

2次元表面密度噴流における流れの特性と連行現象

FLOW PROPERTIES AND TURBULENT ENTRAINMENT OF
TWO DIMENSIONAL STRATIFIED SURFACE JET

椿 東 一 郎*・小 松 利 光**

By Toichiro TSUBAKI and Toshimitsu KOMATSU

1. ま え が き

均一流体の噴流や本文の課題である静止した流体表面に温水や密度の小さい流体が噴出する表面密度噴流の特徴は、噴流が周囲流体を噴流中にとりこみ、流れ方向に流量が増加してゆく連行現象である。この現象は自由乱れの境界においては一般に認められ、均一流体の噴流や後流のような自己保存型の流れについては、Townsend¹⁾がエネルギー方程式を用いて各種均一流れの連行係数の値を理論的に求めている。一方、表面密度噴流の連行現象を初めて研究したのは Ellison・Turner²⁾であって、連行速度は断面の代表流速に比例し、連行係数 E は断面における浮力効果と慣性項との割合を表わす overall Richardson 数 R_i の関数として表示されている。彼らの実験結果は、表面密度噴流の解析的研究に適用され、二次元噴流を取り扱った玉井³⁾、Koh⁴⁾の研究や、三次元問題として温排水の鉛直・水平方向の拡散を論じた林⁵⁾の一連の研究など多くの成果をもたらしたが、共通して、Ellison による連行係数 E の実験結果を流量変化の式に導入し、それを基本式として解析されたものであって解析結果は連行係数の関数形や数値に大きく左右される。

このような実用的な見地と現象的な興味のために、成層乱流場の連行現象に関する基礎的な実験が Kantha et al⁶⁾ や Hill⁷⁾ などによって進められ、表面密度噴流については和田・片野⁸⁾ や Chu・Vanvari⁹⁾ によって実験的な研究が行われた。特に、Chu らは表面密度噴流における流れ方向の乱れ強度を測定し、乱れ強度や連行係数が R_i の増加とともに減少することを実験的に明らかにしているが、それらの機構を物理的に解明するまでには至っていない。

表面密度噴流の連行現象については、著者はかつて乱れのエネルギー式などに基づいて理論的な検討を試みた¹⁰⁾が、本文では、X-Y 2方向 hot film 流速計を用いた詳細な乱れ測定を行い、実験と理論の両面から浮力効果が流れのパターンや乱れおよび連行係数に及ぼす機構について考察した。本文においては、表面密度噴流は流れ方向の flow force M_0 、浮力束 N_0 が保存される流れであるから、平均流のエネルギー方程式を用いて、噴流の拡がりや表面流速、表面浮力などの噴流特性量の流れの方向の変化を表わす式を求める。これらの中には当然渦動粘性が含まれており、浮力効果による乱れ強度や混合距離の変化を追求することが問題の焦点となり、Reynolds 応力や乱れの特性・分布などについての実験結果を記述するとともに、乱れエネルギーの式、乱れの加速度平衡式を適用して乱れ特性量を overall Richardson 数 R_i の関数として表示している。このようにして求められた噴流特性量は、上記の M_0 、 N_0 で無次元化されており、均一噴流をその極限として含む一般的な表示式とみなされよう。浮力効果を受ける複雑な乱れについては、なお検討の余地が残されているが、理論は実験結果と照合して、その妥当性が示されている。また、連行係数は R_i が増すとともに急激に減少し、 $R_i=0.2$ では連行はほぼ終了して、密度噴流は 2層流的な流れに移行する。本文は $R_i=0\sim 0.2$ 程度の表面密度噴流を対象とするものである。

2. 理論的考察

(1) 基本式

図-1 に示すように、静止した密度 ρ_a の流体表面に、幅 h_0 のスリットから密度 ρ_0 ($\rho_0 < \rho_a$)、流速 U_0 の 2次元噴流が流れる場合を考え、流れ方向に x 軸、鉛直下方に y 軸をとる。 x, y 方向の平均流速を (U, V)、平

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学教室

** 正会員 工修 九州大学助手 工学部水工土木学教室

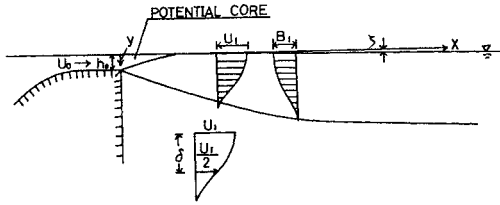


図-1 流れの模式図

均の圧力を \$P\$, 単位質量あたりの平均の浮力を

$$B = g \frac{\rho_a - \rho}{\rho_a} \dots\dots\dots(1)$$

とし、それぞれの変動分を小文字 \$(u, v), p, b\$ で表わすと、連続の式、運動の方程式、拡散方程式および乱れエネルギー \$\bar{e}^2/2 = (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)/2\$ の方程式は、Boussinesq の近似を用いて、それぞれ次のようである。

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{uv} \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_a} g - \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{\partial(BU)}{\partial x} + \frac{\partial(BV)}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{vb}}{\partial y} \dots\dots\dots(5)$$

$$U \frac{\partial \frac{1}{2} \bar{e}^2}{\partial x} + V \frac{\partial \frac{1}{2} \bar{e}^2}{\partial y} = -\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{bv} \dots\dots\dots(6)$$

[移流] [乱れの発生] [浮力束] [拡散] [粘性散逸]

ここで、\$-\overline{uv}, \overline{bv}\$ はせん断応力 \$\tau\$ と乱れによる浮力束であって、渦動粘性係数を \$K_M\$, 渦動拡散係数を \$K_B\$, 運動量の輸送に関する混合距離を \$l\$ とし、\$K_B/K_M = \kappa_B\$ とおくと、次の式

$$-\overline{uv} = \frac{\tau}{\rho_a} = K_M \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{3} \sqrt{\bar{e}^2} l \frac{\partial U}{\partial y} \dots\dots\dots(7)$$

$$\overline{bv} = -K_B \frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{1}{3} \kappa_B \sqrt{\bar{e}^2} l \frac{\partial B}{\partial y} \dots\dots\dots(8)$$

で与えられる。

式(4)に式(1)を代入して、水表面 \$y=\zeta\$ より \$y\$ まで積分すると、圧力分布は

$$P/\rho_a + \bar{v}^2 = g(y - \zeta) - \int_{\zeta}^y B dy$$

となるが \$y \to \infty\$ で \$\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P}{\partial x} = 0\$, すなわち、

$$g \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{\zeta}^{\infty} B dy$$

が成り立つため、流れ方向の圧力勾配は

$$\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{\infty} B dy$$

となり、運動方程式は微小項 \$\frac{\partial(\bar{u}^2 - \bar{v}^2)}{\partial x}\$ を省略して次の式となる。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\tau/\rho_a) - \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{\infty} B dy \dots\dots\dots(9)$$

上の式を \$y=\zeta\$ から \$\infty\$ まで積分すると、flow force の保存式

$$\int_{\zeta}^{\infty} U^2 dy + \int_{\zeta}^{\infty} B y dy = M_0 \text{ (const.)} \dots\dots\dots(10)$$

が得られ、拡散方程式(5)を積分すると、流れ方向の浮力束について次の保存式となる。

$$\int_{\zeta}^{\infty} U B dy = N_0 \text{ (const.)} \dots\dots\dots(11)$$

また、運動方程式(9)に \$U\$ をかけ、\$y=\zeta\$ から \$\infty\$ まで積分すると、平均流のエネルギー式は次のようになる。

$$\frac{d}{dx} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{1}{2} U^3 dy + \int_{\zeta}^{\infty} U \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{\infty} B dy \right\} dy = - \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\tau}{\rho_a} \frac{\partial U}{\partial y} dy \dots\dots\dots(12)$$

さて、噴流幅 \$\delta\$ には、均一流体の噴流幅の定義にならって、流速が表面流速 \$U_1\$ の \$1/2\$ となる深さをを用いることにし、流速分布、浮力分布には相似形を仮定して

$$\frac{U}{U_1} = f(\eta), \quad \frac{B}{B_1} = m(\eta), \quad \eta = \frac{y - \zeta}{\delta}$$

で表わすと、式(10),(11)はそれぞれ

$$M_0 = U_1^2 \delta \alpha_{2U} + B_1 \delta^2 \alpha_{BY} \dots\dots\dots(13)$$

$$N_0 = U_1 B_1 \delta \alpha_{UB} \dots\dots\dots(14)$$

ここに、\$\alpha_{2U} = \int_0^{\infty} f^2(\eta) d\eta\$, \$\alpha_{BY} = \int_0^{\infty} m(\eta) \cdot \eta d\eta\$,

$$\alpha_{UB} = \int_0^{\infty} f(\eta) m(\eta) d\eta$$

また、式(12)は式(14)を考慮して若干の計算の後、微小量を見捨て

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} U_1^3 \delta \int_0^{\infty} f^3(\eta) d\eta \right) + N_0 \frac{d\delta}{dx} \cdot \frac{\int_0^{\infty} f m \eta d\eta}{\int_0^{\infty} f m d\eta} \\ - N_0 \frac{\delta}{U_1} \frac{dU_1}{dx} \frac{\int_0^{\infty} f \int_{\eta}^{\infty} m d\eta d\eta}{\int_0^{\infty} f m d\eta} \\ = -\frac{1}{3} \int_0^{\infty} \sqrt{\bar{e}^2} l \frac{U_1^2}{\delta} \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 d\eta \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

