

## 側方荷重の影響を考慮した 2 ヒンジ鋼アーチの 面内極限強度について

ULTIMATE IN-PLANE STRENGTH OF 2-HINGED STEEL ARCHES SUBJECTED  
TO LATERAL LOADS

倉 西 茂\*・矢 吹 哲 哉\*\*

By Shigeru KURANISHI and Tetsuya YABUKI

### 1. 緒 言

本論文は、鉛直および側方荷重を受ける二主軸鋼アーチについていくつかのパラメトリック解析を行い、その面内強度に関する特性について論じたものである。

変形の影響および塑性域のひろがりを考慮したアーチの面内耐荷力に関する研究は、近年とみに活発に行われるようになった。山崎・石川<sup>1)</sup>は塑性域のひろがりを考慮して円弧アーチの弾塑性解析を行っており、前田・藤本<sup>2)</sup>は変形の影響を考慮して 2 ヒンジアーチの崩壊荷重を算出している。Harries<sup>3)</sup>は非線形項を繰り返し収斂させて処理する数値積分法を用いて塑性域のひろがりおよび変形の影響を考慮したアーチの耐荷力について解析している。また非弹性座屈についても解析を行っている。著者の 1 人もまた、数値積分法を用いて長方形断面および残留応力とひずみ硬化の影響を考慮したサンドウイッヂ断面を有する 2 ヒンジ鋼アーチを対象にして、面内耐荷力について塑性域のひろがりおよび変形の影響を

考慮したパラメトリック解析を行い<sup>4)</sup>、鋼アーチの設計基準に対して提案<sup>5)</sup>を行っている。新家・頭井・波田<sup>6)</sup>は伝達マトリックス法を用いて 2 ヒンジおよび固定アーチを対象にして、種々の部分分布荷重を受けた場合の非弾性座屈解析および非対称分布載荷した場合の耐荷力解析を行い、アーチの面内強度特性について論じている。

しかし、これらはすべて鉛直荷重のみを載荷した場合であり、側方荷重の影響をも考慮した二主軸を有する鋼アーチの面内強度特性に関しては現在のところ研究例が少なくその性質はまだ十分に明らかにされていない。しかし近年のアーチ橋の長径間化の傾向に伴い、鉛直および側方荷重の組み合せ載荷に対する立体構造物としてのアーチの強度特性を把握することは、鋼アーチ橋設計の合理化を推進する上で必要なことであると思われる。

アーチを立体的に解析する場合直接に立体骨組構造物としてマトリックス構造解析法を用いる方法<sup>7), 8), 9)</sup>もあるが、構造特性を支配するパラメーターが多いことおよび鉛直と側方の組み合せ荷重を扱うことから、強度に関する一般的な特性を把握することがきわめて困難となる。

また設計する際にマトリックス立体構造解析法を直接用いることは計算機の記憶容量および計算時間が膨大となり、あまり実用的な方法でないと思われる。

本論文で対象とする図-1 に示したような 2 本のアーチリブを持つ鋼アーチ橋を立体構造物として取り扱う場合、強度に影響を及ぼす構造特性パラメーターは例えば、径間長、ライズ、主軸間隔、横構の配置、主軸の

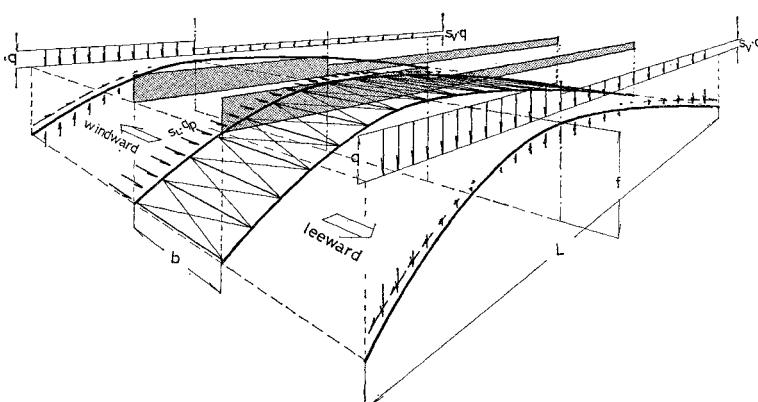


Fig. 1 General View, Loadings and statical model.

\* 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 東北大学助手 工学部土木工学科

断面形状、主軸および横構の 2 軸まわり曲げ剛性、伸縮剛性およびねじり剛性、残留応力分布等を含む。

しかし設計をより合理的に行うための指針を得るという観点からすれば、これ等のパラメーターをすべて同一次元上で検討することは必ずしも必要ではないものと思われる。一般に実用に寄与するアーチ橋の強度は、主荷重に対する主荷重作用面内での強度をもって定義されるべきであろう。したがって、アーチの面外構造特性パラメーターおよび側方荷重は、アーチの面内強度に対して二次的な影響を与える要因として評価することが望ましい。

通常用いられる二主桁鋼アーチ橋では、図-1に示したように、2本のアーチリブが横桁と対傾構でかなり剛に結合されており、側方には剛度の高い構造となっている。このことから、鉛直および側方荷重を受けた場合、面外変形がアーチの面内強度に及ぼす影響は小さいものと思われる。したがって、側方荷重は主にアーチリブの直応力を増加させ、リブ断面内で一部降伏を早めさせることにより剛性を減少させるような影響を与えることになろう。これらを考慮して著者等はすでに、側方荷重によりアーチリブ断面に生ずる応力度を算定し、これを初期応力としてリブ断面に導入することにより側方荷重の影響を考慮した面内耐荷力を算定し、報告している<sup>12)</sup>。しかし、側方荷重の影響を初期応力の形で考慮する方法は、側方荷重によりアーチリブに生ずる面内変形の考慮および任意載荷段階での側方荷重の考慮がそれぞれ不可能であるという欠点を持っている。

したがって、ここでは、側方荷重によりアーチリブ断面に生ずる断面力を算定し、この断面力を用いて側方荷重と力学的に等価な面内荷重を逆算し、これを付加荷重としてアーチリブに作用させて側方荷重の影響を考慮した。側方荷重および側方への剛度を力学的に等価な面内荷重の形に総括して考慮する本解析法によれば、立体的な構造特性を支配するパラメーターの中で特に重要と思われるものののみの作用を考慮した面内強度を、比較的容易に解析することができよう。ここでは、薄肉箱形断面を持つ2ヒンジ鋼アーチを対象にして、面内変形、使用鋼材の降伏、アーチリブの断面内と軸方向への塑性域のひろがりを考慮した面内極限強度が解析されている。また、側方荷重を考慮した面内強度特性の一端として、鉛直および側方荷重のもっとも基本的な載荷経路について検討がなされている。

## 2. 解析方法

### (1) 概 要

アーチリブの変形および塑性域のひろがりの影響を考慮することにより生ずる非線形性をここでは、各載荷段

階での変位増分に対応する構造物の内的および外的な挙動は線形であると見なすいわゆる荷重増分法を用いて線形化し解析を行っている。ここで線形化することにより生ずる内力と外力の不つり合いは、この不つり合い量とエネルギー的に等価な残差不平衡力を逐次載荷することにより修正している。構造解析は、一般的に用いられている有限要素法によって行っている。

### (2) 仮定および記号

ここでは、2本の薄肉箱形断面を持つ放物線形状のアーチリブが密に配置された剛な横桁と対傾構で結合されている構造形式のアーチを対象としている。解析の際に設けた仮定の主なものは次のとおりである。

