

## 流域水の挙動に関する変分原理の実用化と問題点

PROBLEMS ON THE APPLICATION OF THE VARIATIONAL  
PRINCIPLE WITH RESPECT TO THE HYDROLOGIC  
BEHAVIOUR OF BASINWIDE WATER

高木 不折\*・松林 宇一郎\*\*

By Fusetsu TAKAGI and Uichiro MATSUBAYASHI

## 1. 緒 言

流域水を構成する要素には、直接流出を対象とすれば、斜面（中間層を含む）と河道、地下水流出を対象とすれば、地下水帯と河道に大別される。これらの場所的分布状態は上流山地部あるいは下流平地部などで異なるが、これらの場に存在する種々の流域水は、多かれ少なかれ、なんらかの意味で相互に影響し合い、その結果として流出現象を起こしている。

高木は、地下水流出を主対象として、このような流域水全体としての挙動を、各成分水の干渉も含めて1つの変分原理に表現し<sup>1)</sup>、その物理的意義を明らかにするとともに<sup>2)</sup>、応用例を示した<sup>3)</sup>。この変分原理は流域内部での流出現象を分布系として表現しているのので、種々の現象の解析、あるいは工学的諸問題への応用の可能性が考えられるにもかかわらず、その数学的表現の特殊さのため、これまでの応用例は、地下水流出の低減特性についての考察一例にすぎない<sup>1), 2)</sup>。筆者らは、現在、上記の変分原理を水文学的な諸問題の解明にまで結びつけるべく一連の研究を行っている<sup>4)</sup>。

本研究は、こうした研究の第一歩として、この変分原理を実用化するに際して起こる諸問題について扱ったものである。したがって、本研究で扱うことからは、主としていわゆる数値計算上の問題である。変分原理としての表現は、なんらかの試験関数を媒介とした未知定数の決定を通じて近似解を求めるのに非常に都合がよい。ただ、この場合の試験関数が実際の解との間にあまり大きな差があれば、得られた近似解は物理的にはまったく無意味になり、はなはだしい誤差を生むことになる。いかにすれば、ここで扱う問題は、流出系を対象とするとき、どのような試験関数を用いるかということがらに

帰す。

一方、変分原理は有限要素法の応用にも適している。本研究では、試験関数による方法と有限要素法の両者を用い、一部に解析解とも比較しつつ、相互の干渉も含めて流域成分水の挙動について数値解析を試みた。

ここで対象とした力学系は、河川と水平な地下水帯の結合系、河川と斜面内地下水帯の結合系という2つである。前者は、主として流域下流部の現象を想定しているが、このような系では河川水と地下水とは互いに干渉し合っているであろう。また、山間部に多いと思われる後者では斜面内地下水帯から河川への一方向的な流れとなっている系である。

以上のように、本研究の主眼点は計算手法の開発であって、試験関数の関数形と解析による誤差を明らかにし、さらに今後なお検討せねばならない諸問題について論及した。また、この方法では系を分布パラメーター系として扱っており、本研究の結果は第1近似とはいえ水文量の時間的・空間的分布に関する問題に適用される可能性があることを指摘した。

## 2. 変分原理と境界の扱い

(1) 変分原理<sup>2)</sup>

まず、本研究の基礎となる変分原理について触れておこう。いま、Fig. 1に示す1つの力学系を考える。この系は河川（領域  $S$ ）と地下水帯（領域  $G$ ）からなっており、それぞれの領域の水は相互

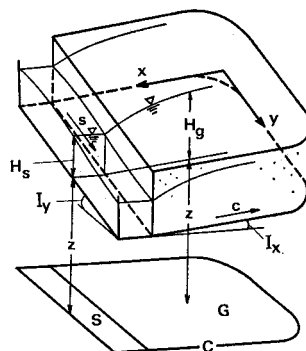


Fig. 1 Kinematical system

\* 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部

\*\* 学生会員 工修 名古屋大学大学院博士課程（後期課程）

に干渉しつつ、系全体として挙動しているものとする。  
このとき、系全体としての挙動は、

$$\delta v = 0 \dots\dots\dots (1)$$

と定式化される。ここで汎関数  $v$  は、

$$v = \int_G \mathcal{L}_g dx dy + \int_S \mathcal{L}_s ds \dots\dots\dots (2)$$

であり、また、 $\mathcal{L}_g, \mathcal{L}_s$  は  $G$  と  $S$  の local potential とよばれ、

$$\mathcal{L}_g = r(H_g + z) \frac{\partial H_g^*}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ kH_g^* \left( \frac{\partial(H_g + z)}{\partial x} \right)^2 + kH_g^* \left( \frac{\partial(H_g + z)}{\partial y} \right)^2 \right\} - r(H_g + z) \dots (3)$$

$$\mathcal{L}_s = B_s(H_s + z + \epsilon) \frac{\partial H_s^*}{\partial t} + \frac{2}{3} \frac{B_s}{n} H_s^{*5/3} \left( -\frac{\partial(H_s + z + \epsilon)}{\partial s} \right)^{1/2} \dots (4)$$

で与えられる。上式中および Fig. 1 中の諸記号は以下のとおりである。

- $t$ : 時間
- $x, y$ : 地下水帯にとった直角座標
- $s$ : 河川の流れ方向にとった距離
- $C, c$ : 河川以外の地下水帯の境界  $C$  と  $C$  に沿ってとった距離  $c$  (反時計回りを正)
- $I_x$ : 地下水帯不透水層の  $x$  方向の勾配
- $I_y$ : 地下水帯不透水層の  $y$  方向の勾配かつ河床勾配
- $H_g, H_s$ : 地下水深  $H_g$ , 河川水深  $H_s$
- $z$ : 基準面から測った不透水層、河床の高さ
- $k$ : 地下水帯の透水係数
- $r$ : 地下水帯の有効間隙率
- $n$ : マニングの粗度係数
- $B_s$ : 河川の幅
- $\epsilon$ : 河水の速度水頭
- $r$ : 地下水帯への水供給強度

ここで、式 (3), (4) の  $H_g^*, H_s^*$  は現実に起こる水深分布を意味しており、変分演算に際しては定数とみなされ、変分は  $H_g, H_s$  のみについて行われる。この意味で、これは限定形の変分原理ということができ、式 (1) は次の補助条件とともに用いなければならない。

$$\left. \begin{aligned} H_g(x, y, t) &\equiv H_g^*(x, y, t), \\ H_s(s, t) &\equiv H_s^*(s, t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

