして、破壊実験を実施し、本理論の実用性を検討した。

まず、B シリーズ柱のひびわれおよび破壊形式を概観すれば以下のとおりである。 $a/d=1.0 \sim 1.5$ の小さな柱では、曲げひびわれがある程度成長したのち、独立に斜めひびわれが発生したが、A シリーズで見られたような明確なはく離現象は見られなかった。また、この場合、鉄筋比によるひびわれ発生状況の明確な差異は生じなかったが、破壊形式は、 $p=0.53\%$ の柱では鉄筋の降伏による破壊であり、 $p=1.47\%$ の柱では鉄筋が降伏する以前に斜めひびわれの急激な発生による、典型的な斜引張破壊であった。また、 $a/d=2.0 \sim 3.0$ の柱では、鉄筋比の相違にかかわらず、鉛直に生じた曲げひびわれが徐々に傾斜して斜めひびわれとなって鉄筋が降伏する、せん断破壊と曲げ破壊の中間的な破壊のパターンを示した。さらに $a/d=3.5 \sim 4.0$ と比較的大きな柱では、両鉄筋比の柱とも、曲げひびわれがそのまま鉛直方向に発達して、鉄筋が降伏する曲げ破壊の形式をとった。

さて解析にあたっては、A シリーズと同様に曲げひびわれ間隔が柱高の約 $1/2$ となるように柱方向に等分割し、柱高方向に 10 分割した。図-14 は、各柱の最終破

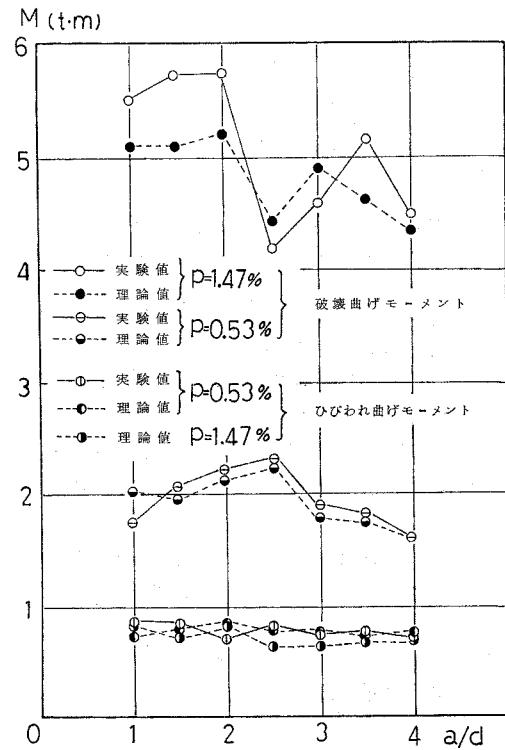


図-14 ひびわれおよび破壊曲げモーメント（B シリーズ柱）

壊荷重 P_u とせん断アーム長 a との積 $P_u a$ (柱中央のモーメント量に等しいので、 $P_u a$ は破壊モーメントとみなしうる) を縦軸に、 a/d を横軸にして実験値と理論値の比較を示したもので、両者はかなりよく合っているといえる*. なお、 $p=1.47\%$ の柱の a/d による耐力特性は Kani¹⁰⁾ の結果と類似の傾向を示したが、 $p=0.53\%$ のそれは、理論値、実験値とも、Kani のそれとは異なる性状を示した。

また、図-15 は柱中央点の荷重-たわみ曲線であり、理論曲線と実験曲線とは、定性的にはよい一致が見られる。すなわち、 a/d が小さい柱では、ひびわれ発生後のたわみに直線性が見られるが、破壊時直前に急増するせん断破壊形式であり、 a/d が大きな柱では、たわみが対数曲線的に増加する曲げ破壊形式となる。しかし、定量的に見れば、比較的よく合致している例も見られるが、全般的に見て理論値が大きく、特に $p=1.47\%$ で $a/d=2.5, 4.0$ および $p=0.53\%$ で $a/d=2.5$ の柱では、ひびわれの増大に従って、たわみの過大評価が著しくなっていることが取看される。たわみを過大評価したおもな

* 特に留意すべき点は、 a/d が 2.5 の近傍の耐力減少効果は、くし歯はく離理論を考慮することによって、初めて効果的に推定できるものであり、これから仮定 (V) の付加ひずみ導入法が十分妥当なものであることが実証されたといえよう。