- a) アーチは側方荷重に対しては全断面で1本の円弧曲りばかりとして働く。
- b) アーチリブ断面は図心を連ねて得られるアーチ軸で代表する。
- c) アーチ軸を含む面内ではアーチ軸線は適當な長さの直線群が連なって形成されている。
- d) 崩壊に至るまでアーチリブの断面形はずれ変形を示さず曲げに対して断面はその平面を保持する。
- e) 使用鋼材の応力とひずみは完全弾塑性関係とし、ひずみ硬化は考えない。除荷が生じた場合には弾性除荷径路モデルに従う。
- f) アーチリブに生ずるせん断応力度および面外曲げによる応力度、さらに、反り、ねじり、せん断および側方の変形がアーチリブの面内変形および応力性状に及ぼす影響は無視する。
- g) 有限変位解析において変位が定まらず発散した状態、または、二断面内で完全に塑性化した状態をもって崩壊とする。

ここで使用した記号の主なものを次に示す。

$X, Y$  : 基準座標系

$x, y$  : 部材要素座標系

$\{s\}$ ,  $\{d\}$  : 部材要素端断面力増分および変位増分

$sN_a, sS_a, sM_a$  : 部材要素端  $a$  での断面力成分

$sN_b, sS_b, sM_b$  : 部材要素端  $b$  での断面力成分

$s\alpha_a, s\beta_a, s\gamma_a$  : 部材要素端  $a$  での変位成分

$s\alpha_b, s\beta_b, s\gamma_b$  : 部材要素端  $b$  での変位成分

$[k]$  : 部材要素に関する接線剛性係数行列

$[T]$  : 座標変換行列

$\{P\}, \{D\}$  : アーチに作用する荷重および節点変位の増分量

$[K_s], [K_r]$  : 構造全体としての接線剛性係数行列

$\{P\}$  : 現行状態の作用荷重

$\{R\}$  : 内力としての断面力に対応した相当



- c) 各節点の変形後の位置を基準座標系で設定する。

d) アーチリブ断面内および軸方向への塑性域のひろがりを調べ、各節点および部材要素内の分割点での断面内応力分布を付式[A-2]および[A-3]により、また、内力としての断面力を付式[A-4]によりそれぞれ算定する。

e) 塑性域のひろがりを考慮したアーチリブの断面剛度およびd)で求めた断面力を用いて、付式[A-9]に従って接線剛性係数[K]を求める。

f) d)で求めた断面力を用いて、付式[A-11]に従って算定した相当荷重成分{R}と作用荷重成分{P}より、残差不平衡力{Q}を算定する。

g) 崩壊状態か否かを調べる。もし崩壊状態ならばj)段階へ。

本計算例では、変位が発散したか、またはアーチリブの2か所での断面内の応力状態が完全塑性状態に達した状態を、崩壊状態とした。ただし、変位は、収敛計算過程で現行状態で算定された値が先行状態のものより大きい値を示したとき、発散したものと見なしている。

h) 変位およびつり合いが定められた収敛精度を満足しているか否かを調べる。もし満足しない状態ならば、a)段階へもどり、くり返し修正変位増分を算定する。

本計算例では、この収敛精度を  $A_{c,d} = \{\Delta D\}/\{D\}$ ,  $A_{c,e} = \{\Delta Q\}/\{\Delta P\}$  とし、それぞれ  $A_{c,d} = A_{c,e} = 0.005$  とした。

i) 作用荷重、接線剛性係数、変位およびひずみ量を記憶した後、次の段階の荷重を載荷し a)から再び計算する。

j) 極限荷重<sup>注1)</sup>が定められた精度を満足しているか否かを調べる。もし満足していないならば、荷重増分を低減して a)の段階にもどり、この段階で得られた極限の載荷状態から再び崩壊に至るまで計算しなおす。

本計算では、極限荷重の精度を  $A_{c,l} = \{\Delta P\}/\{P_{\max}\}$  として、 $A_{c,l} = 0.001$  とした。また荷重増分の低減は  $\Delta P = \Delta P_0/2$  とした。

k) 計算終了

#### (4) 側方荷重の影響

仮定 a) および f) によって、側方荷重の影響を考慮する。側方荷重によりアーチリブに生ずる断面力の中、主なものとして軸力および面内曲げモーメントを取り上げる。これ等は、仮定 a) より次式で計算される。

$$N^0 = \mp \frac{EAb}{2R} \left( \frac{1}{R} \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \beta \right)$$

注1) 崩壊直前の荷重をいう。したがってこの状態までは荷重と変形が平衡状態にある。

$$M_z^0 = \mp \frac{E I_z b}{2 R^2} \left( \frac{d^2 \beta}{d \varphi^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2 w}{d \varphi^2} \right) \quad \dots \dots \dots \quad (5.a \sim b)$$

式中 “ $\mp$ ” と併記した符号は、上段が側方荷重を風荷重と想定した場合の風下側リブを、下段が風上側リブを示す。また、 $R$  および  $\varphi$  は放物線形状のアーチ軸を、スパンとライズを一致させて円弧と仮定した場合の曲率半径および角変数を示している。さらに  $\beta$  および  $w$  は側方荷重によるねじり角および側方変位、 $b$  は主桁間隔をそれぞれ示している。これらの詳細は参考文献 10) および 11) を参照されたい。ここでは取り扱いの簡便さから、アーチ軸線を面外に対しては円弧近似させたが、特にライズが高くない限り、同じライズースパン比であれば、放物線アーチとの誤差は小さいものと思われる。

式(5)で算定した断面力を基準座標系に変換して得た部材要素の両端部での断面力  $\bar{f}^0$  を、風上側および風下側について求める。

$$\bar{f}^0 = (-\bar{N}_a^0, -\bar{N}_a^0, -\bar{M}_a^0, \bar{N}_b^0, \bar{S}_b^0, \bar{M}_b^0)^t$$

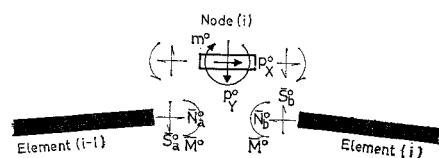
.....(6)

各断面力の符号は式(1)と同様である。

仮定 a) により、式(6)で示した断面力を生じさせるような面内荷重(水平軸方向成分:  $p_x^0$ , 鉛直軸方向成分:  $p_y^0$ , 面内曲げモーメント成分:  $m^0$ )を各節点でのつり合い条件より逆算する。例えば、節点  $i$  では、図-5 を参照して

$$\begin{bmatrix} p_{X^0} \\ p_{Y^0} \\ m^0 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \bar{N}_{b^0} \\ \bar{S}_{a^0} \\ \bar{M}^0 \end{bmatrix}_i - \begin{bmatrix} \bar{N}_a^0 \\ \bar{S}_a^0 \\ \bar{M}^0 \end{bmatrix}_i \dots \dots \dots (7)$$

となる。



**Fig. 5** The forces acting on the node ( $i$ ) under lateral loading.

なお、ここでは、式(7)で与えられる等価面内力等は、極限状態までその値を保つとする。

式(7)で求めた荷重成分を側方荷重を載荷する段階で図-1に示したように付加荷重としてアーチリブに載荷し、2本のアーチリブを分離した形で、側方荷重の影響は考慮される。

主荷重としての側方荷重および面内荷重を組み合せ載荷した場合のアーチの強度を厳密に知るには、幾何学的および材料的な非線形性を考慮した立体骨組構造解析が必要となろう。しかし、二主桁アーチの場合、1本のアーチに比較して面外にはかなり剛な構造であること、ま