式(13)~(15)は3個の未知量 \$U_1, \delta\$ および \$B_1\$ を規定する基礎式であるが、これらの諸量は flow force \$M_0\$, 浮力束 \$N_0\$ および流下距離 \$x\$ によって規定されるものと予想されるので、overall Richardson 数

$$R_i = \frac{N_0}{U_1^3} \dots\dots\dots(16)$$

を導入すると、式(13),(14)から噴流幅 \$\delta\$, 表面浮力

B_1 はそれぞれ次の式となる。

$$\frac{\delta N_0^{2/3}}{M_0} = \frac{R_i^{2/3}}{\alpha_2 U (1 + \gamma R_i)} \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{N_0^{8/3}}{B_1^2 M_0^2} &= \frac{\alpha^2 U_B}{R_i^{2/3}} \left(\frac{\delta N_0^{2/3}}{M_0} \right)^2 \\ &= \frac{\alpha^2 U_B R_i^{2/3}}{\alpha_2^2 U (1 + \gamma R_i)^2} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\text{ここに, } \gamma = \frac{\alpha_{BY}}{\alpha_2 U \cdot \alpha_{UB}}$$

次に, エネルギー式 (15) における乱れの強度 $\sqrt{\bar{c}^2}$, スケール l は, 速度勾配 dU/dy の最大値付近にピーク値 $\sqrt{\bar{c}^2}_m$, l_m をもつと考えられるので, それらの分布を

$$\sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{\bar{c}^2}_m \cdot h(\eta), \quad l = l_m \cdot j(\eta)$$

とおき, さらに,

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\bar{c}^2}_m / U_1 &= q_m, \quad l_m / \delta = \beta_m, \\ \sqrt{\bar{c}^2} l &= (U_1 \cdot \delta) q_m \beta_m k(\eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

とおくと, 式 (16), (17), (19) を式 (15) に代入し

$$\frac{1}{U_1} \frac{dU_1}{dx} = -\frac{1}{3 R_i} \cdot \frac{dR_i}{dx}$$

などの関係を考慮し, 無次元距離

$$\frac{x N_0^{2/3}}{M_0} = \xi \dots\dots\dots (20)$$

を導入すると, 式 (15) は若干の計算の後, 次の式となる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_i^{1/3}} \chi_1(R_i) \frac{dR_i}{d\xi} \\ = 2 \frac{\alpha_2 U}{\alpha_3 U} q_m \beta_m \int_0^\infty k(\eta) \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 d\eta \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$\chi_1(R_i) = \frac{1 + R_i(4\gamma - 4\tau_1 - 2\tau_2) + 2\gamma R_i^2(\tau_1 - \tau_2)}{(1 + \gamma R_i)^2} \dots\dots\dots (22)$$

$$\text{ここに, } \alpha_3 U = \int_0^\infty f^3(\eta) d\eta,$$

$$\tau_1 = \frac{\int_0^\infty f(\eta) m(\eta) \eta d\eta}{\alpha_3 U \int_0^\infty f(\eta) m(\eta) d\eta}, \quad \tau_2 = \frac{\int_0^\infty f(\eta) \int_\eta^\infty m(\eta) d\eta d\eta}{\alpha_3 U \int_0^\infty f(\eta) m(\eta) d\eta}$$

式 (17), (18), (21) は断面特性量すなわち噴流幅 $\delta N_0^{2/3}/M_0$, 表面浮力 $N_0^{8/3}/B_1^2 M_0^2$ および表面流速 $R_i^{2/3} = N_0^{2/3}/U_1^2$ の流れ方向の変化を規定する基礎式であって,

実験によって断面係数値 $\alpha_2 U$, α_{UB} , τ , τ_1 , τ_2 などの断面係数をきめること, および表面密度噴流場の乱れを測定解析して, 乱れの特性量である乱れ強度 q_m , 混合距離 β_m を overall Richardson 数 R_i の関数として表示することが次の問題となる。

(2) 均一流体の噴流

上述の考察で $R_i \rightarrow 0$ の極限が均一流体の噴流である。以後均一噴流のものに添字 * をつ

けて表わすと, $R_i \rightarrow 0$ の q_m, β_m を q_*, β_* で表わし

$$\chi_* = q_* \beta_* \int_0^\infty k(\eta) \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 d\eta \dots\dots\dots (23)$$

とおき, 式 (21) で $\chi_1(R_i) \rightarrow 1$ において積分すると

$$\left. \begin{aligned} R_i^{2/3} &= \frac{4}{3} \frac{\alpha_2 U}{\alpha_3 U} \chi_* \xi, \\ \text{ie, } \left[\frac{d(M_0/U_1^2)}{dx} \right]_* &= \frac{4}{3} \frac{\alpha_2 U}{\alpha_3 U} \chi_* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

となり, 式 (17) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta N_0^{2/3}}{M_0} &= \frac{4}{3} \frac{1}{\alpha_3 U} \chi_* \xi, \\ \text{ie, } \left(\frac{d\delta}{dx} \right)_* &= \frac{4}{3} \frac{1}{\alpha_3 U} \chi_* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

となる。また, 式 (18) は, 密度変化に寄与しない拡散物質が噴出する場合にあたり, 表面濃度を C_1 とすると

$$\frac{N_0^{8/3}}{C_1^2 M_0^2} = \frac{4}{3} \frac{\alpha^2 U_C}{\alpha_2 U \cdot \alpha_3 U} \chi_* \xi \dots\dots\dots (26)$$

これらの結果は, 均一流体の2次元噴流における U_1 , C_1 がそれぞれ $x^{-1/2}$ に比例し, 噴流幅 δ が直線的に変化することに対応している。

3. 実験の方法とその結果

(1) 実験の方法

実験は長さ 5.5 m, 高さ 1.5 m, 幅 0.15 m の透明アクリル製水路で, 静止した密度 ρ_a の塩水 (あるいは淡水) 表面に, 厚さ h_0 のスリットから出口流速 U_0 の淡水 (密度 ρ_0) を噴出させて行われた (図-1)。実験に用いた相対密度差 $(\rho_a - \rho_0)/\rho_a$, h_0 , U_0 の組合せは, 表-1 に記されている。表のなかの M_0 , N_0 は, それぞれ flow force と流れの方向の浮力束をスリット出口の水理量で表わしたもので

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= U_0^2 h_0 + \frac{1}{2} B_0 h_0^2, \quad N_0 = U_0 h_0 B_0, \\ (B_0 &= g(\rho_a - \rho_0)/\rho_a) \end{aligned} \right\}$$

また, R_{i0} はスリット出口の Richardson 数 $R_{i0} = N_0/U_0^3$ である。

表-1 実験の種類

実験	RUN	h_0 (cm)	U_0 (cm/s)	$\frac{\rho_a - \rho_0}{\rho_a}$	$R_{i0} = \frac{N_0}{U_0^3}$	$\frac{M_0}{(\text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-2})}$	$\frac{N_0}{(\text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-2})}$
EXP-0	1	0.40	15.0	0	0	90.0	—
	2	0.39	26.8	0	0	280.1	—
	3	2.00	10.0	0	0	200.0	—
EXP-A	1	0.40	25.0	0.00283	0.00177	250.2	27.73
	2	0.42	12.9	0.00140	0.00346	70.0	7.43
	3	0.42	14.1	0.00296	0.00613	83.8	17.18
EXP-B	1	2.00	10.0	0.0027	0.0529	205.3	52.9
	2	2.00	10.0	0.0053	0.1039	210.4	103.9

Exp-0 は均一流体の表面噴流である。表面密度噴流の実験においては、噴流が水槽末端部にあたってはね返った反射流れが到着すると、流況が大きく変化する。そのため、Exp-A の各 Run は反射流れの到着する前に I 断面の計測を終え、水槽の静穏化を待って順次下流断面を測定する手順で行われた。Exp-B は、もともと、成層密度噴流を用いて平衡領域における乱れや密度変動のスペクトルを研究するために行ったもので¹¹⁾、定常、安定なせん断流をつくるために、噴流による連行量をあらかじめ測定して、その値に近い塩水を水槽下流部から補給している。Exp-B の実験は、スリット出口の Richardson 数 Ri_0 の値が大きいため、流れの形成領域も浮力効果を受け、特に Exp-B-2 では potential core の消失後 まもなく噴流型から 2 層流的な流れに移行した。したがって、乱れの解析には、均一流体の噴流については Exp-0、密度噴流については Exp-A と Exp-B-1 のうち、いわゆる 流れの確立領域にあたる実験結果を用いている。

平均流速や乱れ速度の測定には、DISA 社製 X-Y 2 方向 hot film 流速計を用い、水表面付近の流速測定のため水素気泡法を併用している。塩分濃度の測定には、大きさ 2.5 mm の 4 電極電導度式 probe を作製し、ほぼ同一点における濃度変動と乱れ速度の同時記録が得られるように、中心間隔 2.5 mm で流速計 probe と結合している。