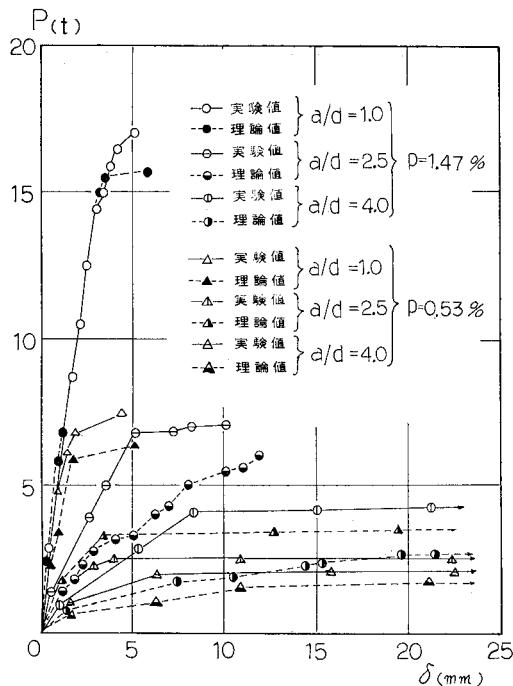


図-15 荷重-たわみ曲線（B シリーズ桁）

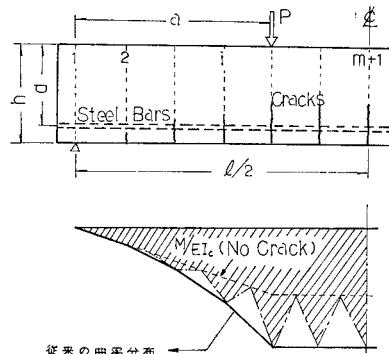
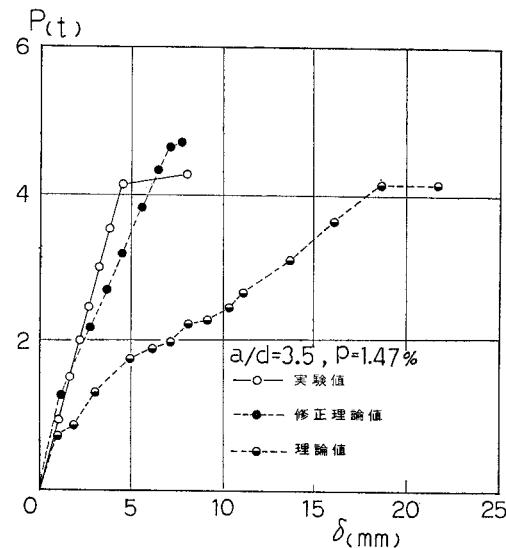


図-16 曲率分布の修正

理由は鉄筋のホゾ効果と、ひびわれ面での骨材のかみ合ひ効果を無視したことのほかに、後述するように桁断面の曲げ剛性を過小評価していることもあるが、曲率の分布の過大評価も一因と考えられる。そこで、図-16のような主曲げひびわれが生じた桁を用いて、この点を検討する。いま、分割点 $1 \sim m+1$ の曲率が $\phi_1 \sim \phi_{m+1}$ で求められたとすれば、これまでの計算では、曲率の分布が図の実線のようになると考へてたわみを算出した。しかし、主曲げひびわれの生じている中間の断面の曲率は、明らかにひびわれ断面のそれより小さくなり、その分布面積は図の斜線のようになるはずである。それゆえ、分割断面の中間点の曲率が、弹性曲率 = $M/(弹性曲げ剛性)$ (図中点線) で近似的に与えられるとし、その間の曲率の分布が図の一点鎖線のようになると仮定して、たわみを定める修正法を考えられる。図-17は、

図-17 曲率分布修正のたわみに及ぼす効果（B シリーズ桁 : $a/d=3.5, p=1.47\%$ ）

この修正法を用いた解と無修正解ならびに実験値との比較を示したもので、本修正法がたわみの著しい過大評価の是正にかなり有効であることが確認された。なお、弹性時のたわみについても理論値が大きく推定されている原因は、明らかに曲げ剛性の過小評価によるもので、これは円柱供試体より間接的に求めた理論応力-ひずみ関係が、実験桁のそれと同一でなかったことに加えて、弹性係数を実験曲線の割線係数で近似的に推定したことにより、この場合は後者がおもな原因と考えられるが、この点を是正するには、実験曲線により忠実な trilinear 曲線などを用いるのも一法と考えられる。