た、側方荷重は実用的見地から従荷重として扱える風荷重程度のものを対象としていることから、アーチリブ自身に生ずるねじりモーメント、面外曲げモーメントおよび面外変形がアーチの面内極限強度に及ぼす影響は微小であると思われる。ここで対象としている側方荷重が及ぼす影響の主なものは、側方荷重により断面に作用する軸力および面内曲げモーメントがアーチリブの直応力を増加させ、リブ断面内で一部降伏を早めさせて剛性を減少させることであると考えられる。したがって、式(7)で求めた荷重成分が側方荷重と力学的に等価な面内荷重であるとして2本のアーチリブを分離する本論文でのモデル化は、実用的には、側方荷重を考慮した二主軸アーチの面内極限強度を算定する簡潔な解析方法として採用することも許されると考えられる。

### 3. 数値計算

面内強度に及ぼす側方荷重の影響について設計基準を定めるためには、面内荷重および側方荷重の載荷経路と定量的関係について実際の挙動を的確にモデル化し、側方荷重の影響を考慮した面内強度特性を検討することが是非とも必要となる。しかし実橋の場合の載荷経路および定量的関係はかなり複雑に変化するものと思われ、これ等を実用的見地からモデル化するためには、より広範囲な研究を進める必要がある。

ここでは、その第一段階として最も基本的な載荷経路を選び、側方荷重を考慮した面内強度特性の一端を検討する。ここで採用した基本的な載荷経路は、第一載荷段階として荷重係数  $S_L$  なる側方荷重を載荷し、次に第二載荷段階として荷重係数  $S_V$  なる非対称鉛直荷重を漸増載荷する経路である。アーチリブ断面は、細長比の変化によらず、 $B/H=0.6$ ,  $H/t_w=190$ ,  $t_f/t_w=1.5$  なる断面形状比のものを使用した。これ等の断面形状比の場合の断面二次半径と桁高の比は約 0.4 となり、矩形断面とサンドウィッヂ断面のほぼ中間の値を示している。

したがって、これ等の形状比を持つ断面は断面性状からみて標準的なものと思われる。残留応力分布は、理想化したものとして図-6中に示した分布を選んだ。薄肉の鋼板を溶接により接合させて製作した箱形断面の残留応力の圧縮側分布は、平均的な値として  $0.4\sigma_Y$  程度になるものと思われる<sup>13), 14)</sup> 特にことわらない限り、ここでは、残留応力分布係数として  $\alpha=0.4$  を採用する。また  $\sigma_Y=2400 \text{ kg/cm}^2$  とした。荷重は、支点を除く全節点に同量の集中荷重を載荷した場合、軸力によりスプリングに降伏が生じたときの荷重強度  $q_p$  (一次解析で算定した値) で無次元化した。

$q_p$  は次式で与えられる。

$$q_p = A\sigma_Y / \sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \sum_{i=2}^n \frac{5l_i l_2}{8C_f} (l_1^2 + 3l_1 l_2 + l_2^2)} \quad \dots \dots \dots (8)$$

ここに、 $i$ : 左支点から右支点までの節点番号、 $n$ : 部材要素数、 $C_f=f/L$ ,  $l_i=(i-1)/n$ ,  $l_2=1-(i-1)/n$

#### (1) 断面性状

側方荷重によりアーチリブに生ずるねじりモーメントおよび面外曲げモーメントが断面の持つ面内曲げ剛性および伸縮剛性に及ぼす影響を示したのが、図-6~10 である。これ等は、基準断面(図-6 中に示した断面)に、第一載荷段階としてねじりモーメント  $M_t^0$  および面外曲げモーメント  $M_y^0$  を作用させた後、第二段階として面内曲げによる曲率および伸縮ひずみを漸増させた場合の断面性状を示している。この場合、面内曲げによる曲率および伸縮ひずみは  $(e/\epsilon_Y) \cdot (\phi_Y/\phi)=0.5$  なる比例径路に従うものとした。 $M_y^0/M_{tY}=0.1$  に固定し、 $M_t^0/M_{tY}=0 \sim 0.7$  に変化させた場合の面内曲げ剛性の減少率 ( $\mu=M_z/EI_z\phi$ ) と無次元化した曲率 ( $\phi/\phi_Y$ ) の関係を図示したのが図-6 である。この場合、伸縮剛性の減少率 ( $\nu=N/EAe$ ) に及ぼす影響は  $M_t^0$  の変化にさほど支配されないので図示を省略した。 $\lambda=200$ ,  $f/L=0.15$  のアーチに  $S_L=0.5$  の側方荷重を載荷した場合の

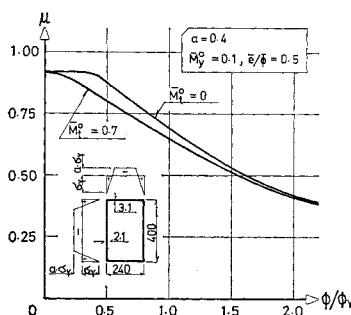


Fig. 6 Effect of  $\phi$ ,  $M_t^0$  on reduction factor of flexural rigidity.

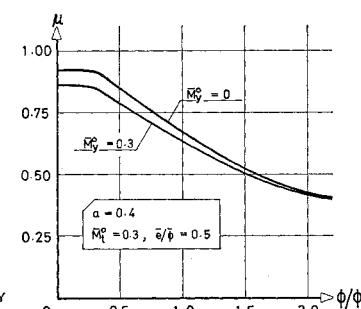


Fig. 7 Effect of  $\phi$ ,  $M_z^0$  on reduction factor of flexural rigidity.

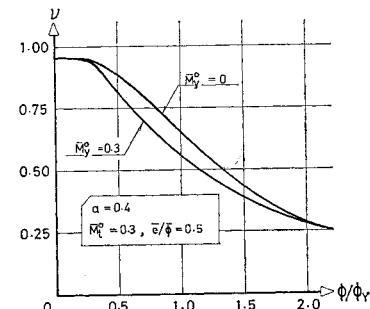


Fig. 8 Effect of  $\phi$ ,  $M_s^0$  on reduction factor of elongational rigidity.

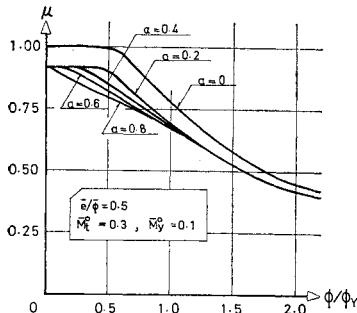


Fig. 9 Effect of  $\phi, \alpha$  on reduction factor of flexural rigidity.

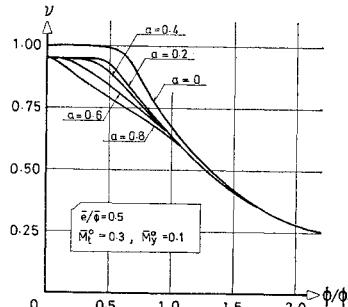


Fig. 10 Effect of  $\phi, \alpha$  on reduction factor of elongational rigidity.

