

処罰法と差分法の併用による低温地下タンクの 凍結領域の数値解析

NUMERICAL ANALYSIS OF FREEZING DOMAIN AROUND UNDERGROUND
STORAGE TANK FOR CRYOGENIC LIQUID USING INTEGRATED PENALTY
AND FINITE DIFFERENCE METHODS

柳 沢 一 郎*・由 川 博 康**

By Ichiro YANAGISAWA and Hiroyasu YOSHIKAWA

1. 緒 言

鋳物の凝固、飽水土や水の凍結等の相変化を伴う非定常熱伝導自由境界問題については F. Neumann の解析解とこの特別な場合として J. Stefan の解析解が得られているにすぎず¹⁾、ほとんどの場合には近似的な数値解析に依存しているのが現状である。

この数値解析には古くから差分法が用いられ、一般的には Conventional 法, Murray と Landis によって提案された移動温度点法と固定温度点法, Goodman らの Heat balance integral 法が有名である。Murray-Landis 法では凍結の初期値の仮定を誤ると解が不安定になり、また、多次元問題に適用しにくいという欠点がある。Heat balance integral 法は熱伝導方程式を常微分化するために容易に解が得られるが、温度分布の仮定方法によって解が影響をうける欠点がある。さらに、移動温度点法と関数近似法を併用した庄司²⁾の方法や近藤³⁾の完全差分の方法が新しいが、多次元多層問題には拡張されていない。

多次元多層問題については大型電算機の発達に伴って有限要素法による数値解析が流行しているが、自由境界の処理がむずかしい。

このように、自由境界問題については古くから多くの人々によって研究されてきたが、最近、応用数学界において処罰法で定式化し差分法で数値計算を行う方法^{4)~7)}が提案された。

そこで、この手法による数値解と Neumann の解析解との比較検討を行い、この手法を低温地下タンクの 2 次元 4 層モデルに適用し、自由境界における地下水の吸

排水速度、地盤凍結温度、Heat Fence、相互干渉等の凍結領域への影響について調べた。

さらに、ツンドラ地帯の表面が夏期に融解し冬期に融解土が再凍結するような自由境界の増減問題についても 1 次元ではあるが本手法を適用した。なお、凍結面から遠く離れた未凍結土中の水流（吸排水）によって運ばれる熱量は、現在つかみにくいことと、値そのものも凍結面近傍に比べてはるかに小さいものと仮定して、本解析では未凍結土の熱伝導方程式にはこの熱量の影響を入れていない。

2. 記 号

- U_i : 各層の温度 (°C)
- U_0, U_c, U_a : 地中平均, 液体, 外気温度 (°C)
- U_f, U_w : 地盤凍結, 内壁昇温温度 (°C)
- α_i : 各層の熱伝導率 (kcal/mh°C)
- σ_i : 各層の温度伝導率 (m²/h)
- L_i, L_w : 土と水の凍結潜熱 (kcal/kg)
- ρ_i, ρ_w : 凍土と水の密度 (kg/m³)
- v : 凍結面での吸排水速度 (m/h)
- H : 地表の熱伝達率 (kcal/m²h°C)
- a_i, b_i : 各部材の座標 (m)
- S, S_i : 凍結距離 (m)
- t_{cr} : 地盤凍結開始時刻 (h)
- $t_0 \sim t_4$: クールダウン—ウォームアップサイクルの各時刻 (h), 図—20 参照
- h, h_r, h_θ, h_z, k : x, r, θ, z, t 軸の差分間隔 (m, m, deg, m, h)
- D_i : 各層の領域
- K_i : 処罰定数 (1/h)
- χ_i, χ_{ij} : 領域係数

* 正会員 石川島播磨重工業(株)技術研究所主任研究員

** 石川島播磨重工業(株)技術研究所研究員

3. Neumann の解析解と処罰法による数値解の比較

(1) 処罰法とは

図-1 のように液相と固相によりなる2相1次元 Neumann 問題について考えてみると、処罰法 (Integrated Penalty Method) による熱伝導方程式は次のように表わされる。

$$\frac{\partial U1}{\partial t} = \sigma_1 \frac{\partial^2 U1}{\partial x^2} - K_1 \chi_1 U1 \quad t \geq 0, 0 \leq x \leq X \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial U2}{\partial t} = \sigma_2 \frac{\partial^2 U2}{\partial x^2} - K_2 \chi_2 U2 \quad t \geq 0, 0 \leq x \leq X \quad \dots\dots\dots(2)$$

初期条件 $U1(x; 0) = U_0, U2(x; 0) = 0 \dots\dots\dots(3)$

境界条件 $U2(0; t) = U_c \dots\dots\dots(4)$

さらに、数値解析では $U1(\infty; t) = U_0$ という境界条件が使えないので、十分離れた点を X として次のような断熱条件を用いた。

$$\frac{\partial U1(X; t)}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

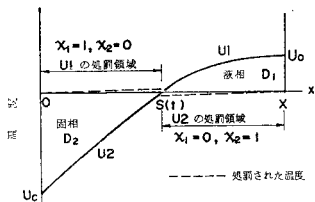


図-1 2相1次元モデル

ここに、 $U1, U2$ は液相と固相の温度であり、 σ_1, σ_2 はそれぞれの温度伝導率である。右辺第2項が処罰項とよばれ、 K_1, K_2 および χ_1, χ_2