なお、hot film 流速計は、流入部に多数のスクリーンを設置し、水中の気泡や微小浮流物の probe への付着を防止したため、長時間にわたって安定に使用された。また、最大 0.5°C 程度の水温変化はさけられなかったため、併置した検定用小水槽において、実験の前後とその間において、適宜流速検定を行い、計測時の水温を補正している。電導度計については、応答性・安定性とも十分良好であった。しかし、電導度計は水面下 0.5 cm までは水表面の影響をうけるため、水表面付近では採水による塩分濃度測定を併用している。流速と塩分濃度のデータは、TEAC 製 R-400 データ・レコーダーに収録し、A-D 変換ののち、Exp-A では、サンプリング間隔 $dt=1/100$ sec, データ個数 $N=2048$ で、Exp-0, Exp-B では $dt=1/100$ sec, $N=4096$ で統計処理を行った。

以上の操作により、 x, y 方向の平均流速 U, V と浮力 B , ならびに乱れの特性値として、乱れ強度 $\sqrt{\bar{u}^2}, \sqrt{\bar{v}^2}$, Reynolds 応力 $-\overline{uv}$, 乱れによる浮力束 \overline{vb} が求められ、速度勾配、浮力勾配の実測値を用いて、渦動粘性係数 K_M , 渦動拡散係数 K_B が計算される。また、式 (7) で定義される混合距離 l は、 z 方向の乱れ強度 $\sqrt{\bar{w}^2}$ が測定されていないので、Bradbury¹²⁾ による平面対称噴

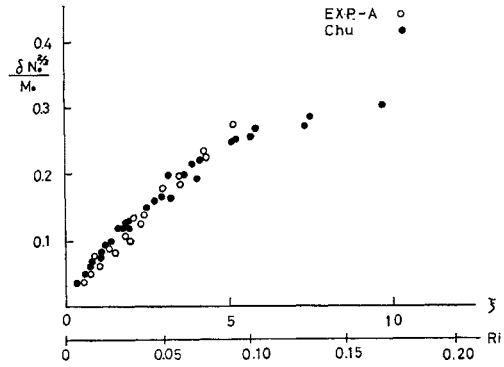


図-2 噴流幅の実験結果

流の実験結果を参照して、 $\sqrt{\bar{v}^2} \approx \sqrt{\bar{w}^2}$ とおき、 $\sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{\bar{u}^2 + 2\bar{v}^2}$ として求めている。

なお、表面密度噴流は、流れ方向に Richardson 数 Ri が増加するとともに、連行係数 E の値が減少し (図-20)、噴流幅の勾配 $d\delta/dx$ も減少して、 $\delta \approx$ 一定な 2 層流的な流れに移行するが、噴流的な挙動を示す Ri の範囲をまず明確にする意味で、図-2 に噴流幅 $\delta N_0^{2/3}/M_0$ と $\xi = x N_0^{2/3}/M_0$ との実験結果を示しておく。また、横軸に併記した Ri は後述の $Ri^{2/3}$ と ξ との理論曲線 (図-16) を用い、 $\delta N_0^{2/3}/M_0$ と Ri との関係に書き直したものである。図-2 および 図-20 から $Ri \geq 0.2$ では連行や噴流幅の拡がりはほぼ終了することがわかる。したがって、表面密度噴流が噴流的な挙動を呈するのは、 Ri の値が $0 \leq Ri \leq 0.2$ の範囲であって、以下の考察はこの範囲の流れを対象とするものである。

(2) 流速分布・浮力分布と係数値

この実験は、Chu ら⁹⁾の実験と同種のもので、流速分布 $U/U_1 = f(\eta)$, 浮力分布 $B/B_1 = m(\eta)$ の測定結果は両者とも当然ほぼ同様であるから簡単に述べる。

測定された流速分布 $f(\eta)$ は、Chu と同様に Gauss 分布

$$f(\eta) = \exp [-(0.833 \eta)^2] \dots\dots\dots (27)$$

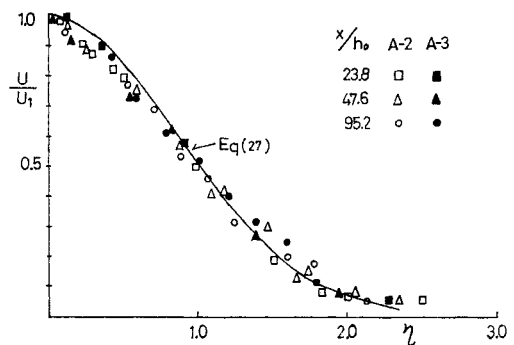


図-3 流速分布

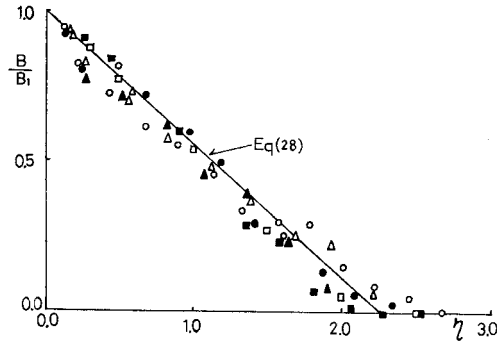


図-4 浮力分布

に近い。ただ、自由表面の近くではわずかにやせた分布形状を示すが、場所 x/h_0 による変化も、浮力効果 R_i による系統的な差異も認められないのが特徴であって、 $f(\eta)$ としては簡単のため式 (27) を用いる (図-3)。

図-4 は浮力分布 $m(\eta)$ を示したものである。測定値は Chu のものと同様にかかなり散らばっているが、Gauss 分布よりも直線的な分布式が適しており、以下 Chu とほぼ同様な次の式を用いる。

$$m(\eta) = 1 - 0.45\eta \quad (0 \leq \eta \leq 2.22) \quad \dots\dots\dots(28)$$

なお、噴流幅として別に $U \neq 0, B \neq 0$ の点で定義し、目視観察とあわせてきめた幅を δ_{obs} とすると

$$\delta_{obs} \approx 2.1\delta$$

であって、この結果も Chu の $\delta_{obs} \approx 2.0\delta$ とほぼ一致している。

以上の $f(\eta), m(\eta)$ から 2. の諸式にあらわれる係数値をまとめたものが表-2 である。

(3) Reynolds 応力・相関係数の分布

hot film 流速計による x, y 方向の乱れ成分 u, v の同時測定から求めた Reynolds 応力を U_i^2 で無次元化し、 $\overline{uv}/U_i^2 = g_r(\eta)$ の分布を示したのが 図-5 である。 $g_r(\eta)$ は、速度勾配の大きい $\eta \approx 0.8$ 付近で最大となるのは各実験に共通しているが、密度せん断流の特徴として、 R_i が増すとともに $g_r(\eta)$ の値は減少し浮力の影響を大きく受けることが注目される。

さて、 $g_r(\eta)$ の分布は流速分布、浮力分布を用いて以下のように計算によって求めることができる。すなわち、連続の式 (2)、運動の方程式 (9) に $U = U_i f(\eta), B = B_1 m(\eta)$ を代入して微小量を無視すると、 $B_1 \delta U_i \alpha_{UB} = N_0$ を用いて

$$g_r(\eta) = -\frac{d\delta}{dx} \left[f \int_0^\eta f \alpha \eta - \int_0^\eta f^2 \alpha \eta - \frac{R_i}{\alpha_{UB}} \int_0^\eta m \eta d\eta \right]$$

表-2 係数値

α_U	α_{2U}	α_{3U}	α_{UB}	α_{BY}	$\int_0^\infty f(\eta) \int_\eta^\infty m(\eta) d\eta d\eta$	$\int_0^\infty f \cdot m \cdot \eta d\eta$	τ	τ_1	τ_2
1.064	0.753	0.615	0.741	0.823	0.634	0.379	1.475	0.832	1.391

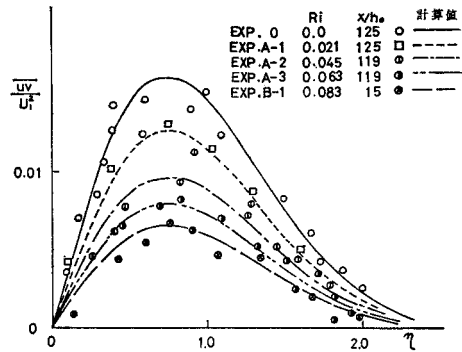


図-5 Reynolds 応力 $\overline{uv}/U_i^2 = g_r(\eta)$ の分布 (曲線は式 (29), (46) による計算結果)

$$-\frac{\delta}{U_i} \frac{dU_i}{dx} \left[2 \int_0^\eta f^2 d\eta - f \int_0^\eta f d\eta - \frac{R_i}{\alpha_{UB}} \int_0^\eta \int_\eta^\infty m d\eta d\eta \right]$$

となるが、 $R_i = N_0/U_i^3$ を導入し、式 (17) および式 (23) の x^* を用いた式 (21) を用いて変形すると、結局、次の式

$$g_r(\eta) = \frac{2}{3} \frac{x^*}{\alpha_{3U}} \frac{q_m \beta m}{q_* \beta_*} \frac{1}{\chi_1(R_i) (1 + \tau R_i)^2} \left[f \int_0^\eta f d\eta + \psi(R_i, \eta) \right] \quad \dots\dots\dots(29)$$

$$\psi(R_i, \eta) = \tau R_i \left\{ 3 \int_0^\eta f^2 d\eta - 2 f \int_0^\eta f d\eta - \frac{R_i}{\alpha_{UB}} \left\{ (2 - \tau R_i) \int_0^\eta m \eta d\eta + (1 + \tau R_i) \int_0^\eta \int_\eta^\infty m d\eta d\eta \right\} \right\}$$