アーチリブに生ずるねじりモーメントは約  $M_t^0/M_{tY} = 0.2$  程度である(図-12 参照)が、図-6 中に示した  $M_t^0 = 0$  の場合と比較すると最大 4% 程度の差異となる。実橋に作用する風荷重は道示<sup>21)</sup>の基準に基づいて算定すると約  $S_L = 0.05 \sim 0.1$  程度であることから、実橋に作用するねじりモーメントが面内剛度に及ぼす影響は 0.8% 程度になるものと思われる。図-7 および図-8 には、 $M_t^0/M_{tY} = 0.3$  に固定し、 $M_y^0/M_{yY} = 0 \sim 0.3$  に変化させた場合の  $\mu$  と  $\phi/\phi_Y$  の関係、および、 $\nu$  と  $\phi/\phi_Y$  の関係をそれぞれ示した。 $\lambda = 200, f/L = 0.15, S_L = 0.5$  とした場合の側方荷重によりアーチリブに生ずる面外曲げモーメントは  $M_y^0/M_{yY} = 0.03$  程度である。 $M_y^0/M_{yY} = 0.1$  と  $M_y^0 = 0$  の場合とを比較すると、両者の差異は  $\mu$  に関して最大 6%， $\nu$  で最大 9% 程度であることから、風荷重程度により生ずる面外曲げモーメントが面内剛度に及ぼす影響は大略 0.6% 程度であろうと思われる。基準断面の残留応力(圧縮側)を変化させた場合の  $\mu$  および  $\nu$  と  $\phi/\phi_Y$  との関係を示したのが図-9 および図-10 である。残留応力を考慮した場合と考慮しない場合では、両者の差異は顕著である。残留応力の圧縮側の値が大きいものほど面内剛度に及ぼす影響は大きいが、残留応力を考慮した場合 ( $\alpha \neq 0$ ) のみをみると  $\phi/\phi_Y > 1.5$  の範囲では  $\alpha$  の変化による影響は見られなくなることが解る。

上述したねじりモーメント、面外曲げモーメントおよび残留応力による面内剛度の減少の程度が、直接極限強度に及ぼす影響とみるのは早計であるが、断面の持つ剛性の劣化が崩壊の主たる原因となるような場合には、ある程度影響の度合いを現わしているものと思われる。

## (2) 分割数の決定

本解析は、仮定 c) を前提として有限要素法を用いて構造計算を行っていることから、アーチ軸線の分割数が解の精度に及ぼす影響は大きいものと思われる。図-11 にサンドウィッヂ断面を有する 2 ヒンジ放物線アーチに

$S_V = 0.5$  なる非対称鉛直荷重のみを載荷した場合を例にとり、極限荷重に及ぼす分割数の影響を示した。 $n=50$  の極限荷重を基準にして比較すると、 $n=40$  で 0.00%， $n=30$  で 0.06%， $n=20$  で 0.11%， $n=10$  で 1.50% それぞれ減少している。一方計算時間は  $n$  の増加に伴い指数関数的に増加しており、 $n=50\%$  の場合を 100 % とすると、 $n=40$  で 54%， $n=30$  で 29%， $n=20$  で 13%， $n=10$  で 5% である。計算時間および解の精度を考慮して以下の計算ではアーチ軸線の分割数を 30 とした。また、断面内の分割は 40 分割とした。

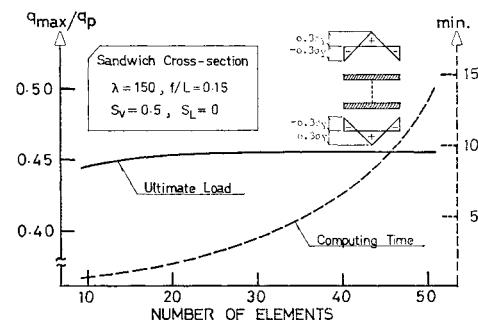


Fig. 11 Calculation results for various of member elements.

## (3) 側方荷重によりアーチリブに生ずる断面力

風下側アーチリブに生ずる断面力を仮定 a) のもとで算定した結果を図-12 に示した。各節点でこれ等の断面力を生じさせるような面内付加荷重(式(7)を用いて算定)をアーチリブに載荷した場合の断面力算定結果を図-12 中に等価荷重によるものとして示した。軸力は部材要素内で一定、また、面内曲げモーメントは部材要素内で線形変化するものとした(付式 [A-6] 参照)。

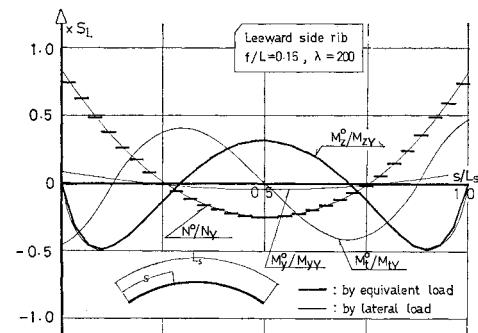


Fig. 12 Standard cross-sectional forces caused by lateral load.

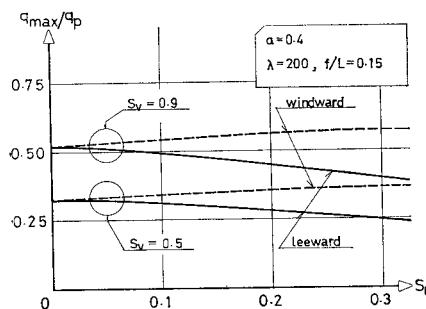


Fig. 13 Relationships between maximum load intensity and lateral load parameter for windward rib and leeward one.

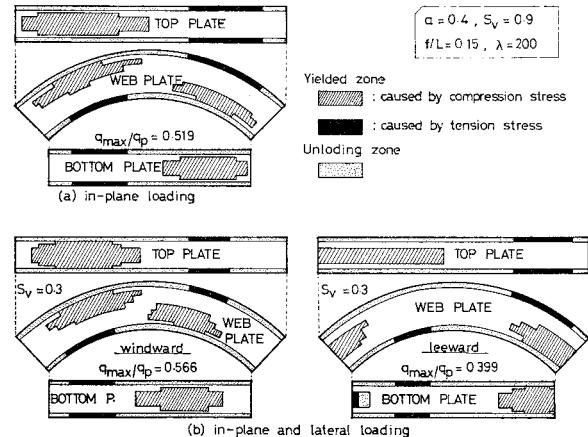


Fig. 14 Yielded zones for in-plane loading and in-plane & lateral loading.

#### (4) 側方荷重の影響を考慮したアーチの面内極限強度

側方荷重の影響を考慮した場合の風上側および風下側アーチリブの面内終局強度特性を示したのが図-13 および図-14 である。図-13 より風下側リブが風上側より極限荷重が小さいことが解る。この傾向は、側方荷重が大きくなるほど、また、鉛直荷重の非対称性が小さくなるほど、顕著となっている。図-14 には、アーチリブに発生した塑性域のひろがりの一例として、側方荷重の影響を考慮した場合と鉛直荷重のみを載荷した場合との比較が示されている。この計算例では、除荷域の存在が認められた。

アーチの風上側リブと風下側を比較した場合、風下側が危険側であることから、以後の計算例では風下側のアーチリブについて検討することとする。

図-15 および図-16 には、崩壊直前の平衡状態に至るまでの  $L/4$  点での荷重-変位曲線および荷重-ひずみ曲線が示されている。また、図-17 には  $L/4$  断面での軸力と面内曲げモーメントとの関係が示されている。図中の外側の曲線は残留応力を考慮しない場合の曲げモーメントと軸力の相関曲線を示している。これ等の計算では、代表的な例としてスパン-ライズ比  $f/L=0.15$  のアーチが選ばれている。極限荷重により生ずるひずみは、図-16 の例では、圧縮側で純降伏ひずみ ( $\epsilon_Y = \sigma_Y/E$ ) の約 2.0 倍、引張側で約 1.2 倍である。溶接等により導入される初期ひずみを考慮すると、極限荷重載荷時には断面の圧縮側で  $2.4\epsilon_Y$ 、引張側で  $0.8\epsilon_Y$  程度のひずみが生じる。したがって、本計算例で採用したような 2 ヒンジアーチに対して全体としての極限強度を期待する場合には、安全率を 1.5 とし

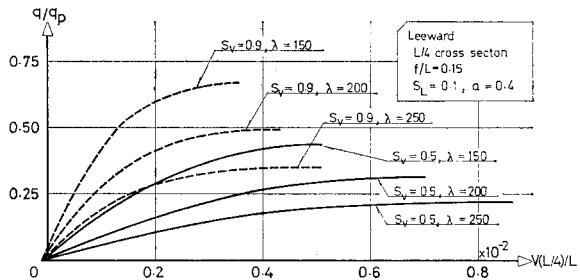


Fig. 15 Load-deflection diagram.

