

Biot の圧密方程式に関する一考察

A STUDY ON BIOT'S EQUATIONS OF CONSOLIDATION

田 村 武*

By Takeshi TAMURA

1. 概 説

熱伝導型の方程式に支配される一次元圧密と比較して、きわめて複雑な挙動を示す多次元圧密は、厳密には Biot の方程式¹⁾に支配されると考えられる。それは、変位系と間隙水圧の両者を未知数を含む連立偏微分方程式からなり、いくつかの数値解析法²⁾を除けば、わずかの解析解が提案されているにすぎない。たとえば、McNamee と Gibson³⁾あるいは Schiffman と Chen⁴⁾は半無限領域の問題を、山口と村上^{5), 6)}は有限厚さの粘土層の問題を、また、Cryer⁷⁾は球の問題をそれぞれ解いているが、いずれも変位と間隙水圧を含んだままの Biot の方程式を直接に解析している。

一方では、Biot の方程式のもつ圧密機構そのものを明らかにしようとする研究もある。吉国^{8), 9)}は、Biot の方程式のつり合い条件より導かれる“圧密ポテンシャル”が調和関数であることを中心に圧密現象を議論している。あるいはまた、Sills¹⁰⁾は、同様な立場から“ $K(t)$ ”なる関数を定義し、Biot と Terzaghi の両理論が一致する条件を調べている。しかし、それらは間隙水圧のみで圧密を完全に捕えるには至っていない。

本研究では、まず圧密中の状態における間隙水圧と体積ひずみの両分布の間に簡単な線形関係があることを示し、間隙水圧のみで表現した Biot の方程式を誘導する。そして、それは微積分発展方程式¹¹⁾であり、差分法、有限要素法などによりいったん空間的に離散化して近似すれば、熱伝導方程式とまったく同等な扱いができることを明らかにする。また、特殊な例として無限領域の圧密に対して熱伝導型の方程式がそのまま成立することや、球や中空円の圧密問題の数値解析結果について説明を加える。

多次元圧密が土要素のつり合い条件と間隙水の流れに

よる連続条件とを両立させた現象である以上、弾性理論および熱伝導理論の帰結をなるだけ利用し、Biot の方程式をより単純な方程式に帰着させてその現象の機構を考察することが本研究の基本的な方針である。むしろすべて Biot の方程式に立脚した議論であって、Biot 理論の範囲外に出るものではない。

2. 間隙水圧のみで表現した Biot の方程式

等方弾性的な構造骨格と Darcy の法則に従う非圧縮性間隙水とからなる理想的な飽和粘土を仮定すれば、その変位の微小な範囲で生じる圧密は、次の Biot の方程式に支配されると考えてよい。

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \\ \frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{k}{\tau_w} \nabla^2 u \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

ここに用いた記号は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} x_i &: \text{直交座標系,} & t &: \text{時間座標,} \\ \nabla^2 &: \text{Laplacian} \left(= \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right), \\ u_i &: \text{変位の } i\text{-成分,} & e &: \text{体積ひずみ,} \\ u &: \text{(過剰) 間隙水圧,} & k &: \text{透水係数,} \\ \tau_w &: \text{間隙水の単位体積重量.} \end{aligned}$$

なお、混乱の生じない限り、記号 ∇^2 などは二次元、三次元の区別をせずに用いる。また、間隙水圧 u は、圧密完了後の値との差、すなわち、過剰間隙水圧を意味するものとする。特にことわらない限り、変位は座標軸の負の方向を、間隙水圧および体積ひずみは圧縮をそれぞれ正とする。

式 (1), (2) に付随して、次の境界条件が設定されている (図-1 参照)。

$$\begin{aligned} (B_u) & \text{ 変位に関する境界条件: } u_i = \bar{u}_i \text{ on } S_u \\ (B_\sigma) & \text{ 応力に関する境界条件: } T_i = \bar{T}_i \text{ on } S_\sigma \\ (B_D) & \text{ 間隙水の排出に関する境界条件} \end{aligned}$$

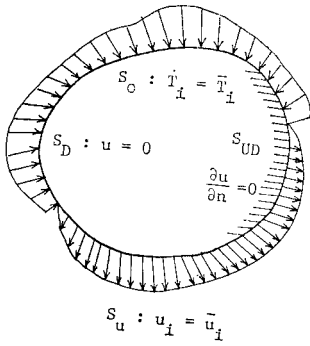


図-1 境界条件 $(B_u), (B_\sigma), (B_D)$

$$: u=0 \text{ on } S_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } S_{UD}$$

ここに、 \bar{u}_i は変位境界 S_u 上の与えられた変位、 \bar{T}_i は応力境界 S_o 上の与えられた境界(全)応力ベクトル T_i の値、 S_D は間隙水圧を零と定めた排水境界、 S_{UD} は非排水

境界そして n は境界での法線座標を意味する。上記以外に、もっと一般的な境界条件(たとえば (B_u) と (B_σ) の混合境界、あるいは ϕ を既知関数として $(1-\alpha)u + \alpha \frac{\partial u}{\partial n} = \phi$ とする排水境界など)を考えても以下の議論の本質は不変である。ただし、応力境界 S_o が必ず存在し、かつ変位と応力に関する境界条件は時間的に変化しないと仮定しておく。

さて、一般には考える領域の基準状態として、境界変位 \bar{u}_i 、境界応力 \bar{T}_i がまだ作用していない変形前の状態を用いている。そのため、それらが作用してからのちの圧密中の状態(以後、圧密状態とよぶ)の内部変位、応力には境界条件 (B_u) および (B_σ) に起因するものと、その時点における間隙水圧の分布に起因するものとが複雑に競合していて、それらを分離することは容易ではないように思われる。

いま、時刻 t が十分大きくなって間隙水圧 u が恒等的に零となった状態(以後、最終状態とよぶ)を考える。このときの変形形状は通常弾性論における境界値問題を解くことによって求められる。つまり、

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad \dots\dots (3)$$

と境界条件 $(B_u), (B_\sigma)$ により決定される。この最終状態における変位を基準にして圧密状態の変位、間隙水圧をみると、次の方程式と境界条件により支配されていることがわかる。

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 v_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad \dots\dots (4) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{k}{r_w} \nabla^2 u \quad \dots\dots (5) \end{cases}$$

(B_u) 変位に関する境界条件: $v_i \equiv 0$ on S_u
 (B_σ) 応力に関する境界条件: $T_i \equiv 0$ on S_o
 および (B_D)

ここに、 u_{fi}, e_f を式(3)の解として $v_i = u_i - u_{fi}$ 、 $\theta = e - e_f$ と定義する。方程式の形はもとの Biot の方程式とまったく同一であるが、変位と応力に関する境界条件

$(B_{u0}), (B_{\sigma0})$ が斉次であることに注意しなければならない。すなわち、式(4)を独立した方程式とみた場合、変位 v_i は間隙水圧 u の存在のみに起因するものと考えられることができる。いにかえるなら、かりに u の分布を既知としたとき、斉次境界条件 $(B_{u0}), (B_{\sigma0})$ のもとで式(4)を解くことができ、しかも、その解 v_i は u の分布に対して線形である。そこで、同じ斉次境界条件のもとでの次の方程式:

$$\mu \nabla^2 v_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta(x, X)}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad \dots\dots (6)$$