が得られる。また、速度勾配は

$$\frac{1}{3} q_m \beta m k(\eta) \frac{df}{d\eta} = -g_r(\eta) \quad \dots\dots\dots(30)$$

で与えられ、 $df/d\eta$ は $q_m \beta m$ に関係しない。

ここで、表-2 の係数値と $f(\eta), m(\eta)$ の表示式を用いて、 $\chi_1(R_i) (1 + \tau R_i)^2$ および $\psi(R_i, \eta)$ の R_i による変化を、噴流的な挙動を示す $R_i = 0 \sim 0.2$ の範囲で計算すると、前者は R_i の影響をほとんど受けず、実用上 $R_i \rightarrow 0$ の値 1.0 に等しいとみなしてよい。また、 $\psi(R_i, \eta)$ の値は流れの大半において $f \int_0^\eta f d\eta$ に比べて小さく、この項がきくのは速度勾配の小さい噴流外縁近くにおいてである。したがって、流速分布に及ぼす R_i の影響は、図-3 にみられるように小さく、前章で用いた自己保存型の仮定はほぼ妥当であることがわかる。また、図-5

に示した g_r と R_i との関係は、渦動粘性係数 $q_m \beta m / q_* \beta_* = \chi_2(R_i)$ の値が R_i の増加とともにかなり急激に減少す

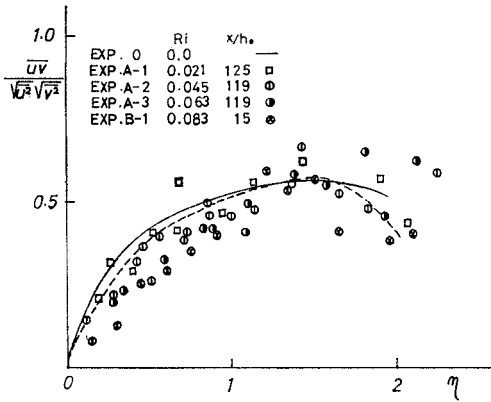


図-6 相関係数 $(\overline{uv})/\sqrt{\overline{u^2}} \sqrt{\overline{v^2}}$
(実線は均一表面噴流の平均曲線,
点線は Bradbury による平面噴流)

るためであることが理解される。なお、図中の曲線は後述の $x_2(R_i)$ の表示式を用いて計算した結果である。

図-6 は乱れ u, v の相関係数 $\overline{uv}/\sqrt{\overline{u^2}} \cdot \sqrt{\overline{v^2}}$ の実験結果を示したものである。実線は均一流体における表面噴流 (Exp-0) の平均曲線、点線は Bradbury による平面对称噴流の実験曲線であって、両者はほぼ一致している。また、相関係数は R_i が増すと若干減少するが $g_c(\eta)$ におけるほど著しいものではない。

次に、乱れによる浮力束を $\overline{vb} = U_1 B_1 g_b(\eta)$ と書くと、連続の式と拡散方程式 (5) から前と同様な計算を行い、次の式

$$g_b(\eta) = \frac{2}{3} \frac{\chi_*}{\alpha_{3U}} \frac{q_m \beta_m}{q_* \beta_*} \frac{1 - 2\gamma R_i}{\chi_1(R_i)(1 + \gamma R_i)^2} \left[m \int_0^\eta f d\eta \right] \dots \dots \dots (31)$$

が得られる。 $g_b(\eta)$ は $g_c(\eta)$ とほぼ同一の傾向をもつことになるが、Exp-A の実験では $g_b(\eta)$ の測定精度に疑点があるため、ここでは Exp-B-1 の実測結果と計算結果を図-7 に示した。

(4) 乱れ強度、渦動粘性係数の分布

X-Y hot film 流速計によって測定された乱れ強度の実験結果を、それぞれ断面の最大値 $\sqrt{\overline{u^2}_m}, \sqrt{\overline{v^2}_m}$ で無次元化して、乱れ強度の分布を示したものが図-8, 9 で

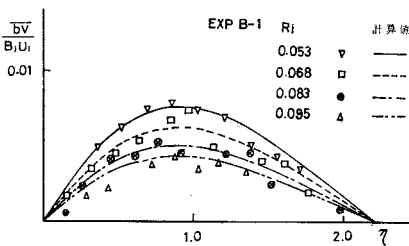


図-7 乱れによる浮力束 $\overline{bv}/B_1 U_1 = g_b(\eta)$ の分布
(曲線は式 (31), (46) による計算結果)

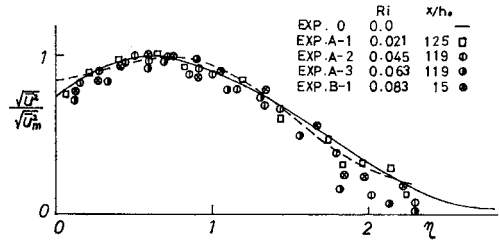


図-8 乱れ強度 $\sqrt{\overline{u^2}}$ の分布
(実線は均一表面噴流の平均曲線,
点線は Bradbury による平面噴流)

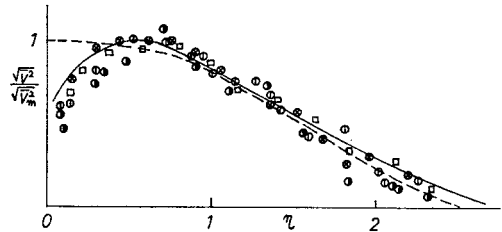


図-9 乱れ強度 $\sqrt{\overline{v^2}}$ の分布

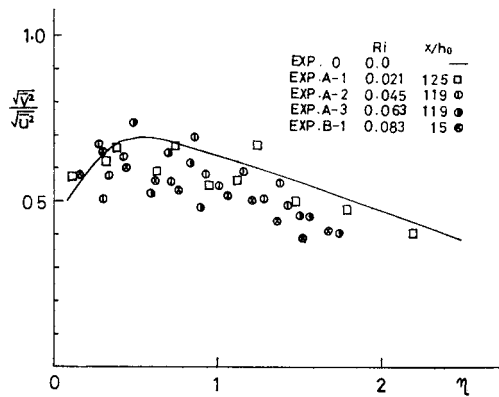


図-10 $\sqrt{\overline{v^2}}/\sqrt{\overline{u^2}}$ の分布
(実線は均一表面噴流の平均曲線)

ある。図中の実線、点線は図-6 と同様であって、表面密度噴流の場合には、 $\sqrt{\overline{u^2}_m}, \sqrt{\overline{v^2}_m}$ はいずれも $\eta \approx 0.7$ 付近で起こり、分布形もほぼ同様である。

図-10 は $\sqrt{\overline{v^2}}/\sqrt{\overline{u^2}}$ の分布を示すもので、この値は R_i が増すとともに減少する傾向が見られる。このことは Reynolds 応力によってまず x 方向の乱れが発生し、

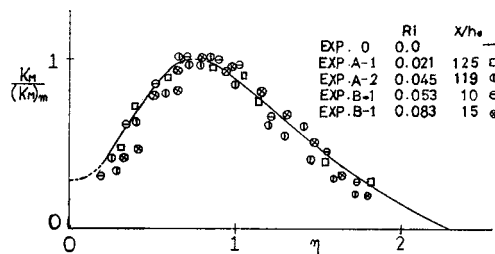


図-11 渦動粘性係数 $K_M/(K_M)_m = k(\eta)$ の分布

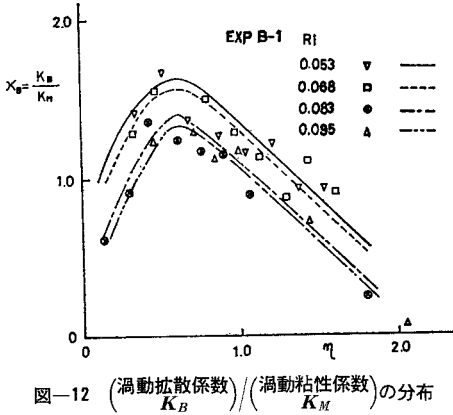


図-12 (渦動拡散係数)/(渦動粘性係数)の分布

ついで変動圧力によって y, z 方向に分配されるが、 y 方向の乱れが浮力効果 \overline{bv} の直接の影響を受けることを示すものである。しかし、測定値は大きくばらついており、数式化するには至らない。

図-11には Reynolds 応力と速度勾配の実測値から、渦動粘性係数を求め、断面最大値で無次元化した $K_M / (K_M)_m = k(\eta)$ の分布を示している。

また、図-12は Exp-B-1の実験について、 $\overline{bv}, \overline{uv}$ の測定値から計算した渦動拡散係数 K_B と渦動粘性係数 K_M との比 κ_B の分布を示したものである。一般に成層密度乱流の κ_B は local Richardson 数 $R_i = |dB/dy| / (dU/dy)^2$ あるいは flux Richardson 数 $\overline{bv} / -\overline{uv} \cdot (dU/dy)$ の関数であることが知られており、直線的な速度分布、温度分布をもつ1次元流れについて実施された Webster¹³⁾ の実験によると、 $R_i = 0.35$ を境にして K_B, K_M の大小関係が逆転し、 $R_i < 0.35$ では $\kappa_B > 1$ 、 $R_i > 0.35$ で $\kappa_B < 1$ となっている。図-12において、 R_i の小さい ($R_i = 0.22$ 以下) 噴流中心部では $\kappa_B > 1$ 、 R_i の大きい水表面付近と噴流外縁付近で $\kappa_B < 1$ であるのは、上記の実験結果と同様な傾向を示すものであるが、詳細は今後に残された問題の一つである。