χ_2 は処罰定数、領域係数とよばれる。領域係数については液相領域では $\chi_1=0, \chi_2=1$ 、固相領域では $\chi_1=1, \chi_2=0$ となるもので、式 (1) は液相領域、式 (2) は固相領域で処罰項がなくなり、一般の熱伝導方程式に一致する。なお、 $\chi_i=1$ となる領域を 図-1 のようにそれぞれの処罰領域とよぶことにする。凍結温度を 0°C とすると式 (1), (2) を 図-1 の領域 $D_1 + D_2$ で処罰条件 $U1(0; t) = 0, U2(X; t) = 0$ のもとで解く方法を処罰法という。一方、自由境界位置 (凍結点 $S(t)$) を同時に求める必要があるが、この境界における境界条件は次式で与えられる。

$$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{1}{L_1 \rho_2} \left(\alpha_2 \frac{\partial U2}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial U1}{\partial x} \right) \quad U1 = U2, t \geq 0, x = S(t) \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 L_1, ρ_2 は液相の凝固潜熱と固相の密度であり α_i は熱伝導率である。

ここで、液相の温度 $U1$ について処罰領域内 (D_2) においては、 $\partial U1 / \partial t \ll \sigma_1 \partial^2 U1 / \partial x^2$ と仮定し式 (1) を

x 方向に積分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial U1}{\partial x} = \frac{1}{\sigma_1} \int_0^{S(t)} K_1 \chi_1 U1 dx$$

同様に、処罰領域内 (D_1) において $\partial U2 / \partial t \ll \sigma_2 \partial^2 U2 / \partial x^2$ と仮定すると、式 (2) より次式が得られる。

$$-\frac{\partial U2}{\partial x} = \frac{1}{\sigma_2} \int_{S(t)}^X K_2 \chi_2 U2 dx$$

これらの式を式 (6) に代入し時間積分を行えば自由境界位置は次式のようになる。

$$S(t) = S(0) - \frac{1}{L_1 \rho_2} \left\{ \frac{\alpha_1}{\sigma_1} \int_0^t dt \int_0^{S(t)} K_1 \chi_1 U1 dx + \frac{\alpha_2}{\sigma_2} \int_0^t dt \int_{S(t)}^X K_2 \chi_2 U2 dx \right\} \quad \dots\dots\dots(7)$$

以上のことがらを物理的にいえば $U1, U2$ それぞれの処罰領域に十分大きな熱の吸収があることに等しく、このため、処罰領域内のそれぞれの温度はほとんど0になり、非処罰領域の温度を組み合わせることにより全領域の温度分布が得られ、また、同時に式 (7) により凍結点の位置も得られる。実際の計算は式 (1), (2) と (7) を差分化し、反復数値計算を行えばよく、処罰法による数値解の収束性、解の一意性については河原田・名取^{(1)~(7)}により証明されているのでここでは省略する。

これまでのおもな式、すなわち式 (1), (2), (7) を差分表示すると次式のように表わされる。なお、時間微分については前進差分、空間微分については中心差分を用いた。 $x = mh, t = nk$ とすると、

$$U1_m^{n+1} = \frac{1}{1 + k K_1 \chi_1 m^n} \frac{\sigma_1 k}{h^2} \times \left\{ U1_{m+1}^n + \left(\frac{h^2}{\sigma_1 k} - 2 \right) U1_m^n + U1_{m-1}^n \right\} \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$U2_m^{n+1} = \frac{1}{1 + k K_2 \chi_2 m^n} \frac{\sigma_2 k}{h^2} \times \left\{ U2_{m+1}^n + \left(\frac{h^2}{\sigma_2 k} - 2 \right) U2_m^n + U2_{m-1}^n \right\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$S^{n+1} = S^n - \frac{kh}{L_1 \rho_2} \left\{ \frac{\alpha_1}{\sigma_1} \sum_m \sum_n K_1 \chi_1 m^n U1_m^{n+1} + \frac{\alpha_2}{\sigma_2} \sum_m \sum_n K_2 \chi_2 m^n U2_m^{n+1} \right\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

なお、いままで簡単のために液体の凍結温度 U_f を 0°C と仮定して話をすすめてきたが、凍結温度が 0°C 以外のときは処罰領域の温度が U_f となるようにすればよい。すなわち、処罰項の U_i に $(U_i - U_f)$ を入れれば後の式にも U_f が入ってくる。

(2) 誤差および安定条件

処罰法による数値解法では、反復差分計算による誤差、および (1) に述べた仮定による誤差が考えられる

表一 ノイマンの解との比較に用いた計算条件

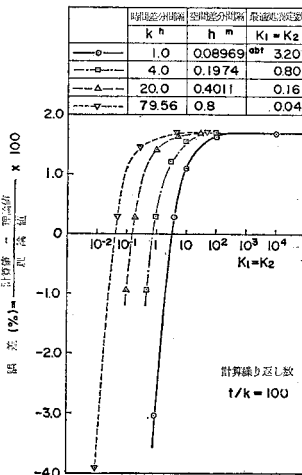
初期条件	$U_0 = 10^\circ\text{C} (t = 0)$
境界条件	$U_c = -150^\circ\text{C} (x = 0)$
凍結温度	$U_f = 0^\circ\text{C} (x = S(t))$
差分間隔	$h = 0.1794\text{m}$
処罰定数	$k = 4.0\text{h} \rightarrow \frac{\sigma_2 k}{h^2} = 0.5$
	$K_1 = 0.1 \quad K_2 = 0.8$

表二 ノイマンの解との比較に用いた熱物性値

	熱伝導率 Kcal/mh ^{°C}	温度伝導率 m ² /h	潜熱 Kcal/m ³	比熱 Kcal/kg ^{°C}
水	0.476	0.000472	79400	1.000
氷	1.900	0.00402	—	0.487