の解、つまり方程式(4)の Green 関数を $U_i(x, X)$ とおく。ここに、 $\delta(x, X)$ は δ -関数である。すると式(6)は、点 X に単位の“集中間隙水圧 $\delta(x, X)$ ”を与えたときのつり合い条件であって、重ね合せの原理により式(4)の解を

$$v_i(x) = \int_V U_i(x, X) u(X) dV_X \quad \dots\dots (7)$$

と表現することができる。ここに、 dV_X の添字 X は、 X につき積分することを示している。ただし、点 x, X とそれらの座標を示す変数 x_i, X_i とを区別していない。また、単位の“集中間隙水圧 $\delta(x, X)$ ”とは、点 X を含む微小領域 dV_X のみに発生している間隙水圧 u を、 $u \cdot dV_X = 1$ を保ちながら $dV_X \rightarrow 0$ としたものとす。変数 x で式(7)の両辺の発散(div.)をとって、

$$\theta(x) = \int_V \theta(x, X) u(X) dV_X \quad \dots\dots (8)$$

を得る。ここに、 $\theta(x, X) = \sum \frac{\partial}{\partial x_i} U_i(x, X)$ である。これは、圧密の完了した最終状態からみて残存している間隙水圧 u と、それにより生じている体積ひずみ θ との間に線形関係があることを示している。容易にわかるように、点 X に単位の“集中間隙水圧”が作用したとき、斉次境界条件 $(B_{u0}), (B_{\sigma0})$ のもとで生じる体積ひずみの分布が $\theta(x, X)$ である。また、特に注意すべきは、関数 $\theta(x, X)$ が、圧密状態とは無関係に通常弾性論により、時間的に不変な量として定まることである。

次に式(8)の逆関係を考える。すなわち、与えられた $\theta(x)$ の分布に対して $u(x)$ を対応させる関係を求めるわけであるが、これは可能である。いままでの議論の出発点であった方程式(4)のみをみた場合、間隙水圧 u が一階微分の形であることより、 θ から u は一意的に定まらない、しかし、ここでは変位と応力に関する斉次境界条件まで含めて考えているので、式(8)は u を未知関数とする積分方程式として逆を求めることができる。なぜなら、もしも θ から u が一意的に定まらなるとすると、それは $\theta \equiv 0$ に対して $u(\neq 0)$ が生じていることを意味する。 $\theta \equiv 0$ はせん断のみの変形であって、斉次境界条件のもとでは非排水変形(等体積変形)

により瞬時的に圧密の完了した状態 ($u \equiv 0$) に移行するため、圧密中に存在できないものである。つまり圧密状態において $\theta \equiv 0$ は $u (\neq 0)$ と対応しえない。よって式 (8) の解を積分表示した、

$$u(x) = \int_V \phi(x, X) \theta(X) dV_X \dots\dots\dots(9)$$

なる一意的な線形対応がある。ここに、関数 $\phi(x, X)$ は、斉次境界条件のもとで、点 X に単位の“集中体積ひずみ $\delta(x, X)$ ”を与え、その他の点の体積ひずみを零と拘束したときの間隙水圧の分布を意味する。ただし、単位の“集中体積ひずみ $\delta(x, X)$ ”とは、点 X を含む微小領域 dV_X のみに発生している体積ひずみ θ を、 $\theta \cdot dV_X = 1$ を保ちながら $dV_X \rightarrow 0$ としたものとす。すなわち、

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 v_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \\ \dots\dots\dots(10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta = \delta(x, X) \dots\dots\dots(11) \\ \text{境界条件: } (B_{u0}), (B_{\theta 0}) \end{cases}$$

より定まる $u(x)$ を $\phi(x, X)$ と表わして式 (8) を式 (9) のように解くことができる。

以上は、圧密を支配する Biot の方程式のなかで、つり合い条件式 (4) のみを考察してきた。実は、圧密現象を支配するうえで、式 (4) から導かれる最小限の必要な関係式が式 (9) である。つまり、間隙水圧 u を唯一の未知数としてもつ多次元圧密の単独の方程式を導くためには、つり合い条件式 (4) のすべてが必要であるのではなく、斉次境界条件 $(B_{u0}), (B_{\theta 0})$ および式 (11) とともに解いた結果の一部である式 (9) が不可欠なのである。実際、式 (9) と連続条件式 (5) より u を未知数とする圧密の方程式を導くことができる。まず、式 (9) を圧密状態に適用するとき、 $u(x), \theta(x)$ は時刻 t とともに変化していくが、 $\phi(x, X)$ は不変であることに注意する。その意味で式 (9) の両辺を時間で微分し、式 (5) を代入すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\frac{k}{r_w} \int_V \phi(x, X) \nabla^2 u(X, t) dV_X \dots\dots\dots(12)$$

のように間隙水圧 u のみで表現した Biot の方程式が誘導される。これは(微積分発展方程式¹¹⁾の形をしていて、ある時刻 t における $u(x, t)$ が定まれば、右辺へ代入することにより、領域内部における u 自身の時間変化率が求められる。そして、間隙水の排出に関する境界条件 (B_D) から逐次 $u(x, t)$ が決定されることは、熱伝導方程式とまったく同様である。

いま、ある関数 f に対して積分作用素：

$$\bar{\psi} : f \rightarrow \bar{\psi} f = -\frac{k}{r_w} \int_V \phi(x, X) f(X) dV_X \dots\dots\dots(13)$$

を定義すると、式 (12) は次のように書かれる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \bar{\psi} \nabla^2 u \dots\dots\dots(14)$$

一次元圧密に関する Terzaghi の方程式と比べてわかるように、圧密係数を積分作用素にまで拡張すれば、多次元圧密も熱伝導型方程式に支配されているといえる。

圧密状態における間隙水圧 u 以外の諸量を求めるには、式 (12) より単独に解いた u を式 (4) に代入し、境界条件 $(B_{u0}), (B_{\theta 0})$ とともに通常の弾性問題を解けばよい。ただし、ここでは最終状態をすべての基準に考えているので、外力などが作用していない自然状態からみるには、最終状態での諸量よりそれらを差し引くか、あるいは直接に境界条件 $(B_u), (B_\theta)$ のもとに u をつり合い式 (1) に代入して解けばよい。

3. 基礎方程式の適用

個々の境界条件に対して圧密を支配する方程式 (12) を具体的に書き下すには、あらかじめ関数 $\phi(x, X)$ を求めておかなければならない。ここでは、その基礎となるべき無限領域における $\phi(x, X)$ を定めたのち、任意領域に対する $\phi(x, X)$ の求め方を述べ、式 (12) の右辺の積分が簡単になる球形あるいは円形の領域について具体例を記す。

a) 三次元無限領域の圧密 (図-2 参照)

無限に広がる三次元領域の1点 X に j -方向の単位の集中力を作用させたとき、点 X から r だけ離れた点 x に生じる i -方向の変位は、

$$G_i^j(x, X) = \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \frac{1}{r} \delta_{ij} - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} r \right\} \dots\dots\dots(15)$$

で与えられる¹²⁾。ここに、 $r^2 = \sum_{i=1}^3 (x_i - X_i)^2$ 、 ν は Poisson 比、 δ_{ij} は Kronecker の記号である。変数 X について $G_i^j(x, X)$ の発散をとることにより、点 X に単位の“集中間隙水圧”が作用した場合の点 x に生じる i -方向の変位が、

$$U_i(x, X) = \frac{1}{4\pi} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) \dots\dots\dots(16)$$

と求まる。さらに、

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \delta(x, X) \dots\dots\dots(17)$$

