

【ノート】

最適化問題としての現在パターン法

PRESENT PATTERN METHOD AS AN OPTIMIZATION PROBLEM

佐佐木 綱*・近藤 勝直**

By Tsuna SASAKI and Katsunao KONDO

1. はじめに

周知のように分布交通量推計モデルというのは一般には、次の2つのサブモデルを連結したところのモデルを指している。

(1) ゾーン間交通量の分布パターンを特定化するモデル。

(2) (1) で得られたゾーン間交通量について、そのOD表の行和と列和がともに所与の周辺分布に一致するように分布パターンを修正するモデル。

そして、(1) としては重力型式のモデルが、(2) としては既存の現在パターン法(成長率法)などがよく用いられている。すなわち、将来交通量を X_{ij} 、(1) で得られた交通量を X_{ij}' とするとき、 $X_{ij}=f_{ij}X_{ij}'$ または $X_{ij}=X_{ij}'+f_{ij}$ なる調整項 f_{ij} を

$$\sum_j X_{ij}=U_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum_i X_{ij}=V_j \quad (j=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots(2)$$

なる $2N$ 本の制約条件下で定めようとするのが(2) である。このサブモデルである。ここで、 X_{ij}' を観測された現在OD表とみなせば、(2) のモデルは現在パターン法にほかならない。したがって、既存の現在パターン法はすべて(2) のサブモデルとして使用可能である。

ところで、既存の現在パターン法は大きく次の2つに分類することができる。1つは、デトロイト法、平均成長率法、フレーター法などの経験的なモデルであって、周辺分布に合致させるプロセスが逐次計算過程となるもの。もう1つは、塚原法第1法とよばれている方法であって、将来の交通量 X_{ij} を現在の交通量 X_{ij}' が示す分布パターンに最も類似させるように定める、というものである¹⁾。この後者の観点は、塚原法が提案された1962年以前においても、かつ1962年以降においても、

あまり考察がはらわれてこなかった。そこで、本稿では、まず塚原法をレビューすることから始め、この「最も類似する」という抽象的概念を確率論的に規定することを考えてみる。

2. 残差平方和最小化モデル(塚原法第1法)

現在パターン法とは、塚原の論文によれば¹⁾、(1) 将来OD表における行和、列和が所与の値に一致するという条件、ならびに(2) 将来OD表の元の構成が、現在OD表のそれに最も類似するという条件、のもとで将来OD表を構成する手法だということができる。すなわち、与えられた周辺分布を満足するODパターンは無数に存在するが、その中から現在OD表のパターンに最も類似するものを見つけることである。

塚原法第1法を、単位OD表 $P'=\{p_{ij}'\}$ ($\sum_{ij} p_{ij}'=1$) という概念を用いて再定式化してみよう。以下で用いる記号は、 X_{ij} : 将来OD交通量、 X_{ij}' : 現在OD交通量、 p_{ij}' : 現在単位OD表 ($p_{ij}'=X_{ij}'/\sum_{ij} X_{ij}'$)。そして、将来の周辺分布は $\sum_i U_i=\sum_j V_j=T$ である。氏の第1法は、この「最も類似する」という概念を誤差の立場から、“将来の単位OD表と現在の単位OD表との残差平方和を最小にすること”と規定する。したがって、問題は次のように定式化される。

$$\text{Minimize } \sum_{ij} (X_{ij}/T - p_{ij}')^2 \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{subject to } \sum_j X_{ij}=U_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \dots\dots(4)$$

$$\text{and } \sum_i X_{ij}=V_j \quad (j=1, 2, \dots, N) \dots\dots(5)$$

この問題は、式(4)、(5)に対するラグランジュ乗数をそれぞれ α_i ($i=1, 2, \dots, N$)、 β_j ($j=1, 2, \dots, N$) とすれば、ラグランジュの未定乗数法によって解かれる。ラグランジアンを L とすると

$$L = \sum_{ij} (X_{ij}/T - p_{ij}')^2 + \sum_i \alpha_i (U_i - \sum_j X_{ij}) + \sum_j \beta_j (V_j - \sum_i X_{ij}) \dots\dots\dots(6)$$

