土木学会論文報告集
第272号・1978年4月

【ノート】

修正重力モデルの確率論的意義とエントロピーモデル

STATISTICAL ASPECTS OF GRAVITY MODELS AND ENTROPY MODELS

河　上　省　吾*
By Shogo KAWAKAMI

1. はじめに

地区間交通量の予測モデルとして，数多くのモデルが開発されており，これらは，成長率法，重力モデル，確率モデルなどに大別される．各モデルは，それぞれ特色をもっているので，地区間交通量の予測に際しては，対象とする地域，交通目的および予測時点などを考慮して最適なモデルを採用する必要がある．

従来のモデルのうち成長率法は，現状の交通パターンを各ゾーンの交通成長率で修正するものである．したがって，交通パターンの変化が小さい場合に，きわめてよい予測値を与えるが，交通パターン変化が大きい場合に使用することはできない．一方，重力モデルおよび確率モデルは地区間交通の発生機構をモデルに組み込み，交通パターンの変化にもある程度対応できるような構造になっているといえよう．しかし，いずれのモデルにおいても，種々の要因の影響を受ける社会現象である交通量分布を単純な数学モデルで表現しているため，その予測精度はあまりよくない．各ゾーン間の交通量は，それぞれのゾーン間の社会・経済的な結合度の強弱によって変わるため，ゾーン間の交通量をそのゾーンの発生，集中量と，ゾーン間交通抵抗(距離，所要時間)のみで説明することには限界がある[1]．このために，修正重力モデルにおいては，各ゾーンペアごとに，社会，経済的な結合度の強弱を表わす地区間調整係数を導入している．この調整係数の的確な予測ができれば，修正重力モデルの予測精度は他のモデルより相当よくなると考えられる．そこで著者は，著者の提案している修正重力モデル[2]における地区間調整係数の性質を実績データを用いて検討し，その検討結果に基づいて，調整係数の予測方法の開発を行った[3]．

本研究では，地区間交通量の代表的な予測モデルである修正重力モデルの確率論的意義を検討し，このモデルが佐佐木の開発したエントロピーモデル[4]と基本的には同じものであることを示す．

なお，本研究は参考文献 5) でその一部をすでに公表したものである．

* 正会員　工博　名古屋大学助教授　工学部土木工学科

2. 重力モデル

重力モデルは次式 (1) によって示される単純重力モデルとこれを改良したと考えられる修正重力モデルとに分類される．これらのモデルについて述べる．

(1) 単純重力モデル

わが国でよく用いられる単純重力モデルの一般形は，次式 (1) によって表わされる．

$$T_{ij}=kG_i{}^{\alpha}A_j{}^{\beta}t_{ij}{}^{-\gamma} \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに，T_{ij}=ゾーン i, j 間の OD 交通量，α, β, k, γ=定数，G_i=ゾーン i の発生交通量，A_j=ゾーン j の集中交通量，t_{ij}=ゾーン i, j 間の交通抵抗（所要時間あるいは所要経費など)，n=ゾーン数．

このモデルにおいて，定数 k, α, β, γ の値は，実績 OD 交通量を用いて最小自乗法により決定する．なお，$\alpha=\beta$, $\alpha=\beta=0.5$ または 1.0 とする場合もある．

式 (1) で予測される OD 交通量 T_{ij} はあらかじめ与えられている発生，集中交通量に一致しなければならない．すなわち，次式 (2),(3) を満足する必要がある．

$$G_i=\sum_j T_{ij} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$A_j=\sum_i T_{ij} \quad \cdots\cdots(3)$$

しかし，一般に T_{ij} は式 (2),(3) を満足しないので，式 (1) で求めた T_{ij} を基礎にして，成長率法によって式 (2),(3) を満足させる．

(2) 修正重力モデル

(1) のモデルを修正したもので，次のようなものが開発されている．

a) Voorhees 型重力モデル

このモデルは T_{ij} が次式で与えられると考える．

$$T_{ij}=G_i\cdot\frac{A_j f(t_{ij})}{\sum_{k=1}^{n}A_k f(t_{ik})} \quad\cdots\cdots(4)$$

ここに，$f(t_{ij})$ としては，$t_{ij}^{-\gamma}$, $\exp(-\beta t_{ij})$ がよく用いられている．

b) 米国道路局の重力モデル

a) のモデルを拡張したもので，次式で表わされる．

$$T_{ij}=G_i\cdot\frac{A_j f(t_{ij})\cdot K_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}A_k f(t_{ik})\cdot K_{ik}} \quad\cdots\cdots(5)$$

