

密度界面における混合機構の研究

ON A MECHANISM FOR MIXING ACROSS DENSITY INTERFACE

吉 田 静 男*

By Shizuo YOSHIDA

1. 結 言

密度の異なる二流体が、明瞭な界面を維持しつつ相対運動する現象は、寒・暖気団あるいは、寒・暖流の接触流といった、きわめて大規模なものから、都市排水、あるいは温排水と周囲水の接触流といった、比較的小規模なものにいたるまで、身近に数多く見出すことができる。こうした、異なる密度の流体は、やがて、接触面を通じてなんらかの機構で混合し続け、流体力学的に安定な状態へと、次第に近づくのが常である。この異なる流体間の混合の問題は、単に、水理学的興味からだけでなく、水質汚染等の問題とも密接にかかわるだけに、多方面からの関心が集められ、また、この問題を取り扱った研究も数多く存在している。

密度の異なる二流体の界面における混合機構は、乱流発生因の相違によって、いくつかの極端に異なる形式に分けることができる。たとえば、固体壁近くの、強いせん断流に基づく、いわゆる Tollmien-Schlichting 波が、自己誘導効果¹⁾で上昇し界面を破壊する場合、自由表面に与えられる外的攪乱による場合、あるいは界面近傍の、強いせん断流による不安定等がそれである。本研究は、この中でも最後に上げた混合形式の実態を、水理学的に重要な河川水と海水および、成層からの取水に伴って生ずる中間密度層と取水流体との接触流について、理論的、実験的に調べたものである。

密度界面における混合機構に関する多くの研究は、従来、重力内波の不安定を理論的に議論する方向で行われてきたが、その基礎は、Taylor²⁾と Goldstein³⁾に始まる成層流の線形安定理論におかれている^{4)~6)}。

もちろん、理論的研究のみならず、実験を伴った研究もいくつかある。なかでも、簡単な原理で速度と密度の変曲点完全に一致する流れを作り出し、界面に Kelvin-

Helmholtz 不安定により、まき波の発生することを示した Thorpe⁷⁾の研究は、界面の破壊機構、したがって混合機構の一面を明らかにしたのものとして注目に値しよう。ここで一面と付言した理由は、ほかに、現象的に異なる重力内波の cusped breaking を通しての混合機構も存在するからである。

この現象的な相違は、それらの破壊限界にも反映されている。たとえば、前者では、上下層間の密度差が $6.02 \times 10^{-2} \text{ gm} \cdot \text{cm}^{-3}$ なるとき、 $\theta_c = 0.065^{8)}$ であるのに対し、後者の場合は $\theta_c = 0.127 \sim 0.178$ (ここに、 θ は Keulegan 数で、 $\theta = \{g\nu(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2\}^{1/3}/U$ であり、 g は重力加速度、 U は上層の平均流速、 ν は動粘性係数、 ρ_1, ρ_2 はそれぞれ上・下層の密度である。また、 $\theta < \theta_c$ で界面が破壊する)⁹⁾である。

このような相違を生ずる原因は、まず両者の流れ場の違いに求められるべきであるが、事実、重力内波の cusped breaking の機構解明の研究は、これまで、現実に近い流れ場のせん断流不安定を検討する形で(この意味では、Thorpe の取り扱いとまったく同じ手法で)進められてきた。

しかし、岩崎・日下¹⁰⁾の研究結果を検討してみた限りでは、粘性を有する現実の流れ場における重力内波の破壊は、なかなか生じ難く、また、Keulegan の碎波限界についても説明し得る段階に至っていない。

一方、筆者は、重力内波の碎波限界がこれほど説明し難い理由は、従来の碎波現象の実態の把握において、なんらかの重大な見落としがあったからではないかと考え、界面波の碎波の様子を再検討してみた。その結果、定性的にはあるが、重力内波の碎波原因が、重力内波とは異なるサイクロイド波形の波が密度界面に発生することにあるという結論を得た^{11)~13)}。しかし、このサイクロイド波形の波が、いかなる原因で発生するかという点については十分に明らかにすることができなかった。ここでは、このサイクロイド波形の波の発生原因を連行層の

* 正会員 北海道大学工学部

shear instability を通じて考察し、密度界面における混合機構を、従来、筆者の得てきた結果をも含めて、可能な限り定量的に究明してみよう。

2. 実験装置

本研究において取り扱う河口二成層と中間密度層の界面における波動の観測には、スケールによる相違も吟味するため、表-1 にかかげた数種類の、透明なアクリル樹脂製の水槽および水路を使用した。また、密度成層は淡水と塩水とで作成し、波動の観察あるいは流速測定には、ローダミンBおよびフルオロセインナトリウムの色素トレーサーを使用し、光源には、下層内の三次元流れを考慮してスリット光束を用いた。

表-1 実験装置

河口二成層流の実験水路	装置-1 8×15×600	装置-2 4×8×200	
二成層からの取水実験水路	装置-3 8×15×600	装置-4 8×45×500	装置-5 30×30×400

(注) 単位は cm, 河口外の水槽については省略した。

河口から沖側の河口二成層界面での波動観測は、側壁からは不可能であるから、水平から 45° 傾斜した平面鏡を、淡水流に影響の少ない位置に設置して、鉛直上方から、写真撮影または目視によって行われた。

一方、流速とならんで重要な密度は、ガラスサーミスターと白金電極を並置した探子を用いて測定したが、測定水位は、探子の昇降と連動するポテンシオメーターの抵抗変化から間接的に求めている。なお、界面近傍の電気伝導度の測定に際しては、時定数を考慮して、昇降装置を小刻みに降ろしては停止させ、探子が十分まわりの流体となじむよう、心がけた。

3. 密度界面近傍の流れ構造

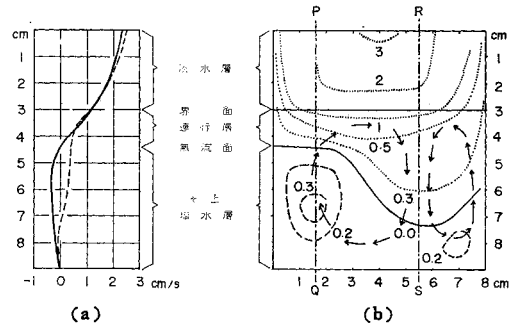
緒言において述べたように、重力内波の碎波が、従来の研究によって説明しきれないものとするならば、まったく別種の碎波機構を検討してゆかねばならないが、いずれにせよ、問題解決の糸口は、界面近傍の流れから知る以外にないわけで、まず、界面近傍の流れ構造の再検討が急務である。こうした事情から、以下において、界面近傍、特に界面下の流れを詳細に記述しておこう。なお、河口二成層の塩水楔と中間密度層とは、水理的にきわめて近いものがあるので^{11), 12)}、以下、特に断わらない限り、河口二成層(河口から沖側も含めた)の界面波、あるいは界面近傍の流れについて述べておく。