(5) 乱れ強度、混合距離の断面最大値 $\sqrt{\overline{u}^2} / U_1, \beta_m$ $\sqrt{\overline{u}^2} / \sqrt{\overline{u_m}^2} = h(\eta)$ や $K_M / (K_M)_m = k(\eta)$ など乱れ諸量の分布が Richardson 数 R_i にほぼ無関係であるのに、Reynolds 応力 g_r の分布が図-5に示されるように R_i によって変化するのは、式(29)から乱れ強度や混合距離の断面最大値 $q_m = \sqrt{\overline{v}^2} / U_1$ や $\beta_m = l_m / \delta$ が R_i の関数として流れ方向に減少することを示唆するものである。まず、流れ方向の乱れ強度 $\sqrt{\overline{u}^2} / U_1$ と R_i との関係プロットしたものが図-13であって、同図には Chu の実験結果 ($h_0 = 0.701 \sim 0.991$ cm, $R_{i0} = 0.0071 \sim 0.0232$) も記してある。また、図-14は Reynolds 応力と速度勾配の実測値を用い、3.(1)に述べた手順に従って式(7)から混合距離を求め、 $\eta = 0.8$ 付近に起こる

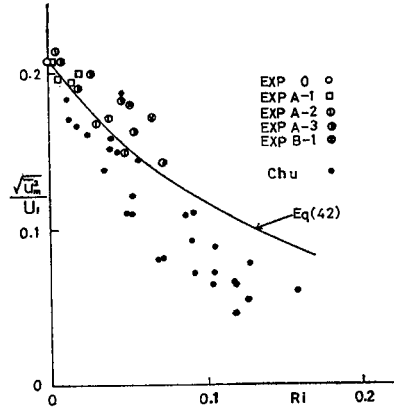


図-13 流れ方向の乱れ強度 $\sqrt{\overline{u}^2} / U_1$ と R_i との関係

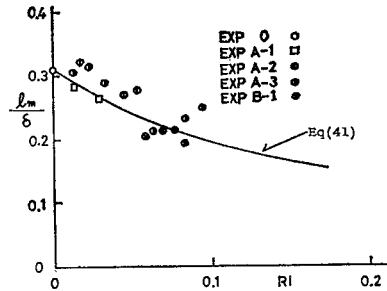


図-14 混合距離 $l_m / \delta = \beta_m$ と R_i との関係

断面最大値 $\beta_m = l_m / \delta$ と R_i との関係を示したものである。図-13において、Chuの実験値と本実験値との間にかかなり大きい差異がある理由はわからないが $\sqrt{\overline{u}^2} / U_1$ および β_m はいずれも、 R_i の増加とともに減少することは明らかである。

4. 乱れ特性量 q_m, β_m と Richardson 数との関係式

安定な密度成層場における乱れは、浮力効果のため減衰し、乱れ強度や拡散係数などは local Richardson 数の増加とともに減少することは、しばしば指摘されている¹³⁾。また、地表面付近の非断熱的な成層流の研究において、Elliot¹⁴⁾ や Kao¹⁵⁾ などの気象学者は混合距離に関する半経験的な式を提示している。表面密度噴流の乱れは、水平・鉛直方向に変化してより複雑であるが、ここでは、乱れエネルギーの式と Kao による乱れの加速度平衡式を噴流断面にわたって積分した形で用い、実験結果と照合して q_m, β_m の表示式を求めることにする。

(1) 均一流体の half jet

均一流体における平面对称噴流の拡がり、 $d\delta/dx = 0.11$ 程度であるが噴流中心を壁面でおきかえた wall

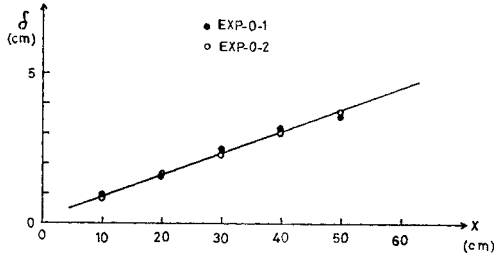


図-15 均一表面噴流の噴流幅の変化

jet の主流部は、その渦動粘性係数が平面噴流の 66% 程度に減少した half jet とみなされ (後出), Schwartz ら¹⁰⁾の実験では $d\delta/dx=0.068$ である. 表面噴流も水表面を境界とする half jet の一種であって, $d\delta/dx$ の値は wall jet と同程度の値をもつことが予想される. 実際, 均一表面噴流の実験 (Exp-0) から δ と x との関係プロットしたものが 図-15 で, これから式 (25) は,

$$\left(\frac{d\delta}{dx}\right)_* = \frac{4}{3} \frac{1}{\alpha_3 U} \lambda_* = 0.072 \dots\dots\dots (32)$$

となり, $\alpha_3 U = 0.615$ を用いて

$$\lambda_* = q_* \beta_* \int_0^\infty k(\eta) (df/d\eta)^2 d\eta = 0.0332 \dots\dots (33)$$

となる. また, 均一表面噴流の混合距離は $\beta_* = 0.30 \sim 0.32$ の範囲にあって, その平均 $\beta_* = 0.31$, および 図-12 の $K_M/(K_M)_m = k(\eta)$ の分布と Gauss 分布 $f(\eta)$ から計算した $\int_0^\infty k(df/d\eta)^2 d\eta = 0.400$ を用いると, 乱れの強度は $\sqrt{\bar{c}^2 m^*}/U_1 = q_* = 0.268$ となる. さらに, 流れ方向の乱れの強度は次式

$$\sqrt{u_{m^*}^2}/U_1 = q_* / \sqrt{1 + 2(\bar{v}^2/\bar{u}^2)_*}$$

において, 図-10 から $(\sqrt{\bar{v}^2}/\sqrt{\bar{u}^2})_*$ のほぼ断面平均にあたる 0.6 を用いて, $\sqrt{\bar{u}^2 m^*}/U_1 = 0.204$ となる. 一方, 均一表面噴流の実験では, $\sqrt{\bar{u}^2 m^*}/U_1 = 0.20 \sim 0.22$ の範囲にあって, 両者はほぼ一致している. 以上のことから, 均一表面噴流における乱れの特性値として,

$$\beta_* = 0.31, q_* = 0.27, \sqrt{\bar{u}^2 m^*}/U_1 = 0.21 \dots (34)$$

を用いる.

(2) q_m, β_m の表示式

乱れエネルギーの式 (6) において, $K_M = 1/3 \cdot \sqrt{\bar{c}^2} l$, $\tau/\rho = 1/3 \cdot \sqrt{\bar{c}^2} l (\partial U/\partial y)$, $\kappa_B = K_B/K_M$ とおく. また, エネルギー散逸率 ϵ については近似的に等方性乱れの式を用いると, λ を Taylor の最小渦径, ν を動粘性係数として

$$\epsilon = \frac{5\nu}{\lambda^2} \bar{c}^2$$

である. 一方, Reynolds 応力の式の主要項は, 乱れによる Reynolds 応力の発生項と分子粘性による散逸項で

あって, 後者については栗原¹⁷⁾の表示式を用いると

$$\bar{v}^2 \frac{\partial U}{\partial y} - \kappa_\nu \frac{40\nu}{\lambda^2} uv = 0$$

より

$$\sqrt{\bar{c}^2} = \kappa_\nu \frac{40\nu}{\lambda^2} l$$

である. ここに, κ_ν は省略された諸項やせん断乱れを等方性で近似した影響を表わす係数で $\kappa_\nu \approx 1$ である.

上の両式から ν/λ^2 を消去すると

$$\epsilon = \frac{1}{8} \frac{(\sqrt{\bar{c}^2})^3}{\kappa_\nu l} \dots\dots\dots (35)$$

となり, 乱れエネルギーの式を再び記すと, 次のようである.

$$U \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \bar{c}^2\right)}{\partial x} + V \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \bar{c}^2\right)}{\partial y} = \frac{1}{3} \sqrt{\bar{c}^2} l \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \kappa_B \frac{1}{3} \sqrt{\bar{c}^2} l \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} v \left(\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - \frac{1}{8} \frac{(\sqrt{\bar{c}^2})^3}{\kappa_\nu l} \dots\dots\dots (36)$$

なお, 前に述べたように, 乱れの分布については, ほぼ相似性が成り立っているのので, 上式の \bar{c}^2, l を次のようにおく.