ので、この種の問題としては唯一の厳密解である Neumann の解と比較して精度を検討する。また、差分法には安定条件が存在するが時間差分と空間差分はどのような関係にあるべきかについてもこの問題で考えてみた。表一に数値計算に用いた計算条件、表二に熱物性値を示す。

差分法により数値解析を行う際には安定条件があることはよく知られているが、式 (8), (9) における安定条件は文献 (8) にも示されているように $\sigma_2 k/h^2 \leq 0.5$ であるが、差分間隔をどのように決めればよいかを考えてみると、時間間隔 k はできるだけ大きくとることが望ましいが、空間差分間隔 h については、ある一定時間まで計算するとき凍結距離 S と差分間隔 h の比 S/h が大きくなるほど精度がよくなることはいえる。このことからいえば k の値が決まったときに h を最小とするように、すなわち、安定限界ぎりぎりに k と h を設定することが精度を向上させる方法の一つであるといえる。実際にわれわれの試計算でも安定限界に近くなるようにするほど精度もよくなり、また、計算結果の脈動幅も小さくなる。



図二 処罰定数の値と凍結点の計算精度との関係

次に、処罰定数の値については $K_1 = K_2$ として処罰定数の値と凍結点 S の計算精度について調べたものが図二である。4種類の差分間隔について計算したものであるが、これらはすべて安定限界、すなわち、 $\sigma_2 k/h^2 = 0.5$ となるように差分間隔が決められて

おり、時間繰り返し数 100 回のときの結果を図に示したものである。この図から次の 2 点が推定できる。

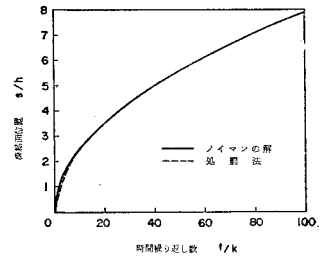
(1) 差分間隔に応じて凍結距離の計算誤差が最小となる処罰定数が存在し、その値は $kK_i = \text{const.}$ となっている。

(2) 一定値以上の処罰定数を用いれば誤差はある値に定まるが、その値は差分間隔には無関係である。

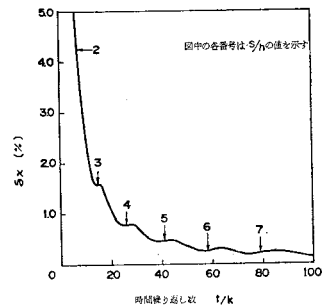
そのほか、温度分布の精度も考えると、 K_1 と K_2 は必ずしも等しくない方がよいことなどがわかっているが、処罰定数の選択は問題の種類、差分間隔、次元数によっても異なり、まだ最適処罰定数を数式により求めることはできない。しかし、精度的に許されるならば十分大きな正の値を用いておけば、1~2% 程度の誤差範囲内であることが保証できる。

以上述べてきたことから、表一のように差分間隔、処罰定数を定め等距離差分法により Neumann 問題を計算した結果が図三~五である。

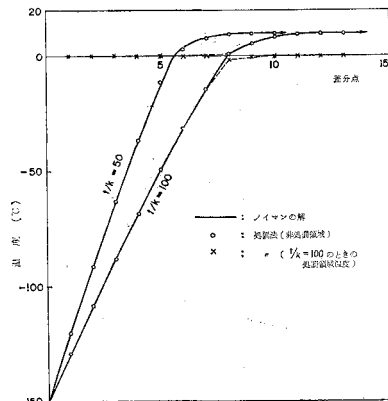
図三は凍結位置の計算結果を示す。時間、凍結面位置ともに差分間隔で除し無次元化しており、実線が Neumann の解、破線が処罰法による計算結果である。 S/h が 2 を越えるまで若干の誤差が認められるが、4 を越えると理論解と数



図三 凍結面位置の計算結果



図四 凍結面位置の計算結果の相対誤差 δ_s



図五 温度分布

値解の差はほとんどなくなるといえる。この点について、さらにくわしく調べるために相対誤差を示したのが図-4である。この図からわかるとおり、各差分点を越えるのに合わせて若干の脈動をしながら正解に近づいていることがわかる。しかし、この脈動は振幅も小さく処罰法の欠点となるものではない。図-5は時間繰り返し数が50回および100回のときの温度分布を理論解と比較したものである。○印が処罰法による計算結果であるが、一見して、理論解ときわめてよい一致を示していることがわかる。前述のように、処罰法による温度分布はそれぞれの非処罰領域の温度を凍結点で連続させて求めることになる。図では×印と破線により処罰領域の温度について $t/k=100$ のときのみ示してある。これからもわかるように処罰領域内の温度が非処罰領域のそれに比べて十分小さく $\partial U_i/\partial t \ll \sigma_i \partial^2 U_i/\partial x^2$ とした前述の仮定がほぼ妥当であると考えられる。さらに、 $U1(\infty; t) = U_0$ の境界条件については計算範囲の X を十分に大きくとってやれば断熱条件の $\partial U1(X; t)/\partial x = 0$ で代用しても精度にほとんど影響のないことがこれらの計算結果から明らかである。

なお、 $\partial U_i/\partial t$ も考慮した試算も行ったが凍結初期において4% くらいの誤差がでるが、繰り返し数が多くなり凍結が進むとこの項による影響がほとんどなくなることが確かめられた。