ここに，K_{ij} はゾーン i から j へ向かうトリップの調整係数で，次のようにして求める．まず，$K_{ij}=1$ とおいて上式で交通量を求め，これで実績交通量 $\overline{T}_{ij}$ を割ったものを r_{ij} とし，次式によって K_{ij} を計算する．

$$K_{ij}=r_{ij}\left[\frac{1-x_i}{1-x_i r_{ij}}\right]$$

ここに，$x_i=\overline{T}_{ij}/G_i$

a), **b)** のモデルにおいては，(**1**) のモデルと異なり，式 (2) を満足しているが，与えられた集中量 A_j^0 とモデルによって計算した集中量 $\sum_i T_{ij}$ とが一致しないので，次式によって $A_j^{(2)}$ を求め，これを $A_j^{(1)}$ の代わりに用いて T_{ij} を

$$A_j^{(2)}=A_j^{(1)}\left[\frac{A_j^0}{\sum_{i=1}^{n}T_{ij}}\right. \quad\cdots\cdots(6)$$

ここに，$A_j^{(1)}=A_j^0$

あらたに計算する．この操作を $\sum_i T_{ij}'$ が A_j^0 に十分近似するまでくり返し，最終的に得られた値を予測交通量とする．

c) 著者の提案した修正重力モデル

このモデルは下記のような構造をもっている．

従来の研究によれば，単純重力モデル式 (1) においては，$\alpha=\beta=0.5$ のときの予測精度がよいことが知られている[7]．この理由の1つは，G_i および A_j がそれぞれ θ 倍になったとき，ゾーン間交通量 T_{ij} もほぼ θ 倍になると考えられるが，次式 (7) はこの条件を満たしていることにあると考えられる．

$$T_{ij}=k\sqrt{G_iA_j}\,t_{ij}^{-\gamma} \quad\cdots\cdots(7)$$

しかし，式 (7) を実績値に適用して k, γ を決定しても，この式で与えられる交通量 T_{ij} は，一般に実績値 $\overline{T}_{ij}$ に一致しないので，式 (7) の T_{ij} を $\overline{T}_{ij}$ に一致させるためには，ゾーン i, j に対して次式 (8) で定義される調整係数 K_{ij} を必要とする．ここでは，この調整係数 K_{ij} を導入し，

$$K_{ij}=\overline{T}_{ij}/T_{ij} \quad\cdots\cdots(8)$$

ゾーン i から j への交通量は次式 (9) で与えられると考える．

$$T_{ij}=kK_{ij}\sqrt{G_iA_j}\,t_{ij}^{-\gamma} \quad\cdots\cdots(9)$$

なお，T_{ij} は式 (2), (3) を満足しなければならないので，式 (9) を式 (2) に代入して，k を求め，これを式 (9) に代入すると次式 (10) を得る．

$$T_{ij}=G_i\cdot\frac{K_{ij}\sqrt{A_j}\,t_{ij}^{-\gamma}}{\sum_{k=1}^{n}K_{ik}\sqrt{A_k}\,t_{ik}^{-\gamma}} \quad\cdots\cdots(10)$$

これが，提案する修正重力モデルである．そして，式 (3) を満足させるためには，次式 (11)

$$A_j^{(2)}=A_j^{(1)}\left[A_j^0\Big/\sum_{i=1}^{n}T_{ij}\right]^2 \quad\cdots\cdots(11)$$

ここに，$A_j^{(1)}=A_j^0$

を用いて T_{ij} の i に関する和が与えられた集中量 A_j^0 にほぼ一致するまで，$A_j^{(1)}$ を修正するくり返し計算法を用いる．

式 (9) の T_{ij} の基本式を

$$T_{ij}=kK_{ij}G_i^{\alpha}A^{\beta}{}_j t_{ij}^{-\gamma} \quad\cdots\cdots(12)$$

と仮定した場合，式 (10) の修正重力モデルは次式 (13) のようになり，$A_j^{(1)}$ の修正式は式 (14) で与えられる．

$$T_{ij}=G_j\cdot\frac{K_{ij}A_j^{\beta}t_{ij}^{-\gamma}}{\sum_{k=1}^{n}K_{ik}A_k^{\beta}t_{ik}^{-\gamma}} \quad\cdots\cdots(13)$$

$$A_j^{(2)}=A_j^{(1)}\left[A_j^0\Big/\sum_{i=1}^{n}T_{ij}\right]^{1/\beta} \quad\cdots\cdots(14)$$