表-1 に示された河口二成層の実験水路に、あらかじめ、塩水をためておき、水路の上流端から淡水を注ぐと、

淡水は、塩水の上のりあげ、明瞭な界面の二成層が形成される。このときの淡水内の流れは、流量が十分に少ない間は、ほぼ完全な平行流となり、かつ、界面抵抗により、淡水に連行される塩水層(以後連行層とよぶことにする)、あるいは、無流面以下の塩水層内の流れも、やはり平行流となる。しかし、淡水流量の増加につれて、各層内に、流れ方向に軸を有する回転流を生ずるようになる(乱流初期)。この回転流の強さは、淡水の平均流速に比して、きわめて小さいものであるから、淡水層内では、あまり重要な意味をもつようには見えないが、塩水層内では無視し難いものとなる。下層に見い出されるこの回転流は、水路幅が 8 cm の場合には、図-1 に示すような構造の、ほぼ一対の渦からなるが、水路幅の広い表-1 の装置-5 では、3~4 対の渦対が発生する可能性が強く(いまのところ中間密度層についてのみ確認されている)、水路幅のせまさが、必ずしも渦対の発生因とはなっていない。ただ、その発生条件については、ほぼ同じ水理条件と思われる場合でも、時には、渦対が見い出せない場合もあるなど、微妙であって、不明な点が多い。

こうした特性を有する渦対の生み出す重要な効果は、渦対の降下流の部分で、界面近傍の希釈塩水を、下層深部に輸送すること、および図-1 に示すような、無流面のくぼみを作り出すことである。そして、さらに見逃せないことは、渦対が主流に平行でなく、ゆるやかに蛇行するため、無流面のくぼみも蛇行し、ときには、流心で測定しているにもかかわらず、塩水内にそ上層が見い出せない場合も出現することである。

以上のように、渦対は、淡水を塩水層内に輸送する機構や連行層の厚さを問題にする場合には、たしかに重要な意味を有しているが、主として淡水の平均の流れに強く依存する界面形状¹³⁾とか、比較的長い重力内波(ここで取り扱う内波も含む)の伝播速度には、ほとんど本質



(注) 塩水比重 1.0055. 淡水流量 50.0 cc/sec. 観測は河口上流 160 cm にて行った。(a) の実線および破線はそれぞれ PQ, RS に沿う流速分布。(b) の数字は流速値 (cm/sec), 点線および破線はそれぞれ河口向きおよびその逆向きの等流速線である。

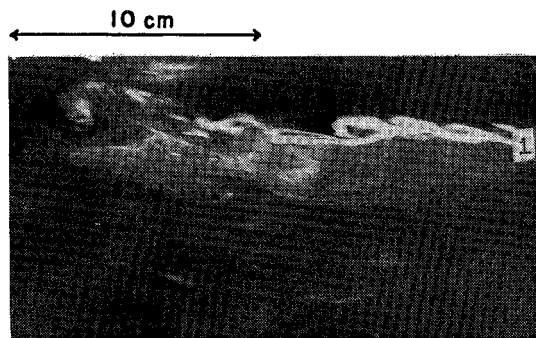
図-1 河口二成層流の鉛直方向流速分布 (a), および断面の流速分布 (b)

的な影響を与えておらず、重力内波の不安定に関してもあまり影響はないものと思われる。こうしたことから、これ以上詳細に、界面下の流れを調べたとしても、いまのところ新しい砕波機構、ひいては混合機構を見出す可能性は少ないと思われるので、この程度の調査にとどめることとし、引続き、重力内波の砕波の様子を詳細に検討してみよう。

4. 重力内波の砕波の実態

表一1の装置一1において、上層淡水を次第に増加させてゆくと、はじめて出現する乱れは、矩形断面の河口から流出する淡水と、まわりの流体との接触部に発生する鉛直方向に回転軸をもった渦である。この渦は、流下するに従って、その回転軸の流れに直角な水平方向に傾けつつ、渦糸をのびし、やがて流心の界面に攪乱を与えるようになる。この渦の達する界面は、淡水の一時加速領域¹⁴⁾にあるため、その近傍の速度勾配が急で、渦により誘発された界面波は急激に成長し、上・下層を強く混合せしめる。この不安定波は、写真一1に示すごとく、界面を中心としたまき波となっているが、一時加速領域での Keulegan 数が 0.13 より相当小さいことから、発生のトリガーが異なっているだけで、Thorpe の見出した波と同じ性格のものであろうと判断される。

上述の一時加速領域において、不安定界面が、初めて見い出される条件は、柏村・吉田¹⁵⁾の見出した outflow pattern に対比させると、ちょうど E 型の発生条件と同



(注) 下流側(左側)でまき波が急成長している。
(a) コア領域の界面



(注) K-H タイプのまき波が見える。i は界面を示す。
(b) 河口から $3b \sim 4b$ (b は河口幅) 沖側の界面状況

写真一1 河口より沖側の界面状況

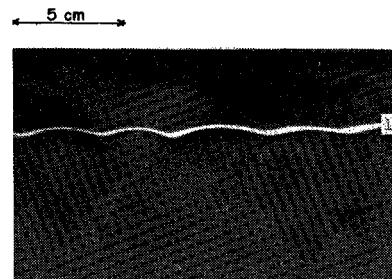
じで、ほぼ $\theta_0 R_b^{0.14} = 0.33$ (θ_0 : 河口における Keulegan 数, R_b : 河口幅 b を代表長さにとった Reynolds 数) である。淡水流量がさらに増加し、 $\theta_0 R_b^{0.14}$ が 0.33 より次第に小さくなってゆくと、淡水内に乱れが生じはじめ、塩水楔の先端、あるいは、界面に数個連続した重力内波群が、不規則な時間間隔で誘発され、河口に向かって伝播するようになる。

この内波群は、 $\theta = 0.13$ 程度の界面(中間密度層の場合、多少この値より大きい界面)にさしかかると、その波形が、著しい変形を強いられ、いわゆる cusped breaking も見られるようになるが、この砕波現象は、 θ の値からして Keulegan の観察したものと同じであろうと判断される。