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部交通土木工学科

** 正会員 工博 福山大学助教授 工学部土木工学科

となるから、最小値は $\partial L/\partial X_{ij}=0, \partial L/\partial \alpha_i=0, \partial L/\partial \beta_j=0$ の時に得られる。

$$\partial L/\partial X_{ij}=(2 X_{ij}-2T p_{ij}')/T^2-\alpha_i-\beta_j=0$$

より、

$$X_{ij}=T p_{ij}'+\frac{T^2}{2}(\alpha_i+\beta_j)\dots\dots\dots(7)$$

を得る。ここで、 $\lambda_i=\alpha_i T^2/2, \mu_j=\beta_j T^2/2$ と置き直せば、式 (7) は次のように書かれる。

$$X_{ij}=T p_{ij}'+(\lambda_i+\mu_j)\dots\dots\dots(8)$$

これは将来交通量 X_{ij} が、将来の総生成量 T を現在の単位 OD 表で振り分けたものと、調整項 $(\lambda_i+\mu_j)$ との和の形式で表現されることを示している。ここに、 λ_i, μ_j は式 (4), (5) より定めるのである。すなわち、

$$\sum_j X_{ij}=T \cdot \sum_j p_{ij}'+N \cdot \lambda_i+\sum_j \mu_j=U_i,$$

$$\sum_i X_{ij}=T \cdot \sum_i p_{ij}'+\sum_i \lambda_i+N \cdot \mu_j=V_j$$

この $2N$ 本の連立方程式を行列表現してみると、

$$\begin{bmatrix} N & & & & & & & \\ & N & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & N & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & N & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & & N & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & & & & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1-T \cdot \sum_j p_{1j}' \\ \vdots \\ U_N-T \cdot \sum_j p_{Nj}' \\ V_1-T \cdot \sum_i p_{i1}' \\ \vdots \\ V_N-T \cdot \sum_i p_{iN}' \end{bmatrix} \dots\dots\dots(9)$$

となっており、明らかにこの係数行列の列ベクトルは 1 次独立ではない。したがって、式 (9) からは (λ_i, μ_j) の一意的な値を決定することができない。しかし、 $\lambda_i+\mu_j$ という和の値は一意的である。それは次のようにして証明できる。いま、

$$\eta_{ij}=\lambda_i+\mu_j \dots\dots\dots(10)$$

と置くとき、このようにして定義される η_{ij} が一意的な値を持つことを示せばよい。まず、われわれは式 (9) において独立な $(2N-1)$ 本の方程式を持っている。他方、式(10)より次のような $(N-1)^2$ 本の方程式を作ることができる。

$$\begin{aligned} \eta_{11}-\eta_{12} &= \eta_{21}-\eta_{22}=\dots = \eta_{N1}-\eta_{N2}(\equiv \mu_1-\mu_2) \\ \eta_{12}-\eta_{13} &= \eta_{22}-\eta_{23}=\dots = \eta_{N2}-\eta_{N3}(\equiv \mu_2-\mu_3) \\ &\dots\dots\dots \\ \eta_{1,N-1}-\eta_{1N} &= \eta_{2,N-1}-\eta_{2N}=\dots \\ &= \eta_{N,N-1}-\eta_{NN}(\equiv \mu_{N-1}-\mu_N) \end{aligned}$$

したがって、 $(2N-1) + (N-1)^2 = N^2$

なる個数の独立な方程式が存在し、これは未知数の数 $N^2(\eta_{ij}: i, j=1, 2, \dots, N)$ に一致する (Q.E.D.)。実際、われわれは解、式 (8) を $2N$ 本の制約条件式 (4), (5) に代入することにより、 $\lambda_i+\mu_j$ の値を以下のように陽の形で得ることができる。

$$\lambda_i+\mu_j = \frac{1}{N}\{(U_i+V_j)-T(\sum_k p_{ik}'+\sum_k p_{kj}')\} \dots\dots\dots(11)$$

