

マグニチュード理論による河道網の連結構造 に関する統計則と指標

STATISTICAL LAWS AND INDICES OF TOPOLOGIC STRUCTURE OF CHANNEL NETWORKS BY MEANS OF MAGNITUDE THEORY

岩 佐 義 朗*・小 林 信 久**

By Yoshiaki IWASA and Nobuhisa KOBAYASHI

1. 序 論

河川のもつさまざまな水理・水文的性格を解明するにあたり、その基盤となる流域の自然的形態をなんらかの形で定量的に表現することはきわめて重要である。Horton¹⁾ が位数に基づく河道数則、河道長則等の経験的地形則を提唱して以来、この種の地形形態学的研究は各方面で広く進められてきた。Horton の位数化の方法ならびにそれを簡潔にした Strahler の位数理論（以下、Horton のものを含め位数理論と略称する）においては、低位数の河道が高位数の河道に合流しても位数は変化しないので、河川のもつ水理・水文的性格を解明するには十分でない。このため、河道網の階層的構造を表現する各種の河道分類法が、Shreve²⁾ らによって提案された。

本論文は、流域の幾何学的特性ならびに構造と密接な関係をもつ河道網のトポロジー特性を対象としてその確率統計的性格を明らかにしようとしたものである。まず、従来の研究をまとめ、問題点を列挙するとともに、その発展を図る本研究の意義を明確にする。ついで、河道網の連結構造をより詳しく把握、表現するため、位数理論に代り、Shreve²⁾ の提唱したマグニチュード理論および Jarvis³⁾ の高さ (height) の概念を用い、河道網の階層的構造を表現して、その一般的なトポロジー特性を表わす統計則を理論的に求めた。また、各河道網固有のトポロジー特性を定量的に比較するため、著者らは3種の指標を新たに提案して、これらの指標の値を検討することにより、従来の分岐比の比較より詳しい情報が得られることを実証している。さらに、現在広く用いられている位数理論の欠点を補うため、マグニチュード理

論と位数理論との関係を明らかにして、その関係より得られる河道リンク位数をも提唱しようとしたものである。

2. 従来の研究

Horton の提案した河道網に関する位数化の方法は複雑なうえに、主観的な判断も入るので、Strahler はその方法を簡潔にした。現在では、Strahler 位数理論の方が広く用いられており、Strahler 位数のことを単に位数とよんでいる。位数理論においては、ソース数 n 、最大位数 k の河道網における位数 u の河道数を N_u で表わすと、河道数則¹⁾ は次のように表わされる。

$$N_u = R_b^{k-u} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 R_b は分岐比とよばれる定数である。実測値の河道数 N_u より分岐比 R_b を決定する方法には、種々のものが提案されている⁴⁾。各位数 u に対する分岐比 $B_u = N_{u-1}/N_u$ の幾何平均として求めると、次のようになる。

$$R_b = \left\{ \prod_{u=2}^k (N_{u-1}/N_u) \right\}^{\frac{1}{k-1}} = n^{\frac{1}{k-1}} \dots\dots\dots (2)$$

また、算術平均 \bar{B}_u は次式で与えられる。

$$\bar{B}_u = \sum_{u=2}^k (N_{u-1}/N_u) / (k-1) \dots\dots\dots (3)$$

一方、実測値 N_u に対する回帰分析より得られる分岐比 R_b' は、次のように表わされる。

$$\log R_b' = 6 \sum_{u=1}^{k-1} (k+1-2u) \log N_u / k(k+1)(k-1) \dots\dots\dots (4)$$

Shreve²⁾ および高樟⁵⁾ は、「地質的影響が強く作用しない場合には、自然の河道網はトポロジーのランダムである」という仮定 (I) を用い、自然の河道網は統計的に河道数則に従うことを理論的に証明した。ソース数 n の河道網の n 個の位数 1 の河道が互いに区別がある場合のトポロジー的に異なった河道配列の総数 Y_n は次式で

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科
** 学生会員 工修 京都大学大学院博士課程
(アメリカ合衆国マサチューセッツ工科大学大学院留学中)

与えられる⁵⁾。

$$Y_n = 2^{n-2} P_{n-1} \dots \dots \dots (5)$$

ところが、 n 個の位数1の河道は互いに区別がないから、トポロジ的に異なる河道網 (topologically distinct channel networks⁹⁾, TDCN) の総数 Z_n は次のように表わされる⁵⁾。

$$Z_n = Y_n/n! = 2^{n-1} C_{n-1}/n \dots \dots \dots (6)$$

ソース数 n のトポロジ的に異なる河道網の出現する確率は、ランダム性の仮定 (I) よりすべて等しく、 $1/Z_n$ である。また、高棹³⁾ は、ソース数がきわめて大きい河道網の河道配列に関する 1/4 則, 1/2 則等を統計的に求めているが、これらの統計則は河道網の一般的トポロジー特性を表わすものとして意義があるが、各河道網個有のトポロジー特性を表現するには十分でない。

Strahler の提案した位数化の方法では、位数 u の河道と位数 $u-1$ 以下の河道との合流が、位数化に際し無視されている。ところが、合流点では、河川形態のならびに水理・水文的な特性は変化する。また、河道の合流に対して代数的結合則が成立しないため、同じ位数の河道でもその河道長、集水面積等に非常なばらつきが生じることがある。Shreve²⁾ はこれらの欠点を改良するため、河道網構成最小単位であるリンク、つまり隣接する2つの節点を結ぶ河道部分を対象とし、各リンクに対してそれより上流にあるソース数と定義されるマグニチュードによって河道を分類する方法、マグニチュード理論を提案した。ここに、節点とは、河道最上流端であるソース、合流点および対象河道網最下流端つまりシンクをあわせたものであり、河道網において点を構成するものの集合である。マグニチュードの定義より、外部リンク、すなわち位数1の河道のマグニチュードは1であり、マグニチュード i_1 と i_2 の2つのリンクが合流してできるリンクのマグニチュードは i_1+i_2 となる。また、マグニチュード2以上のリンクをまとめて、内部リンクとよばれる。なお、位数によって河道を分割した場合の河道部分は、セグメント (segment) とよばれ、連続する1つ以上のリンクからなる。

Shreve より前に、Scheidegger⁹⁾ は consistent order による河道分類法を提案しているが、consistent order とマグニチュードの間には1対1の関係が成立する。つまり、マグニチュード i のリンクの consistent order u_c は次の式で与えられる。

$$u_c = \log_2(2^i) \dots \dots \dots (7)$$

したがって、これらの概念は同一とみなすことができるが、マグニチュードの方はトポロジ的に明確な意味をもち、また、取り扱いが簡単であるので、以下では、マグニチュード理論のみを取り扱うことにする。

Stall・Fok⁷⁾ は、位数が整数値しか取り得ないことに

よって生じる先述の欠点を補うため、比例河道位数 (proportional stream order) u_p を提案し、 u_p を次のように提案した。

$$u_p = u + u_x \dots \dots \dots (8)$$

$$u_x = (i - i_1)/(i_2 - i_1) \dots \dots \dots (9)$$

ここに、 u は、対象とするマグニチュード i のリンクを含むセグメントの位数、 i_1 はこのセグメント最上流端リンクのマグニチュード、そして i_2 はこのセグメント最下流端リンクのマグニチュードである。ただし、 $i_2 = i_1$ のときは $u_x = 0$ 、 $i = i_2$ のときは $u_x = 0.99$ とする。しかし、この方法では、 u_x を一種の比例配分によって与えているのでその理論的根拠がない。