(4) C シリーズ桁

実際の桁では、主鉄筋に加えてスターラップがせん断補強筋として使用されている。そこで、本シリーズでは、 $\phi 6$ の U 字形スターラップを桁高の間隔で配置した、矩形断面 R C 桁 ($a/d=2.57$) を対象として、 $p=0.90\%$ (D 10 使用) ならびに $p=1.52\%$ (D 13 使用) の 2 種類各 2 本、計 4 本の桁について破壊実験を行った。この場合、鉛直曲げひびわれが支配的で、支点付近のひびわれは若干斜めに傾く中間型の破壊形式を示したが、ほぼ曲げ破壊と見なしうるものであった。

解析では、組立筋を考慮して複鉄筋とし、曲げひびわれがスターラップに沿って生じることを考え、桁の分割をスターラップの間隔に合わせて 20 等分とし、また、断面高さを 10 等分した。図-18は、理論と実験の荷重-たわみ曲線を比較したものである。この図から明らかなように、両者は定性的にも定量的にもかなりよく合致している。また、終局荷重は、D 10 の桁で実験値

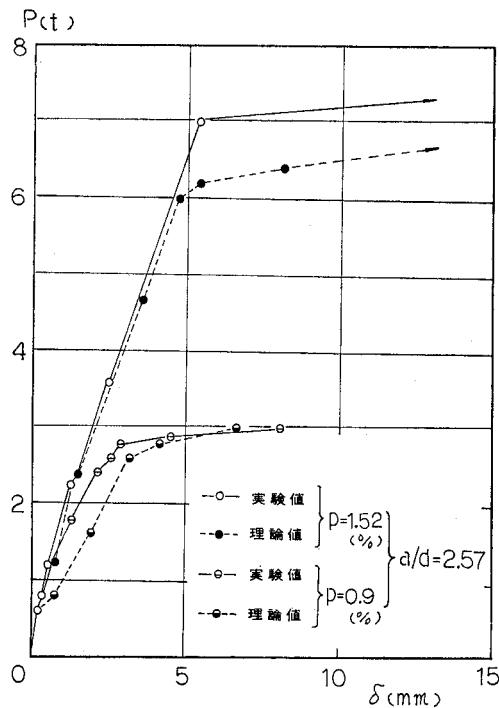


図-18 荷重-たわみ曲線 (C シリーズ桁)

3.9 t に対し、理論値が 3.4 t (誤差 13%), D 13 の桁で実験値 7.7 t に対し、理論値 6.7 t (誤差 13%) であった。

(5) D シリーズ桁

A, B および C シリーズにおいて、本理論の R C 桁に対する適用的一般性が認められたが、このシリーズでは、さらに PC 桁への適用性を検討するために、 a/d が異なる了プレテンション PC 桁を対象にして、破壊実験を行った。用いた桁は a/d を 1.0, 2.0, 3.0 および 4.0 と変化させ、PC 鋼線は 2.9 mm 2 本より (SWPR 2) を 5 本使用した。PC 桁のひびわれ発生状況は、R C 桁のそれとほぼ同様であり、破壊形式は PC 鋼線量が少ないため、PC 鋼線が先に降伏し、徐々に変形が増大して、最終的にコンクリートが圧壊する破壊であった。

理論計算にあたっては、初期応力、初期ひずみとして、プレストレスの影響を加味するほかは、まったく R C 桁の解析手法と同様である。計算による破壊メカニズムとしては、実験のそれと同じ経過を経て、PC 鋼線降伏直後に桁上縁のコンクリート部が圧壊する形が得られた。図-19 に荷重-たわみ曲線を示す。この図から明らかのように、ひびわれ発生から PC 鋼線が降伏するまでの範囲内では、理論値と実験値は比較的よく合致しているが、それ以後では、定性的にもかなりの差異が生じており、終局強度も実験値のほぼ 30% 減となっている。

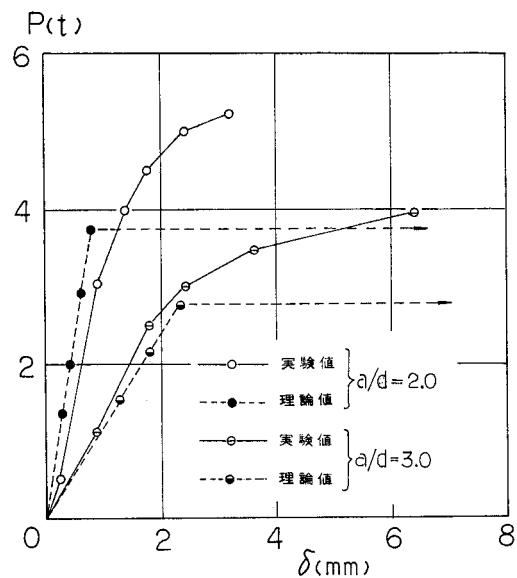


図-19 荷重-たわみ曲線 (D シリーズ桁)