ところで、内部 Froude 数が、1 以下の塩水楔の界面において、 $\theta < 0.13$ なる条件が達成される場合の内波の砕ける様子は、河口外において見い出されたそれとは大いに異なっている。たとえば、河口外で見い出される不安定波は、まき波となって、上・下層水がほぼ等しい割合で混合し合うが、塩水楔の密度界面における重力内波の砕波は、crest がちぎれて淡水中に飛び散るだけで、淡水を塩水内に引き込む逆の輸送現象が見られないこと、および、塩水楔界面での砕波が、河口外におけるように、なめらかに増幅する結果生ずるのではなく、きわめて唐突な現象であること、等が大きな相違点である。

筆者は、特に、界面波の不自然な砕波現象に注目し、さらに次のような実験を行ってみた。まず重力内波が常に発生している状態では、界面が非常に不規則で、現象が把握し難いので、重力内波群の発生間隔が、できる限り長くなるように流量を調節して、 $\theta = 0.13$ 近傍の界面に注目してみた。すると、重力内波の通過したあとの界面に、重力内波より相当に遅い伝播速度で河口に向かう、写真二に示すようなサイクロイド波形の波動を見出すことができた(サイクロイド波の発生は重力内波による攪乱が引金となることを示す)。

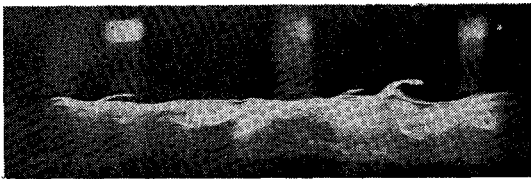
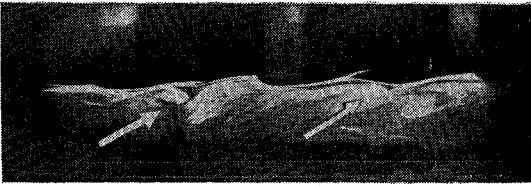
この波動は、やがて成長し、谷がより深くくぼむようになるが、上層淡水が下層内に引き込まれるまでには至らず、次第に勢力を弱め、十数秒の後には消滅してしま



(注) i は界面を示す。

写真二 サイクロイド波 (C 波)

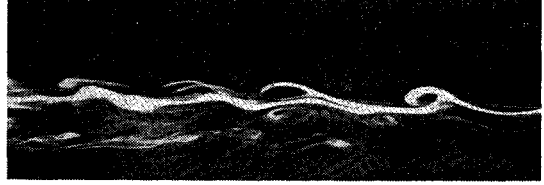
← 10 cm →



(注) 上層淡水は左から右に向かって流れている。

(a) 塩水楔の場合

← 5 cm →



(注) 上層淡水は右から左に向かって流れている。矢印は集中渦を示す。

(b) 中間密度層の場合

写真-3 重力内波の breaking の様子

った。引続き、淡水流量を徐々に増してやると、この波動（以後、簡単のためサイクロイド波とよび、C波と略記する）は、 $\theta=0.13$ の界面が次第に上流側に移行するのに伴って、やはり、上流側で見い出されるようになり、同時に重力内波の発生も頻繁になって、C波が消滅する以前に、次にやってくる重力内波と重畳する場面が見られるようになってきた。そして、両波動の重畳の結果、重力内波は、強い変形を強いられ、写真-3 に示すごとく、その crest がちぎれ、その一部が淡水内の乱れによって、上層に運び去られるといった、注目すべき現象を見い出すに至った。この実験結果から、先に述べた重力内波の碎ける際の不自然さは、実は、なんらかの原因で生じたC波との非線形重畳に基づくものであったことが理解されるのである。

5. サイクロイド波の発生因

従来、界面波といえば、重力内波を意味したが、その他の界面波として、a) 長波長において上流に向かう、もう一つの重力内波、b) 界面張力波、そして c) 界面近傍のなんらかの圧力変動による界面変形等の発生の可能性がある。しかし、a) については、伝播速度の比較からC波とは無関係であることが容易にわかる。そこで、まず b) について考察してみよう。b) について考察するには、界面張力の測定が必要である。しかし、現実に

流れている成層の界面における界面張力を直接測定することは不可能であり、また、Antonoff の規則は本問題のように多少なりと混合している場合には使用できないゆえ、重力内波の伝播速度から間接的に推定する以外にない¹⁰⁾。以下この手法を実行していこう。

一般に河口二層流の速度分布は、次節 図-6 に示されるごとく界面で有限の速度を有しており、無流面が界面より下方に見い出される。このことは、塩水楔の密度界面近傍に連行層の層内での密度は、無流面以下のその上層と比較して、わずかに淡水混入量が多いだけで、重力内波の伝播速度を議論する限りにおいては、界面下のいたる所で密度一定と考えてよい。また、界面張力を見積る場合、波長 5 cm 以下の重力内波を対象としなければならないから、界面近傍の流れが重要である。以上の諸点を考慮して、実際の流れ場を次のごとくモデル化する (図-2)。

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{淡水層 } y_{1u} \geq y \geq y_{12}, \quad u_1 = a_1 y + a_2 y_{12}, \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \rho_1 = \rho_1 \text{ (一定)} \\
 \text{連行層 } y_{12} \geq y \geq 0, \quad u_2 = a_2 y, \quad \rho_2 = \rho_2 \text{ (一定)} \\
 \text{その上層 } 0 \geq y \geq -y_{3L}, \quad u_3 = a_3 y, \quad \rho_3 = \rho_3 \text{ (一定)} \\
 \dots\dots\dots (1)
 \end{array} \right\}$$

ここに、各記号は 図-2 に表記されているが、y は無流面に原点をおき鉛直上方にとられた座標、u は河口向きの水平流速、a は y 方向の速度勾配、ρ は密度で、添字 1, 2, 3 はそれぞれ第一層 (淡水層)、第二層 (連行

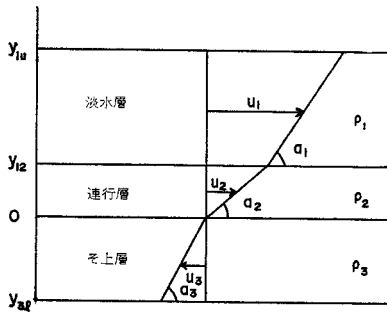


図-2 流れ場のモデル化

層), 第三層(そ上層)を示し, 12 は密度界面, 1 u, 3 l はそれぞれ一層の上境界, 第三層の下境界での値を示す。

各層では次の Rayleigh の方程式が成立する。

$$(u-c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) v' - \left(\frac{d^2}{dy^2} u \right) v' = 0 \dots (2)$$