一方、Woldenberg⁶⁾ は水系を開いたシステムと考え、そのシステムに対する対比成長 (allometric growth) モデルにより流域の平衡状態においては、流域の地形量および水量は互いにべき乗の関数関係があることを示し、位数に対し次式で定義される絶対河道位数 (absolute stream order) が存在するとしている。

$$U_a = R_b^{u-1} \dots \dots \dots (10)$$

ここに、 R_b は分岐比である。

Jarvis³⁾ は、節点に関して高さという新しい概念を提案した。節点高さはその節点に対するパス、すなわち節点よりシンクへ至る一連のつながりのなかに含まれるリンク数と定義される。したがって、ソース高さは、ソースよりシンクへ至る外部パスに含まれるリンク数を、また、合流点高さは、合流点よりシンクへ至る内部パスに含まれるリンク数を表わすことになる。Werner・Smart⁹⁾ は、節点高さ、ソース高さ、合流点高さをそれぞれ、パス長 (path length)、外部パス長、内部パス長と名づけたが、パスに沿う実際の河道長と混同しやすいので、本論文では高さと呼ぶ。高さの概念から得られる河道網のトポロジー特性を表わす重要な指標としては、対象河道網に含

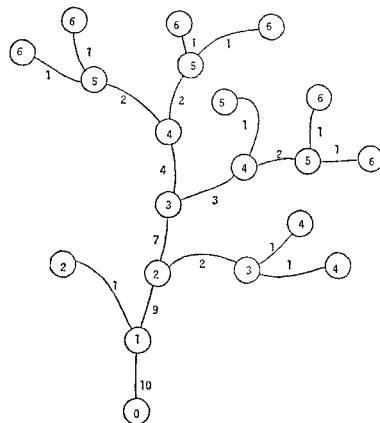


Fig. 1 A channel network with 10 sources. Numbers indicate the link magnitudes and the node heights.

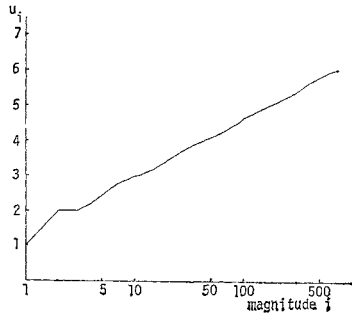


Fig. 3 Expected Strahler stream order of a link of magnitude i versus magnitude i .

$$(Z_i)_s = \frac{1}{4} \{ (2 + \sqrt{2})^{i-2} + (2 - \sqrt{2})^{i-2} \} - 2^{i-3} \quad \dots \dots \dots (15)$$

となる。式 (15) を式 (14) に代入して計算すれば、 $(Z_i)_s$ が求まり、以下順次 $(Z_i)_u$ を求めることができる。マグニチュード i のリンクの位数の期待値を u_i で表わすと、ランダム性の仮定より、 u_i は次のように表わされる。

$$u_i = \sum_{u=2}^{[log_2 2i]} u \cdot (Z_i)_u / Z_i \quad \dots \dots \dots (16)$$

Fig. 3 には、マグニチュード i と位数の期待値 u_i との関係が示されているが、 u_i と i の間には、次の関係が近似的に成り立つことがわかる。

$$u_i = \alpha + \beta \log i \quad \dots \dots \dots (17)$$

ここに、 α, β は定数である。

式 (17) で表わされるマグニチュードと位数との近似的関係を用い、位数 u の河道セグメントに含まれるマグニチュード i のリンクの河道リンク位数 (stream link order) u_i を次のように定義する。

$$u_i = u - u_y \quad \dots \dots \dots (18)$$

$$u_y = \log(i/i_d) / \log(i_0/i_d) \quad \dots \dots \dots (19)$$

ここに、 i_d は対象とするマグニチュード i のリンクを含む位数 u のセグメント最下流端リンクのマグニチュード、 i_0 はこのセグメント上流端で合流する2つの位数 $(u-1)$ セグメントの最下流端リンクのマグニチュードの平均値である。ただし、式 (17) の u_i の値を、 i, i_d, i_0 のそれぞれに対して $u_i, u, u-1$ としている。ここで、河道リンク位数と名づけたのは、各リンクに対して実数域にまで拡張された位数が定義されるからである。

次に、式 (18) および (19) で定義された河道リンク位数に対しても位数理論の地形則と同じ地形則が成立することを証明しよう。流域内のある地点あるいはそれより上流の小流域全体に対して定義される地形量 V は、その地点のマグニチュード i の関数として、一般的にほぼ次のように表わされる¹⁵⁾。

$$\log V_i = a + b \log i \quad \dots \dots \dots (20)$$

ここに、 a, b は定数である。この地形量 V の位数に対する地形則は、一般的に次のように表わされる。

$$V_u = V_1 R_v^{u-1} \quad \dots \dots \dots (21)$$

ここに、 V_1, R_v は定数である。いま、マグニチュード i のリンクの河道リンク位数を u_i とすると、次の関係が常に成り立つ。

$$V_i = V_{u_i} \quad \dots \dots \dots (22)$$

さらに、 i_0 および i_d の定義より、マグニチュード i_0, i_d のリンクはそれぞれ位数 $u-1, u$ のセグメント最下流端リンクであるので、次の関係が成立する。

$$V_{i_0} = V_{u-1}, V_{i_d} = V_u \quad \dots \dots \dots (23)$$

ところが、マグニチュードに対する地形則として式 (20) が成立するならば、 V_{i_0}, V_{i_d} はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \log V_{i_0} &= a + b \log i_0, \\ \log V_{i_d} &= a + b \log i_d \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (24)$$

また、 V_{u-1}, V_u は位数理論の地形則 (21) が成り立つならば、それぞれ次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \log V_{u-1} &= \log V_1 + (u-2) \log R_v \\ \log V_u &= \log V_1 + (u-1) \log R_v \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (25)$$

式 (23)~(25) より、 a, b はそれぞれ次のように与えられる。

$$a = \log V_1 + \{ (u-1) + \log i_d / \log(i_0/i_d) \} \log R_v \quad \dots \dots \dots (26)$$

$$b = -\log R_v / \log(i_0/i_d) \quad \dots \dots \dots (27)$$

式 (26) および (27) を式 (20) に代入して、式 (19) で定義される u_y を用いると、 V_i は次のようになる。

$$\log V_i = \log V_1 + (u - u_y - 1) \log R_v \quad \dots \dots \dots (28)$$

式 (18) および (22) を式 (28) に代入すれば、

$$V_{u_i} = V_1 R_v^{u_i-1} \quad \dots \dots \dots (29)$$

となり、河道リンク位数 u_i に対しても位数理論の地形則と同じ地形則が成立することがわかる。

(2) ソース数則

ソース数 n 、最大位数 k の河道網における位数 u の河道より上流の小流域に含まれるソース数の平均値を \bar{i}_u で表わせば、式 (17) で表わされるマグニチュードと位数の関係より、 \bar{i}_u に対しても河道数則と同様のソース数則が成立すると仮定される。すなわち、

$$\bar{i}_u = R_m^{u-1} \quad \dots \dots \dots (30)$$

$$R_m \cong \bar{i}_u / \bar{i}_{u-1} \quad (u=2, 3, \dots, k)$$

ここに、定数 R_m をソース数比と名づけることにする。実測値の \bar{i}_u から R_m を求める場合、各位数 u に対するソース数比 $\bar{i}_u / \bar{i}_{u-1}$ の幾何平均をソース数比 R_m とすると、 R_m は次のように表わされる。

$$R_m = \left\{ \prod_{u=2}^k (\bar{i}_u / \bar{i}_{u-1}) \right\}^{1/(k-1)} = n^{1/(k-1)} \quad \dots \dots \dots (31)$$