いままで述べてきたように、処罰法は相変化を伴う熱伝導問題を解く手法としてきわめて有力であることが証明された。以下に地下タンクの地盤凍結問題に対する処罰法の応用例を示す。

4. LNG 地下タンク凍結領域の数値解析例

(1) LNG 地下タンクの凍結領域 $U_i(r, z, t)$

計算モデルは図-6に示す円筒座標系の2次元4層モデルであるが、断熱材の厚さはほかの部材の厚さに比較してきわめて薄いのでコアサイズと計算時間の節約

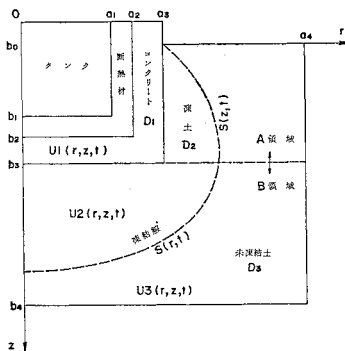


図-6 解析モデル

のために断熱材内部には差分点(内点)を設けずに境界条件を合わせることで境界温度を算出した。

a) 処罰法による偏微分方程式と諸条件

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \sigma_i \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} \right) - K_{ix} (U_i - U_f) \dots\dots\dots (11)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= 0 \\ i=1 \text{ のとき } t &\geq 0, \text{ in } D_1 \\ i=2 \text{ のとき } t &\geq t_{cr}, \text{ in } (D_2 + D_3) \\ i=3 \text{ のとき } t &\geq 0, \text{ in } (D_2 + D_3) \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2=0, x_3=1 &\text{ in } D_2 \\ x_2=1, x_3=0 &\text{ in } D_3 \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

初期条件 $U1=U3=U_0, t=0 \dots\dots\dots (14)$

境界条件

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial U1}{\partial r} &= \frac{\alpha_0}{a_2 - a_1} (U1 - U^*), \\ t &\geq 0, r = a_2, 0 \leq z \leq b_2 \\ \alpha_1 \frac{\partial U1}{\partial z} &= \frac{\alpha_0}{b_2 - b_1} (U1 - U^*), \\ t &\geq 0, z = b_2, 0 \leq r \leq a_2 \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

ただし、

$$U^* = \begin{cases} \frac{t-t_0}{t_0} (U_c - U_0) + U_c, & 0 \leq t \leq t_0 \\ U_c, & t > t_0 \end{cases} \left. \begin{aligned} r &= a_1, 0 \leq z \leq b_1 \\ z &= b_1, 0 \leq r \leq a_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

自由境界面において水の移動(吸排水)があるときの熱流のつり合い条件は次の式(17)を満足しなくてはならないと E. Penner⁹⁾ らによって指摘されている。

$$\alpha_2 \frac{\partial U2}{\partial n} - \alpha_3 \frac{\partial U3}{\partial n} = L_s \rho_s \frac{\partial S}{\partial t} + L_w \rho_w v, \quad U2=U3=U_f, t \geq t_{cr} \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial z} = \frac{H}{\alpha_i} (U_i - U_a), t \geq 0, a_2 \leq r \leq a_4, \left. \begin{aligned} i=1, z &= 0 \\ i=2, 3, z &= b_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$$\alpha_1 \frac{\partial U1}{\partial r} = \begin{cases} \alpha_3 \frac{\partial U3}{\partial r}, U1=U3, 0 \leq t \leq t_{cr} \\ \alpha_2 \frac{\partial U2}{\partial r}, U1=U2, t > t_{cr} \end{cases}, \left. \begin{aligned} r &= a_3, b_0 \leq z \leq b_3 \\ z &= b_3, 0 \leq r \leq a_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$\frac{\partial U_i}{\partial r} = 0$ ここで、

$$\left. \begin{aligned} i=1 \text{ のとき } t &\geq 0, r=0, b_2 \leq z \leq b_3 \\ i=2 \text{ のとき } t &\geq t_{cr}, r=0, b_3 \leq z \leq b_4 \\ i=3 \text{ のとき } t &\geq 0, r=0, b_3 \leq z \leq b_4 \end{aligned} \right\}$$

$\dots\dots\dots (20)$

次に半無限領域を数値解析するときの泣きどころといわれるもので、 $r=a_4, b_0 \leq z \leq b_4$ と $z=b_4, 0 \leq r \leq a_4$ 上の境界条件は a_4, b_4 をコアサイズ、計算時間の許す範囲で十分に大きくとれば断熱条件でも精度にあまり影響のないことが前節で明らかになっているので、これらの境界は断熱条件とした。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_3}{\partial r} &= 0, t \geq 0, r = a_4, b_0 \leq z \leq b_4 \\ \frac{\partial U_3}{\partial z} &= 0, t \geq 0, z = b_4, 0 \leq r \leq a_4 \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

タンクの肩の部分の境界条件は、

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} = \frac{H}{\alpha_1} (U_1 - U_a), \quad t \geq 0, r = a_3, 0 \leq z \leq b_0 \dots (22)$$

とした。

最後に、処罰条件は凍結温度を U_f とすると次式になる。

$$\left. \begin{aligned} U_2(a_4, z; t) &= U_f, b_0 \leq z \leq b_4, t \geq t_{cr} \\ U_2(r, b_4; t) &= U_f, 0 \leq r \leq a_4, t \geq t_{cr} \\ U_3(a_3, z; t) &= U_f, b_0 \leq z \leq b_3, t \geq t_{cr} \\ U_3(r, b_3; t) &= U_f, 0 \leq r \leq a_3, t \geq t_{cr} \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

b) 自由境界 S の導出

仮定1 積分方向に直角方向の Heat Flux は無視する。

仮定2 積分方向と凍結面の法線方向は同じとする。

仮定3 処罰領域において $\frac{1}{\sigma_i} \frac{\partial U_i}{\partial t} \ll \frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2}, \frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial r}, \frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2}, i=2, 3$ とする。