補強鉄筋を用いていない本例のような PC 桁では、PC 鋼線の降伏後のたわみ特性は、その応力-ひずみの特性に左右される。それゆえ、計算値と実験値のこの開きは、この種 PC 鋼線に対して用いた bilinear 型の応力-ひずみ曲線が、必ずしも実際のものに即応しなかったことによるもので、より実体に即した trilinear 型などの曲線を用いることが肝要であろう。

(6) E シリーズ桁

E シリーズとしては、上辺長 23 cm、下辺長 20 cm、高さ 15 cm の台形断面桁 (スパン長 210 cm) を対象にして、プレテンション形式の PC 桁 ($\phi 2.9$ mm 3 本よりの PC 鋼線を 4 本使用) 2 本、さらにポストテンション形式の PC 桁 (D 23 異形 PC 鋼棒を使用) 2 本を作製した。いずれも $\phi 6$ のスタートラップを桁高の 1/2 間隔に配置し、組立筋は $\phi 9$ を上下に 2 本ずつ配置した。

実験による破壊形式は、プレテンション桁およびポストテンション桁で $a/d=7.0$ および 5.6 としたため、すべて曲げ破壊であったが、プレテンション桁では、上縁コンクリートが圧壊する前に PC 鋼線が破断し、ポストテンション桁では、PC 鋼線が降伏する前に桁上縁コンクリートが圧壊した。

一方、解析は、ひびわれ間隔を桁高の約 1/2 にとり、断面の分割数が 10 で、複鉄筋構造と考え、断面を忠実に台形とした場合と、幅 21.5 cm の矩形とした場合の 2 通りの方法によって行ったが、断面形による差異はほとんど認められなかった。使用コンクリートの引張限界応力 σ_{ct} は、割裂試験による値が著しく小さく出たため、別に曲げ試験より得られた曲げ圧縮強度の約 10% の値

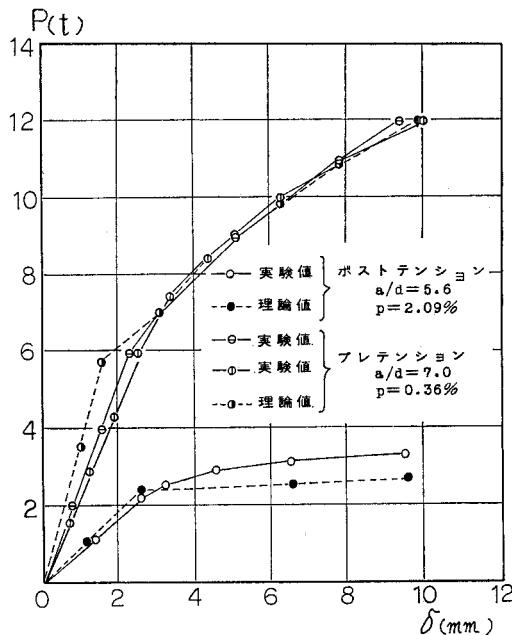


図-20 荷重-たわみ曲線 (E シリーズ桁)

$\sigma_{t0}=73 \text{ kg/cm}^2$ を用いた。本解析でも、プレテンション、ポストテンションいずれの場合も、実験の場合と同一の破壊形式が得られた。図-20 に、理論と実験の荷重-たわみ曲線を示す。これよりわかるように、理論曲線は、いずれの場合もよく実験曲線を追跡しているといえる。

(7) 有限要素法による R C 桁の解析ならびにはり理論との比較

対象とする R C 桁は、長さ 128.2 cm で、 $15 \times 30 \text{ cm}$ の単鉄筋矩形断面桁 ($p=0.7\%$, $a/d=1.5$) とし、スタートラップは解析を簡略化するため省略した。