Table 2 Bifurcation Ratios

River	n	k	R_b	\bar{B}_u	R_b'
Shingu	607	6	3.60	3.75	3.73
Tozu	251	5	3.98	4.01	3.92
Kitayama	243	5	3.95	4.25	4.18
Kizu	369	6	3.26	3.40	3.33
Katsura	293	5	4.14	4.14	4.12
Oi	223	5	3.86	4.13	4.06
Ibi	111	5	3.25	3.39	3.29
Ado	95	5	3.12	3.33	3.11
Yasu	71	4	4.14	4.28	4.27
Echi	38	4	3.36	3.59	3.24

ただし、 $\bar{i}_1=1$ かつ $\bar{i}_k=n$ である。式 (2) および (31) よりソース数比 R_m と分岐比 R_b とは等しい。

$$R_m=R_b \dots\dots\dots (32)$$

式 (32) を式 (30) に代入して、

$$\bar{i}_u=R_b^{u-1} \dots\dots\dots (33)$$

式 (10) および (33) より、マグニチュードは絶対河道位数にほぼ等しいことがわかる。対比成長モデルによると、ある地形量 V_i はマグニチュード i の関数として式 (20) で与えられることになり、マグニチュード理論の地形則の一般的関数形 (20) と一致する。しかし、個々の地形量とマグニチュードとの関係は、厳密には式 (20) によって与えられないので、詳しくかつその物理的意味を明確にして説明するには、対比成長モデルでは不十分である。

Table 2 には、10 河川において測定したソース数 n 、最大位数 k および分岐比 R_b, \bar{B}_u, R_b' が示されている。 R_b, \bar{B}_u, R_b' はそれぞれ式 (2)~(4) で計算される。測定には、国土院発行の縮尺 5 万分の 1 の地形図を用い、河道およびソースの位置は地形図上の青線最上流端とした。どの河川に対しても分岐比 R_b の値は、 \bar{B}_u, R_b' の値とほぼ等しく、ソース数 n と最大位数 k によっておおそ与えられることがわかる。

Table 3 には、各河川に対する \bar{i}_u の実測値と、式 (33) で与えられる理論値との比較が示されている。愛知川以外の 9 河川では、 \bar{i}_2 の理論値は実測値に比べて少し大きい、式 (33) で表わされるソース数則はほぼ

Table 3 Observed and calculated values of mean total number of sources per subnetwork of order u ; \bar{i}_u

River		\bar{i}_2	\bar{i}_3	\bar{i}_4	\bar{i}_5	\bar{i}_6
Shingu	Obs.	3.16	13.7	41.6	247	607
	Calc.	3.60	13.0	46.8	168	607
Kitayama	Obs.	3.18	14.0	58.5	243	
	Calc.	3.95	15.6	61.5	243	
Tozu	Obs.	3.24	13.2	38.3	251	
	Calc.	3.98	15.8	63.0	251	
Oi	Obs.	2.94	9.73	64.5	223	
	Calc.	3.86	14.9	57.7	223	
Ibi	Obs.	3.00	11.0	32.0	111	
	Calc.	3.25	10.5	34.2	111	
Ado	Obs.	3.00	14.8	43.0	95	
	Calc.	3.12	9.75	39.4	95	
Kizu	Obs.	2.90	12.1	39.5	145	369
	Calc.	3.26	10.6	34.7	113	369
Katsura	Obs.	3.14	12.5	62.3	293	
	Calc.	4.14	17.1	70.8	293	
Echi	Obs.	4.71	8.67	38.0		
	Calc.	3.36	11.3	38.0		
Yasu	Obs.	2.53	16.0	71.0		
	Calc.	4.14	17.2	71.0		

成り立つものと考えられる。しかし、河道数則およびソース数則がともに完全に成立する河道網においては、位数 u の河道には位数 $u-1$ の河道のみが流入することになり、ある程度ソース数の大きい自然の河道網では、位数 $1, 2, \dots, u-2$ の河道も位数 u の河道に流入するので、河道数則およびソース数則を完全に満足する河道網は、確率的にありえないといえよう。

次に、ソース数 n 、最大位数 k の河道網におけるマグニチュード i のリンクの河道リンク位数の平均値 \bar{u}_i は、 i_0 および i_d に対して式 (33) で表わされる関係が成立すると、 $i_d=R_b^{u-1}$ かつ $i_0=R_b^{u-2}$ となり、これらの式を式 (18) および (19) に代入して、次のように表わすことができる。

$$\bar{u}_i=1+\log i/\log R_b \dots\dots\dots (34)$$

したがって、あるリンクのマグニチュードがわかれば、上式よりそのリンクの河道リンク位数のおおよその値を知ることができ、そのリンクに対する地形量は式 (29) より求められることになる。

Fig. 4 はマグニチュードと河道リンク位数および比例河道位数の平均値 \bar{u}_i, \bar{u}_p の関係を示したものである。河道リンク位数は、マグニチュードと位数との理論的近似式 (17) に基づいて定義されているので、実測値と理論値との適合性がよい。式 (8) および (9) で定義される比例河道位数はもともと経験的に提案されたものであるが、マグニチュード 3 以上のリンクの比例河道位数は河道リンク位数の実測値とほぼ同様の変化をする。

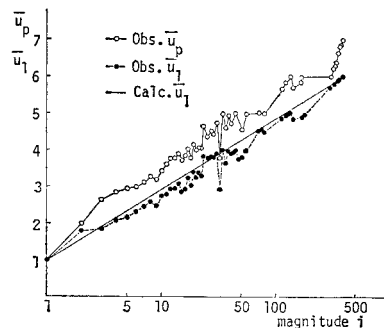


Fig. 4 Observed average proportional stream order \bar{u}_p , and observed \bar{u}_i and theoretical stream link order \bar{u}_i versus magnitude i for Kizu River.