すなわち、 $\lambda_i+\mu_j$ の値は (i, j) というペアに固有な一意的な値となっている。

3. χ^2 最小化モデル

塚原法第 1 法では、「最も類似する」という概念を残差平方和最小という規定でもって表現したが、ここでは同じく誤差論の立場から、くい違いの測度としての χ^2 (カイ 2 乗) を最小化することを考えてみよう。

この問題は、現在の単位 OD 表 p_{ij}' を理論分布とみなすことにより次のように定式化される。

$$\begin{aligned} \text{Minimize } \chi^2 &= \sum_{ij} \frac{(T p_{ij}' - X_{ij})^2}{T p_{ij}'} \} \dots\dots\dots(12) \\ \text{subject to (1) and (2)} \end{aligned}$$

目的関数の χ^2 は、

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{ij} \left(T p_{ij}' - 2 X_{ij} + \frac{X_{ij}^2}{T p_{ij}'} \right) \\ &= T - 2T + \frac{1}{T} \sum_{ij} \frac{X_{ij}^2}{p_{ij}'} \end{aligned}$$

と変形されるので、結局のところ $\sum_{ij} X_{ij}^2/p_{ij}'$ を最小化することと同値である。この問題もラグランジュの未定乗数法によって解くことができる。

$$\begin{aligned} L &= \sum_{ij} X_{ij}^2/p_{ij}' + \sum_i \alpha_i (\sum_j X_{ij} - U_i) \\ &\quad + \sum_j \beta_j (\sum_i X_{ij} - V_j) \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

と置けば、 χ^2 は $\partial L/\partial X_{ij}=0, \partial L/\partial \alpha_i=0, \partial L/\partial \beta_j=0$ の時に最小化される。

$$\partial L/\partial X_{ij} = \frac{2 X_{ij}}{p_{ij}'} - \alpha_i - \beta_j = 0$$

より、

$$X_{ij} = \frac{\alpha_i + \beta_j}{2} p_{ij}' \dots\dots\dots(14)$$

を得る。ここで、 $p_{ij}' = X_{ij}'/T'$ ($T' = \sum_{ij} X_{ij}'$) を代入すると、

$$X_{ij} = \frac{\alpha_i + \beta_j}{2 T'} X_{ij}'$$

さらに、

$$\lambda_i = \alpha_i/2 T', \mu_j = \beta_j/2 T'$$

と置き直すと、

$$X_{ij} = (\lambda_i + \mu_j) X_{ij}' \dots\dots\dots(15)$$

という簡潔な構造式を得ることができる。この式 (15) は近藤が先に提案した Balancing Factor 法 (ii)^{2), 3)} にほかならない。したがって、BF 法 (ii) の理論的根拠は χ^2 最小化問題に求めることができることとなった。また、河上の提案する連立方程式モデル⁴⁾ も理論的背景が明確ではなかったのであるが、本稿の考察によって、

連立方程式モデルは重力モデルを λ^2 最小化法で修正する構造と等価であることが判明した。また、式 (15) における $\lambda_i + \mu_j (= \eta_{ij})$ の値は、前項で展開したとまったく同様の方法によって、一意的に決定できることを証明することができる。ただし、参考文献²⁾でも指摘したとおり $\lambda_i + \mu_j$ の非負解が確実に得られるという保証はない。