て、少なくとも純降伏ひずみの 4 倍位のひずみまでは局部座屈等が生じないようなアーチリブ断面を使用する必要があろう。

極限荷重強度と残留応力の圧縮側分布係数  $\alpha$  との関係を示したのが図-18 である。ここでは、 $\lambda=200$ ,  $f/L=0.15$  のアーチに、荷重係数  $S_L=0.1$  なる側方荷重を載荷した場合の計算例が示されている。残留応力を考慮

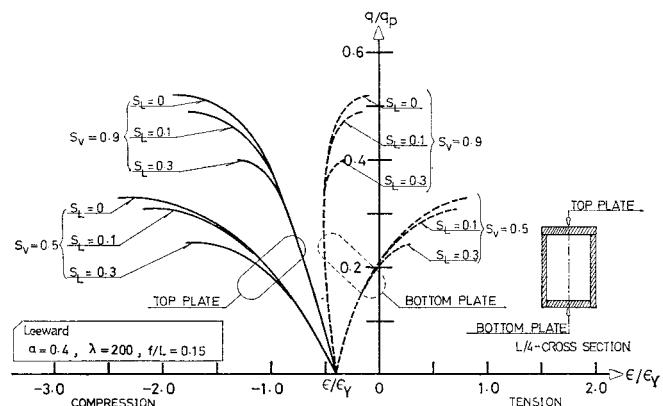


Fig. 16 Load-strain diagram.

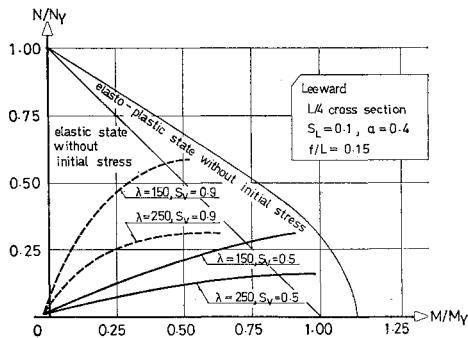


Fig. 17 Load increment vs. combination of bending moment and axial thrust.

しない場合 ( $\alpha=0$ ) の極限荷重強度と  $\alpha=0.4$  のものとの比は、 $S_V=0.9$  で 0.91,  $S_V=0.5$  で 0.98 であり、残留応力の影響は鉛直荷重の非対称性が小さい場合に顕著になる傾向がみられる。また、図より、 $\alpha=0.4$  程度以上になると、極限荷重に及ぼす残留応力の影響は、 $\alpha$  の値にはよらなくなる傾向がうかがえる。

ライズースパン比が側方荷重を考慮した二主桁アーチの面内極限強度に及ぼす影響を示したのが図-19である。図は  $\lambda=200$ ,  $S_V=0.9, 0.5$  の場合を示している。図より、ライズースパン比が大きくなるほど、側方荷重が面内強度に及ぼす影響もまた大きくなることが解る。

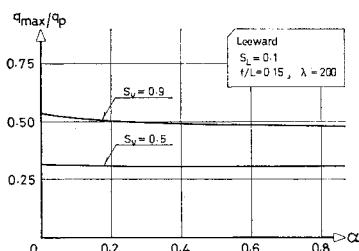


Fig. 18 Relationships between maximum load intensity and residual stress parameter.

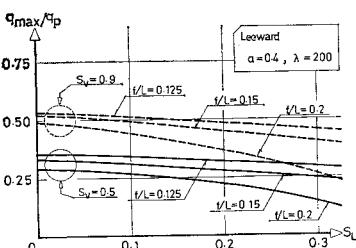


Fig. 19 Relationships between maximum load intensity and lateral load parameter for various of rise-to-span ratio.

細長比を変化させた場合の極限荷重強度と側方荷重係数との関係を図示した

$S_V$	0.9	0.7	0.5	0.3
影響係数	0.947	0.947	0.943	0.937
備考	$S_L=0.1, f/L=0.15, \lambda=200$			

のが図-20である。こ

こでは、 $f/L=0.15$ ,  $S_V=0.5, 0.9$ ,  $\lambda=150, 200, 250$  の場合について算定した結果が示されている。 $S_V=0.9$  の場合を例にとって側方荷重を考慮しない場合 ( $S_L=0$ ) の極限荷重強度と  $S_L=0.3$  のそれとの比を調べてみると、 $\lambda=150$  で 0.80, 200 で 0.77, 250

で 0.69 となる。また、 $S_V=0.5$  の場合では、 $\lambda=150$  で 0.83, 200 で 0.75, 250 で 0.64 となる。したがって、細長比が大きくなるほど、側方荷重の影響もまた大きくなる傾向がうかがえる。

表-2 風荷重による影響係数 ( $f/L$  を変化させた場合)

$f/L$	0.125	0.15	0.2
0.5	0.959	0.943	0.892
0.9	0.962	0.947	0.901
備考	$S_L=0.1, \lambda=200$		

表-3 風荷重による影響係数 ( $\lambda$  を変化させた場合)

$S_V$	150	200	250
0.5	0.969	0.943	0.909
0.9	0.966	0.947	0.923
備考	$S_L=0.1, f/L=0.15$		

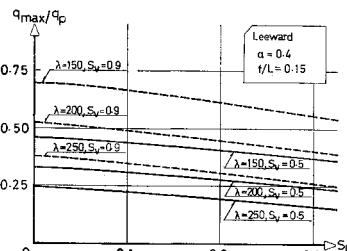


Fig. 20 Relationships between maximum load intensity and lateral load parameter for various of slenderness ratio.

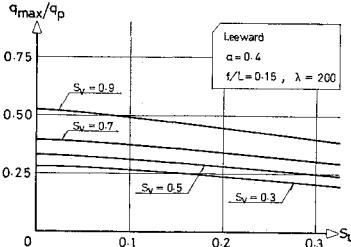


Fig. 21 Relationships between maximum load intensity and lateral load parameter for various of vertical load parameter.