4. マグニチュード理論における河道配列の統計則

(1) 河道リンク数則

マグニチュードと河道リンク数との関係を、トポロジ的ランダム性の仮定を用いて、統計的に求めることに

する。

ソース数 n の河道網におけるマグニチュード $i (1 \leq i \leq n)$ のリンク数を M_i^n で表わすと、次の関係が常に成り立つ。

$$\sum_{i=1}^n M_i^n = 2n - 1 \dots\dots\dots (35)$$

いま、ソース数 n の河道網に対する Z_n 個の TDCN の中で、マグニチュード i のリンクを j 本持つ TDCN の数を $(Z_n)_{ij}$ で表わすと、すべてのマグニチュードに対して、次の式が成り立つ。

$$\sum_{j=0}^J (Z_n)_{ij} = Z_n \quad (i=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (36)$$

ただし、 $J = [n/i]$

次に、 $j=J$ と $0 \leq j \leq J-1$ の2つの場合に分けて、 $(Z_n)_{ij}$ を求める。

(i) $j=J$ の場合：マグニチュード i のリンクの上流には i 本の外部リンクがある。いま、マグニチュード i のリンク数は j であるから、 $i \cdot j$ 本の外部リンクがマグニチュード i のリンクの上流域にあることになる。したがって、残りの外部リンク数は $n - i \cdot j$ である。ここに、マグニチュード i のリンクの j 本と外部リンク $n - i \cdot j$ 本の合計 $N = n - j(i-1)$ 本のリンクによる配列の総数は、式 (5) より Y_N で表わされる。ところが、マグニチュード i のリンクおよび外部リンクは互いに区別され得ない。また、マグニチュード i のリンクより上流の小河道網に対する河道配列の仕方は Z_i 通りである。したがって、 $(Z_n)_{ij}$ は次のように表わすことができる。

$$(Z_n)_{ij} = (Z_i)^j Y_N / j! \cdot (n - i \cdot j)! = F_{ni}^j \dots (37)$$

ただし、

$$F_{ni}^j = (Z_i)^j Z_{NN} C_j, \quad N = n - j(i-1) \dots\dots\dots (38)$$

(ii) $0 \leq j \leq J-1$ の場合： $j=J$ の場合とほぼ同様であるが、この場合には $(n - i \cdot j)$ 本の外部リンクでマグニチュード i のリンクが形成され、 $j=j+1, j+2, \dots, J$ となる場合を除く必要があるので、 $(Z_n)_{ij}$ は次のように表わされる。

$$(Z_n)_{ij} = F_{ni}^j - \sum_{l=j+1}^J {}_l C_j \cdot (Z_n)_{il} \dots\dots\dots (39)$$

ここで、式 (37) と式 (39) をまとめると、次のようになる。

$$\sum_{j=0}^J {}_j C_j (Z_n)_{il} = F_{ni}^j \quad (j=0, 1, \dots, J) \dots\dots\dots (40)$$

n, i を固定して $(Z_n)_{ij} (j=0, 1, \dots, J)$ を未知数と考えると、式 (40) は $J+1$ 個の $(Z_n)_{ij}$ を未知数とする連立方程式と考えることができる。この連立方程式を解けば、 $(Z_n)_{ij}$ は次のように表わされる。

$$(Z_n)_{ij} = \sum_{k=j}^J F_{ni}^k {}_k C_j (-1)^{k-j} \dots\dots\dots (41)$$

いま、ソース数 n の河道網におけるマグニチュード i のリンク数の期待値を m_i^n で表わすと、トポロジー的ランダム性の仮定より、 m_i^n は次のように表わされる。

$$m_i^n = \sum_{j=1}^J j \cdot (Z_n)_{ij} / Z_n \dots\dots\dots (42)$$

式 (40) において、 $j=1$ とおき、式 (42) を計算すれば、

$$m_i^n = (n-i+1) Z_i Z_{n-i+1} / Z_n \dots\dots\dots (43)$$

となる。また、式 (43) で表わされるこの関係、すなわちリンク数の期待値 m_i^n に対しても式 (35) が成立することが証明される¹⁵⁾。

$$\sum_{i=1}^n m_i^n = 2n - 1 \dots\dots\dots (44)$$

ここで、式 (43) を河道リンク数則と名づけることにする。

次に、ソース数 n の河道網におけるマグニチュード i のリンク数の標準偏差を σ_i^n で表わせば、 σ_i^n は次のように表わされる。

$$(\sigma_i^n)^2 = \sum_{l=0}^J (l - m_i^n)^2 (Z_n)_{il} / Z_n \dots\dots\dots (45)$$

式 (40) において、 $j=2$ を代入した式を利用して、式 (45) を計算すれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_i^n)^2 &= m_i^n - (m_i^n)^2 + 2(Z_i)^2 Z_{n-2(i-1)} \\ &\quad \cdot {}_{n-2(i-1)} C_2 / Z_n \quad (1 \leq i \leq n/2) \\ &= m_i^n - (m_i^n)^2 \quad (n/2 < i \leq n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

ソース数 n の河道網におけるマグニチュード i の実際のリンク数 M_i^n が次の範囲に入る確率は、Tschebycheff の公式より 3/4 以上である。

$$m_i^n - 2\sigma_i^n < M_i^n < m_i^n + 2\sigma_i^n \dots\dots\dots (47)$$

河道リンク数の期待値 m_i^n およびその標準偏差 σ_i^n は、地質的影響が強く作用しない場合に対して、トポロジー的ランダム性の仮定 (I) を用いて求められたものであるから、いま対象としている河道網に対する地質的影響の強弱を表わす地質制御指標 (geologic control index) G を次のように定義することができる。

$$G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |M_i^n - m_i^n| / \sigma_i^n \dots\dots\dots (48)$$

ソース数がほぼ同じ河道網に対しては、 G によって流域の地質、地形がその流域の河道網のトポロジー特性を与える影響の大小、あるいは平均的な河道網からの偏差を知ることができる。しかし、ソース数が非常に異なる河道網に対しては、式 (48) で定義された G で十分であるかどうか検討を要する。

次に、ソース数 n が十分大きい場合、式 (43) で与えられる期待値 m_i^n は次のように近似される。

(1) $1 \leq i \leq [3n/4]$ のとき、 m_i^n は i について単調減少し、

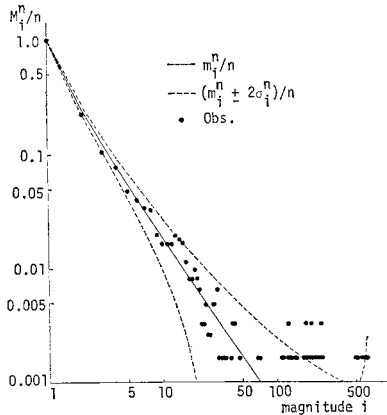


Fig. 5 Observed and calculated number of links M_i^n/n versus magnitude i for Shingu River.

$$m_i^n \approx n \cdot Z_i \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1} \dots\dots\dots (49)$$

(2) $[3n/4] < i \leq n$ のとき, m_i^n は i について単調増加し,

$$m_i^n \approx {}_{2n-2i}C_{n-i} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-i} \dots\dots\dots (50)$$

式 (49) は, $i \geq 3$ かつ $m_i^n \geq 1$ の範囲では, Stirling の公式を用いると, 次のように近似される.

$$\log(m_i^n/n) \approx -\frac{3}{2} \log i - \frac{1}{4} \dots\dots\dots (51)$$

したがって, この範囲においてのみ河道リンク数は式 (20) で表わされるような関数形で表現され, 対比成長モデルは厳密には成立しないことが理解される.