ここに, v' は y 方向速度の変動成分, c は波速, k は波数である。

いま, v' についてはその基本波成分 $\hat{v} \exp\{ik(x-ct)\}$ のみを考え, 式(1)における自由表面 $y=y_{1u}$ において $v' \neq 0$ という実状を勘案すると, 式(2)の解として,

$$\left. \begin{aligned} \hat{v}_1 &= A_1 \sinh k(y-y_{1u}) \\ \hat{v}_2 &= A_{21} \exp(ky) + A_{22} \exp(-ky) \\ \hat{v}_3 &= A_3 \sinh k(y+y_{3l}) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

を得る。また, 運動条件と圧力条件から,

$$A \cdot \begin{vmatrix} A_1 \\ A_{21} \\ A_{22} \\ A_3 \end{vmatrix} = 0 \dots (4)$$

を得るから, $A=0$ とおけば, 波速 c を求める方程式が導出される。その実際の形式は次のとおりである。

$$(l_1 c^2 + m_1 c + n_1)(l_2 c^2 + m_2 c + n_2) - e^{2ky_{12}} \times (l_3 c^2 + m_3 c + n_3)(l_4 c^2 + m_4 c + n_4) = 0 \dots (5)$$

ここに,

$$\begin{aligned} l_1 &= k(\rho_3 \coth ky_{3l} - \rho_2) \\ l_2 &= k\{\rho_1 \coth k(y_{12} - y_{1u}) + \rho_2\} \\ l_3 &= k(\rho_3 \coth ky_{3l} + \rho_2) \\ l_4 &= k\{\rho_1 \coth k(y_{12} - y_{1u}) - \rho_2\} \\ m_1 &= \rho_3 a_3 - \rho_2 a_2 \\ m_2 &= -[\rho_2 a_2 - \rho_1 a_1 \\ &\quad + 2k\{\rho_1 \coth k(y_{12} - y_{1u}) + \rho_2\} a_2 y_{12}] \\ m_3 &= -[\rho_2 a_2 - \rho_1 a_1 \\ &\quad + 2k\{\rho_1 \coth k(y_{12} - y_{1u}) - \rho_2\} a_2 y_{12}] \\ m_4 &= g(\rho_2 - \rho_3) - k^2 T_{23} \\ n_1 &= k\{\rho_1 \coth k(y_{12} - y_{1u}) + \rho_2\} (a_2 y_{12})^2 \\ &\quad + (\rho_2 a_2 - \rho_1 a_1) a_2 y_{12} - g(\rho_1 - \rho_2) + k^2 T_{12} \\ n_2 &= k\{\rho_1 \coth k(y_{12} - y_{1u}) - \rho_2\} (a_2 y_{12})^2 \\ n_3 &= k\{\rho_1 \coth ky_{3l} + \rho_2\} (a_2 y_{12})^2 \\ n_4 &= k\{\rho_1 \coth k(y_{12} - y_{1u}) - \rho_2\} (a_2 y_{12})^2 \end{aligned}$$

$+ (\rho_2 a_2 - \rho_1 a_1) a_2 y_{12} - g(\rho_1 - \rho_2) + k^2 T_{12}$ であり, T_{12}, T_{23} はそれぞれ, 密度界面および無流面での界面張力である。しかし, 本問題では, $2k y_{12}, k y_{3l}, k(y_{12} - y_{1u})$ が 1 より相当に大であり, T_{23} は 0 とみなしてよいから, 式(5)は次のように簡略化できる。

$$c(2kc - a_2 + a_3) \{(\rho_1 + \rho_2)k(a_2 y_{12} - c)^2 - (a_2 y_{12} - c) \cdot (\rho_2 a_2 - \rho_1 a_1) + g(\rho_1 - \rho_2) - k^2 T_{12}\} = 0 \dots (6)$$

これより, $y=y_{12}$ における重力内波の伝播速度として,

$$c = a_2 y_{12} - \{(\rho_2 a_2 - \rho_1 a_1) \pm \sqrt{(\rho_1 a_1 - \rho_2 a_2)^2 + 8gk(\rho_2 - \rho_1 + k^2 T_{12}/g)}\} / 4k \dots (7)$$

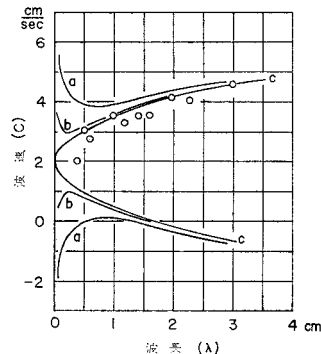
を得るが, 式(7)は式(1)において, 所上層を無視した場合の波速式に一致する。

さて, 一例として, $a_1 = a_2 = a_3 = 5, \rho_1 = 1.00, \rho_2 = 1.03, g = 980 \text{ cm/sec}^2, a_2 y_{12} = 2.0 \text{ cm/s}$ の流れ場をとりあげ, 実測値と式(7)の比較を試みよう。結果は図-3に示されているが, これより, 淡・塩界面における界面張力は, 0.044 dyne/cm 以下と推定される。

一方, C波が, 界面張力波であるとしたなら, その波速は, 波長を λ , 波高を H , 界面張力を T , 密度を ρ とすれば次式で表わせる(重力は T に比してきわめて小さいとする)¹⁷⁾。

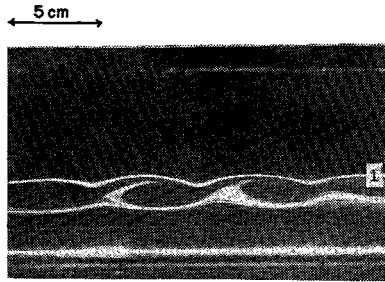
$$c = \left(\frac{2\pi T}{\lambda \rho} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\pi^2 H^2}{4\lambda^2} \right)^{-1/4} \dots (8)$$

ところが, 実際のC波の波速が, 0.7 cm/s, 波長が 5.5 cm, 波高が 0.6 cm (最大) 程度であることから, 仮に, C波を界面張力波とするならば, その界面張力は, およそ 0.44 dyne/cm でなければならず, 実測に比べて少なくとも 1桁の相違を生じてしまう。また, C波の波形は, 確かに界面張力波のそれと酷似しているが, その直下の流線(写真-3, 4)は界面張力波のもの(図-4)



