

【ノ ー ト】

B-spline 関数を用いた斜板の自由振動解析について

APPLICATION OF B-SPLINE FUNCTIONS TO VIBRATION  
PROBLEMS OF SKEW PLATES

水 沢 富 作\*・梶 田 建 夫\*\*・成 岡 昌 夫\*\*\*

By Tomisaku MIZUSAWA, Tateo KAJITA and Masao NARUOKA

1. ま え が き

斜板の自由振動解析は種々行われているが解析的に解くことが一般に困難であるので Rayleigh-Ritz 法, Galerkin 法, Partition 法, Point-matching 法, および, 有限要素法<sup>7)~9)</sup> などの数値解析法により解析される場合が多い。周辺単純支承された斜板に関しては, Seth<sup>3)</sup> が最初にその固有振動数の厳密解を求めている。一方, 周辺固定斜板に関しては, 各種の数値計算法が用いられている。しかしながら, Kaul と Cadabe<sup>4)</sup> らが指摘しているように, 斜角が増大するにつれて, 解の安定性が悪くなり, 各種の解析法による結果の数値にも大きなばらつきが見られる。また, 有限要素法以外では, 任意の境界条件を簡単に扱うことができる手法はあまりなく, Rayleigh-Ritz 法, Galerkin 法などでも自由の境界を含む問題では, どのような変位関数を用いるかが重要な問題となる。すなわち, 変位関数に自由端を含むはりの特性関数 (beam function) を単純に用いると, 精度上からも, また, 数値計算上からも問題が生じるということがある<sup>7)</sup>。

本文では, これらの問題点を考慮して, Rayleigh-Ritz 法での変位関数として, 節点で高次の導関数まで連続にでき, 複雑な曲線をなめらかに近似できる B-spline 関数を用いた。

また, 任意の境界条件が考慮できるようにするため, 境界で仮想のばねを導入して, 解析した。この解析手法の精度, 収束性の問題点について検討を行うとともに, B-spline 関数を用いた本手法の有効性を示すため厳密解および数値解との比較検討を行った。

2. 解 析 手 法

(1) B-spline 関数について

この関数の代数的特性については, Schoenberg の論文において詳述されているので, ここでは, 基本式について簡単に述べる。

いま, すべての  $i$  について,  $x_i \leq x_{i+1}$  なる関係を満足する変数  $x_i$  に対して, 次の関数を定義する。

$$g_k(s; x) = (s-x)_+^{k-1} = \begin{cases} (s-x)^{k-1} & s \geq x \\ 0 & s < x \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

この関数の  $k$  次差分商として, B-spline 関数  $M_{i,k}(x)$  は次のように定義される。

$$M_{i,k}(x) = g_k(x_i, \dots, x_{i+k}; x) = \{g_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}; x) - g_k(x_i, \dots, x_{i+k-1}; x)\} / (x_{i+k} - x_i) \dots\dots\dots (2)$$

また, 正規化された B-spline 関数は次のようである。

$$N_{i,k}(x) = (x_{i+k} - x_i) M_{i,k}(x) \dots\dots\dots (3)$$

Fig. 1 は  $k=4$  で  $i$  を変化させた場合の関数を示したものである。この関数を組み合わせて, 次のような任意の関数を作り出すことができる。

$$F(x) = \sum_i C_i N_{i,k}(x) \dots\dots\dots (4)$$

ここで,  $C_i$  は  $N_{i,k}(x)$  に関する係数である。

この関数の  $x$  に関する  $j$  回微分は次のように表される。

$$F^{(j)}(x) = \sum_i C_i N_{i,k}^{(j)}(x) \dots\dots\dots (5)$$

ここで,

$$N_{i,k}^{(0)}(x) = N_{i,k}(x) \dots\dots\dots (6)$$

$$N_{i,k}^{(j)}(x) = (k-1) \{N_{i,k-1}^{(j-1)}(x) / (x_{i+k-1} - x_i) - N_{i+1,k-1}^{(j-1)}(x) / (x_{i+k} - x_{i+1})\} \dots\dots\dots (7)$$