なお，式 (11), (14) は，修正計算の収束性からこの形を提案するものである．

また，式 (13) で $K_{ij}=1$, $\beta=1$ とすれば Voorhees 型重力モデルとなり，$\beta=1$ とのみ仮定すれば K_{ij} の求め方は異なるが米国道路局の重力モデルと同じ型のモデルになる．

この修正重力モデル式 (10) の地域間調整係数 K_{ij} の予測方法の提案とその有用性は参考文献 3) に示している．

3. 重力モデルの確率論的意義

ここでは，修正重力モデルの確率論的意義について検討する．

一般的な修正重力モデルを考えるために，式 (12) を修正重力モデルの基本式と考える．いま，$N=\sum_i G_i=\sum_j A_j$ とおくと，式 (12) で T_{ij} が与えられる重力モデルにおいては，ゾーン i, j 間のトリップが生起する確率を $kK_{ij}G_i^{\alpha}A_j^{\beta}t_{ij}^{-\gamma}/N$ と仮定していると考えることができる．このとき，ゾーン i, j 間に交通量 T_{ij} の生起する同時確率 P は次式 (15)

$$P=\frac{N!}{\prod_{i,j}T_{ij}!}\prod_{ij}\left[\frac{kK_{ij}G_i^{\alpha}A_j^{\beta}t_{ij}^{-\gamma}}{N}\right]^{T_{ij}} \quad\cdots\cdots(15)$$

で与えられる．したがって，P を最大にする OD パターン T_{ij} は，数理統計学における最尤推定量で，確率

的に最も起こりやすい OD パターンを与えていると考えられる．なお，前述のように T_{ij} は式 (2), (3) を満足しなければならない．確率的に最も起こりやすい OD パターンを求めるためには，条件式 (2), (3) の下で max P を与える T_{ij} を求めればよい．そこで，式 (15) の対数をとり，スターリングの公式を用いると式 (16) を得る．

$$\log P=-\sum_{ij}T_{ij}\log T_{ij}+\sum_{ij}T_{ij}\log K_{ij}-\gamma\sum_{ij}T_{ij}\log t_{ij}+\text{Constant}\quad\cdots\cdots(16)$$

ゆえに，条件式(2), (3) の下で式 (16) を最大にする T_{ij} を与える式を求めれば，これが T_{ij} の最尤推定値を与える式であるということができる．

いま，Lagrange 関数 F を下記のように定義する．

$$F=-\sum_{ij}T_{ij}\log T_{ij}+\sum_{ij}T_{ij}\log K_{ij}-\gamma\sum_{ij}T_{ij}\log t_{ij}-\sum_i\mu_i(G_i-\sum_j T_{ij})-\sum_j\lambda_j(A_j-\sum_i T_{ij})\quad\cdots\cdots(17)$$

式 (17) を T_{ij}, μ_i, λ_j で偏微分して 0 とおけば次式を得る．

$$\frac{\partial F}{\partial T_{ij}}=-\log T_{ij}-1+\log K_{ij}-\gamma\log t_{ij}+\mu_i+\lambda_j=0$$

$$\log T_{ij}=\log K_{ij}-\gamma\log t_{ij}+\mu_i+\lambda_j-1$$

$$\therefore\ T_{ij}=K_{ij}\exp(\mu_i+\lambda_j)\exp(-1-\gamma\log t_{ij})=K_{ij}\alpha_i\beta_j t_{ij}^{-\gamma}\quad\cdots\cdots(18)$$

ここに，$\alpha_i=\exp(\mu_i-1)$，$\beta_j=\exp\lambda_j$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_i}=G_i-\sum_j T_{ij}=0\quad\cdots\cdots(19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_j}=A_j-\sum_i T_{ij}=0\quad\cdots\cdots(20)$$

したがって，式 (18)～(20) を連立方程式として解けば同時生起確率最大の OD パターンを求めることができる．いま，式 (18) を式 (19) に代入すると，式 (21) を得る．

$$G_i=\sum_j K_{ij}\alpha_i\beta_j t_{ij}^{-\gamma}$$

$$\therefore\ \alpha_i=\frac{G_i}{\sum_j K_{ij}\beta_j t_{ij}^{-\gamma}}\quad\cdots\cdots(21)$$