有限要素法による解析にあたっては、鉄筋を公称断面積に等しい長方形断面に置換し²⁵⁾、桁を単位幅の平板として取り扱うこととする(図-21 参照)。その際、コンクリートの降伏条件式(19)における係数 α は、Kupferらの実験結果を参考して $0.07^{26), 27)}$ の値を用いた。また、ボンドリンクのばね剛性の水平成分 K_ζ は、既往の研究²⁴⁾を参考して $K_\zeta=3.9 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$ とした。一方、垂直成分 K_η については、鉄筋の軸方向に比較して、垂

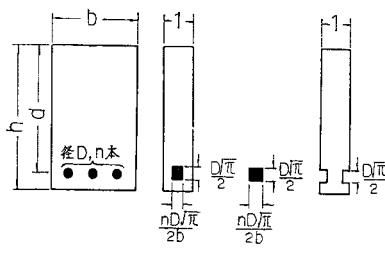


図-21 断面の置換

直方向の相対ずれ変位が微小であると考え、 K_ζ に比較して大きい $K_\eta=1.0 \times 10^7 \text{ kg/cm}^2$ を仮定した。さらに、ポアソン比はコンクリートに対して 0.17、鉄筋に対して 0.3 を用いた。モデル分割要素数は、桁半長に対して、コンクリート 346、鉄筋 34、ボンドリンク 32 の計 412、節点総数 232 である。本数値計算が増分法によるくり返し試算であるうえに、変位未知数が 434 個ときわめて多いため、九大大型電子計算機センターの FACOM M-190 で演算時間 256 秒(出力時間は別、ただし、荷重増分を 0.75 t きざみで 10 ステップを要した)。

本計算で得られた結果の一部を図-22~24 に示す。図-22 は、コンクリートおよび鉄筋の荷重-ひずみ曲線($S.G(x=40.5 \text{ cm}, y=30 \text{ cm})$, $S.G(x=40.5 \text{ cm}, y=0 \text{ cm})$, $S.G(x=64.1 \text{ cm}, y=30 \text{ cm})$ および $S.G(x=64.1 \text{ cm}, y=3 \text{ cm})$)を実験値と比較したものである。この図より、圧縮域のコンクリートのひずみ曲線は、実験のそれとほぼ合致することが看取されるが、引張域のひずみ曲線は、コンクリートおよび鉄筋とも、かなりの開きが見受けられる。図-23 に、計算荷重 $P=6.75 \text{ t}$ に対するひびわれの発生した要素とその方向(図中点線)を、実験より得られた破壊時のひびわれ状況と比較して示すが、これより、計算解はひびわれに関しては、ほぼ