ところで、式 (14) に注目してみると、これは平均成長率法の第 1 近似式と同じ構造を有していることがわかる。したがって、平均成長率法は λ^2 最小化法にその理論的根拠を求めることができる。ただし、周辺分布に合致させるための収束計算プロセスが異なっているために、平均成長率法の収束解と λ^2 最小化法の解とは必ずしも一致しない。平均成長率法では、式 (14) の第 1 近似式において、 (λ_i, μ_j) の初期値として周辺分布の成長率 (F_i, G_j) を採用し、以下の収束計算では乗積の形で修正が継続してゆくために、必ず非負解を得るしくみになっているのである。すなわち、 n を最終収束ステップとして、かつ 1/2 は本質的ではないから省略して計算過程を書きおろすと、平均成長率法の解は、

$$\begin{aligned} X_{ij} &= X_{ij}' (F_i^{(0)} + G_j^{(0)}) (F_i^{(1)} + G_j^{(1)}) \\ &\quad \dots (F_i^{(m)} + G_j^{(m)}) \\ &= X_{ij}' \prod_{k=0}^n (F_i^{(k)} + G_j^{(k)}) \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

と表わすことができる。ここに、 $F_i^{(0)} = F_i, G_j^{(0)} = G_j$ で $F_i^{(k)}, G_j^{(k)}$ ($k \neq 0$) は周辺分布条件式を満足するように修正された成長率である。

4. 同時確率最大化モデル

先の「最も類似する」という抽象的な概念を確率論的に規定してみよう。すれば、“将来 OD 表の (i, j) 要素の先験確率は、現在の単位 OD 表 $P' = \{p_{ij}'\}$ に等しい”と表現でき、このとき各 (i, j) 要素に X_{ij} ずつ割り当てる場合の数に先験確率を考慮した同時確率は、

$$S = \frac{T!}{\prod_{ij} X_{ij}!} \prod_{ij} (p_{ij}')^{X_{ij}} \dots \dots \dots (17)$$

と記せる。このとき、確率的にみて最も生起しやすい (most probable) パターンは、式 (17) で示された同時確率 S を最大化する X_{ij} の組であるから、われわれの問題は以下のように定式化される。

$$\left. \begin{aligned} &\text{Maximize } S \\ &\text{subject to (1) and (2)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

S を最大にすることと、 $\ln S$ を最大にすることとは同値であるから、この問題はラグランジアンを次のように定義することによって解かれる。

$$L = \ln S + \sum_i \alpha_i (U_i - \sum_j X_{ij}) + \sum_j \beta_j (V_j - \sum_i X_{ij})$$

$\partial L / \partial X_{ij} = 0$ より次式を得る。

$$X_{ij} = p_{ij}' e^{\alpha_i + \beta_j} \dots \dots \dots (19)$$

ここで、 $\alpha_i' = e^{\alpha_i}, \beta_j' = e^{\beta_j}$ とおけば、

$$X_{ij} = p_{ij}' \alpha_i' \beta_j'$$

さらに、 $p_{ij}' = X_{ij}' / T'$ を代入し、 $\lambda_i = \alpha_i' / T', \mu_j = \beta_j'$ と置き直せば、われわれの解は次のように簡潔に記される。

$$X_{ij} = X_{ij}' \lambda_i \mu_j \dots \dots \dots (20)$$

この λ_i, μ_j は式 (1), (2) より決定される。すなわち、

$$\sum_j X_{ij} = \lambda_i \sum_j X_{ij}' \mu_j = U_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \dots (21)$$

$$\sum_i X_{ij} = \mu_j \sum_i X_{ij}' \lambda_i = V_j \quad (j=1, 2, \dots, N) \dots (22)$$

なる $2N$ 本の非線形連立方程式より求めるのである。しかし、実はこの $2N$ 本の方程式は 1 次従属であるため、 (λ_i, μ_j) の一意的な値を得ることはできない。けれども積 $\lambda_i \mu_j$ の値は (i, j) に固有な値となっており、また、われわれの目的にとってはそれさえ知れば十分である。いま、

$$\eta_{ij} = \lambda_i \mu_j \dots \dots \dots (23)$$

とおけば、未知数は N^2 個存在することになるから、それに応じて条件式も N^2 本必要となる。式 (21), (22) よりまず $2N-1$ 本を得る。また、式 (23) より以下のような $(N-1)^2$ 本の条件式を構成することができる (1 本の連立式から $N-1$ 本の独立な条件式を作ることができる)。