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\bar{c}^2}/U_1 &= q_m \cdot h(\eta), l/\delta = \beta_m \cdot j(\eta) \\ \sqrt{\bar{c}^2} l/U_1 \delta &= q_m \beta_m k(\eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

式 (36) を水表面 $y=z$ から ∞ まで積分すると 拡散項は消え, 噴流断面についての乱れエネルギーの移流量, Reynolds 応力による乱れの発生量, 乱れによる浮力束量および分子粘性によるエネルギー散逸のつり合いを表わす式となるが, これに $U=U_1 \cdot f(\eta)$, $B=B_1 \cdot m(\eta)$ および式 (37) の表示を代入する. また, $N_0 = \delta B_1 U_1 \alpha_U B$, $R_i = N_0/U_1^3$ を導入し式 (17), 式 (21) を考慮して変形すると, 簡単のため $dq_m/dx \neq 0$ とおいて, 次の式

$$\begin{aligned} & \frac{3}{8} \cdot \frac{q_m^2}{\beta_m \kappa_\nu} \int_0^\infty \frac{h^3}{j} d\eta - \beta_m \left[\int_0^\infty k \left(\frac{df}{d\eta}\right)^2 d\eta \right. \\ & \quad \left. \begin{array}{l} \text{[散逸]} \\ \text{[発生]} \end{array} \right] \\ & - R_i \frac{\kappa_B}{\alpha_U B} \int_0^\infty k \left| \frac{dm}{d\eta} \right| d\eta - q_m^2 \frac{\beta_m}{\alpha_3 U} \Phi(R_i) \\ & \cdot \int_0^\infty fh^2 d\eta \int_0^\infty k \left(\frac{df}{d\eta}\right)^2 d\eta = 0 \dots\dots\dots (38) \\ & \quad \left. \begin{array}{l} \text{[浮力束]} \\ \text{[移流]} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

ここに,

$$\Phi(R_i) = \frac{1 + 4\gamma R_i}{1 + R_i(4\gamma - 4\tau_1 - 2\tau_2) + 2\tau R_i^2(\tau_1 - \tau_2)}$$

となり, q_m は次式で与えられる.

$$q_m = \sqrt{\frac{8}{3}} \kappa_\nu \varphi_1 \beta_m \sqrt{\frac{1 - \lambda_1 \kappa_B R_i}{1 - \kappa_\nu \varphi_2 \Phi(R_i) \beta_m^2}} \dots (39)$$

ここに

$$\varphi_1 = \sqrt{\int_0^\infty k \left(\frac{df}{d\eta}\right)^2 d\eta} / \sqrt{\int_0^\infty (h^4/k) d\eta} = 0.505$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{8}{3\alpha_{3U}} \int_0^\infty fh^2 d\eta \int_0^\infty k \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 d\eta \int_0^\infty (h^4/k) d\eta \\ &= 0.914 \\ \lambda_1 &= \int_0^\infty k \left| \frac{dm}{d\eta} \right| d\eta / \alpha_{UB} \int_0^\infty k \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 d\eta = 1.889 \end{aligned}$$

上の係数値は、 $f(\eta)$ 、 $m(\eta)$ については式 (27)、(28) を、乱れ強度の分布 $h(\eta)$ については 図-8 に示した $\sqrt{u^2}/\sqrt{u_m^2}$ の実線および 図-11 の $k(\eta)$ の実験曲線を用いて計算したものである。なお、式 (39) の $\kappa_v \varphi_2 \Phi(R_i) \beta_m^2$ は式 (38) から明らかなように、移流項の寄与を示すものである。 β_m の値が $R_i \rightarrow 0$ のときの $\beta_* = 0.31$ から、 R_i が増すとともに減少するため、 $\kappa_v \varphi_2 \Phi(R_i) \beta_m^2$ の値は 1.0 に比べてかなり小さく、この項が q_m に及ぼす影響は無視して差支えない程度である。

q_m 、 β_m を求めるには、もう一つの関係式が必要であるが、簡単に Kao¹⁵⁾ による乱れの加速度平衡式を用いる。

日野¹⁸⁾ は固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の解析において、この式の意味を記述するとともに拡張した形を用いているので、ここでは式形だけを書くと、 l_* を均一流体における混合距離として、次式のようなものである。

$$l \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = l_* \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \kappa_c \cdot l \frac{\partial B}{\partial y} \dots\dots\dots (40)$$

前と同様に $y=c$ から ∞ まで積分し

$$l/\delta = \beta_m j(\eta) = \beta_m \cdot k(\eta)/h(\eta)$$

として、上式は

$$\beta_m = \beta_* / (1 + \kappa_c \lambda_2 R_i) \dots\dots\dots (41)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \int_0^\infty \frac{k}{h} \left| \frac{dm}{d\eta} \right| d\eta / \alpha_{UB} \int_0^\infty \frac{k}{h} \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 d\eta \\ &= 2.089 \end{aligned}$$

このようにして、乱れ強度 q_m は式 (41) を式 (39) に代入し、実用的な近似を加えて、結局次の式

$$q_m = \sqrt{\frac{8}{3} \kappa_v \varphi_1 \beta_*} \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa_v \varphi_2 \beta_*^2}} \frac{\sqrt{1 - \lambda_1 \kappa_B R_i}}{1 + \lambda_2 \kappa_c R_i} \dots\dots\dots (42)$$

で与えられる。また、渦動粘性係数と R_i との関係は

$$\frac{q_m \beta_m}{q_* \beta_*} = \chi_2(R_i) = \frac{\sqrt{1 - \lambda_1 \kappa_B R_i}}{(1 + \lambda_2 \kappa_c R_i)^2} \dots\dots\dots (43)$$

となり、この式を Reynolds 応力の式 (29)、浮力束の式 (31) に用いると、 $g_r(\eta)$ 、 $g_b(\eta)$ と R_i との関係が決まる。

(3) 数値的考察

上述の式 (41)~(43) を乱れや Reynolds 応力の測定結果と照合してほぼ定数とみなされる κ_v 、 κ_B 、 κ_c を決め、数値的な考察を行う。

a) 均一流体の噴流

式 (42) で $R_i \rightarrow 0$ とすると均一流体の乱れ強度は、

$$q_* = \sqrt{8 \kappa_v / 3} \varphi_1 \beta_* / \sqrt{1 - \kappa_v \varphi_2 \beta_*^2} \dots\dots\dots (44)$$

であるが、 $\beta_* = 0.31$ 、 $\varphi_1 = 0.505$ 、 $\varphi_2 = 0.914$ を用いて、 $q_* = 0.268 \sqrt{\kappa_v}$ となり、 $\kappa_v = 1$ として式 (34) の $q_* = 0.27$ ときれいに一致する。また、表面噴流についての係数値をそのまま用い、均一流体における平面対称噴流の q_* 、 β_* を計算すると以下のようである。Bradbury¹²⁾ の実験によると、平面噴流の幅の拡がり $(d\delta/dx)_*$ は 0.109 である。したがって、式 (32)、(33) から $q_* \beta_* = 0.126$ となり、式 (44) と連立させて q_* 、 β_* を求めると、 $\kappa_v = 1$ として $q_* = 0.35$ ($\beta_* = 0.36$) となり、Bradbury による q_* の実験値 0.40 に近い値を与える。なお、 q_* の計算値と実験値との差異は、平面噴流では中心線を通じて乱れ諸量の交換が行われるため、乱れの分布特性などが half jet とは若干異なることによるものであろう。また、 $(d\delta/dx)_*$ は $q_* \beta_*$ に比例するから、half jet の渦動粘性係数は平面噴流のその 66% 程度である。

b) 表面密度噴流

式 (41)、(42) の中の定数 $\kappa_B = K_B/K_M$ と κ_c のうち、 κ_B については、その分布 図-12 の主流部における平均値が 1.0~1.3 程度であることから、 $\kappa_B = 1.2$ とする。 κ_c を決めるためには、 β_m の式 (41) と 図-14 の実験結果、および式 (43) を式 (29) に代入した Reynolds 応力 $g_r(\eta)$ の計算と 図-5 の実測値を用い、両図について計算と実測値との一致がみられるように試算を行い、 $\kappa_c = 2.8$ を採用した。乱れについての係数をまとめると、

$$\kappa_v = 1, \kappa_B = 1.2, \kappa_c = 2.8 \dots\dots\dots (45)$$

で、図-5,7 に記入した曲線は上の数値を用いた計算結果であって、Reynolds 応力 g_r や乱れによる浮力束 g_b の測定結果とよく一致している。また、流れ方向の乱れ強度 $\sqrt{u_m^2}/U_1$ については、計算値は 図-13 に示されるように本実験の測定値にほぼ一致している。以上のことから、式(45)の数値を用いた混合距離の式(41)、乱れ強度の式(42)は均一噴流を $R_i \rightarrow 0$ の極限として含み、表面密度噴流の乱れ特性量が R_i の増加とともに減少する過程をかなりうまく表示しているものと考えられる。

5. 表面密度噴流の流れの特性

(1) 噴流幅 δ 、表面流速 U_1 、表面浮力 B_1

表面流速 $U_1 (R_i = N_0/U_1^3)$ の流れ方向の変化を表わす式 (21) に、渦動粘性係数の式 (43) を入れると

$$\frac{1}{R_i^{1/3}} \chi_1(R_i) \frac{dR_i}{d\xi} = 2 \frac{\alpha_2 U}{\alpha_3 U} \chi_* \cdot \chi_2(R_i) \dots (46)$$

となる。ここに、 χ_* は式 (23) の定数、 $\chi_1(R_i)$ 、 $\chi_2(R_i)$ は式 (22)、式 (43) で与えられた R_i の関数で、 $R_i \rightarrow 0$ のとき、 $\chi_1 = \chi_2 \rightarrow 1$ である。なお、無次元距離 ξ については、仮想原点を考え、スリット出口は仮想原点より x_0 の位置にあるとして、以下

$$\xi = (x + x_0) N_0^{2/3} / M_0 \dots (47)$$

を用いる。式 (46) を $\xi=0$ で $R_i=0$ として数値積分した結果が 図-16 である。また、 R_i と ξ との関係を噴流幅の式 (17)、 $\delta N_0^{2/3} / M_0 = R_i^{2/3} [\alpha_2 U (1 + \gamma R_i)]$ に代入して計算した結果が 図-17 の曲線である。図-18 の曲線は式 (18) による表面浮力 $N_0^{2/3} / B_1^2 M_0^2$ の計算結果を示すものである。これらの理論曲線は $\xi=0$ において均一表面噴流の式 (24)~(26) を表す図中の直線に接し、浮力効果のため ξ が増すとともにそれぞれの勾配が減少してゆき一定値に漸近する。