に注意して式 (16) の両辺の変数 x に関する発散をとると、このときの体積ひずみの分布が次のように表わさ

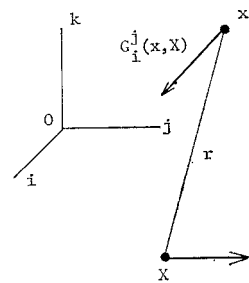


図-2 変位 $G_i^j(x, X)$

れる。

$$\theta(x, X) = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)\mu} \delta(x, X) \dots\dots\dots (18)$$

すなわち、点 X のみに間隙水圧を与えた場合、体積ひずみもやはり点 X のみにしか生じない。このことから容易にわかるように、逆に $\theta = \delta(x, X)$ なる体積ひずみを与えた場合の間隙水圧は、

$$\phi(x, X) = -\frac{2(1-\nu)\mu}{1-2\nu} \delta(x, X) \dots\dots\dots (19)$$

となる。これを方程式 (12) に代入して、圧密の方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \nabla^2 u \dots\dots\dots (20)$$

が求まる。ここで、 $c_v = \frac{2(1-\nu)\mu}{1-2\nu} \frac{k}{\gamma_w}$ である。つまり、境界の存在しない三次元無限領域の圧密は三次元の熱伝導型の方程式（以下、多次元の場合でも、この型の方程式を Terzaghi の方程式と総称する）により支配されることになる。

b) 二次元（平面ひずみ）無限領域の圧密

平面ひずみ無限領域とは、一つの軸 (x_3 -軸) 方向に $x_3 = -\infty$ から $x_3 = +\infty$ まで一様な変形、応力状態があるような三次元無限領域のひとつである。したがって、二次元空間の中で、点 X に単位の“集中間隙水圧”が作用した場合に、点 X より r だけ離れた点 x に生じる i -方向の変位 $U_i(x, X)$ は、式 (16) を X_3 について ($-\infty, +\infty$) の範囲で積分して、

$$U_i(x, X) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \dots\dots\dots (21)$$

となる。ただし、ここで $r^2 = \sum_{i=1}^2 (x_i - X_i)^2$ である。そして、

$$-\frac{1}{2\pi} \nabla^2 \left(\ln \frac{1}{r} \right) = \delta(x, X) \dots\dots\dots (22)$$

に注意して式 (21) の両辺の変数 x に関する発散をとって、**a)** とまったく同じ関係式 (18), (19) および (20) を二次元空間の意味で得る。よって二次元無限領域でも **a)** と同じ圧密係数 c_v をもつ二次元の Terzaghi の方程式 (20) により、圧密現象が支配される。

c) 一次元無限領域の圧密

一次元無限領域とは、二つの軸 (x_2, x_3 -軸) 方向にそれぞれ $x_2, x_3 = -\infty$ から $x_2, x_3 = +\infty$ まで一様な変形、応力状態があるような三次元無限領域のひとつである。**b)** と同様に X_2, X_3 につき式 (16) を積分して、同じ意味をもつ変位 $U_1(x, X)$ ：

$$U_1(x, X) = -\frac{1}{2} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)\mu} \frac{d}{dx_1} r \dots\dots\dots (23)$$

を得る。ここに、 $r = |x_1 - X_1|$ である。そして、
 $\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx_1^2} r = \delta(x, X) \dots\dots\dots (24)$

に注意して式 (23) の両辺の変数 x に関する発散（微分）をとって、**a)** と同様に式 (18), (19) および (20) が一次元空間の意味で成立する。よって一次元無限領域でも **a)** と同じ圧密係数をもつ一次元の Terzaghi の方程式が圧密を支配する。

次に以上の結果を利用して、任意形状の領域に対する関数 $\phi(x, X)$ の求め方および圧密を支配する方程式の一般形について述べる。

d) 一般的な領域の圧密 (図-3 参照)

有限な境界をもつ領域に、体積ひずみ $\theta = \delta(x, X)$ を与えた場合の間隙水圧は以下のようにして求めることができる。いまかりに境界がまったく存在しないとすると、**a)~c)** のように $\phi(x, X)$ は式 (19) に帰着されてしまうので、

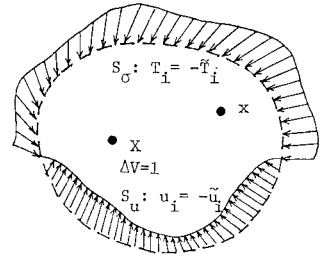


図-3 境界条件 (\tilde{B})

$$\phi(x, X) = -\frac{2(1-\nu)\mu}{1-2\nu} \delta(x, X) + \Gamma(x, X) \dots\dots\dots (25)$$

として $\phi(x, X)$ を二つに分解するのが自然である。すると右辺第二項は、境界の存在により発生した間隙水圧に相当することになる。つまり境界が存在しないとして $\theta = \delta(x, X)$ を与えた場合の変位は、ポテンシャル力と同じ形：

$$V_i(x, X) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) \text{ (三次元) } \dots\dots\dots (26)$$

$$V_i(x, X) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \text{ (二次元) } \dots\dots\dots (27)$$

$$V_1(x, X) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx_1} r \text{ (一次元) } \dots\dots\dots (28)$$

より求まるが、それによる境界上の変位 \bar{u}_i (S_u 上) および応力 \bar{T}_i (S_s 上) を打ち消すような境界条件 (図-3 参照)：

$$(\tilde{B}) \quad u_i = -\bar{u}_i \text{ on } S_u, \quad T_i = -\bar{T}_i \text{ on } S_s$$

と等体積条件 ($\theta \equiv 0$) のもとで間隙水圧を求めてやれば、それが $\Gamma(x, X)$ となる。

式 (4) の発散をとると、

$$\nabla^2 \{u + (\lambda + 2\mu)\theta\} = 0 \dots\dots\dots (29)$$

となるが、 $\theta \equiv 0$ の場合を考えれば、

$$\nabla^2 \Gamma(x, X) = 0 \dots\dots\dots (30)$$

であり、 $\Gamma(x, X)$ は調和関数となる。また、弾性論の相反原理により式 (8) の $\theta(x, X)$ は対称であり、その逆関係を表わす式 (9) の $\phi(x, X)$ も対称である。こ

のことと式 (25) を考慮すれば、

$$\Gamma(x, X) = \Gamma(X, x) \dots \dots \dots (31)$$

であることもわかる。

よって方程式 (12) に式 (25) を代入して一般的な領域における圧密の方程式の一般形が次のように表現される。

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c_v \nabla^2 u(x, t) - \frac{k}{\tau_w} \int_V \Gamma(x, X) \nabla^2 u(X, t) dV_X \dots \dots \dots (32)$$

ここで、右辺第二項は、さきに吉国⁸⁾、Sills¹⁰⁾ によって定義された“圧密ポテンシャル”および“ $K(t)$ ”をそれぞれ時間微分した量に相当する。また、式 (30) に注意して Green の積分公式を適用してやれば、式 (32) は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \nabla^2 u - \frac{k}{\tau_w} \int_S \left\{ \Gamma(x, Y) \frac{\partial u(Y)}{\partial n} - u(Y) \frac{\partial \Gamma(x, Y)}{\partial n} \right\} dS_Y \dots \dots \dots (33)$$

とも書ける。ここに、 Y は境界 S 上の点を示す。

圧密の方程式の一般形である式 (32) の右辺第二項の積分が容易に求まる具体例を記す。

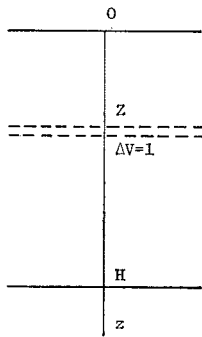


図-4 一次元圧密

e) 一次元圧密 (図-4 参照)