式 (21) を式 (18) に代入すると，次式を得る．

$$T_{ij}=G_i\cdot\frac{K_{ij}\beta_j t_{ij}^{-\gamma}}{\sum_j K_{ij}\beta_j t_{ij}^{-\gamma}}\quad\cdots\cdots(22)$$

式 (22) は式 (19) を満足しているので，β_j を式 (20) を満足するように決めればよいことがわかる．

式(22)において，$\beta_j=\sqrt{A_j}$ とおいて，くり返し計算法，式 (11) を用いるのが著者の提案した修正重力モデルで，$\beta_j=A_j{}^{\beta}$ とおいて，式 (14) のくり返し計算法を用いて発生集中量の条件を満足する OD パターンを求めるのが，Voorhees 型重力モデルおよび米国道路局の重力モデルと同じ型であると考えることができる．

以上より，修正重力モデルは，いずれも，それぞれ仮定したトリップの発生確率のもとで，最も起こりやすい OD パターンを求めていることになると考えられる．

4．修正重力モデルとエントロピー法[5),8),9)]

次に，確率モデルの 1 つである佐佐木のエントロピーモデルと重力モデルの関係について検討する．エントロピーモデルは，ゾーン i, j 間のトリップの発生確率 p_{ij}' が式 (23) で，

$$p_{ij}'=\alpha u_i v_j t_{ij}^{-\gamma}\quad\cdots\cdots(23)$$

ここに，$u_i=G_i/N$, $v_j=A_j/N$, α, γ=定数，実績 OD 交通量を用いて最小自乗法によって定められる．

与えられると仮定し，条件式 (2), (3) のもとで式 (24) によって与えられる T_{ij} が生起する同時確率 P'

$$P'=\frac{N!}{\prod_{ij}T_{ij}!}\prod_{ij}(p_{ij}')^{T_{ij}}\quad\cdots\cdots(24)$$

を最大にする OD パターンを求めようとするものである．このモデルは，T_{ij} を求める段階で，トリップがゾーン i から j へ行く遷移確率 p_{ij} を用いる．すなわち，T_{ij} は，

$$T_{ij}=G_i p_{ij}\quad\cdots\cdots(25)$$

式 (25) で計算される．

このモデルにおいては，トリップの発生確率として式 (26) が用いられることもある．

$$p_{ij}'=\alpha u_i v_j\exp(-\gamma t_{ij})\quad\cdots\cdots(26)$$

したがって，エントロピーモデルのトリップの発生確率を与える式 (23) と，同時生起確率 P', 式 (24) と，修正重力モデルの誘導過程で定義したそれらを示す式 (15) とを比較すれば，式 (15) において $K_{ij}=1/N$, $\alpha=\beta=1$ とおいたものは，式 (23), (24) とまったく等しいことがわかる．

以上より，佐佐木のエントロピーモデルにおいて重力モデル型のトリップ発生確率を仮定する場合は，修正重力モデルと基本的には同じであるということができる．

一方，Wilson のエントロピーモデル[10)]では，トリップの発生確率はゾーンペアに無関係に一定であると考えており，モデルの誘導過程で用いる目的関数としてゾーン i, j 間に T_{ij} というトリップの発生する組合せの数 P'' を最大にすることを採用している．このモデルでは，式(2), (3) と式 (28) の条件のもとで，式 (27) の対数をとった値が，

$$P''=\frac{N!}{\prod_{ij}T_{ij}!}\quad\cdots\cdots(27)$$

$$\sum_{i,j}T_{ij}c_{ij}=C\quad\cdots\cdots(28)$$

ここに，c_{ij}=ゾーン i, j 間の交通費用，C=

総交通費用.