以上の結果を有限なスリット幅 h_0 をもつ密度噴流に適用する際には、スリット出口における実際の矩形分布の代りに、流速・浮力分布を相似形

$$U = U_{10} f(\eta), B = B_{10} m(\eta), \delta = \delta_0 \dots (48)$$

でおきかえ、矩形分布と相似形分布による流量、flow

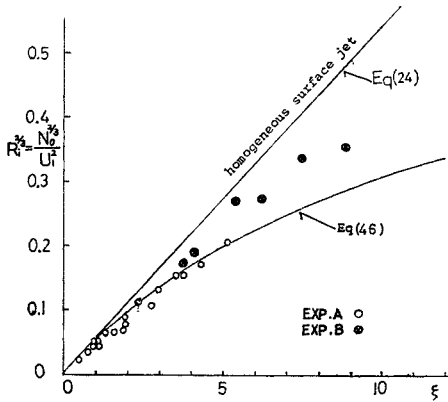


図-16 表面流速 $N_0^{2/3}/U_1^2$ の流れ方向の変化

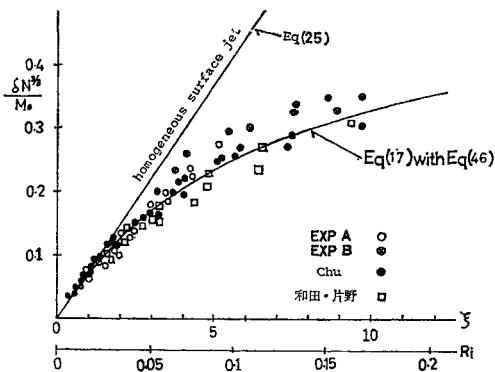


図-17 噴流幅の変化

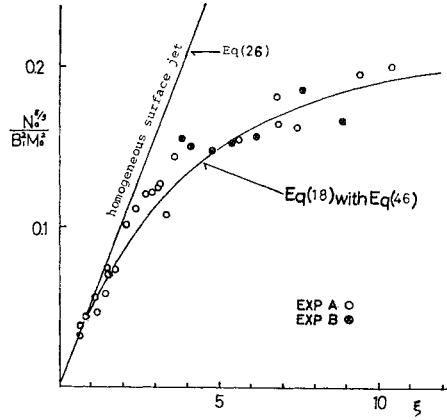


図-18 表面浮力 $N_0^{2/3}/B_1^2 M_0^2$ の変化

force および浮力束がスリット出口において一致するように U_{10} 、 B_{10} 、 δ_0 をきめる⁹⁾。このようにして、 δ_0/h_0 は出口の Richardson 数を $R_{i0} = N_0/U_{10}^3$ として、次の式

$$\frac{\delta_0}{h_0} \cdot \frac{\alpha^2 U}{\alpha_2 U} = \frac{1 + R_{i0} \frac{\alpha_{BY}}{\alpha_2 U} \cdot \frac{\alpha^3 U}{\alpha_{UB}} \cdot \left(\frac{\delta_0}{h_0}\right)^3}{1 + 0.5 R_{i0}} \dots (49)$$

となる。表-2 の係数値を用いて式 (49) を計算すると、 R_{i0} の影響はきわめて小さく

$$\delta_0/h_0 = \alpha_2 U / \alpha^2 U = 0.665 \dots (50)$$

とみなしてよい。したがって、与えられたスリット幅に
 応ずる $\xi_0 = x_0 N_0^{2/3} / M_0$ の値は、図-17 の理論曲線において、縦軸の δ を δ_0 とおき、それに対応する ξ を ξ_0 とおいて求められ、 ξ_0 は $h_0 N_0^{2/3} / M_0$ の関数として、
 図-19 に示すようになる。また、スリット出口付近の
 流れの形成領域においては、potential core が存在し、
 スリット出口 x_0 から core の消失点 $(x_0 + x_p)$ まで
 は $U_1 = U_0$ 、 $B_1 = B_0$ である。これを考慮するために、
 $\xi_p = (x_0 + x_p) N_0^{2/3} / M_0$ において、流速・浮力の相似形
 を用いた flow force = M_0 あるいは浮力束 = N_0 の条件か
 ら前と同様にして、

ξ_p をきめると、両法
 による差異は実用上無
 視できる程度であっ
 て、 ξ_p は図-19 に記
 すようである。

さて、図-16, 17 お
 よび 18 には、図-19
 から仮想原点の長さ
 ξ_0 を求めて表面流速
 U_1 、噴流幅 δ および
 表面浮力 B_1 の実験結
 果がプロットされてい
 る。なお、図-17 に

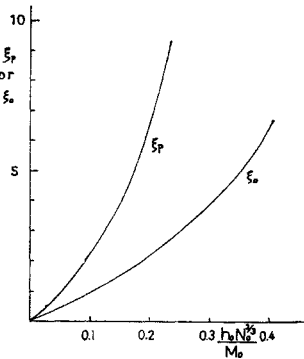


図-19 仮想原点の長さ ξ_0 と potential core の消失点 ξ_p

は Chu の実験結果, およびスリット幅が $h_0=5\text{ cm}$ で R_{i0} の値が大きく変化している和田・片野⁹⁾の実験 ($R_{i0}=0.0235\sim 0.147$)における噴流幅 δ_{obs} のデータを, $\delta_{obs}\approx 2.1\delta$ を用いて δ に直したものがプロットされている. これらの図から噴流幅の大きい Exp-B および和田・片野の実験結果は, 仮想原点の取り方や potential core の存在あるいは2層流への移行などに関連してかなりばらばらついているが, スリット幅の小さいデータはきれいに実験結果と一致している.

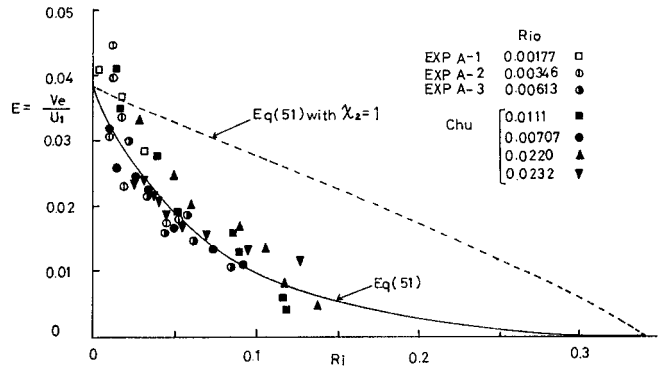


図-20 連行係数 E と R_i の関係

(2) 連行係数

従来から, 密度噴流の解析において重要な役割をもちながら, 経験的に用いられてきた連行係数の水理学的な機構は, 以上の結果から容易に解析される.

連続の式 (2) を $y=z$ から ∞ まで積分し, 下層よりの連行速度を V_e , 連行係数を $E=V_e/U_1$ で定義すると

$$\frac{1}{U_1} \frac{d}{dx} [\alpha_U U_1 \delta] = E$$

この式に式 (16), (17) を代入し, さらに式 (46) を用いて, 連行係数は次式

$$E = \frac{V_e}{U_1} = \frac{1}{3} \frac{\alpha_U}{\alpha_2 U} \frac{1-2\tau R_i}{(1+\tau R_i)^2} \frac{1}{R_i^{1/3}} \frac{dR_i}{d\xi} \\ = \frac{2}{3} \frac{\alpha_U}{\alpha_3 U} \chi_* \cdot \frac{1-2\tau R_i}{(1+\tau R_i)^2} \cdot \frac{\chi_2(R_i)}{\chi_1(R_i)} \dots\dots (51)$$

となる. これから, 均一表面噴流の連行係数は次の一定値

$$E_* = \frac{2}{3} \frac{\alpha_U}{\alpha_3 U} \chi_* = 0.0383 \dots\dots\dots (52)$$

をとる. なお, 式 (51) と式 (31) から, 連行係数は乱れによる浮力束の無次元表示 g_0 に比例する.

断面流速の測定値から E の値を求め, Chu⁹⁾ の実験結果とともに, E を R_i の関数としてプロットしたものが 図-20 である. 同図に記入した点線は式 (51) で $\chi_2(R_i)=1$, すなわち, 浮力効果による乱流構造の変化を無視した場合にあたり, 密度差のために形成される圧力勾配の影響を受けて, E の値は R_i の増加とともにほぼ直線的に減少し, $R_i=1/2\tau=0.339$ において $E=0$ となる. $\chi_2(R_i)$ を考慮した式 (51) の計算結果が図の実線であって, 連行係数には乱れの減衰の影響が大きく作用し, E の値は $R_i \rightarrow 0$ の $E_*\approx 0.0383$ から R_i の増加とともに急激に減少し, $R_i\approx 0.2$ 付近では, ほぼ連行現象は終了するものとみなしてよい. なお, Ellison・Turner のせん断流における連行係数の実験結果は, Chu も指摘しているように, 流速の資料がわからないため, この図にはプロットしていない.