Fig. 5 は新宮川のリンク数とマグニチュードの関係である. 実測値は, $m_i^n \pm 2\sigma_i^n$ の範囲にほぼ入っており, 新宮川に対しては, トポロジー的ランダム性の仮定

Table 4 Geologic control index

River	G
Shingu	0.723
Tozu	0.795
Kitayama	0.801
Kizu	0.750
Katsura	0.775
Oi	1.036
Ibi	0.857
Ado	0.957
Yasu	0.966
Echi	0.957

がおおよそ満足されていることがわかる. Table 4 には 10 河川に対する地質制御指標 G の値が表示されている. ソース数が大きい河川ほど, G の値は小さくなる傾向があるが, 大井川に対する G の値は他の河川の値に比べて明らかに大きい. このことは, 大井川では, 他の河川に比べてその河道配列に及ぼす地質, 地形的影響が大きいことを示している. Table 2 の分岐比の値を比較すれば, 大井川に分岐比の値は他の河川の値と変わらない. これは, マグニチュード理論の河道リンク数則は, 河道網構成最小単位であるリンクを対象とするので, 位数理論の河道数則に比べて河道網のトポロジー特性をより詳しく表現しているためと考えられる.

(2) 河道リンク分流・配分則

ソース数 n の河道網における河道リンクの合流に関しては, マグニチュード j と $i-j$ のリンクが合流してできるマグニチュード i のリンク数の期待値を m_{ji}^n ($j = 1, 2, \dots, [i/2]$) とすると, 次のように表わされる.

$$m_{ji}^n/m_i^n = (2 - \delta_{ji/2}) Z_j \cdot Z_{i-j} / Z_i \dots\dots\dots (52)$$

ここに, $\delta_{ji/2}$ はクロネッカーデルタである.

さらに, ソース数 n の河道網における河道リンクの配分に関しては, マグニチュード i のリンクに合流するマグニチュード j のリンク数の期待値を $(m_j^n)_i$ ($i = j+1, j+2, \dots, n$) とすると, 次のように表わされる.

$$(m_j^n)_i / m_j^n = 2 \cdot Z_{i-j} \cdot {}_{2n-2i}C_{n-i} / {}_{2n-2j}C_{n-j} \dots\dots\dots (53)$$

この式を河道リンク配分則と名づけることにする.

次に, 河道リンク数則および河道リンク配分則より, 高樟が提案した 1/4 則, 1/2 則をより厳密に証明しよう.

ソース数 n の河道網から外部リンクをすべて取り除いて構成される河道網の外部リンクにおいて, 取り除く前のリンクを k 個含む外部リンク数の期待値を $NE(k:n)$ で表わすと, 次の関係が成立する.

$$NE(k:n) = \left\{ \sum_{i=k+3}^n (m_{k+1}^n)_i \right\} \frac{2^{k-1}}{Z_{k+1}} \dots\dots\dots (54)$$

$$= 2^{n-2} / Z_n \quad (k=n-1) \dots\dots\dots (55)$$

式 (54) は, 河道リンク配分則 (53) より,

$$NE(k:n) = 2^{k-1} \cdot \frac{m_{k+1}^n}{Z_{k+1}} - 2^k \frac{m_{k+2}^n}{Z_{k+2}} \dots\dots\dots (56)$$

となる. この式はさらに, 河道リンク数則 (43) より, 次のように表わされる.

$$NE(k:n) = 2^{k-1} \cdot \frac{(n-k)Z_{n-k}}{Z_n} \cdot \frac{n-k-2}{2n-2k-3} \dots\dots\dots (57)$$

また, ソース数 n の河道網から外部リンクをすべて取り除いて構成される河道網の外部リンク数の期待値は, 式 (55) および (56) より, 次のようになる.

$$\sum_{k=1}^{n-3} NE(k:n) + NE(n-1:n) = m_2^n \dots\dots\dots (58)$$

外部リンクをすべて取り除いて構成される河道網の外部リンクがもとの河道網のリンクを k 個含む確率を $PE(k:n)$ で表わすと,

$$PE(k:n) = NE(k:n) / m_2^n \dots\dots\dots (59)$$

$1 \leq k \leq n-3$ の場合, 式 (59) は式 (43) および (57) より,

$$PE(k:n) = 2^{k-1} \cdot \frac{(n-k)Z_{n-k}}{(n-1)Z_{n-1}} \cdot \frac{n-k-2}{2n-2k-3} \dots\dots\dots (60)$$

となり、 n および $n-k$ が十分大きいとき Stirling の公式を用いて計算すれば、次のように近似される。

$$PE(k:n) \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^k \dots\dots\dots (61)$$

ソース数 n の河道網から外部リンクをすべて取り除いて構成される河道網の内部リンクにおいて、取り除く前のリンクを k 個含む内部リンク数の期待値を $NI(k:n)$ 、その確率を $PI(k:n)$ で表わすと、 $NI(k:n)$ は次のように表わされる¹⁹⁾。

$$NI(k:n) = \frac{2^{k-1}}{Z_n} [\{(n-k)Z_{n-k-1} - 2(n-k-1)Z_{n-k} + \{3n-3k-2\}Z_{n-k} - 2(3n-3k-5)Z_{n-k-1}\}] \quad (1 \leq k \leq n-3) \dots\dots\dots (62)$$

また、内部リンクの総数の期待値は式 (62) より、

$$\sum_{k=1}^{n-3} NI(k:n) = m_2^n - 1 \dots\dots\dots (63)$$

となり、確率 $PI(k:n)$ は次のようである。

$$PI(k:n) = NI(k:n) / (m_2^n - 1) \dots\dots\dots (64)$$

この式は、 n および $n-k$ が十分大きいとき、Stirling の公式を用い、次のように近似される。

$$PI(k:n) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \dots\dots\dots (65)$$

いま、ソース数 n の河道網から外部リンクを取り除いて構成される河道網のソース数が j である TDCN の数は $(Z_n)_{2j}$ で与えられるから、外部リンクを取り除いて構成される河道網のソース数が j である確率 P_n^j は次のようになる。

$$P_n^j = (Z_n)_{2j} / Z_n \quad (j=1, 2, \dots, [n/2]) \dots\dots (66)$$

ところが、 $(Z_n)_{2j}$ は式 (41) より、

$$(Z_n)_{2j} = 2^{n-2j} \cdot j \cdot C_{n-j} \cdot Z_j \dots\dots\dots (67)$$

また、ソース数 j の期待値は式 (58) より m_2^n であるから、次の関係が成立する。

$$\sum_{j=1}^{[n/2]} j \cdot P_n^j = m_2^n = \frac{n(n-1)}{2(2n-3)} \dots\dots\dots (68)$$

以上の結果を用いて、ソース数 n が十分大きい場合に対して、1/4 則および 1/2 則を証明しよう。まず、ソース数 n の河道網における位数 u の河道数の期待値を N_u^n で表わすと、 N_2^n は式 (68) より、

$$N_2^n = \sum_{j=1}^{[n/2]} j \cdot P_n^j \simeq \frac{1}{4} \cdot n \dots\dots\dots (69)$$