表-1 風荷重による影響係数 ( $S_V$  を変化させた場合)

$S_V$	0.9	0.7	0.5	0.3
影響係数	0.947	0.947	0.943	0.937
備考	$S_L=0.1, f/L=0.15, \lambda=200$			

表-2 風荷重による影響係数 ( $f/L$  を変化させた場合)

$f/L$	0.125	0.15	0.2
0.5	0.959	0.943	0.892
0.9	0.962	0.947	0.901
備考	$S_L=0.1, \lambda=200$		

表-3 風荷重による影響係数 ( $\lambda$  を変化させた場合)

$S_V$	150	200	250
0.5	0.969	0.943	0.909
0.9	0.966	0.947	0.923
備考	$S_L=0.1, f/L=0.15$		

図-21には、鉛直荷重の非対称性が側方荷重を考慮した二主桁アーチの面内極限強度に及ぼす影響が示されている。図には、 $\lambda=200$ ,  $f/L=0.15$  で  $S_V=0.3\sim 0.9$  まで変化させた場合の結果が示されている。例えば、側方荷重を考慮しない場合の極限荷重強度と  $S_L=0.3$  のそれとの比は、 $S_V=0.9$  で 0.77, 0.7 で 0.76, 0.5 で 0.75 そして, 0.3 で 0.74 程度となる。したがって、鉛直荷重の非対称性が大きくなるほど、側方荷重の影響も若干ではあるが大きく現われる傾向がみられる。

$S_L=0.1$ 、すなわち風荷重程度の側方荷重が面内極限強度に及ぼす影響の程度を示したのが表-1, 2 および表-3である。各表中の値は、側方荷重を考慮しない場合の極限荷重強度に対する  $S_L=0.1$  の極限荷重強度の比（以後これを影響係数とする）を示している。表-1より、 $S_V=0.9$  と 0.3 の影響係数の相違は 1% 程度

である。したがって風荷重程度の側方荷重が面内極限強度に及ぼす影響の度合いは、鉛直荷重の非対称性にはさほど支配されないことが解る。表-2より  $f/L=0.125$  と 0.2 の影響係数の相違は、それぞれ  $S_V=0.5$  で 7 %, 0.9 で 6 % 程度である。また表-3より  $\lambda=150$  と 250 の影響係数の相違を調べると、 $S_V=0.5$  で 6 %, 0.9 で 5 % 程度である。以上より実用的な範囲内でアーチの構造要素諸元を変化させた場合、風荷重程度の側方荷重が面内極限強度に及ぼす影響の変化は、きわめて高い場合で 7 % 程度であると考えられる。

#### 4. 結 論

本論文では二主軸を持つ2ヒンジ鋼アーチについて、側方荷重の主なる影響を考慮したモデル化を行い、側方荷重を力学的に等価な面内荷重に変換して、面内極限強度を解析する方法を示した。したがって、ここでは、側方への変位あるいはねじれによる面内変形の影響、また、断面の塑性化による側方荷重による応力の変化に対する影響は考慮されていない。本解析法を用いて鉛直および側方荷重の基本的な載荷経路に対して数値解析がなされ、側方荷重の影響を考慮した面内極限強度特性の一端が検討された。数値解析では、鉛直荷重係数、側方荷重係数、ライズースパン比、細長比および残留応力分布をパラメーターとして、面内変形、除荷、および、塑性域のひろがりの影響が考慮されている。

得られた結果を要約すると次のとおりである。

(1) 道示で規定された風荷重程度の側方荷重により生ずるねじりモーメントおよび面外曲げモーメントがアーチリブ断面の持つ面内剛度に及ぼす影響は、ここで解析したような一般的なアーチ橋では、1 % 以下程度であると思われる。

(2) アーチ全体としての極限強度を期待する場合には、少なくとも、純降伏ひずみ ( $\sigma_Y/E$ ) の4倍程度のひずみまでは局部座屈等が生じないようなアーチリブ断面を使用する必要がある。

(3) 風上側と風下側のアーチリブを比較すると、風下側が危険側となる。この傾向は、側方荷重が大きくなるほど、また、鉛直荷重の非対称性が小さい場合に顕著となる。

(4) 残留応力の影響は鉛直荷重の非対称性が小さい場合に顕著であるが、圧縮残留応力と引張残留応力の比  $\alpha$  が 0.4 程度以上になると残留応力の影響は  $\alpha$  の値によらなくなる。

(5) アーチのライズースパン比が大きくなるほど、また、アーチリブの細長比が大きくなるほど、側方荷重が面内極限強度に及ぼす影響は大きくなる。

(6) 側方荷重が面内極限強度に及ぼす影響は鉛直荷重の非対称性が大きくなるほど顕著となる傾向を示す。

(7) 風荷重程度の側方荷重が面内極限強度に及ぼす影響の度合いは、鉛直荷重の非対称性にはさほど支配されない。

(8) 実用的な範囲内でアーチの構造要素諸元を変化させた場合、風荷重程度の側方荷重が面内極限強度に及ぼす影響の変化は、きわめて高い場合で 7 % 程度であるものと思われる。

本論文では2ヒンジアーチのみを対象としたが、固定アーチに対しても支持条件の項の変換のみで後はまったく同様に解析することができる。固定アーチは端部拘束による端モーメントの影響で、スプリングング近傍でかなり複雑な除荷の影響が予想されるので、これについても本解析法を用いて詳細に検討し、機会をあらためて報告したい。

数値計算には、東北大学大型計算機センターの ACO S・NEAC-700 を用いたことを付記する。

#### [付録-A]

先行状態から現行状態の間のひずみ増分は、高次の項を省略すると次式で与えられる。

$$\Delta\epsilon = \frac{d_{\Delta}u}{dx} - \frac{d^2_{\Delta}v}{dx^2} y + \frac{d_{\Delta}v}{dx} \frac{dv_0}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\Delta}v}{dx} \right)^2 \dots [A-1]$$

ここに  $v_0$  は先行状態の鉛直変位量を表わしている。また、式では曲率増分に及ぼすたわみ角の影響は高次の微小であるとして省略されている。

応力増分とひずみ増分の関係を、弾性域では Hooke の法則に、塑性域では Plandtler-Reuss の法則に従って線形化<sup>19), 20)</sup>すれば、次式で表わすことができる。

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= E_1 \Delta\epsilon + E_2 \Delta\tau \\ \Delta\tau &= G_1 \Delta\epsilon + G_2 \Delta\tau \end{aligned} \quad \dots [A-2]$$

ここに  $E_1, E_2, G_1, G_2$  は付表-1により算定される係数である。本論文では、直応力度のみを考慮したので、 $\Delta\tau=0, \tau_0=0$ 、降伏時応力  $\sigma=\sigma_Y$  として式 [A-2] を用いた。しかし、一般に用いられる二主軸鋼アーチのねじれ変形によるせん断ひずみは微小であることから  $\Delta\tau=0$  とし、側方荷重の載荷段階でのねじりモーメントによるせん断応力のみを取り出して式 [A-2] を用いれば、面内剛度に及ぼすねじりの影響を実用的に考慮することができよう。

式 [A-2] より、現行状態での応力は、先行状態での応力を  $\sigma_0, \tau_0$  として次式で与えられる。

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma, \tau = \tau_0 + \Delta\tau \quad \dots [A-3-a, b]$$

したがって、先行状態での断面力は、次式で与えられ

る。

$$N_0 = \int_A \sigma_0 dA, M_0 = \int_A \sigma_0 y dA \dots [A-4 \cdot a, b]$$

本計算例では、断面内を 40 分割して数値積分により算定した。

部材要素内の図心に関する変位を次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \Delta u_a + (\Delta u_b - \Delta u_a) \frac{x}{l} \\ \Delta v &= \Delta v_a + \Delta \theta_a x + (3\Delta v_b - l\Delta \theta_b - 3\Delta v_a - 2l\Delta \theta_a) \left( \frac{x}{l} \right)^2 \\ &\quad + (-2\Delta v_b + l\Delta \theta_b + 2\Delta v_a + l\Delta \theta_a) \left( \frac{x}{l} \right)^3 \\ \Delta \theta &= \Delta \theta_a + 2 \left( \frac{3\Delta v_b}{l} - \Delta \theta_b - \frac{3\Delta v_a}{l} - 2\Delta \theta_a \right) \frac{x}{l} \\ &\quad + 3 \left( -\frac{2\Delta v}{l} + \Delta \theta_b + \frac{2\Delta v_a}{l} + \Delta \theta_a \right) \left( \frac{x}{l} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots [A-5 \cdot a, b, c]$$