図-6 のように地盤を A, B の領域に分け、かつ S を A, B 領域で $S(z; t)$ と $S(r; t)$ の二つに数値計算の便宜上分けて考える。そこで、上記仮定のもとに式 (11) の面積積分を行いガウスの定理と式 (17) より S は次式のようになる。

$$\begin{aligned} S(z; t) \approx & -\frac{L_w \rho_w}{L_3 \rho_2} \int_{t_{cr}}^t v dt \\ & - \frac{1}{L_3 \rho_2} \left\{ \frac{\alpha_2}{\sigma_2} \int_{t_{cr}}^t dt \int_{S(z,t)}^{a_4} K_2 \chi_2 (U_2 - U_f) dr \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_3}{\sigma_3} \int_{t_{cr}}^t dt \int_{a_3}^{S(z,t)} K_3 \chi_3 (U_3 - U_f) dr \right\} \dots (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(r; t) \approx & -\frac{L_w \rho_w}{L_3 \rho_2} \int_{t_{cr}}^t v dt \\ & - \frac{1}{L_3 \rho_2} \left\{ \frac{\alpha_2}{\sigma_2} \int_{t_{cr}}^t dt \int_{S(r,t)}^{b_4} K_2 \chi_2 (U_2 - U_f) dz \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_3}{\sigma_3} \int_{t_{cr}}^t dt \int_{b_4}^{S(r,t)} K_3 \chi_3 (U_3 - U_f) dz \right\} \dots (25) \end{aligned}$$

c) 差分化

h_r, h_z, k を r, z, t 軸の差分間隔とし $U_i(r, z; t)$ の差分表示を $U_i^{l,m,n}$ としてこれまでの式のうちおもなものを差分表示する。 $\partial U_i / \partial t$ については前進差分を、他の微分項については中心差分を用いる。

式 (11) より、

$$\begin{aligned} U_i^{l+1,n} = & \frac{\sigma_i k}{h_r h_z (1 + k K_i \chi_i^l)} \\ & + \left\{ \left(1 + \frac{1}{2m} \right) \frac{h_z}{h_r} U_i^{l,m-1,n} \right. \\ & + \left[\frac{h_r h_z}{\sigma_i k} - 2 \left(\frac{h_r^2 + h_z^2}{h_r h_z} \right) \right] U_i^{l,m,n} \\ & + \left(1 - \frac{1}{2m} \right) \frac{h_z}{h_r} U_i^{l,m+1,n} \\ & + \frac{h_r}{h_z} (U_i^{l,m,n+1} + U_i^{l,m,n-1}) \\ & \left. + \frac{h_r h_z}{\sigma_i} K_i \chi_i^l U_i^{l,m,n} \right\} \dots (26) \end{aligned}$$

式 (24), (25) より、

$$\begin{aligned} S_n^{l+1} = & S_{0z} - \frac{L_w \rho_w}{L_3 \rho_2} k \sum_l v \\ & - \frac{h_r k}{L_3 \rho_2} \left\{ \frac{\alpha_2}{\sigma_2} \sum_l \sum_m K_2 \chi_2^l U_i^{l,m,n} (U_2^{l+1,m,n} - U_f) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_3}{\sigma_3} \sum_l \sum_m K_3 \chi_3^l U_i^{l,m,n} (U_3^{l+1,m,n} - U_f) \right\} \dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_m^{l+1} = & S_{0r} - \frac{L_w \rho_w}{L_3 \rho_2} k \sum_l v \\ & - \frac{h_r k}{L_3 \rho_2} \left\{ \frac{\alpha_2}{\sigma_2} \sum_l \sum_n K_2 \chi_2^l U_i^{l,m,n} (U_2^{l+1,m,n} - U_f) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_3}{\sigma_3} \sum_l \sum_n K_3 \chi_3^l U_i^{l,m,n} (U_3^{l+1,m,n} - U_f) \right\} \dots (28) \end{aligned}$$

ただし、 S_{0z}, S_{0r} は初期値である。

表-3 物性値および計算定数

	断熱材	コンクリート	硬土	未凍土	水
温度伝導率 (m^2/h)	$\sigma_r=0.00104$	$\sigma_1=0.00238$	$\sigma_2=0.004529$	$\sigma_3=0.00225$	—
熱伝導率 ($Kcal/mh^\circ C$)	$\alpha_0=0.0250$	$\alpha_1=20000$	$\alpha_2=2.5201$	$\alpha_3=1.6400$	—
比熱 ($Kcal/kg^\circ C$)	$C_0=0.40$	$C_1=0.35$	$C_2=0.28$	$C_3=0.37$	—
密度 (kg/m^3)	$\rho_0=60.0$	$\rho_1=2400$	$\rho_2=1970$	$\rho_3=1970$	$\rho_w=1000$
潜熱 ($Kcal/kg$)	—	—	—	$L_3=17767$	$L_w=80.0$

タンク寸法

$$\begin{aligned} a_1 &= 32.0\text{m} & a_2 &= 32.15\text{m} & a_3 &= 34.37\text{m} & a_4 &= 64.30\text{m} \\ b_0 &= 2.35\text{m} & b_1 &= 32.80\text{m} & b_2 &= 32.95\text{m} & b_3 &= 35.30\text{m} & b_4 &= 81.20\text{m} \end{aligned}$$