\* 正会員 工修 大同工業大学助手 建設工学科  
\*\* 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部 土木工学科  
\*\*\* 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部 土木工学科

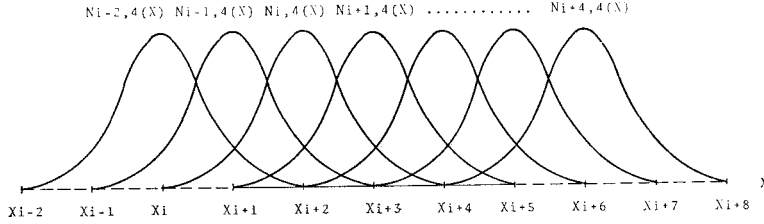


Fig. 1 B-Spline function ( $k=4$ )

R. Kao が Hill 関数として論文に用いているものは、**Fig. 1** に示す関数で各区間を一定にしたものである。

(2) Rayleigh-Ritz 法による定式化

B-spline 関数を変位関数として用いる場合の Rayleigh-Ritz 法による斜板の自由振動解析の式について示す。**Fig. 2** に示される斜板のポテンシャルエネルギー  $U$  と運動エネルギー  $T$  は次の式で与えられる。

$$U = (D/2) \cos \phi \int_0^a \int_0^b [ (F^2 w)^2 - 2(1-\nu) \sec^2 \phi \{ (\partial^2 w / \partial x^2) (\partial^2 w / \partial y^2) - (\partial^2 w / \partial x \partial y)^2 \} ] dx dy \dots (8)$$

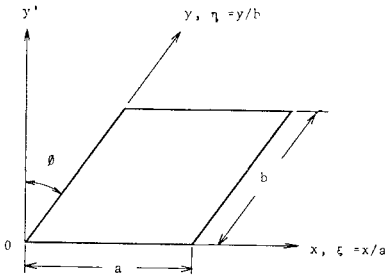


Fig. 2 Sketch of skew plate in the skew coordinate system

$$U = (D/2) (b/a^3) \sec^3 \phi \int_0^1 \int_0^1 \{ (\partial^2 w / \partial \xi^2)^2 - 2 \sin \phi \lambda (\partial^2 w / \partial \xi \partial \eta)^2 + \lambda^2 (\partial^2 w / \partial \eta^2)^2 - 2(1-\nu) \cos^2 \phi \lambda^2 \{ (\partial^2 w / \partial \xi^2) (\partial^2 w / \partial \eta^2) - (\partial^2 w / \partial \xi \partial \eta)^2 \} \} d\xi d\eta + (1/2) \{ \alpha w^2 + (\beta/a^2) (\partial w / \partial \xi)^2 + (\gamma/b^2) (\partial w / \partial \eta)^2 \} |_{\xi=0} + (1/2) \{ \alpha w^2 + (\beta/a^2) (\partial w / \partial \xi)^2 + (\gamma/b^2) (\partial w / \partial \eta)^2 \} |_{\xi=1} + (1/2) \{ \alpha w^2 + (\beta/a^2) (\partial w / \partial \xi)^2 + (\gamma/b^2) (\partial w / \partial \eta)^2 \} |_{\eta=0} + (1/2) \{ \alpha w^2 + (\beta/a^2) (\partial w / \partial \xi)^2 + (\gamma/b^2) (\partial w / \partial \eta)^2 \} |_{\eta=1} \dots (11)$$

$$T = (1/2) \rho h \omega^2 ab \cos \phi \int_0^1 \int_0^1 w^2 d\xi d\eta \dots (12)$$