(2) 境界の取り扱いについて

まず、一般に境界条件には、i) 水位で与える場合と、ii) 流量で与える場合の 2 通りがあることを念頭においておこう。式 (1) に式 (3), (4) を用いて実際に変分計算を行うと次式が得られる。

$$\int_G \left[ r \frac{\partial H_g^*}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ kH_g^* \frac{\partial(H_g + z)}{\partial x} \right\} \right. \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ kH_g^* \frac{\partial(H_g + z)}{\partial y} \right\} - r \left. \right] \delta H_g dx dy \\ & + \int_S \left[ B_s \frac{\partial H_s^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{B_s}{n} \left( -\frac{\partial(H_s + \epsilon + z)}{\partial s} \right)^{1/2} \right\} \right. \\ & + kH_g^* \frac{\partial(H_g + z)}{\partial x} \frac{dy}{ds} \\ & - kH_g^* \frac{\partial(H_g + z)}{\partial y} \frac{dx}{ds} \left. \right] \delta H_s ds \\ & - \int_C \left[ -kH_g^* \frac{\partial(H_g + z)}{\partial x} \frac{dy}{dc} \right. \\ & + kH_g^* \frac{\partial(H_g + z)}{\partial y} \frac{dx}{dc} \left. \right] \delta H_g dc \\ & - \left[ \frac{B_s}{n} H_s^{*5/3} \left( -\frac{\partial(H_s + \epsilon + z)}{\partial s} \right)^{1/2} \delta H_s \right]_{\text{upstream}}^{\text{downstream}} \\ & = 0 \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで、 $\delta H_g, \delta H_s$  は任意であるので、式 (5) の補助条件を用いると、上式左辺第 1 項より地下水の流れについての基礎方程式が得られ、第 2 項より河水の基礎方程式が導かれる。この河水の式にあっては、第 2 項の積分の最後の 2 つの項が、地下水帯より、あるいは地下水帯への流出入流量に相当している。

さて、式 (6) 最後の 2 つの積分が境界に関連する項である。実際の計算などにあたって、水位で境界条件を与える場合については、その条件を満たすように試験関数の関数形を決定すればよい。他方、境界条件を流量で与える場合については、境界での水位は指定されず、境界でも  $\delta H_g, \delta H_s$  は任意の値を取り得るとすると、式 (6) 最後の 2 つの積分が 0 であるためには、境界での流れ flux が無い場合に対応し、しかるべき境界での流量条件を与えることができない。しかし、この困難は次のように境界での流量条件を汎関数の内に組み込むことによって除かれる<sup>4)</sup>。

$$v = \int_G \mathcal{L}_g dx dy + \int_S \mathcal{L}_s ds + \int_C q_c(H_g + z) dc + [Q_s(H_s + \epsilon + z)]_{\text{upstream}}^{\text{downstream}} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $q_c$  は地下水帯の境界における単位幅あたりの流量であり、系外への流出を正とする。 $Q_s$  は河川上下流端における流量で、これら  $q_c, Q_s$  は流量境界条件の場合にあらかじめ与えられるものである。汎関数のこのような書き換えは、この変分原理の本質についてはもちろんのこと水位を与える境界条件の取り扱いについてもなんらの変化ももたらさないことは、簡単な計算によってすぐ理解されるであろう。

3. 解析の方法

(1) 試験関数

変分法を用いた微分方程式の近似解法は、あらかじめ

用意された未知試験関数に含まれる未知パラメーターの値を汎関数の停留性を通じて決定するものである。その場合、未知関数  $F$  をある関数列  $w_i(x)$  の 1 次結合

$$F(x) = \sum_{i=1}^m a_i w_i(x) \dots\dots\dots (8)$$

で表現すると、Ritz 法のような方法になり、有限要素近似

$$F(x) = \frac{F_i - F_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) + F_{i-1} \left\{ \dots\dots (9) \right.$$

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i=1, \dots, m$$

とすると、いわゆる有限要素法となる。これらの場合未知パラメーターは、前者では係数  $a_i$  であり、後者では各節点における関数値  $F_i$  である。

さて、試験関数に要求される条件は、上式中の  $a_i$  を適切に選んだとき、解を十分に表現しうだけの flexibility を持つことであり、そのためには、関数列  $w_i(x)$  は完全系であることが望ましい。すなわち項数  $m$  を大きくするとき、この解が厳密解に収束することである。しかし、ここで扱う対象が流域水の挙動というマクロな現象なので、実際には許される精度内で比較的簡単な試験関数を用いることにする。

試験関数に要求されるいま 1 つの条件は境界に関するものである。境界での水位指定の条件は試験関数に組み込まねばならないが、流量指定の条件は式 (7) の型式の汎関数を用いることによって自動的に満たされる。また、水を通さない境界に対しては、境界での水面勾配が水位を零とすればよいことはいうまでもない。

有限要素近似の場合では、flexibility を要素分割の仕方でも考慮する点で少し異なりはするが、上記のことから試験関数法の場合とだいたい同じ基本に立てばよい。なお、試験関数の形式は解の形をある程度規定してしまうので、その選択にあたっては、対象とする現象に応じて注意深い配慮が必要となる。

(2) 未知パラメーターの決定

試験関数法、有限要素法をまとめて扱うため、ここでは、前者の  $a_i$  (式 (8)) と後者の  $F_i$  (式 (9)) を統一して  $a_i$  と表わそう。また、式 (3), (4) の現実起こる水深  $H_g^*$ ,  $H_s^*$  に対してのパラメーターを  $a_i^*$  で表わすことにする。このようにすれば、試験関数を用いた汎関数は  $a_i, a_i^*, \frac{\partial a_i^*}{\partial t}$  によって、

$$v = v\left(a_i, a_i^*, \frac{\partial a_i^*}{\partial t}\right) \dots\dots\dots (10)$$

の形式になる。そして、変分原理を満たすべき条件式として、次の  $m$  個の方程式が得られる。

$$\frac{\partial v}{\partial a_i} = \varphi_i\left(a_i, a_i^*, \frac{\partial a_i^*}{\partial t}\right) = 0, \quad i=1, 2, \dots, m \dots\dots\dots (11)$$