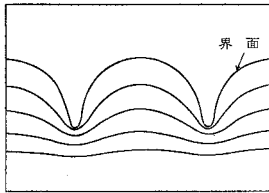
(注) $c > 0$ は上層流の方向, $c < 0$ はその逆方向を示す。 $\lambda < 3 \text{ cm}$ では, 理論から予想される $c < 0$ の重力内波が認められない。 図中, a, b, c はそれぞれ $T = 0.44, 0.044, 0.000 \text{ (dyne/cm)}$ における計算値を示す。

図-3 重力内波の伝播速度



(注) iは界面を示す。

写真-4 サイクロイド波直下の集中渦



(注) この図は、「海洋の風波」プレーヤー・キンズマン著、大久保 明・大久保慧子共訳（築地書館）p. 349, 図 5.3-2 を修正加筆したものである。

図-4 界面張力波の流線

に比べ、まったく異なっていて、定性的にもC波が界面張力波であるという可能性はない。最後に、残されたc)の場合について考察してみよう。

C波直下には、写真-3, 4に示されるような集中渦が常に存在しており、そのすべての渦の回転方向は同じである。また、C波の山および谷が、集中渦中心の真上および隣合う渦の接触部の真上にあることから、C波と集中渦は一体のものであることがわかる。C波の発生因、すなわち集中渦の発生因は、連行層の不安定に基づくと考えるのが最も自然である。そこで、次節において、連行層が実際に不安定となり得るかどうかを調べてみよう。

6. 連行層の安定性

集中渦が、仮にせん断流不安定により生ずるものであるとするなら、その本質は非線形安定理論により検討されねばならない。しかし、本節の目的のように単に集中渦の発生の有無を調べるのが問題であるなら、集中渦に発展する以前の攪乱増幅のごく初段階を検討すればよく、その意味では、連行層に線形安定理論を適用するだけで十分な情報が得られるはずである。そこで本節においてはもっぱら線形安定理論を展開することにしよう。

ここでは図-5に示される斜線部の、ごく θ_c に接近した集中渦発生域 ($\theta \approx \theta_c, \theta < \theta_c$) の連行層の不安定を取り扱うことにするが、河口二成層の速度および密度分布は、一般に図-6に示すごとくであり、連行層内で

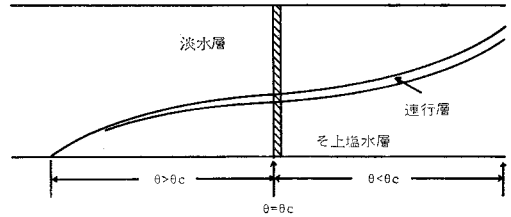


図-5 考察の対象となる断面 (斜線部)

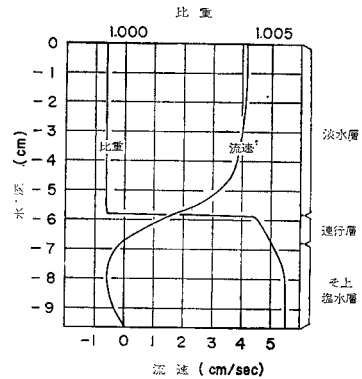


図-6 河口二層流の流速および比重分布

は、上方に向かうに従ってほぼ直線的に密度が減少している。そこで、連行層内の密度分布を

$$\rho_2 = \rho_{2l}(1 - \alpha y) \dots \dots \dots (9)$$

と仮定し、その他の流れ構造は簡単のために式(1)で表現しておこう(なお、式(9)において、 $\alpha = (\rho_{2l} - \rho_{2u}) / \rho_{2l} y_{12}$ で、 ρ_{2u}, ρ_{2l} はそれぞれ、連行層の上・下境界での密度を表わす)。

ここで取り扱う問題では、式(2)に相当するものとして次の Taylor²⁾ や Goldstein³⁾ によって取り扱われた式を採用しなければならない。

$$(u-c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) v' - \left(\frac{d^2}{dy^2} u \right) v' - \frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dy} \frac{v'}{u-c} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dy} \left\{ (u-c) \frac{dv'}{dy} - \left(\frac{du}{dy} \right) v' \right\} = 0 \dots (10)$$

しかし、連行層以外では、第3項以下が省略され、各層の \hat{v} は次のごとく決定される。

$$\left. \begin{aligned} \hat{v}_1 &= A_1 \sinh k(y - y_{1u}) \\ \hat{v}_2 &= A_{21} \xi_+ + A_{22} \xi_- \\ \hat{v}_3 &= A_3 \sinh k(y + y_{3l}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

なお、前節同様ここでも $v' = \hat{v} \exp\{ik(x-ct)\}$ とし、自由表面を固体壁とみなしている。

\hat{v}_2 の特解は、 u_2 に関する式(10)において $u_2 = a_2 y, c = a_2 y_c$ とおきかえた式から、次のごとく級数の形式で求まる。

$$\xi_{\pm} e^{(\alpha/2)y} Y_{\pm} = e^{(\alpha/2)y} (y - y_c)^{1/2 \pm \theta/2} \cdot \left\{ 1 + \frac{k^2}{4 \pm 2\delta} (y - y_c)^2 + \dots \right\} \dots \dots \dots (12)$$

ここに、 $y_c (= y_{cr} + i y_{ci})$ は $u(y) - c = 0$ を満足する y

であり、 $\delta = \sqrt{1 - 4g\alpha/a_2^2}$ であって、本問題では $1 > \delta > 0$ を満足する。また、式 (11), (12) を使用し、上・下境界条件および $y = y_{12}$, $y = 0$ における圧力および運動条件を表現すると、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{vmatrix} = \Delta \cdot \begin{vmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

が得られ、固有値方程式

$$\Delta(y_c, k) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

より、波速 c と波数 k の関係が得られる。なお、

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= PY_{+<y_{12}>} - Y'_{+<y_{12}>} \\ a_{12} &= PY_{-<y_{12}>} - Y'_{-<y_{12}>} \\ a_{21} &= QY_{+<0>} + \frac{\rho_{2l}}{\rho_3} Y'_{+<0>} \\ a_{22} &= QY_{-<0>} + \frac{\rho_{2l}}{\rho_3} Y'_{-<0>} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

と表わされ、

$$P = -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{y_{12} - y_c} - \frac{\rho_1 a_1}{\rho_{2u} a_2 (y_{12} - y_c)} + \frac{\epsilon_1 g}{a_2^2 (y_{12} - y_c)^2} + \frac{\rho_1}{\rho_{2u}} k \coth k (y_{12} - y_{1u}) \dots\dots\dots (16)$$

$$Q = \frac{\rho_{2l}}{\rho_3} \frac{\alpha}{2} + \frac{\rho_{2l}}{\rho_3 y_c} - \frac{a_3}{a_2 y_c} + \frac{\epsilon_2 g}{a_2^2 y_c^2} - k \coth k y_{3l} \dots\dots\dots (17)$$