ここで、 $\lambda = a/b$  である。

変位関数を先に述べた B-spline 関数を用いて式(13)のように仮定する。

$$U = (D/2) (b/a^3) \sec^3 \phi \sum_m \sum_n \sum_s \sum_t C_{mn} C_{rs} [ I_{mr}^2 J_{ns}^0 + \lambda^4 I_{mr}^0 J_{ns}^2 - 2 \sin \phi \lambda \{ I_{mr}^1 J_{ns}^1 + I_{mr}^2 J_{ns}^1 + \lambda^2 (I_{mr}^1 J_{ns}^1 + I_{mr}^0 J_{ns}^1) \} + \lambda^2 (\sin^2 \phi + \nu \cos^2 \phi) (I_{mr}^2 J_{ns}^0 + I_{mr}^0 J_{ns}^2) + 2 \lambda^2 (1 + \sin^2 \phi - \nu \cos^2 \phi) I_{mr}^1 J_{ns}^1 ] + 1/2 \sum_m \sum_n \sum_s \sum_t C_{mn} C_{rs} [ \{ \alpha N_{mnr}^{0000} + (\beta/a^2) N_{mnr}^{1010} + (\gamma/b^2) N_{mnr}^{0101} \} |_{\xi=0} + \{ \alpha N_{mnr}^{0000} + (\beta/a^2) N_{mnr}^{1010} + (\gamma/b^2) N_{mnr}^{0101} \} |_{\xi=1} + \{ \alpha N_{mnr}^{0000} + (\beta/a^2) N_{mnr}^{1010} + (\gamma/b^2) N_{mnr}^{0101} \} |_{\eta=0} + \{ \alpha N_{mnr}^{0000} + (\beta/a^2) N_{mnr}^{1010} + (\gamma/b^2) N_{mnr}^{0101} \} |_{\eta=1} ] \dots (14)$$

$$T = (1/2) \rho h \omega^2 ab \cos \phi \sum_m \sum_n \sum_s \sum_t C_{mn} C_{rs} I_{mr}^0 J_{ns}^0 \dots (15)$$

$$F^2 w = \sec^2 \phi (\partial^2 w / \partial x^2 - 2 \sin \phi \partial^2 w / \partial x \partial y + \partial^2 w / \partial y^2) \dots (9)$$

$$T = (1/2) \rho h \omega^2 \cos \phi \int_0^b \int_0^a w^2 dx dy \dots (10)$$

ここで、 $D$  は板剛度、 $\nu$  はポアソン比、 $\rho$  は密度、 $h$  は板厚、 $\omega$  は円振動数、 $\phi$  は斜角である。

境界条件を満足した変位関数を用いる場合には、式(8)の  $U$  をそのまま用いるとよいが、ここで用いられる B-spline 関数では、境界条件を満足する式を単純に作り出すことができないので、次のような手法を用いる<sup>9)</sup>。すなわち、境界条件に対応する仮定のばねを考え、これによるエネルギーを式(8)の  $U$  に付加する。仮定のばねとしては、たわみ  $w$ 、回転角  $\partial w / \partial x$ 、 $\partial w / \partial y$  に対応するものが考えられ、ばね定数を、それぞれ、 $\alpha, \beta, \gamma$  とする。ただし、ばね定数として、固定条件には無限大の値を、自由条件に対しては 0 を導入すればよい。数値計算においては、無限大の数値を用いることはできないので、実用的には、数値実験を行い、解に影響を与えない範囲での最大値を用いる。

この境界条件に関する項を含めた系全体のポテンシャルエネルギーと運動エネルギーを無次元の座標  $\xi-\eta$  で表わすと、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} W_{mn}(\xi, \eta) &= \sum_m \sum_n C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \\ W_{rs}(\xi, \eta) &= \sum_r \sum_s C_{rs} N_{r,k}(\xi) N_{s,k}(\eta) \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