ここで、補助条件式 (5) によって、 $a_i \equiv a_i^*$  とおくと、式 (11) は、

$$\psi_i\left(a_i^*, \frac{\partial a_i^*}{\partial t}\right) = 0, \quad i=1, 2, \dots, m \dots\dots\dots (12)$$

と書きかえられる。

この  $m$  個の式が  $m$  個の未知数  $a_i^*$  を定める連立方程式となるが、これらは  $a_i^*, \frac{\partial a_i^*}{\partial t}$  を含んでおり、一般的には非線形構造をしている。この非線形性と時間微分項のため、実際の解法は少々複雑となる。この困難を避けるため、まず、時間微分項については差分法を用いた。すなわち、1 次あるいは 2 次の差分式<sup>5)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a_i^*}{\partial t} &\equiv \frac{a_i^* - \hat{a}_i^*}{\Delta T}, \\ \frac{\partial a_i^*}{\partial t} &\equiv -\frac{\partial \hat{a}_i^*}{\partial t} + 2\frac{a_i^* - \hat{a}_i^*}{\Delta T} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

を用いた。上式中、記号  $\hat{\phantom{a}}$  は 1 time-step 前の値を示している。この場合、差分間隔の決定にあたっては、種々の予備計算の結果と、数値計算の安定性とを考慮し、計算に困難を生じないような  $\Delta T$  を採用した。式 (12) を扱ううえのいま 1 つの難点である非線形性については、非線形連立方程式の解法の 1 つ、くり返し法である Newton-Raphson 法<sup>6)</sup>を用いた。

4. 水平な地下水帯と河川の結合系

本節で対象とする力学系は、水平な地下水帯と河川とからなっており、河川水位と地下水位の関係いかんで、相互に干渉が起こり得る。いわゆる河川中下流部の問題である。その取り扱いにあたって、まず、水平な地下水帯のみを取り上げ、地下水の挙動に対する試験関数の基本形とその精度を検討し、その結果を基礎に、上記の河川との結合系の解析を行った。

(1) 地下水帯の解析

a) 試験関数

Fig. 2 は、ここで扱う現象の物理モデルである。第 1 段階として、地下水帯は水平  $x$  方向 1 次元とし、長さは  $L_x$  とする。境界条件はその一端 ( $x=0$ ) で水平方向の流れはなく、他端 ( $x=L_x$ ) で水位が時間関数として与えられるものとする。

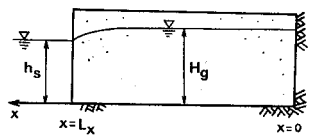


Fig. 2 Aquifer model

この種の問題は、これまで解析的に扱われており、系が線形と仮定しうる場合には、解析解はフーリエ級数の形式で得られる場合が多い。こうしたことから、および上記の境界条件を勘

案して、ここでは試験関数系として余弦関数を用いる。

$$H_g(x, t) = h_s(t) + \sum_{i=1}^m A_i(t) \cos \frac{(2i-1)\pi}{2L_x} x \quad \dots\dots\dots(14)$$

上式中、 $h_s(t)$  は境界条件  $h_s(t) \equiv H_g(L_x, t)$  である。

計算に用いた汎関数は式 (7) ( $\mathcal{L}_g$  は式 (3)) のうち地下水に関する部分である。系が  $x$  方向 1 次元であるから local potential  $\mathcal{L}_g$  のうち  $y$  に関する微分項はない。さらに、 $x=0$  における境界では、 $x$  方向の流れ flux がないので、式 (7) で  $q_c=0$  となる。こうして、扱う汎関数は、

$$v = \int_G \left[ r(H_g + z) \frac{\partial H_g}{\partial t} + \frac{1}{2} k H_g \left( \frac{\partial(H_g + z)}{\partial x} \right)^2 - r(H_g + z) \right] dx \quad \dots\dots\dots(15)$$

となる。

一方、この数値解の精度を検討するために解析解を求め両者を比較検討した。解析解としては、線形近似した微分方程式

$$r \frac{\partial h_g}{\partial t} = k \bar{H}_g \frac{\partial^2 h_g}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots(16)$$

の解を用いた。 $\bar{H}_g$  は各時刻における平均水位であり  $h_g$  はこの  $\bar{H}_g$  よりの変位である。この  $\bar{H}_g$  は計算の各時間ステップで、前の計算結果によって少しずつ変化させ、できるだけ現実を忠実に表わすように工夫した。 $k \sim k+1$  時間ステップでの解析解は、

$$H_{gk, k+1}(x, t) = h_{s, k+1} + \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)\pi}{2L_x} x$$

$$\times \frac{4 \Delta \tilde{h}_{k+1} (-1)^i}{(2i-1)\pi} \left\{ 1 - \frac{t}{\Delta T} + \frac{1}{p \Delta T} (1 - e^{-pt}) \right\} \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$p = \frac{k \bar{H}_g}{r} \left( \frac{(2i-1)\pi}{2L_x} \right)^2, \quad 0 \leq t \leq \Delta T$$

$$\Delta \tilde{h}_{k+1} = \Delta h_{k+1} + \Delta \tilde{h}_k \frac{1}{p \Delta T} (1 - e^{-p \Delta T})$$

である<sup>6)</sup>。

b) 計算結果とその考察

変分法による計算結果と解析解式(17)の一例を Fig. 3, 4 に示す。両者を比較するために、式 (14), (17) の余弦関数の項数を両者とも  $m=9$  としてある。この2つの図を比較すると、両者の結果はほとんど一致していることがわらう。すなわち、この2つは同程度の近似解であるといつてよいであろう。

さて、Fig. 3, 4 をもう少し詳しく観察すると、両者とも、時間がある程度経過すると、 $x$  が大きい領域、すなわち河川に近い領域で解が振動していることがみられる。これは、不連続な関数をフーリエ級数で表現しようとするとき、不連続点の近傍で現われる「ギブスの現象」と同種のものである<sup>7)</sup>。項数を増すに従って、この振動領域は境界近くの狭い範囲に移ってゆき、それと同時に解の近似度はよくなってゆくが、振動自体は残ることなどが確認された。