温度

$$U_c = -162^\circ C \quad U_0 = 15^\circ C \quad U_A = 20^\circ C$$

その他の定数

$$\begin{aligned} H &= 10 \text{ Kcal}/m^2 h^\circ C & \text{熱伝導率} \\ h_r &= (a_3 - a_2) / 2 & r \text{ 方向の差分間隔} \\ h_z &= 1 \text{ deg.} & z \text{ 方向の } " \\ h_z &= (b_3 - b_2) / 2 & z \text{ 方向の } " \\ t_0 &= 60 \text{ h} & \text{クールダウンに要する時間} \end{aligned}$$

d) 数値解析例

表-3の物性値と計算定数を使って数値計算した結果を図-7~14に示す。

1) 図-7は現在根岸地区に建設中の10万kL LNG地下タンクの凍結領域である($v=0$ mm/h). LNGを30年間貯蔵すると最大凍結距離は深さ方向で約36m, 半径方向で約23mくらいになる。

2) 図-8は凍結距離への地盤凍結温度(U_f)の影響を調べたものである。図は底部と側部の最大凍結距離(SV, SH)を示した。地盤の凍結温度は圧力および溶融物等のため多少変化するが、海岸に近い埋立地では地下水の塩分量が多くなるため凍結温度は -3°C くらいになるだろうと想定して 0°C との凍結距離を比較した。この結果, $U_f=-3^{\circ}\text{C}$ のときの凍結距離は $U_f=0^{\circ}\text{C}$ のときのそれに比べて半径方向で約6%, 深さ方向で約3~4%小さくなっていて凍結温度の凍結距離への影響は少ないようである。これは (U_0-U_f) に対して (U_0-U_c) が非常に大きいため、すなわち U_c が超低温度であるために影響が少ないのであって、プロパン、ブタンのように沸点(U_c)が高いと凍結温度の凍結距離への影響は大きくなるはずである。

3) 図-9~11は凍結温度が 0°C のときの凍結領域への吸排水速度の影響を調べたものである。地盤が凍結するときの吸排水速度については文献10)に実験式があり、この実験式によると吸排水速度は凍結速度と拘束力に依存していて結局は時間と場所の関数になる。特に実際のタンクの拘束力は把握しにくいこととコアサイズの制限から本数値計算では吸排水速度を定数として扱った。たとえば、土丹(固結シルト)の吸排水速度(v)については文献10)の実験から $-0.20 \leq v \leq 0.15$ mm/hで平均 $v=0.04$ mm/hが計測されているので、本計算では $v=0, \pm 0.04, \pm 0.20, \pm 0.30$ mm/hの7ケースを扱った。

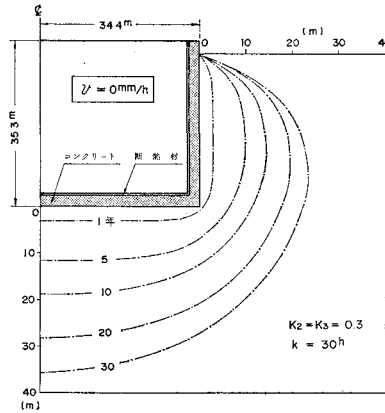


図-7 10万kL LNG地下タンクの凍結領域

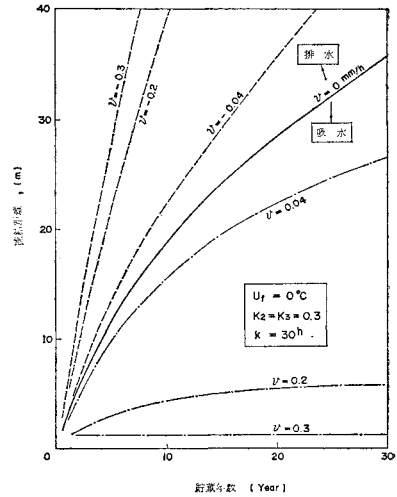


図-9 底板中心部の吸排水速度の凍結距離への影響

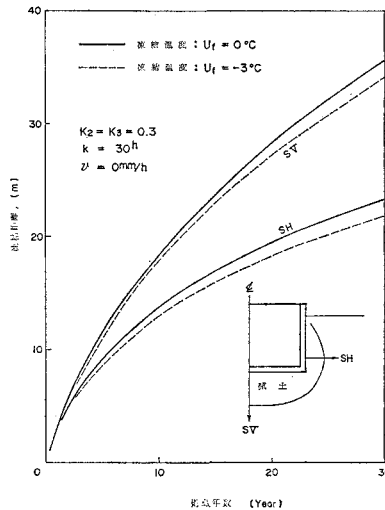


図-8 凍結距離への凍結温度の影響

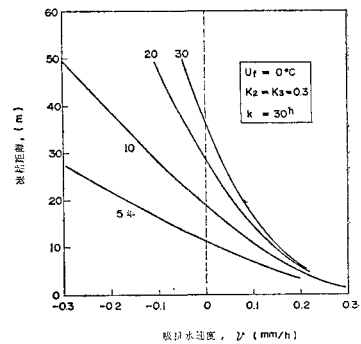


図-10 吸排水速度と凍結距離

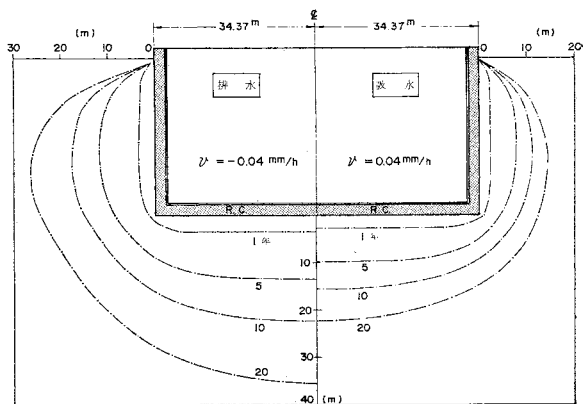


図-11 排水と吸水時の凍結領域の比較 ($U_f=0^{\circ}\text{C}$)