$$\left. \begin{aligned} \eta_{11} : \eta_{12} : \dots : \eta_{1N} &= \eta_{21} : \eta_{22} : \dots : \eta_{2N} \\ &= \eta_{31} : \eta_{32} : \dots : \eta_{3N} \\ &\dots \dots \dots \\ &= \eta_{N1} : \eta_{N2} : \dots : \eta_{NN} \end{aligned} \right\} N-1$$

$$(\equiv \mu_1 : \mu_2 : \dots : \mu_N)$$

$$\dots \dots \dots (24)$$

したがって、 $(2N-1) + (N-1)^2 = N^2$ となり、未知数の数と条件式の数は一一致する (Q.E.D.)³⁾。したがって、 λ_i, μ_j の値としては式 (21), (22) を満足する任意の一組の解を得れば十分である。実際には、ある初期値を与えて繰返し計算を行い、最初に収束した値 $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*), \mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_N^*)$ より $\eta_{ij} = \lambda_i^* \mu_j^*$ を計算すればよい。具体的には、両式 (21), (22) を次のように変形する。

$$\lambda_i = U_i / \sum_j X_{ij}' \mu_j \dots \dots \dots (25)$$

$$\mu_j = V_j / \sum_i X_{ij}' \lambda_i \dots \dots \dots (26)$$

そして初期値として $\lambda^{(0)} = 1, \mu^{(0)} = 1$ を与えて収束計算を行えばよい。

5. デトロイト法再考

ところで、この同時確率最大化法の解式 (20) の形式は

デトロイト法の形式にかなり類似している。

デトロイト法というのは、

$$X_{ij}^{(1)} = X_{ij}' F_i G_j / r \quad (r: \text{全域の成長率}) \dots (27)$$

によって将来交通量 X_{ij} の第1近似を求め、以下、

$$F_i^{(1)} = U_i / \sum_j X_{ij}^{(1)}, \quad G_j^{(1)} = V_j / \sum_i X_{ij}^{(1)} \dots (28)$$

で計算される場所の、修正された新しい成長率 $F_i^{(1)}$, $G_j^{(1)}$ がともに1に等しくなるまで収束計算が実行される。全域成長率 r は本質的には重要でないので省略して収束過程を書きおろすと、 m を最終収束ステップとして、

$$\begin{aligned} X_{ij} &= X_{ij}' (F_i G_j) (F_i^{(1)} G_j^{(1)}) (F_i^{(2)} G_j^{(2)}) \\ &\dots (F_i^{(m)} G_j^{(m)}) \\ &= X_{ij}' \prod_{k=0}^m (F_i^{(k)} G_j^{(k)}) \\ &= X_{ij}' \prod_k (F_i^{(k)}) \cdot \prod_k (G_j^{(k)}) \dots (29) \end{aligned}$$

ただし、 $F_i^{(0)} = F_i$, $G_j^{(0)} = G_j$

と記せる。ここで、

$$\lambda_i = \prod_k (F_i^{(k)}), \quad \mu_j = \prod_k (G_j^{(k)})$$

と置けば、式(29)は、

$$X_{ij} = X_{ij}' \lambda_i \mu_j$$

となり、先の式(20)の形式に一致する。そこで、 r を省略して再度式(28)を眺めてみると、

$$F_i^{(1)} = U_i / \sum_j X_{ij}^{(1)} = U_i / \sum_j X_{ij}' F_i^{(0)} G_j^{(0)}$$

$$G_j^{(1)} = V_j / \sum_i X_{ij}^{(1)} = V_j / \sum_i X_{ij}' F_i^{(0)} G_j^{(0)}$$