このように、式 (14) の試験関数は境界近傍で誤差を含むものの、一応の精度で解を表現しうることが示される。

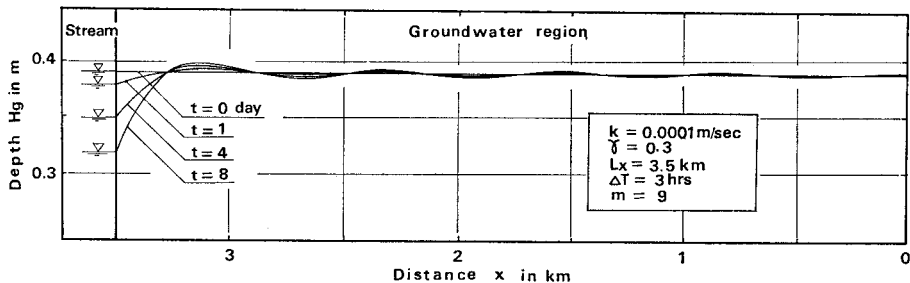


Fig. 3 Water depth distributions by means of trial functions

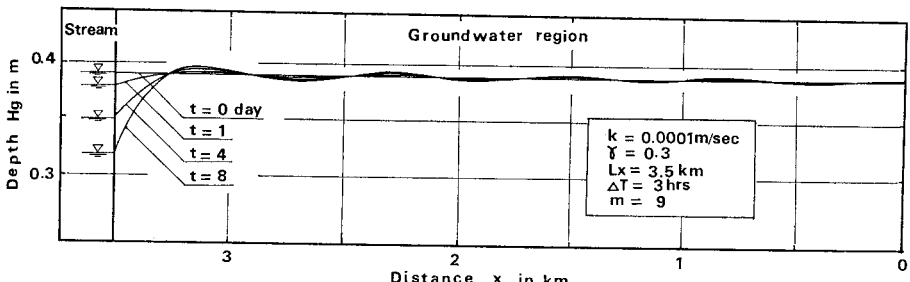


Fig. 4 Water depth distributions by means of analytical calculations

(2) 河川と水平地下水帯の結合系

a) 試験関数

前節では地下水帯のみを扱った。本節では、前節の結果を基礎として、河川と水平地下水帯の結合系を扱う。この結合系をモデルとして示したものが Fig. 5 である。

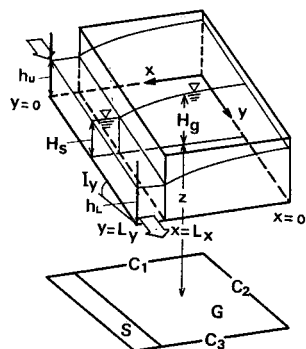


Fig. 5 Kinematical system with horizontal bed

間について場所的に直線近似で十分であることが確かめられた。一方、地下水の流れは1次元であると仮定しているので、前節の式(14)が用いられる。ただ、式(14)中の  $h_s$  は試験関数として取り扱うのである。すなわち、 $y$  方向の問題は河道の水位変化を通じて副次的に扱うのである。こうして、河川・地下水の挙動に関する試験関数をそれぞれ

$$H_s = h_L \frac{y}{L_y} + h_U \left(1 - \frac{y}{L_y}\right) \dots\dots\dots (18)$$

$$H_g = h_L \frac{y}{L_y} + h_U \left(1 - \frac{y}{L_y}\right) + \sum_{i=1}^m A_i \cos \frac{(2i-1)\pi}{2L_x} x \dots\dots\dots (19)$$

と表現した。ここで  $h_U, h_L$  はそれぞれ河川上・下流端の水深である。

b) 河水の local potential

前述の local potential 式(4)においては Manning

則を用いたが、これには  $H_s^{*5/3}$  などの複雑な形が含まれているので、実際の計算にあたって若干の困難が生じる。そこで、ここでは、流量と水位の関係を近似的に

$$Q = KH_s^2 \dots\dots\dots (20)$$

と仮定した。マンニング則と式(20)を河道のみの簡単な場合の計算結果と比較したところ、両者はほとんど一致した。式(20)は、流出といった問題を対象とする限り十分に許される近似式であると思われる。さらに、低水状態の河水などにあつては、速度水頭  $\epsilon$  の変化は小さく、変分原理における  $\epsilon$  は無視してもよい。以上のように考えると、河水に関する local potential は次のように書き改められる。

$$\mathcal{L}_s = B_s \frac{\partial H_s^*}{\partial t} (H_s + z) - KH_s^{*2} \frac{\partial (H_s + z)}{\partial s} \dots\dots\dots (21)$$

以下の計算では、有限要素法を用いる場合についてのみマンニング則による式(4)の local potential を用い、試験関数法による場合はすべて上記式(21)を用いた。

c) 境界条件, 初期条件

まず、低水流出の基本的な問題として、ここでは地下水帯への水供給  $r$  が無い流量低減状態を対象とした。そのために、河川の上流端では流量はより上流部からの流出の低減、すなわち指数低減をするものとする。実際の計算では、流量を式(20)によって水位に換算し、その水位によって河川上流端での境界条件を与える。河川下流端はこの力学系の挙動に従って水位および流量が定まる、いわゆる「たれ流し」状態であると考えた。この場合、式(7)の下流端での河川流量  $Q_s$  としては、式(20)を参考に、

$$Q_s = Kh^*L^2 \dots\dots\dots (22)$$

と表わす。この  $Q_s$  は河川下流端における境界条件を与えるものであり、変分に対して  $h^*$  は定数として扱う。

地下水帯については、Fig. 5 に示す3つの境界  $C_1, C_2, C_3$  がある。 $C_1$  は  $y=0, C_2$  は  $x=0, C_3$  は  $y=L_y$  の境界である。 $C_2$  は不透水、 $C_1, C_3$  では流出入があ

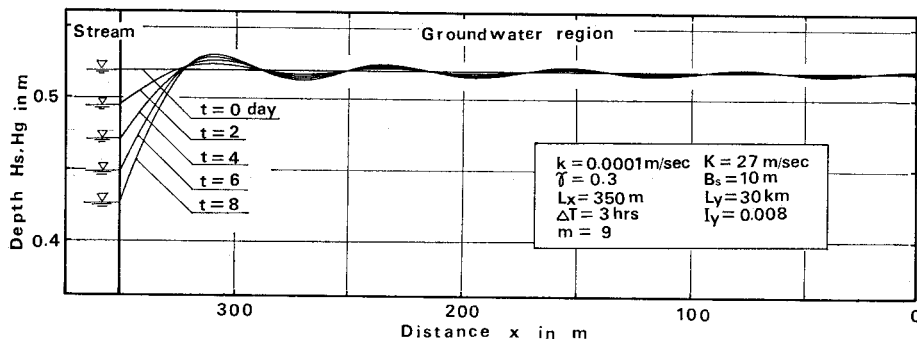


Fig. 6 Behaviour of stream flow and ground water flow at the section  $y=L_y/2$  (trial function method)