厚さ H の一次元領域の下端 ($z=H$) を変位固定境界、上端 ($z=0$) を応力境界とする。上、下端の境界がないとして体積ひずみ $\theta = \theta(z, Z)$ を与えたとき、式 (28) より $z=H$ での変位 \tilde{u}_z と $z=0$ での応力 \tilde{T}_z が定まる。そこで、等体積条件 $\theta = 0$ と境界条件:

$$(\tilde{B}) \quad u_z = -\tilde{u}_z = -\frac{1}{2} (z=H),$$

$$T_z = -\tilde{T}_z = 0 (z=0)$$

のもとで発生する間隙水圧を求めてやればよい。ところが上記の境界条件のもとでは、領域が単に剛体移動するだけで間隙水圧は生じない。よって、

$$\Gamma(z, Z) = 0 \dots \dots \dots (34)$$

となり、式 (32) に代入して一次元の Terzaghi の方程式に帰着する。

f) 球の圧密 (図-5 参照)

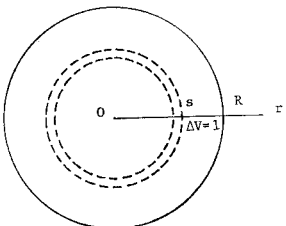


図-5 球の圧密

中心 O 、半径 R の球

の内部に点 O を中心とする半径 $r=s (\leq R)$ の球面を考え、この球面上全体に単位の“集中体積ひずみ $\theta = \delta(r, s)$ ”を与える。境界 $S(r=R)$ が無いとしたとき半径 $r(r \geq s)$ 上に生じる半径方向の変位 $V_r(r, s)$ は、式 (26) を球面 $r=s$ 上で積分して、

$$V_r(r, s) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \int_{r=s}^r \frac{1}{r'} dS = \begin{cases} \frac{s^2}{r^2} (r \geq s) \\ 0 (r < s) \end{cases} \dots \dots \dots (35)$$

と求まる。これより境界条件 (\tilde{B}) が $T_r = 4\mu \frac{s^2}{R^3}$ と定まり、境界 S の存在による間隙水圧が、

$$u(s) = 4\mu \frac{s^2}{R^3} \dots \dots \dots (36)$$

として得られる。よって、求めるべき式 (32) の右辺第二項は、

$$-\frac{k}{\tau_w} \int_0^R \nabla^2 u(s) ds \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \Gamma(x, X) \sin\theta d\theta = -\frac{4k\mu}{\tau_w} \frac{1}{R^3} \int_0^R s^2 \nabla^2 u(s) ds \dots \dots \dots (37)$$

となって、球の圧密を支配する方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \nabla^2 u - \frac{4k\mu}{\tau_w} \frac{1}{R^3} \int_0^R s^2 \nabla^2 u(s) ds \dots \dots \dots (38)$$

が導かれる。

上式の右辺第二項をみればわかるように、ある半径 r 上における間隙水圧の時間変化率は、その点における $\nabla^2 u$ の値のみならず球全体の値に依存している。Mandel-Cryer 効果もこのような境界の存在に伴う間隙水圧の発生であり、力学的には次のようにも説明される。

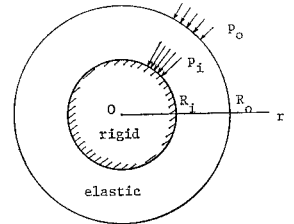


図-6 Mandel-Cryer 効果の力学的モデル

図-6 のように半径 R_i の剛な球を内部にもつ半径 R_o の中空弾性球を考える。外周より p_o の圧力を加えたとき、内部の剛球には、

$$p_i = \frac{3(1-\nu)}{(1+\nu) + 2(1-2\nu)} \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^3 p_o \dots \dots \dots (39)$$

のような増大された圧力 p_i を伝達する。弾性球を排水状態にある領域に、剛球をまだ非排水状態にある領域にそれぞれ対応させれば、当然、外圧よりも大きな間隙水圧が発生することになる。要するに Mandel-Cryer 効果とは、Christian と Boehmer¹³⁾ のいうように周囲の領域による“締めつけ作用”であって、それを間隙水圧のみで表現したものが式 (38) の右辺第二項に相当している。

g) 無限に長い円筒の圧密

式 (26) を式 (27) に代えて f) と同様に変位 $V_r(r, s)$, 間隙水圧 $u(s)$

$$V_r(r, s) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dr} \int_{r=s}^r \ln \frac{1}{r} dc = \frac{s}{r} \quad (r \geq s) \left. \vphantom{\int_{r=s}^r} \right\} \\ = 0 \quad (r < s) \left. \vphantom{\int_{r=s}^r} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

$$u(s) = 2\mu \frac{s}{R^2} \dots\dots\dots (41)$$

を得る. ここに, c は円周を示す. これより円の圧密の方程式が次のように求められる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \nabla^2 u - \frac{2k\mu}{r_w} \frac{1}{R^2} \int_0^R s \nabla^2 u(s) ds \dots\dots (42)$$

h) 球形の空洞を有する三次元外部領域の圧密 (図-7 参照)

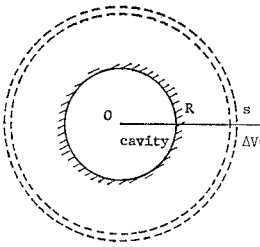


図-7 球形の空洞を有する三次元外部領域の圧密

f) と同じような体積ひずみ $\theta = \delta(r, s)$ を与えても, 境界 $r=R$ での式 (26) による変位, 応力は生じない. よって, 境界の存在に伴う間隙水圧の発生はなく, この場合の圧密は, Sills が指摘しているように Terzaghi の方程式 (20) に

より支配される. ただし, 境界 $r=R$ に様な内圧 p を作用させたとき, 生じる変形はせん断成分のみであって, 間隙水圧は発生しない ($u_r(r) = -\frac{p}{4\mu} \frac{R^3}{r^2}$ であり, $\theta \equiv 0$).

すなわち, 内圧は圧密現象とはまったく無関係であり, ここでいう圧密とは, 内圧を作用させること以外の方法で, 間隙水圧を与えたときにのみ生じるものである.

i) 円形の空洞を有する二次元外部領域の圧密

式 (26) を式 (27) に代えて, h) とまったく同じ結果が導かれる.

j) 中空球の圧密 (図-8 参照)

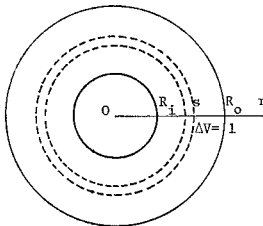


図-8 中空球の圧密

中心 O , 内径 R_i , 外径 R_o の中空球領域においても, h) の場合と同様に内周 $r=R_i$ の存在による直接的な間隙水圧の発生はなく, 外周 $r=R_o$ によるもののみを考慮して圧密の方程式 (32) の具体的な形を求めれば

よい. 次の二つの場合について簡単に説明する.

i) 内周, 外周ともに応力境界の場合

境界が存在しないとして $\theta = \delta(r, s)$ を与えたとき,

式 (35) と同じ変位が生じ, 内周および外周での境界条件 (\tilde{B}) はそれぞれ $T_r=0$ および $T_r=4\mu \frac{s^2}{R^3}$ となる. これらの境界条件のもとで中空球に生じる間隙水圧は一樣に

$$u(s) = 4\mu \frac{s^2}{R_o^3 - R_i^3} \dots\dots\dots (43)$$

であって, 圧密を支配する方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \nabla^2 u - \frac{4k\mu}{r_w} \frac{1}{R_o^3 - R_i^3} \int_{R_i}^{R_o} s^2 \nabla^2 u(s) ds \dots\dots\dots (44)$$