6. 結 語

以上, 2次元表面噴流の流れと乱れ特性について, 実験と理論の面から考察したが, 本文を要約すると以下のようである.

表面密度噴流は, flow force M_0 , 流れ方向の浮力束 N_0 の保存される流れであるから, 噴流幅 δ , 表面流速 U_1 , 表面浮力 B_1 などの噴流特性量を M_0, N_0 で無次元化して表わし, 平均流のエネルギー方程式を用いると, 均一流体における表面噴流を極限として含む一般的な基本式 (17), (18) および (21) が得られ, 式中の渦動粘性係数の評価が問題の焦点となる. ついで, 表面噴流の乱れの測定結果から, 乱れ諸量をそれらの断面最大値で無次元化した鉛直分布はほぼ相似形で表わされるが, 断面最大値は overall Richardson 数 R_i が増すとともに減少することを確かめ, 乱れエネルギー式と乱れの加速度平衡式を用い, 乱れ強度や混合距離などについて, 浮力効果による乱流構造の変化を R_i の関数として表示している (式 (42), (41)). このようにして求められた渦動粘性係数を, 上述の基本式に用いると, 噴流特性量 $\delta N_0^{2/3}/M_0, N_0^{2/3}/U_1^2=R_i^{2/3}$ および $N_0^{8/3}/B_1^2 M_0^2$ は, 仮想原点において均一表面噴流の直線に接し, $\xi=xN_0^{2/3}/M_0$ の増加とともに勾配を減じながら一定値に漸近することが示され (図-16~18), 理論と実験との一致はかなり良好である. また, 連行係数は密度差による圧力勾配と乱れの減衰との両作用を受け, 特に, 後者の影響が著しいため, R_i とともに急激に減少して $R_i\approx 0.2$ では連行はほぼ終了する (図-20).

なお, 本文の解析法は他の密度噴流やブルームなどにも若干の修正の後適用することができよう. ただ, ここに用いた乱れの解析はかなり粗いもので, 密度成層場における乱流構造をさらにすっきりした形で解明するためには, 多くの問題が残されている.

なお, 実験データの統計処理には九州大学大型計算機

センター FACOM 230-75 および九州大学中央計数施設の FACOM 230-45 S を使用した。最後に、実験およびデータ整理に際し、多大な援助を提供された柴田敏彦技官に謝意を表す。

記号

B : 平均浮力, $B = g(\rho_a - \rho) / \rho_a$
 B_1 : 表面浮力
 B_0 : スリット出口の浮力
 b : 浮力変動
 $\sqrt{\bar{c}^2}$: 乱れ強度, $\sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}$
 $\sqrt{\bar{c}^2_m}$: 乱れ強度の断面最大値
 E : 連行係数, $E = V_e / U_1$
 $f(\eta)$: 流速分布, 式 (28)
 g : 重力の加速度
 $g_b(\eta)$: 乱れによる浮力 flux の無次元表示,
 $g_b(\eta) = \bar{v}b / U_1 B_1$
 $g_\tau(\eta)$: Reynolds 応力の無次元表示, $g_\tau(\eta) = \bar{u}v / U_1^2$
 h_0 : スリット幅
 $h(\eta), j(\eta), k(\eta)$: それぞれ乱れ強度, 混合距離および渦動粘性係数の分布, 式 (37)
 K_B : 渦動拡散係数, $K_B = 1/3 \cdot \kappa_B \sqrt{\bar{c}^2} l$
 K_M : 渦動粘性係数, $K_M = 1/3 \cdot \sqrt{\bar{c}^2} l$
 l, l_m : 混合距離とその断面最大値
 l_* : 均一流体における l_m
 M_0 : flow force, 式 (10)
 N_0 : 浮力 flux, 式 (11)
 q, q_m : $q = \sqrt{\bar{c}^2} / U_1$ とその断面最大値 $q_m = \sqrt{\bar{c}^2_m} / U_1$
 q_* : 均一流体における q_m
 R_i : overall Richardson 数, $R_i = N_0 / U_1^3$
 R_{i0} : スリット出口の R_i , $R_{i0} = N_0 / U_0^3$
 R_l : local Richardson 数,
 $R_l = |dB/dy| / (dU/dy)^2$
 U, V : 水平, 鉛直方向の平均流速
 u, v, w : 乱れ速度の成分
 U_1 : 表面流速
 U_0 : スリット出口の流速
 V_e : 下層よりの連行速度
 x : 水平流下方向の座標軸
 x_0, x_p : スリット出口より, それぞれ仮想原点, potential core 終点までの長さ
 α_{2U}, α_{UB} etc: $f(\eta), m(\eta)$ による断面係数
 β_m : 混合距離 (断面最大値) の無次元表示,
 $\beta_m = l_m / \delta$

β_* : 均一流体における β_m
 r, r_1, r_2 : $f(\eta), m(\eta)$ による係数
 δ : $U = 1/2 \cdot U_1$ で定義された噴流幅
 δ_{obs} : 目視 ($U \neq 0$) による噴流幅
 ϵ : エネルギー逸散率
 ξ : 無次元距離, $\xi = x N_0^{2/3} / M_0$
 ξ_0, ξ_p : x_0, x_p の無次元表示
 η : 無次元深さ, $\eta = (y - \zeta) / \delta$
 ζ : 水面変化量
 κ_B : $\kappa_B = K_B / K_M$
 κ_c : 乱れの加速度平衡式における浮力項の係数
 κ_v : 等方性近似などの影響を表わす係数
 λ : Taylor の micro scale
 λ_1, λ_2 : $f(\eta), m(\eta)$ および乱れの分布による断面係数
 ν : 動粘性係数
 ρ : 流水の密度
 ρ_a : 静止した下層流体の密度
 τ : せん断応力
 φ_1, φ_2 : $f(\eta), m(\eta)$ および $k(\eta)$ による断面係数

$$\chi_*: \chi_* = q_* \beta_* \int_0^\infty k(df/d\eta)^2 d\eta, \text{ 式 (23)}$$

$$\chi_1(R_i): \text{ 式 (22)}$$

$$\chi_2(R_i): \chi_2(R_i) = q_m \beta_m / q_* \beta_*, \text{ 式 (43)}$$

参考文献

- 1) Townsend, A.A.: The mechanism of entrainment in free turbulent flow, J. Fluid Mech., vol. 26, pp. 689-715, 1966.
- 2) Ellison, T.H. and Turner, J.S.: Turbulent entrainment in stratified flow, J. Fluid Mech., vol. 6, pp. 423-448, 1959.
- 3) 玉井信行: 密度差を有する 2 次元水平噴流, 第 13 回水理講演会講演集, pp. 91-96, 1969.
- 4) Koh, R.C.Y.: Two-dimensional surface warm jets, Proc. A.S.C.E., HY. 6, pp. 819-836, 1971.
- 5) 林 泰造・宮原英治・有田正光: 海面上に放出された温排水の拡がりについての数値解析, 第 21 回海岸工学講演会論文集, pp. 321-327, 1974. など.
- 6) Kantha, L.H., Phillips, O.M. and Azad, R.S.: On turbulent entrainment at a stable density interface. J. Fluid. Mech., Vol. 79, pp. 753-768, 1977.
- 7) Hill, B.J.: Measurement of local entrainment rate in the initial region of axisymmetric turbulent air jet, J. Fluid Mech., Vol. 51, pp. 773-779, 1972.
- 8) 和田 明・片野英明: 冷却水の表層放出に伴う下層水加入現象, 第 23 回土木学会年講, II-103, pp. 275-278, 1968.
- 9) Chu, V.H. and Vanvari, M.R.: Experimental study of turbulent stratified shearing flow, Proc. A.S.C.E., HY. 6, pp. 691-706, 1976.
- 10) 椿東一郎・小松利光: 密度噴流における連行作用について, 第 27 回土木学会年講, II, pp. 107-110, 1972.
- 11) 椿東一郎・小松利光: 成層密度噴流における乱れ及び密

- 度変動のスペクトル特性, 土木学会論文報告集, 第 268号, pp. 81-92, 1977.
- 12) Bradbury, L.J.S. : The structure of a self-preserving turbulent plane jet, J. Fluid Mech., Vol. 23, pp. 31-64, 1965.
 - 13) Webster, C.A.G. : An experimental study of turbulence in a density-stratified shear flow, J. Fluid Mech., Vol. 19, pp. 221-245, 1964.
 - 14) Elliot, W.P. : A comparison of some approach to the diabatic wind profile, Trans. A.G.U. Vol. 38, pp. 21-24, 1957.
 - 15) Kao, S.K. : Turbulent transfer in the boundary layer of a stratified fluid, J. of Meteorology, Vol. 16, pp. 497-503, 1959.
 - 16) Schwarz, W.H. and Cosart, W.P. : The two dimensional turbulent wall jet, J Fluid Mech., Vol. 10, pp. 481-495, 1961.
 - 17) 栗原道徳 : 流体渦動状態の研究 (iv) — 渦動粘性について一, 九大流研報告, 3巻, 3号, pp. 18-24, 1947.
 - 18) 日野幹雄 : 固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の変化, 土木学会論文報告集, 第92号, pp. 11-29, 1963.
(1977.7.26・受付)
-