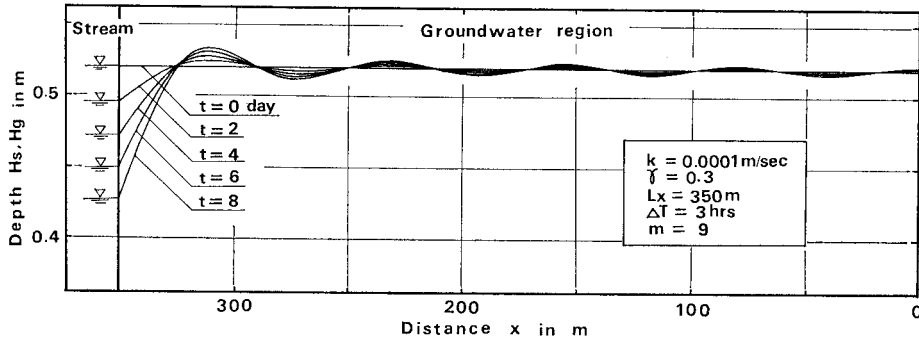


Fig. 7 Behaviour of stream flow and ground water flow at the section  $y=L_y/2$  (analytical solution)

り、汎関数式 (7) 中の  $q_c$  はそれぞれ次のように書かれる。

$$\left. \begin{aligned}
 &C_2 \text{ 上では, } q_c = 0 \\
 &C_1, C_3 \text{ 上では, } q_c = -kH_g^* \frac{\partial(H_g^* + z)}{\partial x} \frac{dy}{dc} \\
 &\quad + kH_g^* \frac{\partial(H_g^* + z)}{\partial y} \frac{dx}{dc}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

基準面より河床または不透水層までの高さ  $z$  は  $y$  のみの関数で、

$$z = I_y(L_y - y)$$

である。なお、汎関数は式 (7) であって、ここでの未知数は式 (18), (19) の  $A_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) および  $h_L$  である。

計算は 2 種類の初期条件について行った。1 つは河川・地下水帯がすべて一樣水深とするものであり、1 つはかなりの期間地下水帯への水供給が続いたのちでできた水深分布を初期状態としたものである。

d) 計算結果と考察

一樣水深を初期条件とする場合について、試験関数を用いて計算された水深分布の例を示したのが Fig. 6 である。この図から、2, 4, 6, 8 日経過後の地下水帯、河川の水位変化の概略をうかがうことができよう。一方、こうして求められた河川水位の変化状態を境界条件とすれば式 (17) によって準非線形の数値解が得られるが、その結果を示したのが Fig. 7 である。この 2 つの計算結果を比較する

と、両者はほとんどといってよいほど一致していることがわかる。すなわち、試験関数法によれば河川水、地下水をそれらの干渉もあわせて、かなりの精度で解きうる可能性があるといつてよいであろう。しかし、この場合の水深分布も、前節地下水帯のみの場合と同様な「波打ち」の傾向が残っている。この原因および試験関数式 (19) の項数を増やした場合の精度などについては、前節と同様である。

Fig. 8 (a), (b) は、それぞれ (a) 初期水深が河川・地下水とも一樣の場合、(b) 地下水帯への水供給によってできた水深分布を初期条件とする場合について、河川上、下流端における流入流量  $Q_i$  および流出流量

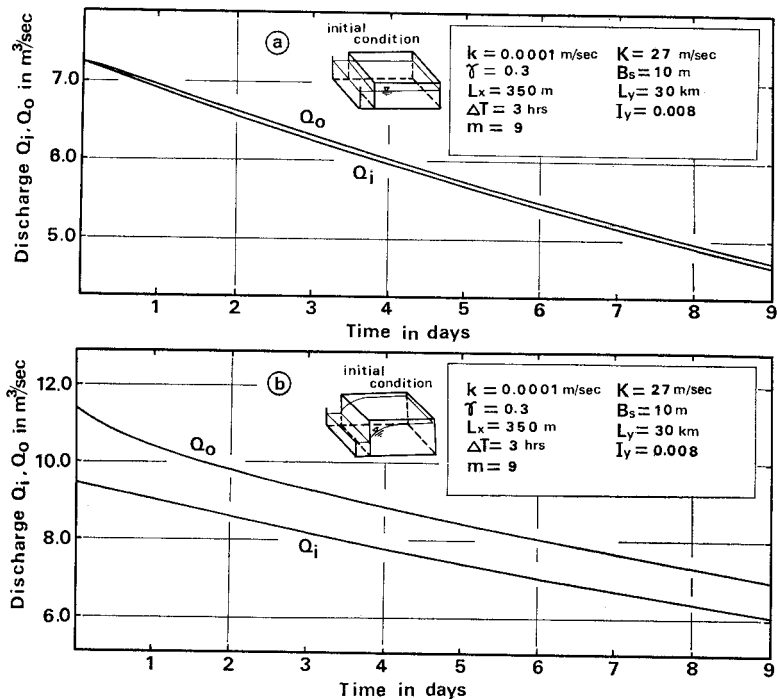


Fig. 8 Variation of stream discharge for the initial conditions with (a) and (b) as shown in the figure

$Q_0$  を重ねて画いたものである。この  $Q_0$  と  $Q_i$  の差は、地下水帯から河川への流出量と、上流端水深の低下に伴う河道の余剰貯留分の流出の 2 つからなるが、(a) では、これら両成分はほぼ同程度であり、(b) の場合には地下水帯からの流出成分が卓越することが認められた。

さて、上記の計算の精度を検討するために、各時間ステップ  $4T$  (3 hrs) ごとの水収支の状態を示したのが Fig. 9 (a), (b) である。図中  $\Delta S_s, \Delta S_g$  はそれぞれ河川、地下水帯の貯留量の増分であり、 $E$  は水収支上の誤差

$$E = \Delta S_s + \Delta S_g + (Q_0 - Q_i) 4T$$

である。これらの水収支とその誤差について見ると (a), (b) とともに誤差がかなり大きい。ここにあげた例では、試験関数式 (19) の項数は  $m=9$  としたが、この項数をより少ない  $m=5$  を用いて計算したところ、 $\Delta S_g, E$  も 10 倍も大きくなった。したがって、この誤差は地下水帯水面形が有限項の余弦級数で十分表現できていないための誤差であると考えられる。また、前節の考察からもわかるとおり、この表現性の悪さは特に河川との境界付近の水深急変部で著しく、試験関数法における 1 つの問題点として今後検討せねばならないことがらである。