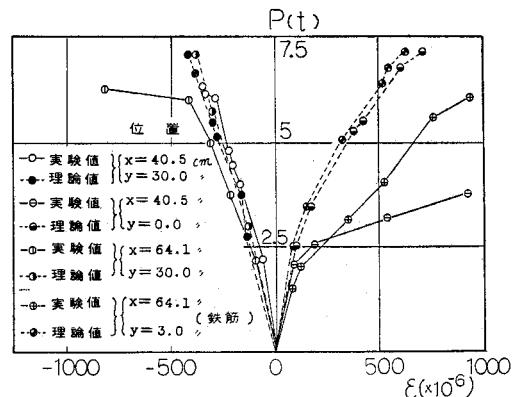


図-22 荷重-ひずみ曲線

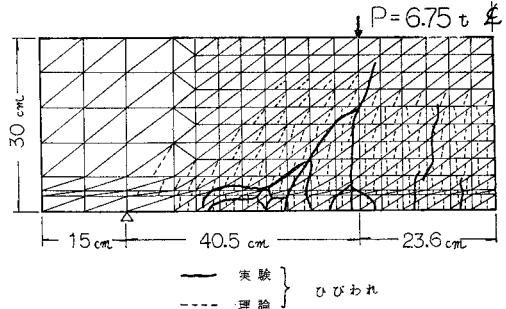


図-23 理論および実験によるひびわれ発生状況

* 文献 27) の例では、 $a/d=2.8$ の桁で分割要素数 112 に対して、演算時間は 8 分要している。

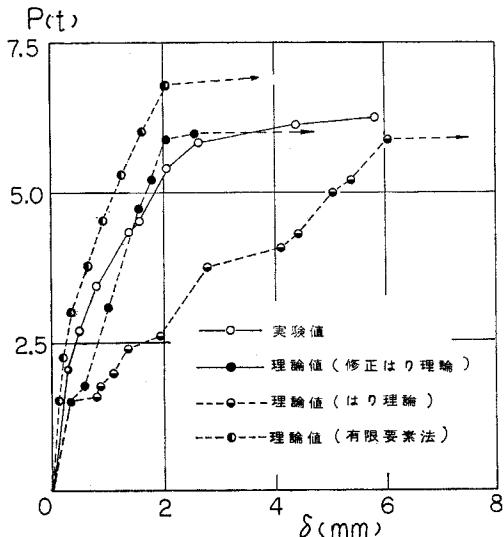


図-24 荷重-たわみ曲線

妥当な結果が得られているといえよう。また、図-24は、有限要素法と弾塑性はり理論ならびに実験によるそれぞれの、桁中央点の荷重-たわみ曲線を示したものである。有限要素法によるたわみ特性は、比較的よく実験のそれと合致しているといえる。なお、図-24には、はり理論による解も示しているが、この計算所要時間は有限要素法の256秒に対しわずか9秒であった。

留意すべきことは、はり理論によるたわみ量は、実験値より多少大きめに評価される傾向にあり、設計上安全側となるが、一方の有限要素法によるたわみ推定値は、逆に、本例、黒正²⁶⁾および磯畠²⁷⁾のいずれの場合も実験値より過小評価されるという点である。前者の原因とその修正法についてすでに述べたが、後者については、一般に平面応力場における有限要素法の解(変形)は、厳密解に対して下界を与える³⁸⁾ことがその理由であり；用いた平面モデルにその原因の1つがあると考えられる。この対策として、さらに分割メッシュならびに荷重増分を小さくするか、あるいはより実体に即した3次元モデルの採用⁴⁰⁾などが考えられるが、いずれの場合、計算容量と演算時間がさらに飛躍的に増大するなど実用上の難点が出てくる。

4. む す び

本研究は、RCおよびPC桁の終局強度とそれに至る破壊挙動を一般的に解明しうるはり理論を提案し、理論の妥当性を一連のRCおよびPC単純桁の破壊試験により照査検討したものである。得られた結果を要約すれば、以下のとおりである。

(1) 檻歯モデルと力学的に等価な付加ひずみの概念

で、曲げ、せん断ならびにその中間型の各破壊現象を包括的に説明できるとしたが、この仮定は、著者らが行った一連の破壊試験(52本)により、妥当なものであることが実証された。

(2) 組立鉄筋とスターラップを用いていないDシリーズでは、耐力の推定値が30%過小評価されている。これはPC鋼線の応力-ひずみをbilinear曲線にしたため、計算のうえで、PC鋼線の降伏とともに、急激に桁が最終破壊に達してしまうためである。これを是正するには、より実状に即したtrilinear曲線などを用いなければならない。

(3) はり理論によるたわみ値は、実験値に比し、過大評価(安全側)される傾向にある。これは、鉄筋のボルト効果とひびわれ面での骨材のかみ合い効果を無視したことと、主曲げひびわれ間の曲率の推定が、実状に合っていないことなどが原因といえる。厳密には、これらの効果をすべて考慮に入れたはり理論による解析が望まれるが、前述したように、曲率の修正を考慮した修正はり理論によても、たわみの過大評価を相当是正することが確認された。

(4) 一般に、主曲げひびわれ間隔は、鉄筋比、コンクリート性状、スターラップの位置、荷重条件などの種々のファクターによって左右され、一義的に定めることは困難である。解析では、実験の傾向から、一応、桁高の約1/2を仮定したが、計算結果は破壊の形式のいかんにかかわらず、いずれの場合も実験値と比較的よく一致することが認められた。

(5) 図-15に示されるように、 a/d による耐力の変動特性(実験値)を、はり理論解はよく追跡している。

(6) 平面モデルによる有限要素法と比較した結果、はり理論の方が計算容量、演算時間の面においてすぐれており、前者がたわみを過小評価して設計上危険側にあるのに対し、後者はたわみを過大評価する傾向にあり、安全側にあるといえる。

以上から、はり理論がこの種の桁の曲げ、せん断破壊および中間型の破壊挙動の解明に十分適用できること、しかも、従来の弾性はり理論で手慣れた応用手法(エネルギー法など)をそのまま活用して、種々の骨組構造物の破壊挙動を解明しうる汎用性と実用性を有するといえよう。

数値計算は、九州大学大型電子計算機FACOM M-190および宮崎大学電子計算機FACOM 270-30を使用した。また、実験は、九州大学土木工学科ならびに宮崎大学土木工学科のコンクリート研究室において行われた。本研究にあたっては、九州大学 德光善治教授、九州工業大学 渡辺明教授、宮崎大学 久原中吾教授ならびに九州