これを式(11)、(12)に代入すると次のようになる。

ここで、

$$\left. \begin{aligned} J_{mr}^a &= \int_0^1 N_{m,k}^{(p)}(\xi) N_{r,k}^{(q)}(\xi) d\xi \\ J_{ns}^b &= \int_0^1 N_{n,k}^{(p)}(\eta) N_{s,k}^{(q)}(\eta) d\eta \\ N_{mnr}^{fghi} &= N_{m,k}^{(f)}(\xi) N_{n,k}^{(g)}(\eta) \\ &\quad \times N_{r,k}^{(h)}(\xi) N_{s,k}^{(i)}(\eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

である。また、 $\mu = \omega a^2 \cos^2 \phi \sqrt{\rho h / D}$  とすると、

$$\partial(U-T)/\partial C_{mn} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

より、次の関係式が得られる。

$$[K]\{C\} = \mu^2 [M]\{C\} \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 $[K]$ 、 $[M]$  はそれぞれ式 (14)、(15) より得られる行列である。 $\{C\}$  は係数  $C_{rs}$  よりなるベクトルである。

### 3. 数値計算例

ここでの解析手法では、 $\alpha, \beta, \gamma$  を各辺に与えることにより任意の境界条件を扱うことができるが、ここでは、解析的に解くことが困難である周辺固定斜板、および、相対する2辺で自由、他の2辺で単純支持された斜板の2つの場合を述べる。

#### a) 周辺固定斜板

**Table 1 a)**, b) は、斜角  $\phi = 0^\circ$ 、および、 $45^\circ$  の場合について、解の収束に与える B-spline 関数の spline 次数 ( $k-1$ ) と、 $x$  軸方向および  $y$  軸方向の要素分割数  $MX, MY$  の影響について表示したものである。これより、一般に、spline 次数を高く取ることにより、また、要素分割数を多くとることにより精度が向上し、一定値に収束する傾向を示している。しかし、低次の固有値に関しては、spline 次数を高くしても急速に収束しない場合があり、この場合には spline 次数を低くおさえ、要素分割数を多くとる方法が収束性のよいことがある。逆に、高次の固有値では、spline 次数を高くとることにより、よい収束状態が得られているという結果を得た。精度については、正方形板 ( $\phi = 0^\circ$ ) の場合では、Galerkin 法および Partition 法による数値解と非常によく一致している。斜角を大きくすると、解の収束性はいくらか悪くなるが、ほぼ収束値が得られる。

b) 相対する2辺で自由、他の辺で単純支承された斜板

**Table 2** では、相対する2辺 ( $\eta=0, \eta=1$ ) で自由、他の2辺 ( $\xi=0, \xi=1$ ) が単純支持され、斜角が  $\phi = 0^\circ$ 、 $45^\circ$  の斜板について、解の収束性を示したものである。

また、かなり斜角の大きい斜板 (たとえば  $\phi = 60^\circ$ ) の場合についても検討したが、一定値への収束状態が得られた。

**Table 1 (a)** Convergence study of frequency parameter,  $\mu$ , of clamped skew plate with skew angle  $\phi = 0^\circ$ , and aspect ratio  $a/b = 1.0$

Degree of spline (K-1)	Mesh division (MX=MY)	Mode					
		1	2	3	4	5	6
3	4	3.6520	7.5402	11.1208	13.7845	13.8001	17.2005
	6	3.6474	7.4529	10.9937	13.4937	13.5554	16.8726
	8	3.6466	7.4413	10.9738	13.3739	13.4359	16.7599
	10	3.6463	7.4384	10.9685	13.3474	13.4101	16.7342
	12	3.6461	7.4373	10.9666	13.3390	13.4020	16.7257
4	4	3.6462	7.3893	10.9424	13.8225	13.8967	16.4352
	6	3.6461	7.4355	10.9483	13.3478	13.4079	16.7006
	8	3.6461	7.4364	10.9634	13.3340	13.3973	16.7173
	10	3.6461	7.4364	10.9645	13.3332	13.3957	16.7182
	12	3.6461	7.4364	10.9646	13.3321	13.3953	16.7181
5	4	3.6106	7.3675	10.7787	13.2469	13.3058	16.3810
	6	3.6434	7.4265	10.9290	13.3354	13.3513	16.6389
	8	3.6457	7.4345	10.9559	13.3321	13.3843	16.6959
	10	3.6460	7.4358	10.9621	13.3319	13.3920	16.7111
	6	4	3.6358	7.3380	10.1832	13.3341	13.3502
6		3.6444	7.4317	10.9479	13.3321	13.3837	16.6915
8		3.6457	7.4350	10.9598	13.3319	13.3903	16.7093
9		3.6458	7.4356	10.9618	13.3319	13.3902	16.7124
Partition method <sup>1)</sup>		3.6461	7.4362	10.9638	13.332	13.394	16.716
Galerkin method <sup>2)</sup>	3.6467	7.4383	10.970	13.34	13.399		