である。また、 $\epsilon_1 = (\rho_{2u} - \rho_1)/\rho_{2u}$, $\epsilon_2 = (\rho_3 - \rho_{2l})/\rho_3$ であって、添字 $\langle y_{12} \rangle$, $\langle 0 \rangle$ はそれぞれ、式 (12) において、 $y = y_{12}$, $y = 0$ とおいたものである。

ここで、本問題の中立曲線を求めてみよう。この目的のために、 y_{cr} は $y_{12} \geq y_{cr} > 0$ を満足し、 $\arg(u-c)$ は $-\pi < \arg < 0$ ($c_i \geq 0$) を満足する場合を考える。4 の y_{ci} を 0 とおくと、各要素は次のごとく示される。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= P_0 Y_{+<y_{12}>} - Y'_{+<y_{12}>} \\ a_{12} &= P_0 Y_{-<y_{12}>} - Y'_{-<y_{12}>} \\ a_{21} &= \sin \frac{\delta}{2} \pi (Y'_{+<0>} - Q_0 Y_{+<0>}) \\ &\quad + i \cos \frac{\delta}{2} \pi (Y'_{+<0>} - Q_0 Y_{+<0>}) \\ a_{22} &= -\sin \frac{\delta}{2} \pi (Y'_{-<0>} - Q_0 Y_{-<0>}) \\ &\quad + i \cos \frac{\delta}{2} \pi (Y'_{-<0>} - Q_0 Y_{-<0>}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここに、

$$P_0 = -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{y_{12} - y_{cr}} - \frac{a_1}{a_2 (y_{12} - y_{cr})} + \frac{\epsilon_1 g}{a_2^2 (y_{12} - y_{cr})^2} + k \coth k (y_1 - y_{1u}) \dots\dots\dots (19)$$

$$Q_0 = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{y_{cr}} - \frac{a_3}{a_2 y_{cr}} + \frac{\epsilon_2 g}{a_2^2 y_{cr}^2} - k \coth k y_{3l} \dots\dots\dots (20)$$

である。なお、式 (18) を得るにあたっては、 $\rho_1/\rho_3 \equiv 1$

とし、また、 $y=0$ とおくに際しては $\arg(u-c)$ の領域を考慮し、 $y-y_c = e^{-i\pi} |y-y_c|$ とした。

式 (18)~(20) より、式 (14) を満足する条件として、

$$P_0 Y_{+<y_{12}>} - Y'_{+<y_{12}>} = 0 \text{ かつ } Y_{+<0>} - Q_0 Y_{+<0>} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

および、

$$P_0 Y_{-<y_{12}>} - Y'_{-<y_{12}>} = 0 \text{ かつ } Y'_{-<0>} - Q_0 Y_{-<0>} = 0 \dots\dots\dots (22)$$

を得る。

いま、実測の一例である表-2の諸量を式 (21), (22) に代入し、種々の Richardson 数 R_i について中立点を求めると、図-7 のごとく中立曲線を得る。この曲線は、連行層以外の流れ、特に連行層に近接した流れの影響を受ける。この事実は、図-8 (a), (b) のごとく、かなり簡略化された流速分布、あるいは厳密化された流速分布に対する中立曲線 (図-9) から容易に推察することができる。また、 $\rho_3 = \rho_{2l}$ ($= 1.00502$) とすると図-9 (a) のごとく、相当異なる中立曲線を得るゆえ、速度および密度分布のモデル化には細心の注意が必要である。

さて、本問題においては、連行層内の Overall Richardson 数が 0.151 であるから、中立点は、 k を

表-2 河口二層流の実測例

a_1	1.9	y_{2u} (cm)	6.7	ρ_{2u}	1.00440
a_2	2.0	y_{3l} (cm)	2.9	ρ_{2l}	1.00502
a_3	0.9	α	0.00062	ρ_3	1.00550
y_{12} (cm)	1.0	ρ_1	0.99995	R_i	0.151

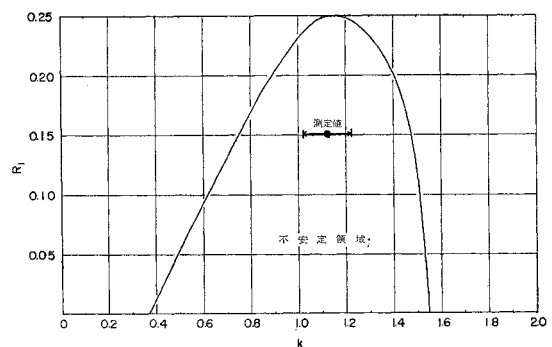


図-7 中立曲線

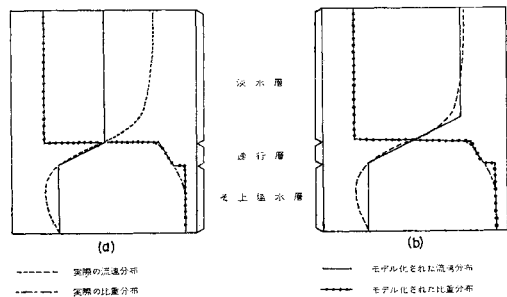
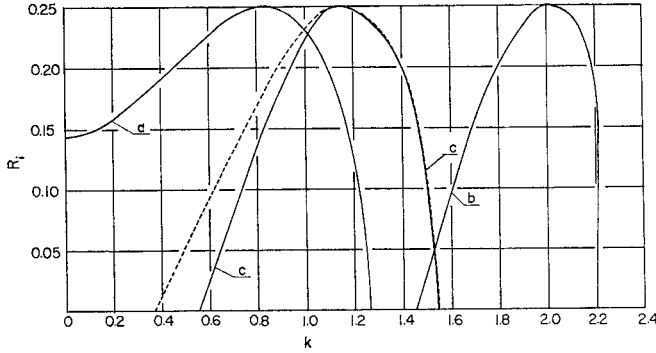


図-8 河口二層流のモデル化



(注) a は無流面での密度の跳びを無視した場合, b, c はそれぞれ図-8 (a), (b) の場合, 破線は図-7と同じ曲線である.