が導かれる.

ii) 内周が応力境界, 外周が変位境界の場合

これも i) と同様にして内周および外周での境界条件 (\tilde{B}) がそれぞれ $T_r=0$ および $u_r = -\frac{s^2}{R_o^2}$ (中心より遠ざかろうとする変位) と求まる. これらにより中空球に生じる間隙水圧は一樣に

$$u(s) = -4\mu \frac{s^2}{R_i^3} \dots\dots\dots (45)$$

であって, 圧密を支配する方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \nabla^2 u + \frac{4k\mu}{r_w} \frac{1}{R_i^3} \int_{R_i}^{R_o} s^2 \nabla^2 u(s) ds \dots\dots (46)$$

が導かれる.

k) 無限に長い中空円筒の圧密

j) と同様にして以下の結果を得る.

i) 内周, 外周ともに応力境界の場合

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \nabla^2 u - \frac{2k\mu}{r_w} \frac{1}{R_o^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_o} s \nabla^2 u(s) ds \dots\dots\dots (47)$$

ii) 内周が応力境界, 外周が変位境界の場合

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \nabla^2 u + \frac{2k\mu}{r_w} \frac{1}{R_i^2} \int_{R_i}^{R_o} s \nabla^2 u(s) ds \dots\dots (48)$$

ここで, 外周が変位境界の場合, 式 (46), (48) のように圧密の方程式の右辺第二項の符号が正になることに注意する必要がある. これは式 (46) の導き方からわかるように境界条件 (\tilde{B}) による間隙水圧の発生が負である (圧密を促進する) ことに起因している.

4. 数値計算例

個々の場合に対する圧密の方程式 (32) の形が定まっても, それを解析的に解くことは容易でない. そこで, 式 (32) の一般的な数値計算法について述べ, いくつかの具体的な計算結果を記す.

間隙水圧 u のみを未知数として圧密現象を支配する式 (32) は, いわゆる発展方程式の形をしている. すなわち, ある時刻 t における u の分布が与えられれば, なんらかの代数的操作を施すのみで u の時間変化率が

定まるとい形式である。その意味で式 (32) は通常の熱伝導型方程式と同等のものであって、差分法、有限要素法などにより、空間的にいったん離散化してしまえば、次のような線形連立常微分方程式として近似される。

$$\frac{d}{dt} \underline{u} = W \cdot \underline{u} \dots\dots\dots (49)$$

ここに、 \underline{u} は離散化された有限個の間隙水圧を要素にもつ未知ベクトル、 W は時刻 t に依存しない正方マトリックスである。式 (49) は差分法によっても解くことが可能であるが、もっと直接的に解析解：

$$\underline{u}(t) = e^{Wt} \cdot \underline{u}_0 \dots\dots\dots (50)$$

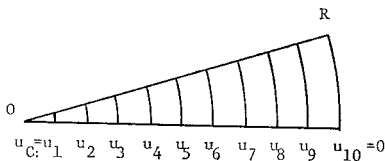
を求めることもできる。ここに、 \underline{u}_0 は \underline{u} の初期値であり、また、

$$e^{Wt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (Wt)^n \dots\dots\dots (51)$$

と定義される。しかも、このようにして各時刻 t に關する e^{Wt} をあらかじめ求めておけば、任意の初期値 \underline{u}_0 に対し式 (50) のような操作により解 $\underline{u}(t)$ を求めることができる。これらのことは、Biot の方程式 (1), (2) を式 (32) の形へ変換してはじめて可能なことである。

例一 球の圧密 (3.f 参照)

図一9 のように半径 R の球を中心より半径に沿って 10 等分し、 $\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}$ をもっとも簡単な三点差分に、積分を代数和にそれぞれおきかえて式 (38) を

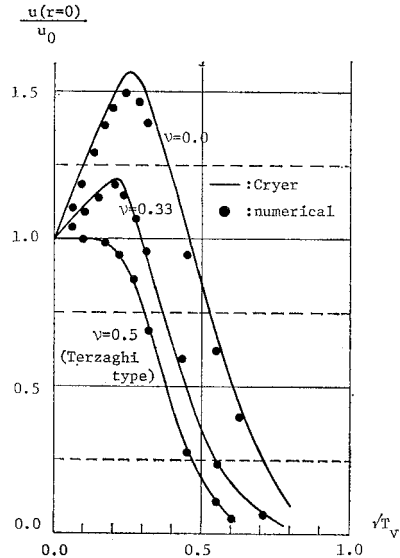


図一9 球の圧密の数値解析

表一 球の圧密 $\nu=0.33$

(a) マトリックス W ($4ku/r_w R^2$)									
							(各行の和)		
-200.0	200.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.7	17.4	(13.7)
50.1	-200.0	150.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.7	17.4	(13.7)
0.1	66.6	-200.0	133.0	0.0	0.0	0.0	-3.7	17.4	(13.7)
0.1	-0.1	75.0	-200.0	125.0	0.0	0.0	-3.7	17.4	(13.7)
0.1	-0.1	0.0	80.0	-200.0	120.0	0.0	-3.7	17.4	(13.7)
0.1	-0.1	0.0	0.0	83.3	-200.0	117.0	-3.7	17.4	(13.7)
0.1	-0.1	0.0	0.0	0.0	85.7	-200.0	111.0	17.4	(13.7)
0.1	-0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	87.5	-204.0	130.0	(13.7)
0.1	-0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	85.2	-183.0	(-97.2)

(b) $T_v=0.01$ における e^{Wt}									
0.216	0.373	0.259	0.110	0.033	0.008	0.002	0.007	0.081	
0.094	0.301	0.321	0.186	0.072	0.020	0.005	0.008	0.081	
0.029	0.142	0.308	0.287	0.155	0.057	0.017	0.010	0.081	
0.007	0.046	0.161	0.308	0.269	0.140	0.051	0.021	0.083	
0.002	0.011	0.056	0.172	0.308	0.258	0.131	0.053	0.092	
0.001	0.002	0.014	0.062	0.179	0.308	0.252	0.131	0.121	
0.000	0.000	0.003	0.016	0.067	0.184	0.309	0.251	0.189	
0.000	0.000	0.000	0.003	0.018	0.070	0.188	0.309	0.280	
0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.018	0.068	0.172	0.264	

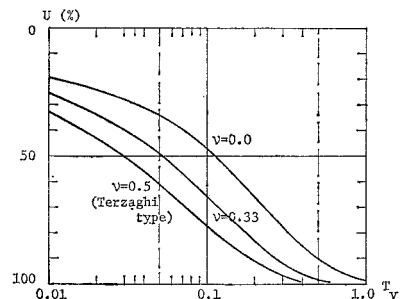


図一10 球の中心における間隙水圧の推移

数値化すれば、式 (49) の W に相当するマトリックスは表一(a) のようになる。ただし、Poisson 比 $\nu=0.33$ の場合であって、排水に関する境界条件 ($\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{r=0} = 0, u|_{r=R} = 0$) が $u_c = u_1, u_{10} = 0$ として含まれており、未知数は全部で 9 個である。マトリックス W の各行の和 (かっこの中) をみれば、内部で一様な間隙水圧が作用したとき球の内部の間隙水圧が上昇するのがわかる。そして、式 (51) に従って計算した時間係数 $T_v (c_v t / R^2) = 0.01$ での e^{Wt} 値が同表 (b) に記されている。このようにして得た結果を以下に述べるが、すべて u の初期値は内部で一様に u_0 とする。