**Table 1 (b)** Convergence study of frequency parameter,  $\mu$ , of clamped skew plate with skew angle  $\phi = 45^\circ$ , and aspect ratio  $a/b = 1.0$

Degree of spline (K-1)	Mesh division (MX=MY)	Mode					
		1	2	3	4	5	6
3	4	6.879	12.35	17.47	19.70	29.33	29.97
	6	6.723	11.10	16.25	16.39	23.68	25.31
	8	6.679	10.87	15.36	16.10	20.95	23.88
	10	6.664	10.82	15.14	16.01	20.27	23.48
	12	6.658	10.80	15.08	15.97	20.08	23.35
	13	6.656	10.80	15.06	15.96	20.03	23.32
4	4	6.280	11.01	15.06	16.21	25.19	25.87
	6	6.553	10.82	15.12	15.53	20.84	23.82
	8	6.614	10.80	15.05	15.73	20.04	23.31
	10	6.634	10.79	15.02	15.84	19.96	23.27
	12	6.642	10.79	15.02	15.88	19.94	23.26
5	4	6.136	10.80	14.02	14.61	20.81	23.47
	6	6.516	10.78	14.93	15.26	20.11	23.38
	8	6.599	10.79	14.99	15.65	19.94	23.35
	10	6.627	10.79	15.01	15.80	19.94	23.25
6	4	5.992	10.49	13.61	14.32	19.88	22.99
	6	6.496	10.79	14.87	15.12	19.97	23.27
	8	6.594	10.79	14.98	15.61	19.94	23.25
	9	6.614	10.79	14.99	15.72	19.94	23.25
Partition method <sup>1)</sup>	6.726	10.80	15.18	16.45	20.09	23.44	
Galerkin method <sup>2)</sup>	6.68	10.8	15.1	16.1	20.2	23.5	

**Table 2** Convergence study of frequency parameter,  $\mu$ , of free-simply supported skew plate with skew angle  $\phi=45^\circ$  and aspect ratio  $a/b=1.0$ ,  $\nu=0.3$

Degree of spline (K-1)	Mesh division (MX=MY)	Mode					
		1	2	3	4	5	6
3	4	1.694	2.134	4.106	6.452	8.612	8.699
	6	1.678	2.099	4.032	6.151	8.163	8.339
	8	1.672	2.087	4.021	6.091	8.065	8.274
	10	1.669	2.081	4.019	6.072	8.032	8.255
4	12	1.667	2.077	4.018	6.063	8.016	8.246
	4	1.677	2.095	4.027	6.149	8.165	8.355
	6	1.670	2.082	4.018	6.072	8.035	8.258
	8	1.667	2.076	4.017	6.060	8.011	8.243
5	10	1.665	2.073	4.017	6.054	8.000	8.239
	12	1.664	2.071	4.017	6.050	7.994	8.236
	4	1.670	2.084	4.018	6.077	8.045	8.269
	6	1.666	2.076	4.017	6.058	8.009	8.242
6	8	1.664	2.072	4.017	6.052	7.997	8.237
	10	1.663	2.070	4.017	6.048	7.990	8.235
	4	1.667	2.078	4.017	6.062	8.016	8.247
	6	1.665	2.072	4.017	6.052	7.998	8.237
6	8	1.663	2.069	4.017	6.048	7.989	8.234
	9	1.663	2.068	4.017	6.046	7.986	8.234