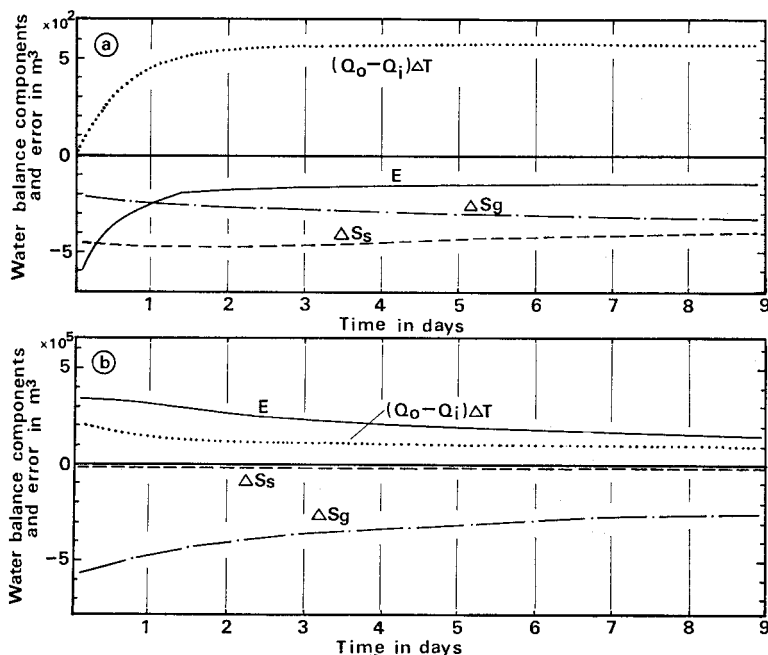


Fig. 9 Water balance and the error for whole the system

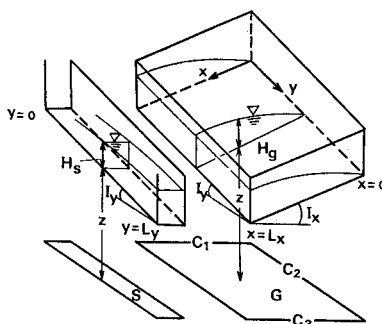


Fig. 10 Kinematical system with the inclined aquifer

### 5. 傾斜した地下水帯と河川の結合系

#### (1) 力学系

前章では平地地域における問題を対象としたが、本節では山間地流域の場合を想定し、傾斜した地下水帯末端が河川につながっている状態を対象とする。このような状態は必ずしも地下水流出ばかりではなく、その特殊な場合として、いわゆる A 層 (中間層) 内部の水の動き、中間流出の問題をも含むことになる。すなわち、本節で扱う力学系は、Fig. 10 に示すような傾斜した地下水帯と河川との結合系である。さらに、簡単のため最上流部に位置する流域を対象とし、河川上流端での流入流量はなく、地下水帯についても、 $x=0$  (地下水帯最上流端、境界  $C_2$ ) では不透水、また、境界  $C_1$  でも系外との水の出入はないものとし、境界  $C_3$  を通じてのみ流入が

存在するものと仮定する。また、地下水面には場所的に一律な水供給が 1 日間継続するものとする。

#### (2) 試験関数と汎関数

河川・地下水の挙動についての試験関数は上に述べた状態を合理的に表現せねばならない。河川については前節の場合とは異なり、斜面からかなりの水が流出するので、水面形は直線とはならず、河川の流れの方向 ( $y$  方向) でより高次の近似が必要とされる。地下水については、斜面上流端 ( $x=0$ ) の不透水条件は実際の現象、従来の研究などを考慮して、水深零とするのが合理的である<sup>9), 10)</sup>。地下水帯  $y$  方向では、その勾配は河床勾配とほぼ等しい状態を対象としたので、 $y$  方向の地下水の流れは斜面方向 ( $x$  方向) の流れと比較するとほとんど無視してもよい。このようなことから、地下水深は  $y$  方向に

同様として扱った。以上の考察のもとに、試験関数として、

$$\left. \begin{aligned} H_s &= \sum_{i=1}^{m_i} A_i(t) \left(\frac{y}{L_y}\right)^i \\ H_g &= \sum_{i=1}^{m_g} B_i(t) \left(\frac{x}{L_x}\right)^i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

ところで、式(24)の形式の試験関数を用いる場合の欠点は、地下水帯と河川との境界において水位の接続関係がうまく表現できないことである。しかしながら、地下水帯のみの場合の計算結果からもみられるように、河川との境界近傍での地下水深の場所的変化はかなり大きい。そこで、ここでは試験関数についてはあえて河川と地下水の水位の連続性を犠牲にし、その代り汎関数に流いて、河川、地下水の両者について境界における水のお出入の連続性が保たれるように工夫した。このような視点から、ここでは汎関数として次の形式のものを採用する。

$$\begin{aligned} v &= \int_C \mathcal{L}_g dx dy + \int_S \left\{ B_s \frac{\partial H_s^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (KH_s^{**}) \right\} \\ &\quad \times (H_g + z) dy + \int_{C_s} q_c (H_g + z) dc \\ &\quad + \int_S \left\{ \mathcal{L}_s + kH_g^* \frac{\partial (H_g^* + z)}{\partial x} (H_s + z) \right\} dy \\ &\quad + [Q_s (H_s + z)]_{\text{downstream}} \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathcal{L}_g$ ,  $\mathcal{L}_s$  は式(3)および式(21)であり、 $q_c$ ,  $Q_s$  は式(23)第2式、式(22)である。この汎関数で、第2積分と第4積分内の第2項が前記の目的のために導入されたものである。このように、汎関数を具体的な計算のため書き直したとはいうものの、これはあくまでも水深の不連続性、境界条件などの処理のためのものであって、本質的な意味では変分原理は本来のものど何の変わりもないことを付記しておく。