ここで、 N_u^n に対して一般的に次の関係が成立する。

$$N_u^n = \sum_{j=2u-1}^{[n/2]} N_{u-1}^j \cdot P_n^j \dots\dots\dots (70)$$

式 (69) および式 (70) より、近似的に 1/4 則が成立することがわかる。

$$N_u^n \simeq \left(\frac{1}{4}\right)^{u-1} \cdot n \quad \left(\frac{1}{4} \text{ 則}\right) \dots\dots\dots (71)$$

次に、位数 u の河道が位数 $u-1$ の河道の合流点を

k 個持つ確率を ${}_k P_n^u$ で表わすと、式 (61) より、

$${}_k P_n^2 = PE(k:n) \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^k \dots\dots\dots (72)$$

となる。 $u=3$ の場合、次の関係が成立する。

$${}_k P_n^3 = \sum_{j=k+1}^{[n/2]} PE(k:j) P_n^j \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^k \dots\dots\dots (73)$$

以下、同様に計算して、近似的に次の 1/2 則が成立することがわかる。

$${}_k P_n^u \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right) \dots\dots\dots (74)$$

トポロジー的ランダム性の仮定 (I) より統計的に求められたマグニチュード理論の河道リンク数則および河道リンク配分則より、同じ仮定 (I) より得られた位数理論の 1/4 則、1/2 則が誘導されることが証明された。

このことより、マグニチュード理論における河道配列の統計則の方が、位数理論の河道配列の統計則よりも、河道網の一般的なトポロジー特性をより詳しく表現していることがわかる。

地形図上の河道網には、実際の河道がすべて表わされていない。式 (61)、(65) および (66) は、地形図より得られた河道網のソース数、リンク長の分布等と実際の河道網におけるこれらの値との関係を考えると有用となる。

(3) 河道リンク数と節点高さとの関係

最後に、ソース数 n の河道網における河道リンク数 M_i^n と節点高さとの関係を考えてみよう。この河道網の節点高さ、ソース高さおよび合流点高さの総和をそれぞれ $T_n^{(N)}$ 、 T_n 、 $T_n^{(J)}$ で表わすと、次の関係が常に成り立つ。

$$T_n^{(N)} = \sum_{i=1}^n (2i-1) M_i^n \dots\dots\dots (75)$$

$$T_n = \sum_{i=1}^n i \cdot M_i^n \dots\dots\dots (76)$$

$$T_n^{(J)} = \sum_{i=2}^n (i-1) M_i^n \dots\dots\dots (77)$$

ここに、式 (35) を用い、 $T_n^{(N)}$ 、 $T_n^{(J)}$ を T_n で表わせば、次のようになる。

$$T_n^{(N)} = 2 \cdot T_n - (2n-1) \dots\dots\dots (78)$$

$$T_n^{(J)} = T_n - (2n-1) \dots\dots\dots (79)$$

したがって、 n 、 T_n が与えられると、式 (78) および (79) より $T_n^{(N)}$ 、 $T_n^{(J)}$ が決まることになる。

5. 平均ソース高さと最大ソース高さ

河道網のトポロジー特性指標として重要な平均ソース高さと最大ソース高さを、ランダム性の仮定 (I) を用い、ソース数 n の関数として表わそう。

ソース数 n の河道網において、節点高さ j の節点数

を f_j , ソース高さ j のソース数を $f_j^{(s)}$, 合流点高さ j の合流点数を $f_j^{(J)}$ で表わすと, 次の関係が常に成立する.

$$\sum_{j=1}^d f_j = 2n - 1 \dots\dots\dots (80)$$

$$\left. \begin{aligned} f_j^{(s)} &= f_j - \frac{1}{2} f_{j+1}, \quad f_j^{(J)} = \frac{1}{2} f_{j+1} \\ &\quad (1 \leq j \leq d-1) \\ f_d^{(s)} &= f_d, \quad f_d^{(J)} = 0 \quad (j=d) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (81)$$

ここに, $f_1 = 1$ であり, $f_j (2 \leq j \leq d)$ は 2 以上の偶数である. また, d はこの河道網の最大ソース高さで, 次の範囲の整数である.

$$\log_2 2n \leq d \leq n \dots\dots\dots (82)$$

この河道網の全節点高さ $T_n^{(N)}$, 全ソース高さ T_n , 全合流点高さ $T_n^{(J)}$ は, 定義より次のように表わされる.

$$T_n^{(N)} = \sum_{j=1}^d j \cdot f_j \dots\dots\dots (83)$$

$$T_n = \sum_{j=1}^d j \cdot f_j^{(s)} \dots\dots\dots (84)$$

$$T_n^{(J)} = \sum_{j=1}^d j \cdot f_j^{(J)} \dots\dots\dots (85)$$

式 (80) および (81) より, $T_n^{(N)}$ および $T_n^{(J)}$ は T_n と n で表わされ, 式 (78) および (79) と同じ結果をうる. したがって, 河道網のトポロジー特性を表わす指標としては, T_n あるいは平均ソース高さ T_n/n , または最大ソース高さ d を考えればよいことになる.

ランダム性の仮定 (I) を用いれば, ソース数 n の河道網の全ソース高さの期待値 t_n は, 式 (76) より次のように表わされる.

$$t_n = \sum_{i=1}^n i \cdot m_i^n \dots\dots\dots (86)$$

河道リンク数則 (43) および式 (44) を用いて計算すると, $Z_n t_n$ に関する次の反復関係が得られる.

$$Z_n t_n = 4 \cdot Z_{n-1} t_{n-1} \dots\dots\dots (87)$$

ところが, $Z_1 t_1 = 1$ であるから, t_n は次のように表わされる.

$$t_n = 4^{n-1} / Z_n \dots\dots\dots (88)$$

したがって, 平均ソース高さの期待値 e_n は, 次式で与えられる.

$$e_n = 4^{n-1} / (n \cdot Z_n) \dots\dots\dots (89)$$

n が大きい場合, 上式は Stirling の公式を用いて次のように近似される.

$$e_n \approx 1.78 \sqrt{n-1} \dots\dots\dots (90)$$

ソース数 n の河道網の最大ソース高さの期待値 d_n を求めよう. そのため, ソース数 n , 最大ソース高さ d の河道網の全ソース高さ T_n の取り得る最小値および最大値をそれぞれ T_{\min} , T_{\max} と表わす. T_n と $T_n^{(N)}$ には式 (78) で表わされる関数が成立するから, T_n が

最小 および 最大のとき, $T_n^{(N)}$ も最小 および 最大になり, そのときの $f_j^{(s)}$ と f_j の関係は式 (81) で表わされる.