図-9はタンク底板中心部の深さ方向の凍結距離への吸排水速度の影響を示し、図-10は図-9の内容について吸

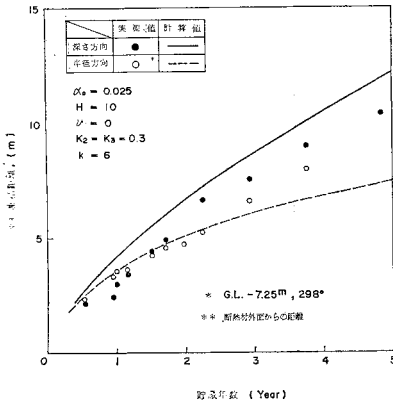


図-12 1万kL LNG 地下タンクの凍結距離

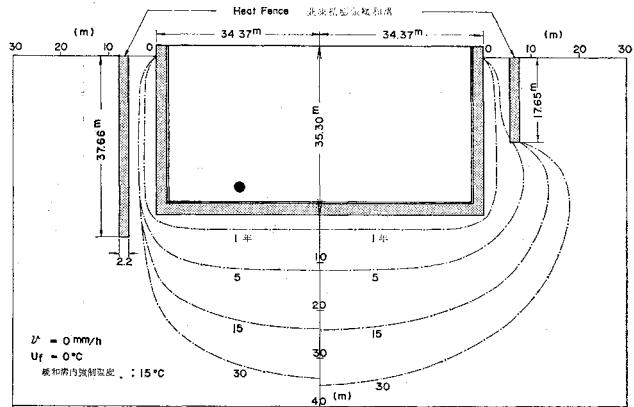


図-13 Heat Fence 兼凍結膨張緩和溝を設けたときの凍結領域

排水排水速度を変数にとって示したものである。図-11は $v = \pm 0.04$ mm/h (土丹の平均値) のときの2次元的な比較である。これらの図から凍結領域に与える吸排水速度の影響は非常に強いことが判明する。透水係数の小さい ($10^{-7} \sim 10^{-8}$ cm/sec) 土丹でさえこのような大きな影響があるので、一般の軟弱地盤では透水係数は土丹よりはるかに大きく吸排水速度も大きくなるため凍結領域への影響はさらに大きくなるものと予想される。したがって、地盤の凍結を扱うときは地盤の吸排水速度を正確に把握することが重要になってくる。

4) 図-12は昭和45年根岸に建設した1万kL LNG 地下タンクの底板中心部の深さ方向と側壁半径方向 (G.L. -7.25m, 298° 方向) の実測値と計算値の比較である。この図をみると、深さ方向の実測値は計算値よりやや小さく、反対に半径方向の実測値は計算値よりやや大きくなっていて本計算精度が疑われるが、3.(2)で証明されているように手法による誤差ではなく吸排水速度を含めて材料定数の把握がむずかしいことと、次の二つがおもに原因しているものと考えられる。

(a) タンク底部においては3~4年間断続的にヒーティングを行っていたが、このヒーティング条件が不明のため計算に入っていないので、底部の実測値は小さくなった。

(b) 半径方向の計測点は G.L. -7.25m の深度で 298° 方向であるが、土質の不連続性 (シルトと土丹の境界の貝殻層) と冷却条件の不均一性のため凍結領域に方向性が生じ偶然にも一番凍結の早い方向と計測方向が重なったために実測値が大きくなった。

なお、この図の凍結距離は断熱材外面からの値である。

5) 地下タンクが群設されたときの凍結の相互干渉を緩和したり隣接構造物への凍結膨張の悪影響等を防止する方法として、タンクのまわりに溝を掘りこの中に膨張

変位吸収材を入れかつ溝内を温める方法がある (Heat Fence 兼凍結膨張緩和溝)。図-13はタンクの外側約7mのところ幅約2m、深さが約18mと38mの2種類の溝を掘り、この中を15°Cで温めたときの溝の深さの凍結領域への影響を調べたものである。図より深さが約18mのときは約5年くらいから凍結線は溝より外側にはみ出し始め30年もすると完全に外側にはり出してくるので他の構造物への悪影響は免れないが、深さを約38mとすると30年後でも凍結線は溝の外側に出ないので悪影響はほとんどないと思われる。深さの影響についていろいろ計算したところ38mまで深くしなくてもだいたいタンクの深さと同程度であれば十分である。

6) 低温地下タンクの凍上を防止する方法としてタンクの底部を温める方法がある。図-14は内径 ($r=a_2$) に相当する部分の底板を5°Cと15°Cで温めたときの強制温度の凍結領域への影響を調べたものであるが、強制温度の影響はコーナー部に多少認められる程度で全体の凍結領域への影響はないことがわかる。