試験関数法による計算は、式(24)の試験関数を上に述べた汎関数に用い、この停留性として数値解析をすることができる。

(3) 有限要素法

この節の問題に対しては、試験関数法のほかに有限要素近似による方法を用いて計算した。有限要素法は、試験関数法と比較すると、節点水深がすべて計算すべき未知パラメータとなり、未知数が非常に多くなるという欠点を持つ一方、水面形の急変部がどこに生じても節点間隔を適当に変えることによって容易に取り扱うことができるという利点を持っている。ここでは、特に境界付近の水面形の変化をよりよく表現するため、また、試験関数法と比較するために有限要素法による

計算を行った。地下水深はここでもy方向に一様水深と仮定した。節点間を線形補間すると、河川水深  $H_s$ 、地下水深  $H_g$  は、

$$\left. \begin{aligned} H_s(y) &= h_{si+1} \left(\frac{y-y_i}{y_{i+1}-y_i}\right) \\ &\quad + h_{si} \left(1 - \frac{y-y_i}{y_{i+1}-y_i}\right) \quad i=1, 2, \dots, M_{s-1} \\ H_g(x) &= h_{gi+1} \left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right) \\ &\quad + h_{gi} \left(1 - \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right) \quad i=1, 2, \dots, M_{g-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

となる。ここに、 $h_{si}$ ,  $h_{gi}$  はそれぞれ河川および地下水の第  $i$  節点の水深であり、 $x_i$ ,  $y_i$  はそれらの  $x$  座標および  $y$  座標である。

この有限要素法の場合には、運動則にマニング則を用い、汎関数は式(7)、河川の local potential は式(4)をそのまま用いている。

(4) 計算結果と考察

ここでの数値計算にあたって用いた斜面、河川の形状および物理的諸元は Fig. 12 にあわせ示したとおりである。透水係数は地表近辺の比較的浅い滞水層を対象として、やや大きめの値を採用し、斜面の勾配も山腹斜面を想定した値を用いる。ここで流量係数  $K$  とマニングの粗度係数  $n$  は計算の対象となる流量・水深の範囲を考慮して選定した。なお、以下の計算では地下水帯への一定の水供給が強度  $r=10$  mm/日 で1日間継続するものとした。

Fig. 11 (a), (b) は河水および地下水の場所的、時間

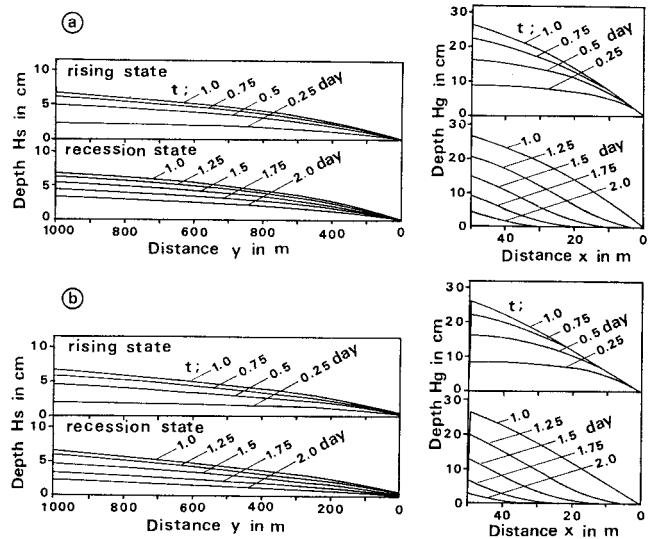


Fig. 11 Time variations of water depth in the stream and the aquifer



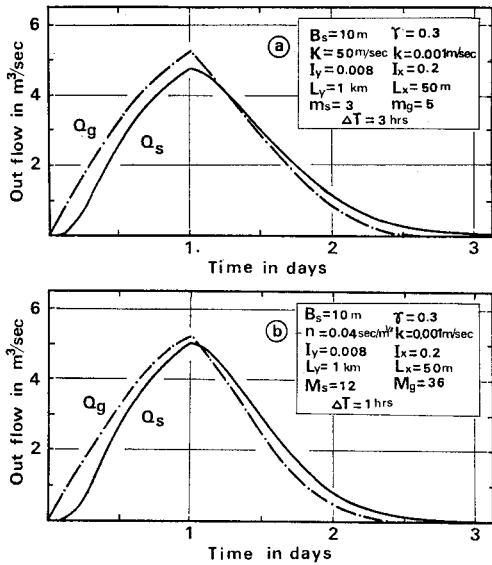


Fig. 12 Time variations of ground water runoff and the stream discharge at the outlet of the system

的分布状態の一例を示したものであり、前者 (a) は試験関数法、後 (b) は有限要素法による計算結果である。Fig. 11 (a) と (b) を比較すると両者はほとんど同じ水深分布状態を示しており、試験関数法と有限要素法による結果にはほとんど差は見られない。両図ともに、河川水深と河川ごく近傍の地下水水深の間にはかなりのギャップが現われている。有限要素法では、この河川近辺では要素の大きさを非常に小さくし、水深の変化を詳細に算定するよう意を配ったが、上記のように試験関数法による結果とほとんど一致している事実は興味深い。このことは 5.(2) で触れたように、汎関数として式 (25) を用いることの妥当性を示すものであろう。

この2つの方法による、河川下流端の流量ハイドログラフの例を示したのが Fig. 12 (a), (b) である。この流量ハイドログラフについても両者の間には全体としては大きな差は見られない。図によると系の最下流端、すなわち河川下流端での流出流量は、地下水帯から河川への流出全量を時間軸に沿って平行移動させたような形になっていて、この時間的遅れは、ここでの例では約 2.5 時間である。また、下流端流量は地下水帯から河川の流出と比較すると、ピーク流量の値がやや減少しており、河川域においてハイドログラフは時間的に平滑化されているようすがうかがわれる。よりくわしく Fig. 12 の2つを比較すると、流量ピークと低減部に若干の違いが観察される。すなわち、ピーク流量の値は Fig. 12 (a) のほうが小さく、低減部では逆に試験関数法による低減のほうがやや緩慢になっている。