図-9 中立曲線

1/cm, y を cm 単位で表わすと, 式 (21), (22) より $k = 0.75 (y_{cr} = 0.25)$, $k = 1.48 (y_{cr} = 0.34)$ と求まる. ところが, $k=1$ を $y_{ci} \ll y_{cr}$, あるいは $y_{ci} \ll y_{12} - y_{cr}$ と仮定して簡略化した式 (14) に代入して y_{ci} を求めると, $y_{cr} = 0.31$ で $y_{ci} = 0.05 > 0$ を得る. したがって, $0.75 < k < 1.48$ の領域では与えられた攪乱が非粘性的に不安定となることがわかる. また, この非粘性増幅率は $kc_i = ka_2 y_{ci} \approx 0.1$ と計算できるから, $k=1$ における粘性等に基づく減衰率 (Thorpe, p. 312²⁾) に比べてわずかながら大きいと予想され現実の流れ場においても, 攪乱は増幅するものと思われる (この現実の増幅率が非常に小さいという結果は, 表-2 の諸量が $\theta = \theta_c$ にごく接した位置で測定された臨界状態に近い値であることをよく裏づけている). ここで注意すべきことは, 線形安定理論によって攪乱が増幅するという結果を得ても, 流れ場が集中渦となり最終的に発達した乱流と化して行くとは限らないということである. もちろん, 増幅率が十分大きければ, まさにそのとおりの現象が見られるが, 本節で取り扱ったような $\theta \approx \theta_c$ における連行層においては, 非線形効果および粘性効果によって, 集中渦が形成された後, 乱流へと発展せずに減衰消滅してしまうの

が常である.

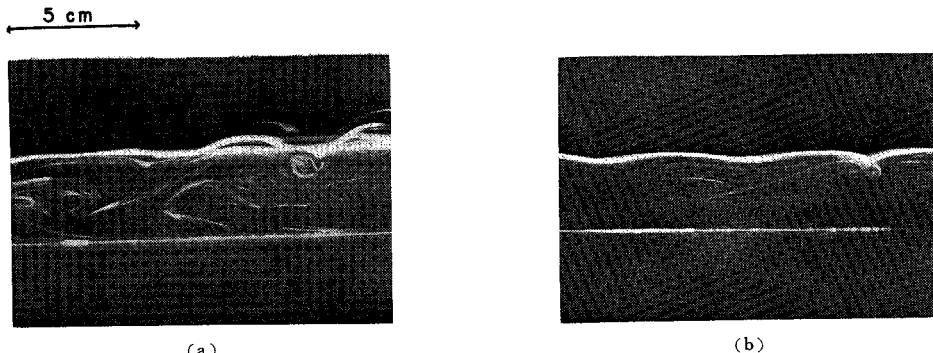
以上の結果に加えて, 実際に生じた C 波の波数は $k=1.0 \sim 1.2$ の程度で上述の解析において得られた不安定領域のほぼ中央値を示していること (図-7), および伝播速度から得られる y_{cr} の値は 0.3 程度であって, 先の計算値にかなり近いことから, C 波直下の集中渦は, 連行層の shear instability に基づき発生したものと推断してよいであろう.

7. 集中渦の混合機能

さて, 以上の考察から, 重力内波の碎波原因は, 重力内波自体の攪乱が引金となって発生する集中渦の作り出す界面変形 (または C 波) との非線形な重畳にあることがほぼ明らかになったが, これより生ずる混合は, 下層塩水が上層淡水中に拡散する一方的なものである. しかし, 界面下の流れを詳細に観察すると, これとは逆に, 淡水が, 下層塩水内に引き込まれる二つの機構が見い出せる. 一つは 3. で述べた渦対の連行作用に基づくもので, 他の一つは集中渦の連行作用に基づくものである. ここでは前者についての十分な知見を得ていないので後者についてのみ述べておく.

Keulegan 数が 0.13 近傍 (中間密度層の場合にはこれよりやや大きい値) の界面で見い出される集中渦の連行作用は, 河口の外で見い出されるまき波のように, 淡水を直接下層内に引き込むほど強いものでなく, 界面近傍の希釈された塩水を下方に輸送する程度である. もちろん, この連行作用は, より Keulegan 数の小さい河口や取水口に近づくにつれて強くなるのであるが, 上層淡水を直接引き込む場面はあまり多くない (写真-5).

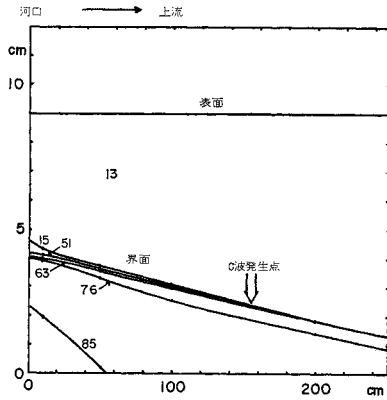
ここで実際に, 淡水が集中渦によって微量ながら連行される結果, 塩水楔や中間密度構造にいかなる変化を生ずるか見てみよう. 図-10 は淡水放流後 1 時間経過し



(注) 色素液は上・下層のほぼ中間の密度を有している.

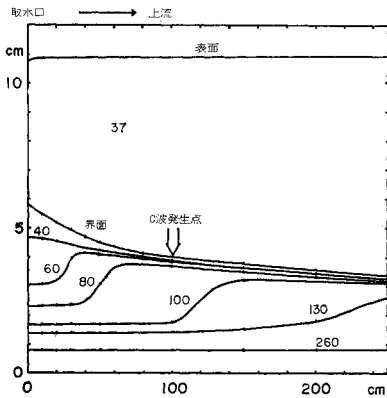
写真-5 集中渦による連行現象

た塩水楔の密度構造であり、図-11は取水後3時間を経過した中間密度層の密度構造である。この結果のうち塩



(注) 実線は等密度線を示す。淡水流量は 181.0 cc/sec. 実線に付された数字を n とすると、密度は次式により求められる。 $(9982+n) \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$

図-10 塩水楔の密度構造



(注) 実線は等密度線を示す。取水流量は 175.0 cc/sec. 実線に付された数字を n とすると、密度は次式により求められる。 $(9982+n) \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$

図-11 中間密度層の密度構造

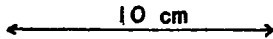
水楔について見ると、先述の定性的な結果からは、河口付近での淡水混入率が高いことが予想されるにもかかわらず、その上塩水層内の密度は、上下流ともほとんど一緒になっている。この理由は、色素の動きから判断すると、塩水楔自体の密度が比較的大きいため、河口近くで一時的に上層の淡水が下層に連行されても、十分に混合する前に浮力効果で連行層まで押しもどされ、連行層の流れに乗って河口外に排除されてしまうためと考えられる。