大学 松下博通講師に多大のご助言を賜わり、また、実験にあたり、九州大学橋梁工学研究室、宮崎大学土木材料工学研究室ならびに富士ピーエスコンクリート(株)の工場の方々に、いろいろご協力をいただいた。加えて、本研究は昭和51年度文部省科学研究費の補助を得た。ここに記して、謝意を表します。

参考文献

- 1) Whitney, C.S. : Design of reinforced concrete members under flexure or combined flexure and direct compression, *Jour. of ACI*, pp. 483~498, Mar., 1937.
- 2) Hognestad, E. : Fundamental concepts in ultimate load design of reinforced concrete members, *Jour. of ACI*, pp. 809~830, June, 1952.
- 3) Moody, K.G. and I.M. Viest : Shear strength of reinforced concrete beams, Part 4—Analytical studies, *Jour. of ACI*, pp. 697~730, Mar., 1955.
- 4) Viest, I.M., R.C. Elstner and E. Hognestad : Sustained load strength of eccentrically loaded short reinforced concrete columns, *Jour. of ACI*, pp. 727~755, Mar., 1956.
- 5) Zwoyer, E.M. and C.P. Siess : Ultimate strength in shear of simply supported prestressed concrete beams without web reinforcement, *Jour. of ACI*, pp. 181~200, Oct., 1954.
- 6) Ruble, E.J. and J. Taub : Discussion of a series of papers by K.G. Moody, I.M. Viest, R.C. Elstner and E. Hognestad "Shear strength of reinforced concrete beams", *Jour. of ACI*, pp. 732-1~732-23, Dec., 1955.
- 7) Broms, B.B. : Shear strength of reinforced concrete beams, *Proc. of ASCE*, Vol. 95, No. ST 6, pp. 1339~1358, June, 1969.
- 8) Bernhardt, C.J., M. Chi, A. Coüard and K.W. Johansen : Discussion of a paper by B. Bresler and K.S. Pister "Strength of concrete under combined stresses", *Jour. of ACI*, pp. 51~74, Mar., 1959.
- 9) Bresler, B. and A.C. Scordelis : Shear strength of reinforced concrete beams, *Jour. of ACI*, pp. 51~74, Jan., 1963.
- 10) Kani, G.N.J. : The riddle of shear failure and its solution, *Jour. of ACI*, pp. 441~467, Apr., 1964.
- 11) Billet, D.F. and J.H. Appleton : Flexural strength of prestressed concrete beams, *Jour. of ACI*, pp. 837~854, June, 1954.
- 12) Kar, J.N. : Diagonal cracking in prestressed concrete beams, *Proc. of ASCE*, Vol. 94, No. ST 1, pp. 83~109, Jan., 1968.
- 13) Macgregor, J.G., M.A. Sozen and C.P. Siess : Effect of draped reinforcement on behavior of prestressed concrete beams, *Jour. of ACI*, pp. 649~677, Dec., 1960.
- 14) Bobrowski, J. and B.K. Bardhan-Roy : A method of calculating the ultimate strength of reinforced and prestressed concrete beams in combined flexure and shear, *Proc. of ICE*, Vol. 47, No. 5, pp. 197~209, May, 1969.
- 15) Bishara, A. : Prestressed concrete beams under combined torsion, bending and shear, *Jour. of ACI*, pp. 525~538, July, 1969.
- 16) Lorentsen, M. : Theory for the combined action of bending moment and shear in reinforced and prestressed concrete beams, *Jour. of ACI*, pp. 403~420, Apr., 1965.
- 17) Oladapo, I.O. : Stability of tensile crack in prestressed concrete beams, *Proc. of ASCE*, Vol. 95, No. ST 1, pp. 17~31, Jan., 1969.
- 18) Leonhardt, F. und W. Lippoth : Folgerungen aus schäden an spannbetonbrücken, *Beton-und stahlbetonbau*, 65. Jahrgang, pp. 3~16, Heft 10/1970.
- 19) Gurinkel, G. and C.P. Siess : Longitudinally restrained reinforced concrete beams, *Proc. of ASCE*, Vol. 94, No. ST 3, pp. 709~735, Mar., 1968.
- 20) Sherbourne, A.N. and H.C. Parameswar : Limit analysis of continuous prestressed beams, *Proc. of ASCE*, Vol. 94, No. ST 1, pp. 19~40, Jan., 1968.
- 21) Yamasaki, T. and T. Ohta : Elasto-plastic finite deformation method for reinforced concrete and composite beams, *Proc. of the Symposium on Ultimate Strength of Structures and Their Components*, 16th National Symposium on Bridge and Structural Engineering, pp. 143~164, Nov., 1971.
- 22) Ohta, T. and T. Fujise : Studies on visco elasto-plastic behaviors of reinforced concrete beams, *Proc. of the 14th Japan Congress on Materials Research*, pp. 87~92, Dec., 1971.
- 23) Ohta, T. and T. Nakazawa : Fundamental studies on elastoplastic bending and shearing of reinforced concrete beams, *The Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu University*, Vol. 33, No. 3, pp. 79~96, Jan., 1974.
- 24) Ngo, D. and A.C. Scordelis : Finite element analysis of reinforced concrete beams, *Jour. of ACI*, pp. 152~163, Mar., 1967.
- 25) Nilson, A.H. : Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method, *Jour. of ACI*, pp. 757~766, Sep., 1968.
- 26) 黒正清治・滝口克己 : 有限要素法による鉄筋コンクリート部材の二次元解析(その1.仮定および解析方法, その2.鉄筋コンクリートばかりの解析), 日本建築学会論文報告集, 第189号, pp. 51~57, 昭和46年11月, 第200号, pp. 45~53, 昭和47年10月.
- 27) 磯畠脩 : 有限要素法によるコンクリート構造物の二次元弾塑性解析, 日本建築学会論文報告集, 第189号, pp. 43~50, 昭和46年11月.
- 28) 六車熙・森田司郎・富田幸次郎 : 曲げひびわれを生じた鉄筋コンクリートはり材の応力状態と変形に関する研究, 日本建築学会論文報告集, 第200号, pp. 27~34, 昭和47年10月.
- 29) 児島孝之 : Finite Element法のコンクリート構造への適用に関する研究, 土木学会第24回年次学術講演会講演概要集第5部, pp. 1~4 昭和44年10月.
- 30) 中沢隆雄・久原中吾 : 有限要素法による鉄筋コンクリートばかりの二次元弾塑性解析, 宮崎大学工学部研究報告, 第22号, pp. 1~11, 昭和51年9月.
- 31) Ohta, T. and T. Yamasaki : Elasto-plastic analysis of steel structures considering the effects of residual stress and finite deformation, *Proc. of JSCE*, No. 194, pp. 151~161, Oct., 1971.
- 32) Kupfer, H. and H.K. Hilsdorf : Behavior of concrete under biaxial stresses, *Jour. of ACI*, pp. 656~666, Aug., 1969.
- 33) 山田嘉昭 : 塑性・粘弹性、コンピューターによる構造工学講座, 日本鋼構造協会, 培風館.
- 34) 中沢隆雄・久原中吾・村田裕文 : 鉄筋コンクリート単純桁の破壊に関する理論的実験的研究(その5), 土木学会