$T_n^{(N)}$ を最小にする f_j は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} f_j &= 2^{j-1} && (j=1, 2, \dots, l_1) \\ f_j &= 2(n-d+l_1+1) \cdot 2^{-j} && (j=l_1+1) \\ f_2 &= 2 && (j=l_1+2, \dots, d) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (91)$$

ここに, $l_1 (2 \leq l_1 \leq d-1)$ は, 次の関係を満足する整数で, ソース数 n , 最大ソース高さ d の河道網の最大位数の取り得る最大値である.

$$2^{l_1-2} l_1 \leq 2(n-d) < 2^{l_1+1} - 2(l_1+1) \dots\dots (92)$$

式 (91) の f_j に対する $f_j^{(s)}$ の値を式 (81) より求め, それを式 (84) に代入して計算すれば,

$$T_{\min} = -2^{l_1} + n(l_1+2) + (d-l_1-1)(d-l_1)/2 \dots\dots\dots (93)$$

となる. 同様にして, T_n の最大値 T_{\max} は次のように表わされる.

$$T_{\max} = -2^{d-l_2+1} + n(d+1) - (l_2-2)(2d-l_2+1)/2 \dots\dots\dots (94)$$

ここに, $l_2 (2 \leq l_2 \leq d-1)$ は次の関係を満足する整数である.

$$\begin{aligned} 2^{d-l_2+1} - 2(d-l_2+1) &< 2(n-d) \\ &\leq 2^{d-l_2+2} - 2(d-l_2+2) \dots\dots\dots (95) \end{aligned}$$

また, 式 (92) および (95) より, l_1 と l_2 との間には, 次の関係が成立する.

$$(1) \quad 2^{l_1-2} l_1 < 2(n-d) < 2^{l_1+1} - 2(l_1+1) \text{ のとき, } \\ d-l_2+1 = l_1$$

このとき, 次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned} -1 + \frac{(l_1-2)(d-l_1)-l_1+2}{n} &< d+l_1 \\ -\frac{T_{\min}+T_{\max}}{n} &< 1 + \frac{(l_1-4)(d-l_1)-l_1}{n} \dots\dots\dots (96) \end{aligned}$$

$$(2) \quad 2^{l_1-2} l_1 = 2(n-d) \text{ のとき,}$$

$$d-l_2+2 = l_1$$

このとき, 次式が成り立つ.

$$d+l_1 - \frac{T_{\min}+T_{\max}}{n} = \frac{(d-l_1)(l_1-3)}{n} \dots\dots\dots (97)$$

いま, d として, 最大ソース高さの期待値 d_n を考えれば, 式 (96) および (97) より, n が大きい場合, 近似に次の関係が成立するものと思われる.

$$d_n \approx 2e_n - u_n \dots\dots\dots (98)$$

ここに, u_n はソース数 n の河道網の最大位数の期待値である. 式 (90) を式 (98) に代入すれば, d_n は次のように表わされる.

$$d_n \approx 3.56 \sqrt{n-1} - u_n \dots\dots\dots (99)$$

Table 5 には、平均ソース高さの期待値 e_n の厳密解 (89) および近似解 (90)、また、最大ソース高さ d_n の厳密解および近似解 (99) を示している。 d_n の厳密解は、反復関係を与える式を用いて、数値計算によって、Shreve¹⁰⁾ が求めた値である。 n が大きくなるにつれて、相対誤差が減少しており、 $n \geq 3$ の範囲では、期待値 e_n 、 d_n は、式 (90) および (99) でおおよそ表わされることかわかる。

個々の河道網のトポロジー特性を表わす指標として、ソース数 n 、最大位数 k が与えられた場合、この河道網の最大ソース高さ d_n の理論値は、式 (99) より近似的に次のように表わされる。

$$d_n \approx 3.56 \sqrt{n-1} - k \dots\dots\dots(100)$$

この河道網の平均ソース高さ e_n の理論値は、式 (90) で与えられるものとする。次に、ソース数 n 、最大位数 k のこの河道網の平均ソース高さおよび最大ソース高さの実測値をそれぞれ E_n 、 D_n で表わせば、この河道網のトポロジー的の形状を示す指標 r_e 、 r_d を次のように定義することができる。

$$r_e = 100 \cdot (E_n - e_n) / e_n \dots\dots\dots(101)$$

$$r_d = 100 \cdot (D_n - d_n) / d_n \dots\dots\dots(102)$$

ここに、 e_n 、 d_n はそれぞれ式 (90) および (100) で与えられる。

Table 6 には、10 河川に対する平均ソース高さおよび最大ソース高さの実測値と理論値、また、 r_e 、 r_d の値をもあわせて示している。すべての河川に対して、 r_e 、 r_d の値は正であり、ランダム性の仮定より期待される河川に比べてトポロジー的に細長くなっている。ランダム性の仮定 (I) は、現在までに多くの研究者によって検討され、ほぼ正しいことが確かめられている⁴⁾。10 河川に対する r_e 、 r_d の値を検討する限り、日本の河川は全般的に細長いことがわかる。次に、これらの河川に対する r_e 、 r_d の値を比較すると、新宮川、桂川および揖斐川は、ほぼ平均的な河川であるのに対し、北山川、大井川および愛知川はトポロジー的に細長くなっていることがわかる。特に、大井川においてはその傾向は著しく、大井川は地質、地形的影響をかなり受けていることが予想される。これは、**Table 4** の G の値を比較した結果と一致している。これらのことから、河道網のトポロジー特性指標としては、 r_e 、 r_d の方が分岐比 R_b に比べて、その表わす情報量が多いことがわかる。これは、分岐比が単に河道の分岐状況のみを示すのに対し、平均ソース高さおよび最大ソース高さは、河道の分岐状況ならびに河道の密集度 (compactness) をも示すからである。

Table 5 Expected mean source height e_n and maximum source height d_n of a channel network with n sources

n	e_n			d_n		
	strict	approx.	error(%)	strict	approx.	error(%)
1	1.00	0.00	100.0	1.00	-1.00	200.0
2	2.00	1.78	11.0	2.00	1.56	22.0
3	2.67	2.53	5.2	3.00	3.05	1.7
4	3.20	3.08	3.8	3.80	3.97	4.5
5	3.66	3.56	2.7	4.57	4.69	2.6
6	4.06	3.98	2.0	5.24	5.34	1.9
7	4.43	4.36	1.6	5.88	5.96	1.4
8	4.77	4.71	1.3	6.47	6.57	1.5
9	5.09	5.04	1.0	7.03	7.15	1.7
10	5.39	5.34	0.9	7.56	7.71	2.0
20	7.78	7.76	0.3	11.92	12.08	1.3
50	12.44	12.46	0.2	20.73	20.83	0.5
100	17.66	17.71	0.3	30.80	30.78	0.1
200	25.02	25.11	0.4	45.12	45.13	0.0
500	39.60	39.76	0.4	73.87	73.71	0.2

Table 6 Observed and calculated mean source height \bar{e}_n and maximum source height \bar{d}_n

River	\bar{e}_n			\bar{d}_n		
	Obs.	Calc.	r_e	Obs.	Calc.	r_d
Shingu	48.1	43.8	9.8	89	81.6	9.0
Tozu	33.3	28.1	18.2	65	51.3	26.7
Kitayama	40.0	27.7	44.4	62	50.4	23.1
Kizu	45.3	34.2	32.8	66	62.3	6.0
Katsura	33.2	30.4	9.1	64	55.8	14.6
Ibi	43.3	26.5	63.3	85	48.0	76.9
Ado	23.0	18.7	21.0	37	32.3	14.4
Yasu	18.8	14.9	26.2	31	29.5	22.0
Echi	14.5	10.8	33.7	23	17.7	30.3