最大化される．式 (28) は総交通費用一定という制約条件を与えていることを意味している．そして，Wilson のモデルは次式で与えられている．

$$T_{ij}=O_iD_jG_iA_j\exp(-\beta c_{ij}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

ここに，O_i, D_j は調整係数で次式を満足しなければならない．

$$O_i=[\sum_j D_jA_j\exp(-\beta c_{ij})]^{-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

$$D_j=[\sum_i O_iG_i\exp(-\beta c_{ij})]^{-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

このモデルと式 (13) とを比較すると，式 (29) は式(13) で $K_{ij}=O_iD_j$, $\alpha=\beta=1$ とおき，$t_{ij}^{-\gamma}$ を $\exp(-\beta c_{ij})$ とおきかえたものと考えることができる．

修正重力モデルの誘導過程式 (15)～(22) と Wilson のモデルの誘導過程式(27)～(31)を比較すると，Wilson のモデルでは，式 (27) の目的関数 P'' において，トリップの発生確率をゾーンペアに無関係に一定であると仮定しているように見えるが，総交通費用一定という制約条件があるため，このモデルでは，ゾーン i, j 間のトリップの発生確率を式 (32) のように，

$$p_{ij}''=O_iD_jG_iA_j\exp(-\beta c_{ij})/N \cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

仮定していると見なすことができる．したがって，この Wilson のモデルは，佐佐木のエントロピーモデルにおいて，トリップの発生確率を式 (26) のように仮定した場合と基本的に同じであると考えることができる．

また，修正重力モデル式(13)，佐佐木のエントロピーモデル式 (23) では，トリップの発生確率がゾーンペアに無関係であるが，交通所要時間に関する次式 (33) のような制約条件がある場合の同時生起確率最大のODパターンを求めていると考えることができる．

$$\sum_{ij} T_{ij}\log t_{ij}=K \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

ここに，K=定数

5. 結　　論

本研究では，従来開発されている地区間交通量予測モデルのうち，比較的よく用いられている重力モデルをとりあげ，特に修正重力モデルを著者の開発したものを含めて紹介し，それらのモデルの数理統計学的意義について検討し，さらにエントロピーモデルとの関係について考察した．

本研究で明らかになったことをまとめると以下のとおりである．

（1） 従来開発された修正重力モデル式は，式 (13) で，集中交通量の修正式は式 (14) によって，それぞれ統一的に表現できることがわかった．

（2） 修正重力モデルは，それぞれの基本式でトリップの発生確率が与えられていると仮定し，同時生起確率が最大となる，すなわち，最も起こりやすい OD パターンを求めていると考えられる．修正重力モデルによって与えられる交通量はトリップの発生確率を与える式を仮定した場合の最尤推定値となっている．

（3） 修正重力モデルは，佐佐木のエントロピーモデルにおいて重力モデル型のトリップの発生確率を仮定する場合と基本的には同じである．

（4） Wilson のエントロピーモデルは，基本的には修正重力モデルと同じで，修正重力モデルの交通抵抗項が，所要時間の指数関数になったものであると見なすことができる．

（5） 佐佐木のエントロピーモデルの基本式において，交通抵抗項としてゾーン間交通費用の指数関数を用いたものが Wilson のエントロピーモデルであると考えることができる．

（6） 修正重力モデルとエントロピーモデルは同じであるので，今後は，確率理論を用いるエントロピーモデルに比較して，計算手順が簡便で，基本式の構造が直観的に理解しやすい修正重力モデルを利用するのが得策といえよう．

（7） 修正重力モデルでは，その構造から予測精度は，仮定されたトリップの発生確率が現実をどの程度表現しているかによって決まると考えられるので，今後はこの改良に努力すべきであろう．この改良法の一つとして地域間調整係数の導入とその予測法の開発をあげることができる．

参　考　文　献

1) 河上省吾：OD 交通量予測モデルの適合度について一通勤・通学交通による検討一土木学会論文報告集 165 号，pp. 31～44, 1969 年5月．

2) 河上省吾：OD 交通量予測モデルに関する 2,3 の考察，第1回交通工学研究発表会論文集，pp. 85～88, 1972 年6月

3) S. Kawakami : A Gravity Model for Trip Distribution, Proc. of 6th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, pp. 327～343, Aug. 1974.

4) T. Sasaki : Probability Methods to Estimate Trip Distributions, Proc. of IVth International Symposium on the Theory of Traffic Flow, 1968.

5) 河上省吾：OD 交通量の細分化のためのモデルと重力モデルの確率論的意義，第12回日本道路会議論文集，pp. 7～8, 1975 年10月．

6) 上記 2)．

7) 上記 1)．

8) 上記 4)．

9) 佐佐木　綱：都市交通計画，国民科学社，pp. 212～215, 1974 年4月．

10) A.G. Wilson : A Statistical Theory of Spatial Distribution Models, Transportation Research, Vol. 1, pp. 253～269, 1967.

（1977.4.19・受付）