上の計算結果について、水収支の検討をした結果を示

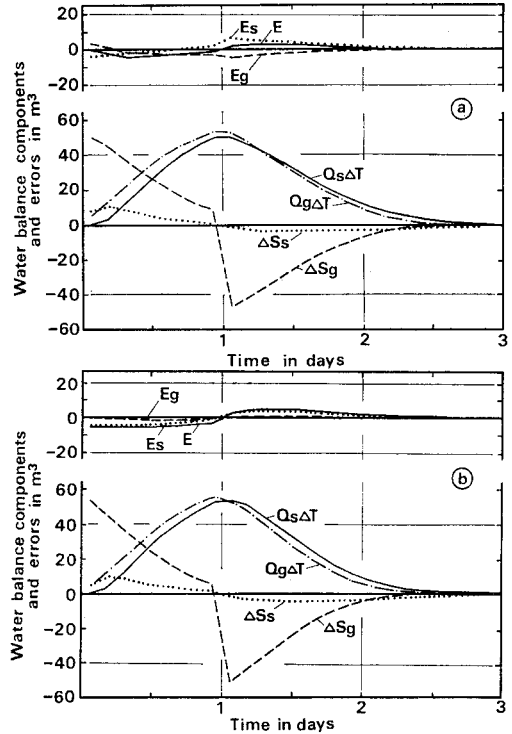


Fig. 13 Water balance and the error for whole the system

したのが Fig. 13 である。ここで、境界  $C_3$  からの流出量が非常に少なく、無視しうることを考慮すると、水収支は、各時間間隔  $\Delta T$  (3 hrs) について、河川・地下水に関し、

$$\Delta S_s = (Q_g - Q_s) \Delta T + E_s$$

$$\Delta S_g = (rL_xL_y - Q_g) \Delta T + E_g$$

と記される。上式中  $\Delta S$  は貯留量の変化分、 $Q_s$ ,  $Q_g$  はそれぞれ河川下流端流量、地下水帯から河川への流出量である。 $r$  は水供給強度であり継続期間中 (1日)  $r = 10$  mm/日、終了後は  $r = 0$  mm/日である。 $E$  は水収支上現われる誤差である。水収支にあたって、貯留量の算定には河川、地下水帯での水深分布を基礎とし、流量については Fig. 12 の値を用いた。系全体としての誤差  $E$  は、

$$E = E_g + E_s$$

である。

河川、地下水帯についての誤差  $E_s$ ,  $E_g$  はほぼ量的に同程度で、支配的な収支成分  $Q_s \Delta T$ ,  $Q_g \Delta T$ ,  $\Delta S_g$  の10分の1程度であるが、全体系を考えると、 $E_s$ ,  $E_g$  の両者が打消し合い、重なり合って結果的には比較的小さな誤差  $E$  となっている。

なお、この誤差を全時間積分で見ると時間的にも相殺し合い、下流端からの総流出量は水供給量  $\int r dx dy dt$  で基準化すると、試験関数法では系全体で 99.4%、地

下水帯で 105.0%，また、有限要素法ではそれぞれ 99.3%，100.0% であった。これらの数値は、河川、地下水帯ともかなり精度よく計算されていることを示している。

## 6. ま と め

河川と平坦な地下水帯、河川と傾斜地下水帯という 2 つの力学系を対象として、試験関数法および一部に有限要素法を用いて、変分原理による数値解析を試みた。本研究で得られた成果をまとめると以下のとおりである。

(1) 取り扱い問題に応じて境界などの扱いに難点があったが、ここでは、いわゆる「流量指定」の問題に対して、式 (9) の汎関数を導びき、この難点を除いた。

(2) 水平な系については、地下水の挙動に対して余弦級数を、河川については直線的な水深分布を試験関数として用いれば、比較的精度がよく系全体としての挙動が算定される。この場合、地下水位は河川に近い部分で波打ち誤差が大きめになるが、試験関数の級数項を多くとることによってこの誤差はかなり減少する。

(3) 傾斜地下水帯と河川との結合系については、地下水にベキ級数型の試験関数を用いたが、比較的よい精度の結果が得られた。

(4) 上記の 2 つの力学系について計算の精度を時々刻々の水収支で検討した結果、いわゆる地下水の流出問題を対象とする限り、実用上問題がないこと、試験関数の項数を増すことによってさらに精度が向上することが認められた。

(5) 上記の試験関数は、地下水帯内の流れが、水平系では拡散項が、傾斜系では移流項が卓越するということがら、ならびに数値計算上できるだけ単純な試験関数

がよいということによって選定されたものであるが、上記の結果はこれらの試験関数が実際の計算上かなり有用であることを示すものである。

本研究では、地下水と河川水の相互干渉を含めたそれぞれの挙動、すなわち流域力学系全体としての挙動の数値計算を行うという問題にしばり、試験関数の関数形を探ったわけである。こうした研究の成果を流出系のもつ諸特性と結びつけ、実際の流出現象解明に応用するため、現在さらに研究を継続している。

## 参 考 文 献

- 1) Takagi, F.: A Study on the Behaviour of Basin Water by means of the Variational Technique, Proc. JSCE, Vol. 185, pp. 71~81, Jan. 1971.
- 2) 高木不折: 流域水の挙動に関する変分原理の物理的意義, 土木学会論文報告集, 第 227 号, pp. 27~32, 1974.
- 3) 高木不折・ローデ: 地下水流出の流域における特性変化と場所的スケール, 土木学会論文報告集, 第 270 号, pp. 99~108, 1978.
- 4) 松林宇一郎: 流域水の挙動に関する変分原理の実用化とその問題点, 中部支部講演概要集 (II-18), 昭和 51 年.
- 5) O.C. ツィエーンキヴィッツ・Y.K. チューン共著, 吉識雅夫監訳: マトリックス有限要素法, 培風館, 昭和 45 年.
- 6) 松林宇一郎: 名古屋大学大学院修士論文, 昭和 51 年, あるいは小平吉男: 物理数学, 岩波書店, 昭和 8 年.
- 7) E. クライツィグ著, 田島一郎・近藤次郎共訳: 技術者のための高等数学 第 2 版, 線形代数と応用解析, 培風館, 昭和 45 年.
- 8) O.C. ツィエーンキヴィッツ 著, 吉識雅夫・山田嘉昭監訳: 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 培風館, 昭和 50 年.
- 9) 高樽琢馬: 出水現象の生起場とその変化過程, 京大防災研年報第 6 号, 昭和 38 年.
- 10) 端野道夫: 流域の貯留特性に対する降雨条件の影響に関する実験的研究, 第 18 回水理講演会概要集, 昭和 49 年.

(1977.9.13・受付)