図一10 は、時間係数 T_v の平方根と中心 O における間隙水圧の関係を示している。実線は Cryer の解析解⁷⁾ より求めたもの、点が数値計算したものである。後者において Mandel-Cryer 効果による間隙水圧の上昇がやや少なくなっているものの、比較的粗い離散化としてはかなり良好な精度といえよう。

図一11 は圧密度-時間係数曲線である。



図一11 球の圧密度-時間係数曲線

図-12 は、各時間係数 T_v における間隙水圧（実線）および変位（破線）の分布形状を示したものである。ただし、変位 $u_r(r)$ は次式により求められる。

$$u_r(r) = u_{r,f}(r) - \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \int_0^r s^2 u(s) ds + \frac{2(1-2\nu)}{1+\nu} \frac{r}{R^3} \int_0^R s^2 u(s) ds \right] \dots (52)$$

ここに、 $u_{r,f}(r)$ は最終変位量である。上式の係数 $\lambda + 2\mu$ を一定と仮定したうえで Poisson 比 ν を 0.5 としたとき、形式的には変位を求めることができるが、それは物理的に不可能な量である。しかし、三次元無限領域の中に球を埋め込んだと考えれば、 $\nu=0.5$ の場合に相当する圧密を次のように理解することができる。いま、透水係数 k の十分大きい無限領域の中に、 k の小さい

球領域を考える。このとき、3.a) で述べたように全領域で Terzaghi の方程式が成立するが、 k の大きい外部領域では間隙水圧 u の消散が瞬時に起こるため実際は球の内部だけで圧密がみられる。すなわち、弾性定数が等しく、かつ透水係数のきわめて大きい外部領域と球とを結合して圧密を行ったと解釈すれば、それは Terzaghi の方程式 (20) に従い、形式的には $\nu=0.5$ の場合の球の圧密と一致する。ただし、初期において球がすべて受けもっていた境界での応力は、圧密の進行に伴う球の収縮のため外部領域に一部分配され、球自体に作用する外力は減少する。

以上のことは、球に限らず変位境界 S_u をもたない任意形状の領域についてもいえる。

例-2 無限に長い中空円筒の圧密 (3.k 参照)

図-13 のように (a) 内圧 p_i 、外圧 p_o ともに p に等しく変化しない場合 (式 (47))、(b) 内圧を一定とし、外周の変位を拘束した場合 (式 (48))、および (c) 例-1 で述べたように三次元無限領域に埋め込んで Terzaghi の方程式 (20) を用いて解析する場合を比較、検討する。ただし、(c) の場合に対する境界条件として結果的に、内圧 p_i は p として一定値、外圧 p_o は後述 (表-2 参照) するような時間的に変化していくものがそれぞれ対応するが、むしろ内外圧 p を作用させたあと、外部領域に結合したと考えるだけでよい。解法は例-1 と同様であるが、排水は内周 ($r=R_i$) のみで行われ、また、Poisson 比 $\nu=0.33$ とする。

図-14 は圧密度-時間係数曲線である。ここで、 $T_v = c_v t / (2R_o)^2$ としている。注目すべきは、(a)、(c) では外径と内径の比 $n(R_o/R_i)$ の値が大きくなれば圧密の進行が遅くなるのに対し、(b) の場合では逆に速くなること