他方、中間密度層についてみると、塩水楔とはまったく異なり、取水口に近づくに従って次第に塩分濃度が低くなっており、上述の集中渦の淡水連行状況と一応矛盾しない結果となっている。しかし、中間密度層自体の密度が先の塩水楔のそれとあまり変わらず、この場合にもやはり浮力効果が優勢であると考えられること、および連行層全体にわたり集中渦の発生がみられない条件下においても、取水口に近づくほど塩分濃度が低くなるという結果¹²⁾も得ていることから、中間密度層に関しても、集中渦が下層密度構造を大きく変えてしまうほどの混合機能は有していないといえよう。ただ、下層密度がきわめて淡水に近い場合とか、河口外の、 θ が相当に小さな界面下の集中渦は、かなりの混合能力を有すると思われるので、集中渦の連行機能に関する詳細な研究を、今後も続けて行く必要がある。そのためには、集中渦が3次元構造(写真-6)をしていることや、重力内波との相互作用の結果、集中渦が成長の途中で乱流と化してしまうこと等についても、あわせて考察してゆく必要がある。

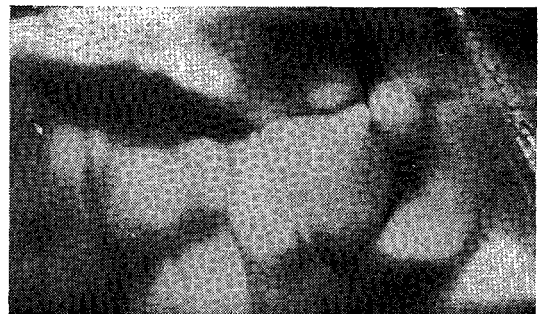
8. 結 論

本研究では、密度界面における混合機構のうち、特に乱流発生源が密度界面近傍に存在するものについて考察された。その結果、以下の事柄が明らかになった。

- (1) $\theta < 0.13$ の界面において見られる重力内波の



(a)



(b)

(注) 淡水は写真の下方から上方に向かって流れている。淡水の流れ方向にのびた陰影が渦対によるくぼみに相当し、これに直角な方向の陰影がサイクロイド波の谷に相当している。

写真-6 サイクロイド波の立体構造

breaking は, $\theta < 0.13$ の界面で重力内波の攪乱を受けて生ずる伝播速度のきわめて遅いC波をのりこえる際に受ける非線形効果に基づくものと考えられる。

(2) 重力内波を破壊せしめ, 下層塩水を上層淡水内に混入せしめる原因となるC波は, 界面張力波ではなく, その直下の連行層の shear instability の結果生じた集中渦に基づく界面変形である。

(3) C波直下の集中渦は, 界面近傍の希釈塩水を下層に輸送する能力を有しており, その輸送能力は下流ほど強くなっている。ただ, 下層密度が比較的高く, 浮力効果が優勢な場合には, たとえ上述の淡水輸送が存在しても下層密度構造に大きな変化は生じない。

(4) 河口より沖測の, θ がきわめて小さい, 一時加速領域において発生する界面波は, Thorpe の見い出した Kelvin-Helmholtz 波と酷似したまき波に成長し, 上下層水を強く混合せしめる。

以上, 本研究により, 重力内波の破壊あるいはC波直下の集中渦の混合機能を通じて, 上下層水が混合する機構が, 定性的にはあるが, ほぼ明らかになり, 派生的に Keulegan の砕波限界の解釈も可能となった。また, 同時に, 重力内波の cusped breaking の理論的解明についても(非線形問題という困難さはあるものの)重力内波とC波との相互作用を考慮することによって成功をおさめる可能性も生じてきた。こうした結果をみると, 少なくとも小規模な成層流の界面における混合を議論するうえで, 連行層の存在を考慮することがいかに重要であるかが理解できよう。

参 考 文 献

- 1) Hinze, J.O. : Turbulence, second edi., McGraw-Hill, pp. 600~613, 1975.
- 2) Taylor, G.I. : Effect of variation in density on the

- stability of superposed streams of fluid, Proc. Roy. Soc. A 132, pp. 499~523, 1931.
- 3) Goldstein, S. : On the stability of superposed streams of fluids of different densities, Proc. Roy. Soc. A 132, pp. 524~548, 1931.
- 4) Turner, J.S. : Buoyancy effects in fluids, Cambridge Univ. Press, pp. 116~118, pp. 288~292, 1973.
- 5) Drazin, P.G. & Howard, L.N. : Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid, Advances in applied mechanics, Vol. 9, pp. 1~89, 1966.
- 6) Yih, C.S. : Dynamics of nonhomogeneous fluids, the Macmillan comp., New York, pp. 141~180, 1965.
- 7) Thorpe, S.A. : Experiments on the instability of stratified shear flows; miscible fluid, J. Fluid Mech. Vol. 46, pp. 299~319, 1971.
- 8) Thorpe, S.A. : A method of producing a shear flow in a stratified fluid, J. Fluid Mech., Vol. 32, pp. 693~704, 1968.
- 9) Keulegan, G.H. : Interfacial instability and mixing in stratified flows, J. Research of Nat. Bur. of Standards, Vol. 43, pp. 487~500, 1949.
- 10) 岩崎敏夫・日下 理 : 淡塩二層流界面における内部波の発達に関する研究, 第26回土木学会年次学術講演会講演概要集 II, pp. 425~426, 1971.
- 11) 吉田静男 : 二成層からの取水に伴う混合層の発生, 第29回土木学会年次学術講演会概要集 II, pp. 425~426, 1974.
- 12) 吉田静男 : 堆積層の特性について, 土木学会北海道支部論文報告集, 第31号, 1975.
- 13) 吉田静男・段城邦彦 : 二層流界面に発生する波動の実態, 第21回水理講演会論文集, pp. 69~74, 1977.
- 14) Kashiwamura, M. & Yoshida, S. : Transient acceleration of surface flow at a river mouth, Coastal Engineering in Japan, Vol. 14, pp. 135~142, 1971.
- 15) 柏村正和・吉田静男 : 河口流れの構造 (1), 第15回海岸工学講演会講演集, pp. 191~194, 1968.
- 16) Lamb, H. : Hydrodynamics, sixth edi., Cambridge Univ. Press, pp. 455~462, 1932.
- 17) Crapper, G.D. : An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude, J. Fluid Mech., Vol. 2, pp. 532~540, 1957.

(1977.7.11・受付)