また、部材要素内の断面力増分を

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= \frac{U_{f,1}}{l^2} = k_{44} = -k_{14} \\ k_{12} &= -\frac{6U_{f,2}}{l^3} + \frac{12U_{f,3}}{l^4} + \frac{6U_{d,12}}{l^3} - \frac{6U_{d,13}}{l^4} = -k_{24} = k_{45} = -k_{15} \\ k_{13} &= -\frac{4U_{f,2}}{l^2} + \frac{6U_{f,3}}{l^3} + \frac{2U_{d,12}}{l^2} - \frac{3U_{d,13}}{l^3} = -k_{46} \\ k_{16} &= -\frac{2U_{f,2}}{l^2} + \frac{6U_{f,3}}{l^3} + \frac{2U_{d,12}}{l^2} - \frac{3U_{d,13}}{l^3} = -k_{46} \\ k_{22} &= \frac{6N_0}{5l} + \frac{36U_{f,4}}{l^4} - \frac{144U_{f,5}}{l^5} + \frac{144U_{f,6}}{l^6} + \frac{36U_{d,23}}{l^4} - \frac{72U_{d,24}}{l^5} + \frac{36U_{d,25}}{l^6} - \frac{72U_{d,32}}{l^4} \\ &\quad + \frac{216U_{d,33}}{l^5} - \frac{144U_{d,34}}{l^6} = -k_{25} = k_{55} \\ k_{23} &= \frac{N_0}{10} + \frac{24U_{f,31}}{l^3} - \frac{84U_{f,5}}{l^4} + \frac{72U_{f,6}}{l^5} - \frac{6U_{d,22}}{l^2} + \frac{30U_{d,23}}{l^3} - \frac{42U_{d,24}}{l^4} + \frac{18U_{d,25}}{l^5} \\ &\quad + \frac{6U_{d,31}}{l^2} - \frac{60U_{d,32}}{l^3} + \frac{126U_{d,33}}{l^4} - \frac{72U_{d,34}}{l^5} = -k_{35} \\ k_{26} &= \frac{N_0}{10} + \frac{12U_{f,4}}{l^3} - \frac{60U_{f,5}}{l^4} + \frac{72U_{f,6}}{l^5} + \frac{12U_{d,23}}{l^3} - \frac{30U_{d,24}}{l^4} + \frac{18U_{d,25}}{l^5} - \frac{24U_{d,32}}{l^3} \\ &\quad + \frac{90U_{d,33}}{l^4} - \frac{72U_{d,34}}{l^5} = -k_{56} \\ k_{33} &= \frac{2N_0l}{15} + \frac{16U_{f,4}}{l^2} - \frac{48U_{f,5}}{l^3} + \frac{36U_{f,6}}{l^4} + U_{d,21} - \frac{8U_{d,22}}{l} + \frac{22U_{d,23}}{l^2} - \frac{24U_{d,24}}{l^3} \\ &\quad + \frac{9U_{d,25}}{l^4} + \frac{8U_{d,31}}{l} - \frac{44U_{d,32}}{l^2} + \frac{72U_{d,33}}{l^3} - \frac{36U_{d,24}}{l^4} \\ k_{36} &= -\frac{N_0l}{30} + \frac{8U_{f,4}}{l^2} - \frac{36U_{f,5}}{l^3} + \frac{36U_{f,6}}{l^4} - \frac{2U_{d,22}}{l} + \frac{11U_{d,23}}{l^2} - \frac{18U_{d,24}}{l^3} + \frac{9U_{d,25}}{l^4} \\ &\quad + \frac{2U_{d,31}}{l} - \frac{22U_{d,32}}{l^2} + \frac{54U_{d,33}}{l^3} - \frac{36U_{d,34}}{l^4} \\ k_{66} &= \frac{2N_0l}{15} + \frac{4U_{f,4}}{l^2} - \frac{24U_{f,5}}{l^3} + \frac{36U_{f,6}}{l^4} + \frac{4U_{d,23}}{l^2} - \frac{12U_{d,24}}{l^3} + \frac{9U_{d,25}}{l^4} - \frac{[8U_{d,32}]}{l^2} \\ &\quad + \frac{36U_{d,33}}{l^3} - \frac{36U_{d,34}}{l^4} \end{aligned} \right\} \dots [A-9 \cdot a \sim j]$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta N &= \frac{\Delta N_a + \Delta N_b}{2}, \Delta S = \Delta S_a = \Delta S_b = \frac{\Delta M_a - \Delta M_b}{l} \\ \Delta M &= \Delta M_a + (\Delta M_b - \Delta M_a) \frac{x}{l} \end{aligned} \right\} \dots [A-6 \cdot a, b, c]$$

とする。式[A-1], [A-4], [A-5] および [A-6] を用いて、部材要素に貯えられるポテンシャルエネルギー増分  $\Delta \pi$  を求めると結局、

$$\left. \begin{aligned} \Delta \pi &= \frac{1}{2} \{ \Delta d \}^T [k] \{ \Delta d \} + \{ \Delta d \}^T \{ r_0 \} \\ &\quad - \{ \Delta d \}^T \{ f_0 + \Delta f \} \end{aligned} \right\} \dots [A-7]$$

となる。ここに  $\{f_0\}$  は先行状態の荷重ベクトルを示す。式 [A-7] にポテンシャルエネルギー停留の原理  $\partial(\Delta \pi) = 0$  を適用すれば、接線剛性方程式を求めることができる<sup>(15), (16)</sup>。すなわち

$$\{ \Delta f \} + \{ f_0 \} - \{ r_0 \} = [k] \{ \Delta d \} \dots [A-8]$$

式 [A-8] 中の接線剛性係数の零でない要素を次に示す。[k] は対称マトリックスであるから対角線要素を境として、上部の三角形部分のみ示す。

ここに、

$$\begin{aligned} U_{f,1} &= \int_0^l A_r dx, \quad U_{f,2} = \int_0^l W_r dx, \quad U_{f,3} = \int_0^l W_r x dx \\ U_{f,4} &= \int_0^l I_r dx, \quad U_{f,5} = \int_0^l I_r x dx, \quad U_{f,6} = \int_0^l I_r x^2 dx \\ U_{d,11} &= \int_0^l \theta_0 A_r dx, \quad U_{d,12} = \int_0^l \theta_0 A_r x dx, \quad U_{d,13} = \int_0^l \theta_0 A_r x^2 dx, \quad U_{d,14} = \int_0^l \theta_0 A_r x^3 dx, \quad U_{d,15} = \int_0^l \theta_0 A_r x^4 dx \\ U_{d,21} &= \int_0^l \theta_0^2 A_r dx, \quad U_{d,22} = \int_0^l \theta_0^2 A_r x dx, \quad U_{d,23} = \int_0^l \theta_0^2 A_r x^2 dx, \quad U_{d,24} = \int_0^l \theta_0^2 A_r x^3 dx, \quad U_{d,25} = \int_0^l \theta_0^2 A_r x^4 dx \\ U_{d,31} &= \int_0^l \theta_0 W_r dx, \quad U_{d,32} = \int_0^l \theta_0 W_r x dx, \quad U_{d,33} = \int_0^l \theta_0 W_r x^2 dx, \quad U_{d,34} = \int_0^l \theta_0 W_r x^3 dx, \quad U_{d,35} = \int_0^l \theta_0 W_r x^4 dx \end{aligned}$$

を表わす。積分は、本計算例の場合、部材要素さをにら  
4等分して数値積分を行い算定した。また、被積分項の  
中の  $A_r, W_r, I_r$  は

$$A_r = \int_A E_1 dA, \quad W_r = \int_A E_1 y dA, \quad I_r = \int_A E_1 y^2 dA$$