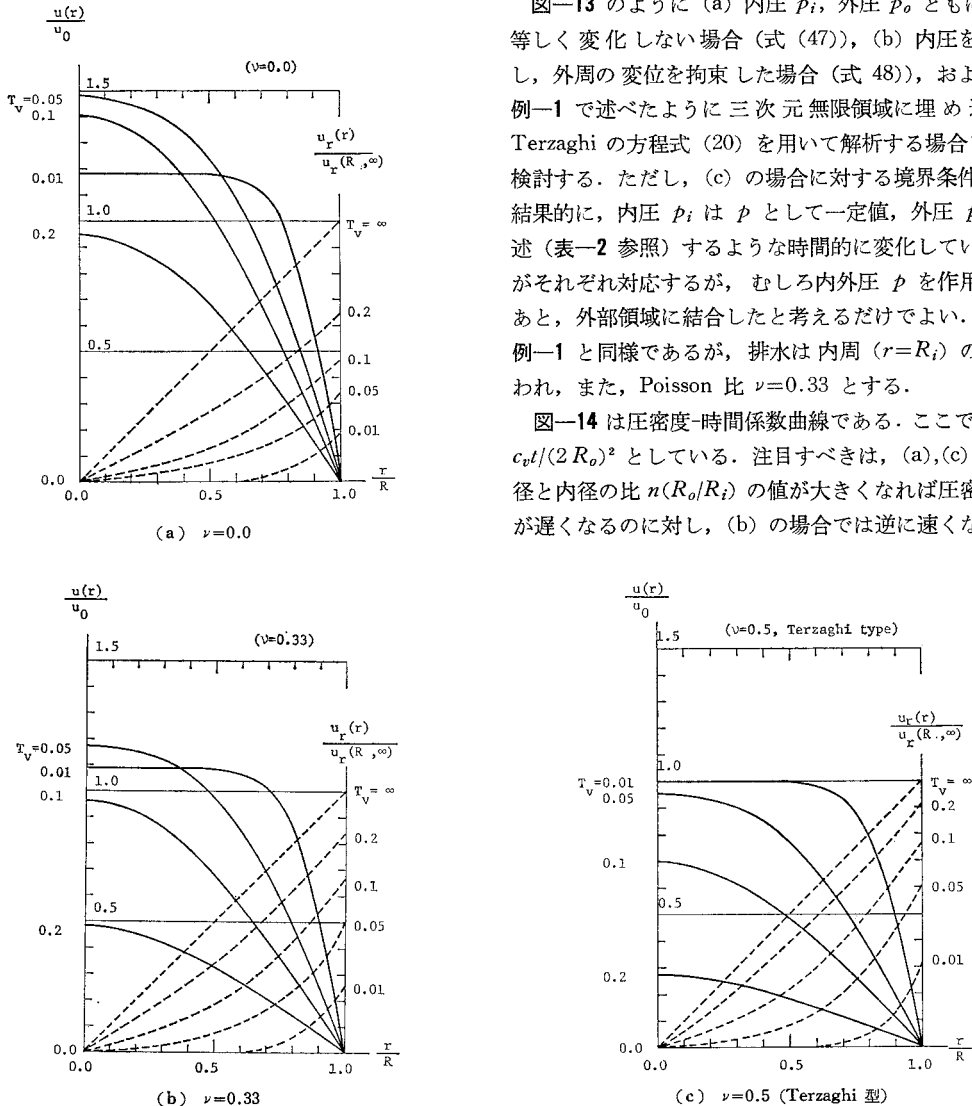


図-12 球の圧密における間隙水圧と変位の分布形状

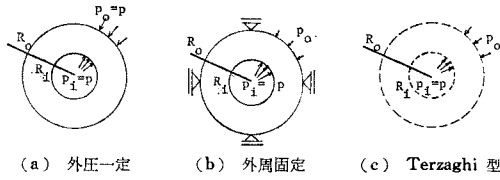


図-13 中空円の圧密の外周における条件

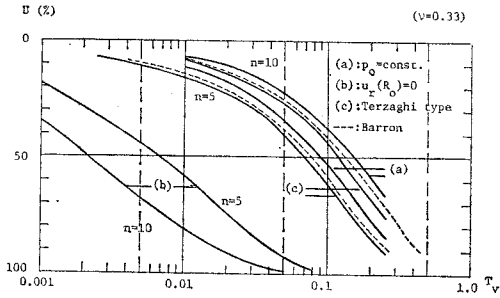


図-14 中空円の圧密-時間係数曲線

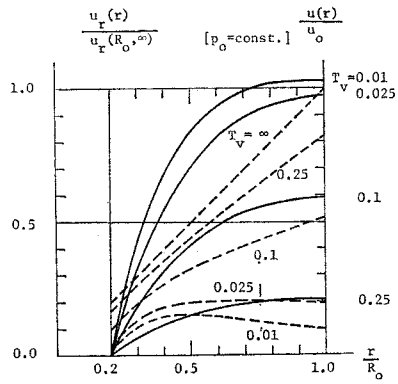
表-2 中空円の圧密における外圧の変化

		n=5	n=10
(a)	$p \rightarrow \begin{matrix} p \\ (t=0) \end{matrix}$ to $\begin{matrix} p \\ (t=\infty) \end{matrix}$	p	p
(b)	$p \rightarrow \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)n^2+1} p$	$0.14 p$	$0.04 p$
(c)	$p \rightarrow \frac{(1-2\nu)+n^2}{2(1-\nu)n^2} p$	$0.77 p$	$0.76 p$

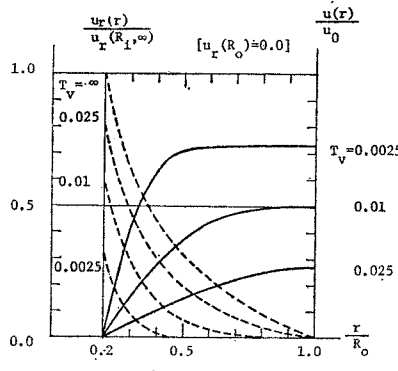
($\nu=0.33$)

である。すなわち、同じ時間係数 T_v に対しては、 n の大きさとともに圧密度が著しく増大する。このことは 3. k) の末尾でも注意したように境界条件 (\bar{B}) による間隙水圧の発生仕方による原因がある。すなわち、(a) および (c) の場合では外周が中心へ近づこうとするが、これを阻止するために (b) の場合には外側向きの強制変位を与えなければならない。ところがこれが内径 R_i の二乗に反比例する負の間隙水圧を発生させるからである。あるいは表-2 に記す外圧 p_o の変化をみても説明することができる。つまり (b) では、 n の大きさとともに外圧 p_o の低下が顕著になり、領域内の間隙水圧が力学的に軽減されている。すなわち、“負の Mandel-Cryer 効果”¹³⁾ の作用が働いて (b) の圧密の進行を著しく速くしているといえる。圧密完了後における平均有効主応力 σ_m' も、当然 (b) では n とともに小さくなる。要するに、外周の変位を拘束したときの圧密において、内径を大きくすることは圧密度を増大することにはならず、 σ_m' を増加させることになる*。また、(c) で外圧 p_o が低下するのは例-1 で述べたように外部領域がその一部を受けもつことによる。なお、図中の破線は (c) の

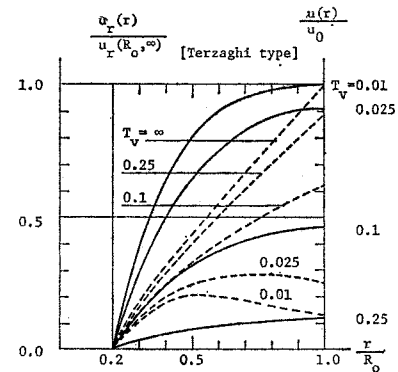
* ただし、この例では平面ひずみ条件(軸方向に固定)や内圧 p_i を一定とする条件などを仮定しているため、ここでの結果をそのままサンドドレーン工法の場合には適用できない。



(a) 外圧一定



(b) 外周固定



(c) Terzaghi 型

図-15 中空円の圧密における間隙水圧と変位の分布形状 ($n=5$)

場合 (Terzaghi の方程式) に対する Barron¹⁴⁾ の解であり、これより、ここで用いた数値計算法の精度が評価できる。

図-15 には各時間係数における間隙水圧(実線)と変位(破線)の分布形状が示されている。

例-3 有限要素モデル

関数 $\phi(x, X)$ は、有限要素法によっても容易に求めることができる。ここでは Christian と Boehmer¹³⁾ の方法に従った。たとえば、図-16 のようなモデルを考

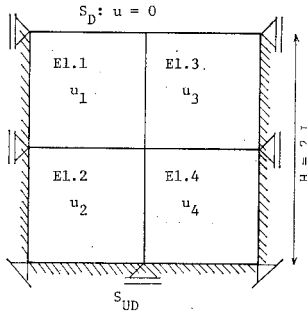


図-16 有限要素モデル

える。ただし、応力境界である領域の上端のみで間隙水の排出がなされ、他の三辺はなめらかで剛とする。また Poisson 比 $\nu=0.33$ とする。ある要素 i に単位の体積ひずみを与え、かつ他の要素の体積を不変に保つとき各

要素 j に生じる間隙水圧を求めればよい。こうして求めたマトリックス ϕ が表-3(a) に記されている。同表 (b) はこの場合のマトリックス W である。ここで一様な間隙水圧を仮定しても Mandel-Cryer 効果は生じないが、同表 (c) のような分布に対して要素 4 は、非排水的にあるにもかかわらず間隙水圧を上昇させようとする。

表-3 有限要素モデル

(a) マトリックス $\phi(\mu/L^3)$				
-9.45	5.80	5.45	-5.80	
5.80	-10.13	-5.80	6.13	
5.45	-5.80	-9.45	5.80	
-5.80	6.13	5.80	-10.13	
(b) マトリックス $W(4ku/\gamma_w H^2)$				
-49.05	26.85	37.05	-22.85	(各行の和)
39.13	-32.19	-35.13	28.19	(-8.00)
37.05	-22.85	-49.05	26.85	(0.00)
-35.13	28.19	39.13	-32.19	(-8.00)
(c) u と \dot{u} の関係				
$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} 33.05 \\ -39.13 \\ -53.05 \\ 35.13 \end{bmatrix}$	

5. Terzaghi の方程式のもつ意味

Rendulic⁽⁶⁾, Barron⁽⁴⁾ をはじめ多くの研究者により、Terzaghi の一次元圧密方程式の多次元問題への理論的な拡張が試みられてきた。ここでは熱伝導型をした多次元の Terzaghi の方程式のもつ意味について考察する。

Davis と Poulos⁽⁷⁾ が明らかにしているように、全応力 σ_m が不変であるなら、

$$\sigma_m = K\theta + u \dots\dots\dots(53)$$

を連続条件式 (5) に代入して Terzaghi の方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v' \nabla^2 u \dots\dots\dots(54)$$

を得る。ここに、 K は体積弾性定数、 $c_v' = \frac{kK}{\gamma_w}$ である。また、次元数によって σ_m と K の意味は異なる⁽⁸⁾。むろん圧密状態において σ_m が不変であることは一般にあ