- 西部支部研究発表会講演集, pp. 327~328, 昭和 51 年 2 月.
- 35) Ohta, T., K. Iwataki and S. Hino : Studies on elasto-plastic behaviors of reinforced concrete beams connected with a steel joint, The Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu University, Vol. 36, No. 1, pp. 1~19, Aug., 1976.
- 36) 中沢隆雄・久原中吾・渡辺雄児 : プレストレストコンクリートばかりの破壊に関する基礎的研究, 土木学会西部支部研究発表会講演集, pp. 337~378, 昭和 51 年 2 月.
- 37) 日野伸一・太田俊昭・花田 久 : 曲げを受けるプレテンション PC 枠の結合法について, 土木学会第 31 回年次学術講演会講演概要集第 5 部, pp. 221~222, 昭和 51 年 10 月.
- 38) 日野伸一・岩瀬清治・太田俊昭・徳光善治 : 中間に接合部を有するプレキャスト PS コンクリートばかりの曲げ性状について, 土木学会西部支部研究発表会講演集, pp. 321~322, 昭和 51 年 2 月.
- 39) Gallagher, R.H. : 有限要素解析の基礎, 丸善, pp. 249 ~251, 1976.
- 40) Phillips, D.V. and O.C. Zienkiewicz : Finite element non-linear analysis of concrete structures, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, pp. 59~88, Mar., 1976.

(1977.8.15・受付)