0 となっている。

### 4. あとがき

本文では、変位関数として B-spline 関数を用い、Rayleigh-Ritz 法により斜板の固有振動の解析を行い、高精度の結果が得られることを示した。一般に、B-spline 関数による解析では、低次数の spline 関数を採用した場合には、要素分割数を多くすることにより、解の精度がさらに向上する。しかしながら、高次数の spline 関数を用いた場合、ある程度分割数を多くしないと解の精度がよくなるという結果を得た。また、他の解析手法でも同様であるが、このような斜板の固有振動の問題で斜角が大きくなると、いくらか収束は悪くなるが、B-spline 関数の次数と分割数を大きくすることにより他の手法に比較して

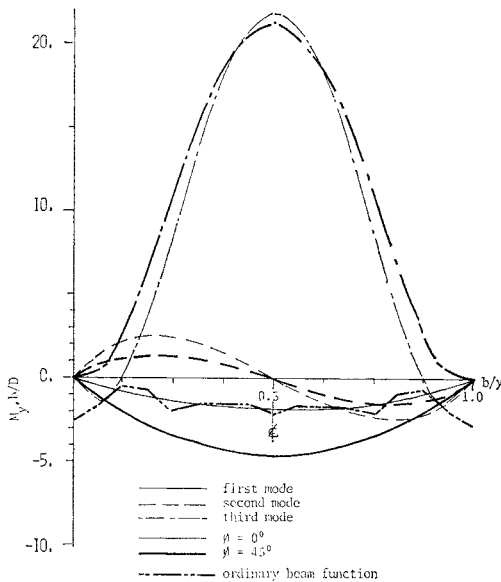
より安定した収束値が得られた。

最後に、B-spline 関数について種々の文献を紹介して下さった福井大学工学部 泰野和郎氏（前名古屋大学大型計算機センター）に、また、数値計算を手伝って下さった土井英尚氏（三重県）に感謝したい。数値計算には名古屋大学大型計算機センター FACOM 230-75 を用いた。

### 参考文献

- 1) Durvasula, S. : Natural frequencies and modes of clamped skew plates, AIAA J., 7, pp. 1164~1167, 1969.
- 2) Durvasula, S. and Nair, P.S. : Application of partition method to vibration problems of plates, J. Sound Vib., 37(3), pp. 429~445, 1974.
- 3) Seth, B.R. : Transverse vibrations of rectilinear plates, Proc. Indian Acad. Sci., Sec. A, 25, pp. 25~29, 1947.
- 4) Kaul, R.K. and Cadambe, V. : The natural frequencies of thin skew plates, Aeron. Quart., 7, pp. 337~352, 1956.
- 5) Curry, H.B. and Schoenberg, I.J. : On polya frequency functions 4 : The fundamental spline functions and their limits, J. Anal. Math., 17, pp. 71~107, 1966.
- 6) Kao, R. : Application of hill functions to two-dimensional plate problems, Int. J. Solids Struct., 11, pp. 21~31, 1975.
- 7) Bassily, S.F. and Dickinson, S.M. : On the use of beam functions for problems of plates involving free edges, J. of Appl. Mech. 42, pp. 858~864, 1975.

(1977. 6. 24・受付)



**Fig. 3** Bending moment associated with the first three modes of vibration

**Fig. 3** には、この境界条件で計算された振動モードに対する曲げモーメントの値が示されている。縦軸には最大変位を1とした場合の曲げモーメントの値が、横軸には  $\xi=1/2$  での  $\eta$  の値が取られている。図には文献7) に示されていた変位関数に通常の beam function を用いた場合の結果も示されているが、これが自由な境界で0にならないのに対して、ここで得られた結果は正しく