を表わす。本計算例では、断面を 40 分割して数値積分  
により算定した。また、 $\theta_0$  は先行状態でのたわみ角を  
示す。式 [A-7] の右辺第二項は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{ad\}^t \{r_0\} &= \int_0^l \int_A \sigma_0 \left( \frac{d_s u}{dx} - \frac{d^2 s v}{dx^2} y \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_s v}{dx} \frac{dv_0}{dx} \right) dx dA \quad \dots \dots \dots [A-10] \end{aligned}$$

式 [A-10] に式 [A-4] および [A-5] を代入してまとめる  
と、結局、以下に示す内力としての断面力に対応する相当外力成分  $\{r_0\}$  を得ることができる。

$$\{r_0\} = \int_0^l [C] \{N_0\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \theta_0 \\ 2x\theta_0 \\ 3x^2\theta_0 \end{pmatrix} + M_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6x \end{pmatrix} dx \quad \dots \dots \dots [A-11]$$

ここに  $[C]$  は次式で与えられる  $6 \times 6$  の正方形行列である。零でない要素のみ示すと、

$$\begin{aligned} C_{11} &= 1, \quad C_{21} = -1/l, \quad C_{24} = 1/l, \quad C_{32} = 1, \\ C_{43} &= 1, \quad C_{52} = -3/l^2, \quad C_{53} = -2/l, \quad C_{55} = 3/l^2, \\ C_{56} &= -1/l, \quad C_{62} = 2/l^3, \quad C_{63} = 1/l^2, \quad C_{65} = -2/l^3, \\ C_{66} &= 1/l^2 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots [A-12]$$

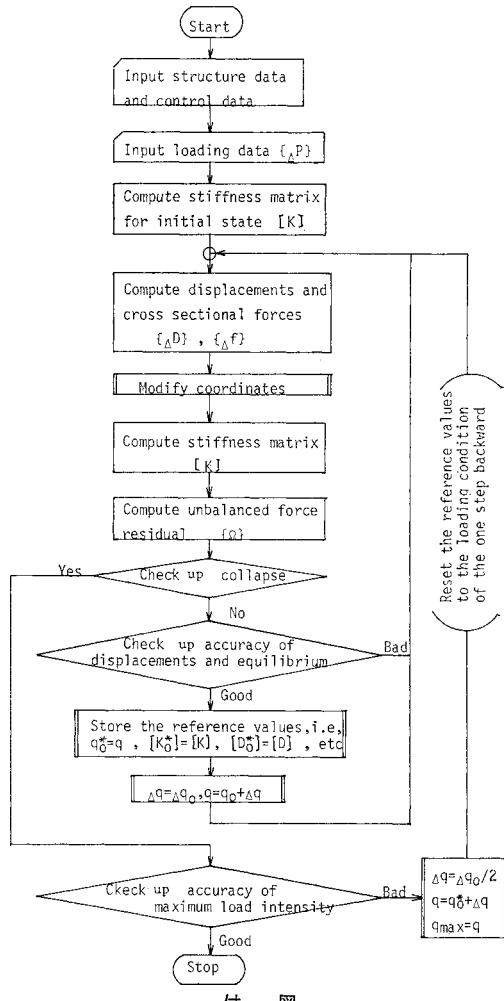
となる。

付表-1 式 [A-2]の係数

	弾性域	塑性域
$E_1$	$E$	$E(1-E\sigma_0^2/3G)$
$E_2$	0	$-2E\sigma_0 r_0/C$
$G_1$	$G$	$-E\sigma_0 r_0/C$
$G_2$	0	$2G(1-3r_0^2/C)$
$C$	$\sigma_0^2(E/3G-1)+\sigma_Y^2$	
備考	降伏の判定は Mises の条件式 <sup>(19)</sup> による	

#### 【付録-B】

計算過程を示すブロックフローチャートを付図に示す。



付 図

#### 参考文献

- 1) 山崎徳也・石川信隆：円弧アーチの弾塑性解析、土木学会論文報告集、No. 158, pp. 1~16, 1968 年 10 月
- 2) 前田幸雄・藤本一男：2ヒンジアーチの塑性崩壊荷重の算定について、土木学会論文報告集、No. 174, pp. 25~

- 40, 1970 年 2 月
- 3) Harries, H. : Traglasten stählerner Zweigelenkträger mit ausgebreiteten Frießzonen, Der Stahlbau, Heft 6, pp. 170~177 und Heft 8, pp. 248~252, 1970.
  - 4) Kuranishi, S. and Le-Wu Lu : Load carrying capacity of two hinged steel arches, Proc. of JSCE, No. 204, pp. 129~140, Aug., 1972.
  - 5) Kuranishi, S. : Allowable stress for two-hinged arch, Proc. of JSCE, No. 213, pp. 71~76, May, 1973.
  - 6) 新家 徹・頭井 洋・波田凱夫：アーチの面内非弾性座屈および終局耐荷力の解析，土木学会論文報告集，No. 244, pp. 57~70, 1975 年 12 月
  - 7) Zdenek, B. and Mabjond, N. : Large-deflection spatial buckling of thin-walled beams and frames, Proc. of ASCE, Vol. 99, No. EM 6, pp. 1259~1281, Dec., 1973.
  - 8) 前田幸雄・林 正：立体骨組構造物の有限変位解析，土木学会論文報告集，No. 253, pp. 13~28, 1976 年 9 月
  - 9) Sakimoto, T. and Komatsu, S. : Ultimate load carrying capacity of steel arches with initial imperfection, Preri. Report of the 2nd International Colloquium on Stability of Steel Structures, Liege April, 1977.
  - 10) 倉西 茂：水平横荷重を受けるアーチ橋について，土木学会論文報告集，No. 73, pp. 1~6, 1961 年 3 月
  - 11) Yabuki, T. and Kuranishi, S. : Out-of-plane behavior of circular arches under side loadings, Proc. of JSC E, No. 214, pp. 71~82, June, 1973.
  - 12) Kuranishi, S. and Yabuki, T. : In-plane strength of arch bridges subjected to vertical and lateral loads, Preri. Report of the 2nd International Colloquium on Stability of Steel Structures, Liege, April, 1977.
  - 13) Beer, H. und Schulz, G. : Die Teuglast des planmäßig mittig gedrückten Stabs mit Imperfektionen, Teil 2 und Teil 3, VDI-Z Bd. 111, Nr. 23 und Nr. 24, 1969.
  - 14) Sherman, D. : Residual Stress and Tubular Compression Members, Proc. of ASCE, Vol. 97, No. ST 3, 1971.
  - 15) Zienkiewicz, C., Valliappan, S. and King, P. : Elasto-plastic solution of engineering problem, initial-stress, finite element approach, Int. J. of Num. in Engg., No. 1, 1969.
  - 16) 藤田 譲・大坪英臣・湯原哲夫：構造物の塑性設計（その 10），造船学会論文集，No. 126, 1970.
  - 17) Zienkiewicz, C. : The Finite Element Method in Engineering Science, McGRAW-HILL, London, 1971.
  - 18) 後藤茂夫・羽根悟朗・田中達朗：接線剛性法による骨組構造物の大変形解析，土木学会論文報告集，No. 238, 1975
  - 19) 山田嘉昭：塑性力学，日刊工業新聞社，pp. 70~75, 1964 年
  - 20) 宇佐美勉：軸力, 曲げおよび一樣ねじりを受ける薄肉開断面の降伏後の挙動，土木学会論文報告集，No. 220, pp. 9~16, 1973 年 12 月
  - 21) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，昭和 48 年 2 月  
(1977.3.18・受付)