りえない仮定であり、式 (54) は近似式の一つにすぎない。

一方、3.a) あるいは 4. の例-1 でも述べたように変位境界 S_u のない任意領域の圧密に対しても、力学的に等価でかつ透水係数のきわめて大きい外部領域と結合し無限領域の圧密として解釈すれば、Terzaghi の方程式 (20) が成立する。ただし、このときの c_v と上記の c_v' とは一般に異なり、一次元の場合だけ一致する。すなわち、一次元以外の熱伝導型の Terzaghi の方程式には 2 通りの近似として意味がある。1 つは全応力が不変とみなす場合、他の 1 つは外部領域からの力学的作用を無視する場合である。どちらの意味で熱伝導型方程式として近似するかは、個々の問題で判断しなければならないが、圧密係数の値が両者で異なることに注意する必要がある。特に一次元の場合においてのみ、2 通りの解釈が同じ厳密な結果を導く。熱伝導型の圧密方程式を一次元から多次元へ拡張する際、このことが著しく理論を複雑にしていると思われる。

6. 結 論

以上の考察の結果、Biot の方程式 (1), (2) に従う飽和粘土の圧密に関し、次のような結論が得られた。

(1) 圧密の最終状態を基準にして圧密中の状態をみれば、体積ひずみと間隙水圧の分布に一对一の線形関係がある。

(2) Biot の方程式は、間隙水圧を唯一の未知数とする微積分発展方程式 (12) あるいは (32) の形に変換することができる。

(3) 無限領域の圧密については Terzaghi の方程式 (20) がそのまま成立する。また、一般領域の圧密でも、力学的に等価でかつ透水係数のきわめて大きい外部領域と結合すれば、やはり Terzaghi の方程式 (20) が成立する。

(4) 一次元以外の Terzaghi の方程式には 2 通りの近似としての意味がある。1 つは平均全応力 σ_m が一定とみなす場合で、他の一つは (3) で述べたように変位境界のない領域のとき、外部領域からの力学的作用が無視しようとする場合である。ただし、両者で圧密係数は異なることに注意しなければならない。

(5) 同じ領域でも境界条件の与え方により正負の Mandel-Cryer 効果が生じる。

(6) 圧密の方程式 (12) あるいは (32) を数値解析するとき、いったん空間的に離散化すれば常微分方程式となり、時間方向には解析解が求まる。

最後に、本研究の遂行にあたり、終始暖かいご指導と

ご助言を賜った 京都大学工学部 赤井浩一教授に深く感謝します。また、同 福井卓雄助手には貴重なご討議をいただいたことを記し、あわせて謝意を表します。

記 号

- c_v : 圧密係数 $\left(= \frac{2(1-\nu)\mu}{1-2\nu} \frac{k}{\gamma_w} \right)$
 c_v' : 圧密係数 $\left(= K \frac{k}{\gamma_w} \right)$
 e : 体積ひずみ
 K : 体積弾性定数
 k : 透水係数
 n : 中空円筒における外径と内径の比 $\left(= \frac{R_o}{R_i} \right)$
 p_i, p_o, p : 中空球あるいは中空円筒に作用する内, 外圧およびそれらの値
 R : 球の半径
 R_i, R_o : 中空球あるいは中空円筒の内, 外径
 r : 半径方向の座標
 s : 外力あるいは変位の作用点における半径方向の座標
 T_i : 応力ベクトル
 T_v : 時間係数
 u : 間隙水圧
 u_i, u_r : i -軸方向および半径方向の変位
 $U_i(x, X)$: 斉次境界条件のもとで $u = \delta(x, X)$ を作用したときの変位
 $V_i(x, X)$: 無限領域に $\theta = \delta(x, X)$ を与えたときの変位
 $V_r(r, s)$: 無限領域に $\theta = \delta(r, s)$ を与えたときの半径方向の変位
 v_i : 圧密の最終状態よりみた変位
 W : 圧密の方程式を離散化したときの係数行列
 X, X_i : 外力あるいは変位の作用点およびその座標
 x, x_i : 領域内の任意点とその座標
 $\Gamma(x, X)$: 斉次境界条件のもとで $\theta = \delta(x, X)$ を与えたとき, 境界の存在により発生する間隙水圧
 γ_w : 間隙水の単位体積重量
 $\delta(x, X), \delta(r, s)$: δ -関数
 $\theta(x, X)$: 斉次境界条件のもとで $u = \delta(x, X)$ を作用したときに発生する間隙水圧
 θ : 圧密の最終状態よりみた体積ひずみ
 λ, μ : Lamé の定数

ν : Poisson 比

σ_m, σ_m' : 平均全応力および平均有効応力

$\Phi(x, X)$: 斉次境界条件のもとで $\theta = \delta(x, X)$ を与えたときに発生する間隙水圧

参 考 文 献

- 1) Biot, M.A.: General Theory of Three-dimensional Consolidation, Journ. Appl. Phys., Vol. 12, pp. 152-164, 1941.
- 2) たとえば, 赤井浩一・田村 武: 多次元圧密問題に対する非線形応力-ひずみ理論の適用, 京大防災研究所年報, 19-B, pp. 19-29, 1976.
- 3) McNamee, J. and Gibson, R.E.: Plane Strain and Axially Symmetric Problems of the Consolidation of a Semi-infinite Clay Stratum, Q. Journ. Mech. Appl. Math., Vol. 13, Part 2, pp. 210-227, 1960.
- 4) Schiffman, R.L. and Chen, T.-F.: An Analysis of Consolidation Theories, Proc. ASCE, Vol. 95, SM 1, Jan., pp. 282-312, 1967.
- 5) 山口柏樹・村上幸利: 有限粘土層の多次元圧密について, 土木学会論文報告集, 第 204 号, pp. 71-82, 1972.
- 6) Yamaguchi, H. and Murakami, Y.: Plane Strain Consolidation of a Clay Layer with Finite Thickness, Soils and Foundations, Vol. 16, No. 3, pp. 67-79, 1976.
- 7) Cryer, C.W.: A Comparison of the Three-dimensional Consolidation Theories of Biot and Terzaghi, Q. Journ. Mech. Appl. Math., Vol. 16, Part 4, pp. 401-412, 1963.
- 8) 吉国 洋: 三次元圧密の基礎理論, 土木学会論文報告集, 第 201 号, pp. 87-98, 1972.
- 9) 吉国 洋: 間隙水圧を中心とした圧密論の再構成, 土木学会論文報告集, 第 212 号, pp. 41-50, 1973.
- 10) Sills, G.C.: Some Conditions under which Biot's Equations of Consolidation Reduce to Terzaghi's Equation, Géotech., Vol. 25, Tech. Note, pp. 129-132, 1975.
- 11) 増田久弥: 発展方程式, 紀伊國屋書店, 1975.
- 12) Sokolnikoff, I.S.: Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1956.
- 13) Christian, J.T. and Boehmer, J.W.: Plane Strain Consolidation by Finite Elements, Proc. ASCE, SM 4, July, pp. 1435-1457, 1970.
- 14) Barron, R.A.: Consolidation of Fine-grained Soils by Drain Wells, Trans. ASCE, Vol. 113, pp. 811-835, 1948.
- 15) Yoshikuni, H. and Nakanodo, H.: Consolidation of a Clay Cylinder with External Radial Drainage, Soils and Foundation, Vol. 15, No. 1, pp. 17-27, 1975.
- 16) Rendulic, L.: Porenziffer und Porenwasserdruck in Tones, Bauingenieur, Vol. 17, pp. 559-564, 1937.
- 17) Davis, E.H. and Poulos, H.G.: Rate of Settlement of Two- and Three-dimensional Conditions, Géotech., Vol. 22, No. 1, pp. 95-114, 1972.

(1977.4.4・受付)