次に、各流域内におけるトポロジー特性の変化について調べてみよう。ソース数 n 、最大位数 k の河道網におけるマグニチュード i のリンクより上流の小河道網に対する平均ソース高さおよび最大ソース高さの平均値をそれぞれ、 \bar{e}_i 、 \bar{d}_i で表わせば、 \bar{e}_i は式 (90) より近似的に次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_i &= 1 & (i=1) \\ &= 2 & (i=2) \\ &= 1.78 \sqrt{i-1} & (3 \leq i \leq n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(103)$$

\bar{d}_i は、式 (99) の u_n の代りに式 (34) で与えられる河道リンク位数の平均値 \bar{u}_i を用い、同様に次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{d}_i &= 1 & (i=1) \\ &= 2 & (i=2) \\ &= 3.56 \sqrt{i-1} - (1 + \log i / \log R_b) & (3 \leq i \leq n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(104)$$

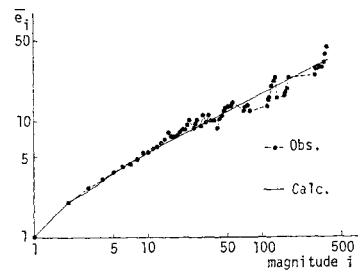


Fig. 6 Observed and calculated average mean source height \bar{e}_i versus magnitude i for Kizu River.

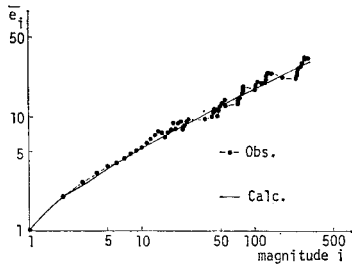


Fig. 7 Observed and calculated average mean source height \bar{e}_i versus magnitude i for Katsura River.

Fig. 6 には木津川, また, Fig. 7 には桂川の平均ソース高さ \bar{e}_i の実測値と理論値を示している。桂川流域は、ほぼ秩父古生層よりなる地質構造の一様な流域である。そのためか、理論値と実測値の適合性もよい。木津川流域は、マグニチュード 129 の伊賀川と 160 の名張川とが合流してできる流域である。そのため、マグニチュードが 100 以上では実測値の変動が大きい。すなわち、木津川流域内の詳しいトポロジー特性を知るためには、流域を伊賀川流域、名張川流域および合流点より下流域との 3 流域に区分して取り扱うのが適当と思われる。

Fig. 8 に野洲川, また, Fig. 9 に愛知川の最大ソース高さ \bar{d}_i の実測値と理論値とを示している。ソース数の大きい木津川および桂川に比べて、実測値と理論値との適合性は悪い。また、これら 4 河川流域に対する実測

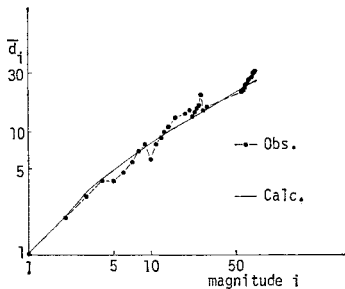


Fig. 8 Observed and calculated average maximum source height \bar{d}_i versus magnitude i for Yasu River.

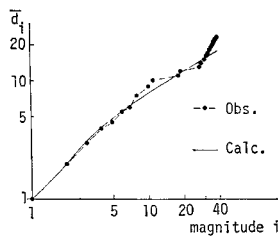


Fig. 9 Observed and calculated average maximum source height \bar{d}_i versus magnitude i for Echi River.

値からわかるように、最下流域では、マグニチュードの非常に小さい支川が連続的に合流しており、そのため流域全体としては、平均的な河川よりトポロジー的に細長くなっていることがわかる。

6. 結 語

本研究は、河道網構成最小単位であるリンクおよび節点に対して定義されるマグニチュードおよび高さの概念を基礎とし、トポロジー的ランダム性の仮定より得られる河道網のトポロジー特性量に関する統計則ならびに指標を展開したものである。同時に、従来より提案されている河道網の階層的構造を表現する河道分類法の相互関係を明らかにした。その結果、本論文で提案した河道リンク位数に対しても位数理論の地形則が成立することが証明された。現在のところ、位数が広く用いられており、その欠点を補う意味で、河道リンク位数は重要であると考えられる。

対象流域のトポロジー特性を示す指標として、ソース数、最大位数を与えれば、この河道網の分岐比は決まり、また、この流域内の任意のリンクあるいはそのリンクより上流の小河道網に対して定義されるリンク数、河道リンク位数、平均ソース高さおよび最大ソース高さは、そのリンクのマグニチュードの関数としてほぼ表わされることがわかった。個々の河道網の地質、地形的影響の程度、また、トポロジー的形状を定量的に比較するには、指標 G , r_e および r_d の値を検討することにより、従来の分岐比の比較より詳しい情報が得られることもわかった。この指標をわが国の全河川に対して実測、比較すれば、トポロジーの特徴によって、河川のもつ性格を定量的に分類することも可能となろう。

最後に、本研究をすすめるにあたり、種々の資料の分類、整理に協力された 棚橋通雄 (建設省)、吉田八左右 (京都大学大学院学生) の両君に感謝の意を表わす次第であります。

参 考 文 献

- 1) Horton, R.E. : Erosional development of streams and their drainage basins : Hydrophysical approach to quantitative morphology, Geol. Soc. Amer., Bull. 56, 1945.
- 2) Shreve, R.L. : Statistical law of stream numbers, J. Geol. 74(1), 1966.
- 3) Jarvis, R.S. : New measure of the topologic structure of dendritic drainage networks, W.R.R. Vol. 8, No. 5, 1972.
- 4) Smart, J.S. : Channel networks, Advan. Hydrosci., 8, 1972.
- 5) Ishihara, T., Y. Iwasa and T. Takasao : Stochastic study of channel distribution in river basins, Proc. Int. Hydrol. Symp., Fort Collins, Colo. Vol. 1, 1967.
- 6) Scheidegger, A.E. : The algebra of stream order

- numbers, U.S. Geol. Surv. Profess. Paper 525 B, 1965.
- 7) Stall, J.B. and Y.S. Fok : Hydraulic geometry of Illinois streams, Uni. of Illinois W.R.C. Res. Report, No. 15, 1968.
 - 8) Woldenberg, M.J. : Horton's laws justified in terms of allometric growth and steady state in open systems, Bull. Geol. Soc. Amer., Vol. 77, 1966.
 - 9) Werner, C. and J.S. Smart : Some new methods of topologic classification of channel networks, Geogr. Anal., 5, 1973.
 - 10) Shreve R.L. : Variation of mainstream length with basin area in river networks, W.R.R. Vol. 10, No. 6, 1974.
 - 11) 藤田隆博 : 流域地形構造とその統計測に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第 234 号, 1975.
 - 12) 小林信久 : ダム群による水配分システムの研究, 京都大学卒業論文, 1974.
 - 13) 高棹琢馬 : 水工水理学, 丸善, pp. 363~365, 1972.
 - 14) 岩佐義朗・小林信久・棚橋通雄 : 河道ネットワークに関する基礎的研究, 土木学会年次講演会集, 1975.
 - 15) 小林信久 : 流域の地形形態に関する河川工学的研究, 京都大学大学院修士論文, 1976.

(1976. 6. 9・受付)