となるが、これらはそれぞれ、

$$F_i^{(1)} F_i^{(0)} = U_i / \sum_j X_{ij}' G_j^{(0)} \dots (30)$$

$$G_j^{(1)} G_j^{(0)} = V_j / \sum_i X_{ij}' F_i^{(0)} \dots (31)$$

と変形される。デトロイト法の収束計算の意味は $F_i^{(1)}$, $G_j^{(1)}$ がともに1になることであるから、この両式を先の式(25), (26) すなわち、

$$\lambda_i = U_i / \sum_j X_{ij}' \mu_j \dots (32)$$

$$\mu_j = V_j / \sum_i X_{ij}' \lambda_i \dots (33)$$

と対応させてみると、デトロイト法の収束プロセスは、式(32), (33)において初期値として $\lambda_i^{(0)} = F_i^{(0)}$, $\mu_j^{(0)} = G_j^{(0)}$ を与えた場合にほかならないことがわかる。したがって、デトロイト法の解と同時確率最大化法の解は理論的にはまったく一致するわけである。同時確率最大化法は参考文献²⁾で紹介した Balancing Factor (i) 法の別名であるが、参考文献ではこの BF 法 (i) がいわゆるエントロピー法的現在パターン法としての性格を有することを指摘しておいた。したがって、たとえば、重力モデルをエントロピー法⁴⁾で修正することと、重力モデルをデトロイト法で修正することとは、まったく等価

なのであるが、その修正プロセスの技法がやや異なるために異なった収束判定基準が採用されてきた。それゆえ、精度の比較や収束回数比較などにおいては必ずしも一致した結果が得られないことが多かった。しかし、筆者はこの収束判定基準を非常に厳しく設定した場合、同一の解を得ることを確めた。すなわち、デトロイト法の場合、判定基準は次のように絶対誤差に対して適用される。

$$|F_i^{(1)} - 1.0| < \epsilon_D, \quad |G_j^{(1)} - 1.0| < \epsilon_D \dots (34)$$

他方、同時確率最大化法では、

$$\frac{|\lambda_i^{(1)} - \lambda_i^{(2)}|}{\lambda_i^{(1)}} < \epsilon_B, \quad \frac{|\mu_j^{(1)} - \mu_j^{(2)}|}{\mu_j^{(1)}} < \epsilon_B \dots (35)$$

で示されるように相対誤差に対して判定基準が適用されるという相違点がある。筆者の計算では $\epsilon_D = 0.0001$, $\epsilon_B = 0.001$ 程度で両法はまったく同じ OD 表に到達している。ちなみに、収束回数は判定基準に応じて以下のようにであった(京都市自動車 OD 表: 昭和43年より46年を推定した場合)。ただし、同時確率最大化法では初期値として $\lambda_i^{(0)} = F_i$, $\mu_j^{(0)} = G_j$ を用いている。

同時確率最大化法の結果：

ϵ_B	0.03	0.01	0.005	0.003	0.001
収束回数	5	5	5	5	6

デトロイト法の結果：

ϵ_D	0.003	0.001	0.0005	0.0003	0.0001
収束回数	6	8	9	9	11

デトロイト法では上述したように絶対誤差に対して収束判定基準が適用されるため、収束判定基準 ϵ_D をかなり小さい値にとる必要のあることから収束回数も同時確率最大化法に比べてやや多くなっている。両法は等価なのであるから今後は同時確率最大化法で用いたように相対誤差でもって収束を判定する方が好ましい。

参考文献

- 1) 塚原重利: Matrix Distribution についての一考察, 「運輸と経済」第22巻, 第2号, 1962.
- 2) 近藤勝直: 分布交通量推計モデル再考, 「交通工学」Vol. 12, No. 3, 1977.
- 3) 同: トリップチェーン手法を用いた都市交通需要推計プロセス, 京大大学学位論文, 1977.
- 4) 河上省吾: 通勤・通学交通量分布の予測方法に関する研究, 京大大学学位論文, 1969.
- 5) Sasaki, Takemoto & Kondo: Some Aspects of Entropy-Maximizing Distribution Model (unpublished), 1977.
- 6) Sasaki, T.: Probabilistic Models for Trip Distribution, Proc. of the 4th Intl. Sympo. on the Theory of Traffic Flow, Karlsruhe, Germany, 1968.