(2) 凍結の相互干渉 $U_i(r, \theta; t)$

LNG 地下タンクの地盤凍結問題で興味深いことの1つに最近建設されている群設タンクの凍結の相互干渉問

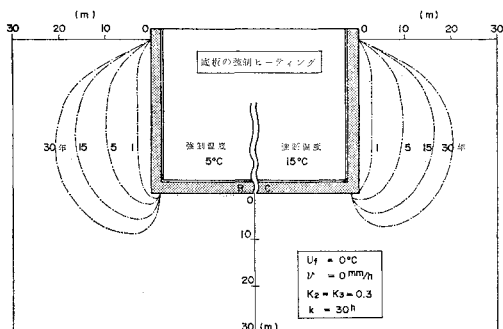


図-14 底板を強制ヒーティングしたときの凍結領域

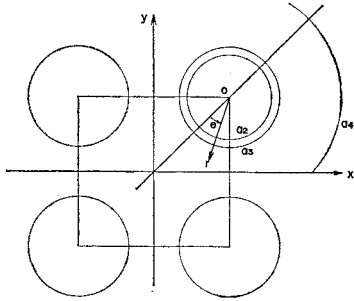


図-15 4 タンク相互干渉問題

題がある。これは互いにとりあった地下タンクの地盤凍結ではタンクにはさまれた部分の凍結が他の方向のそれより進行が速いということであり、この種の問題の解析には $(r, \theta; t)$ 座標を用いる必要がある (図-15 参照)。

$U_i(r, \theta; t)$ に処罰法を適用する方法は前の $U_i(r, z; t)$ とまったく同じで、偏微分方程式が少し異なるだけである。すなわち、

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \sigma_i \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \theta^2} \right) - K_2 \lambda_i (U_i - U_f) \dots\dots\dots (29)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= 0 \\ i=1, t \geq 0, & \text{ in } D_1 \\ i=2, t \geq t_{cr}, & \text{ in } (D_2 + D_3) \\ i=3, t \geq 0, & \text{ in } (D_2 + D_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

ここで、 U_1, U_2, U_3 は (1) と同じく R.C., 凍土、未凍土の温度である。

凍結距離 S は式 (24) と同じく、

$$\begin{aligned} S(\theta; t) \approx & S_0(\theta) - \frac{L_{30} \rho_w}{L_3 \rho_2} \int_{t_{cr}}^t v dt \\ & - \frac{1}{L_3 \rho_2} \left\{ \frac{\alpha_2}{\sigma_2} \int_{t_{cr}}^t dt \int_S^{\alpha_1} K_2 \lambda_2 (U_2 - U_f) dr \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_3}{\sigma_3} \int_{t_{cr}}^t dt \int_{\alpha_1}^S K_3 \lambda_3 (U_3 - U_f) dr \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (31)$$

で与えられる。 $S_0(\theta)$ は初期値。

さて、図-15 に示すように正方形の頂点に配置された4つのタンクが同時に稼動し始めたものとして、タンクに囲まれた地盤の凍結相互干渉を考えてみると、そのときの境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial \theta} &= 0 \text{ on } \theta = 0, \pi \\ \frac{\partial U_i}{\partial y} &= 0 \text{ on } x\text{-axis} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

その他の境界条件はこれまでと同様、各境界で熱流と温度が連続で等しいと

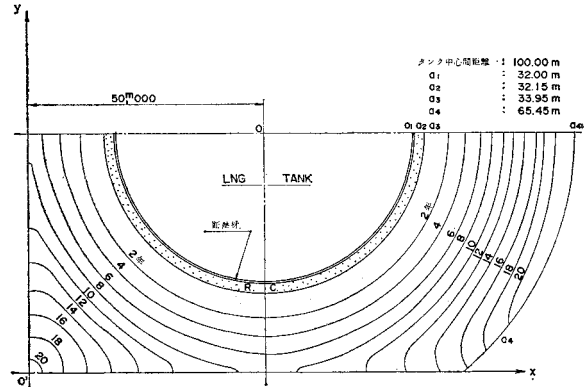


図-16 4 タンク凍結相互干渉 2年ごとの凍結位置

し、 $r = a_4$ 上は断熱条件とし初期条件は $U_i(r, \theta; 0) = U_0$ とした。

1) 上記の要領に基づいて数値解析した結果を図-16 に示す。なおおもな計算条件は下記のとおりである。

物性値および計算定数：表-3

タンク相互間距離	: 100 m
計算半径 a_4	: 64.45 m
地盤凍結温度 U_f	: 0°C
吸排水速度 v	: 0 mm/h

この計算結果によれば約7年くらいでよりのタンクの凍土と連結し、4つのタンクの凍土に囲まれた部分は徐々に凍結速度を速めて約20年強で、この部分の未凍土はなくなってしまい、その後は4つのタンクの外側へと凍土が成長する。この計算で a_4 境界と x 軸の交点付近で凍結形状にややゆがみが見られるが、これは a_4 境界が小さすぎたため、さらに大きくすることによって解決するが、 a_4 境界を大きくすることは計算時間が膨大となるので実用上差し支えない程度にとどめるべきである。 $U_i(r, \theta; t)$ の2次元の計算は地表からの入熱およびタンク形状等の影響が入らないため、一般に実際の現象や $U_i(r, z; t)$ の結果より凍結速度が速くなるので、この計算結果

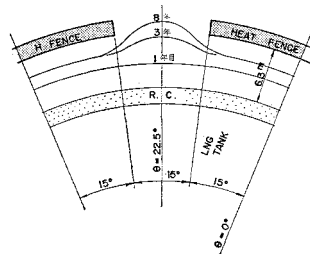


図-17 Heat Fence と凍土の成長形状 Heating Temp. 15°C

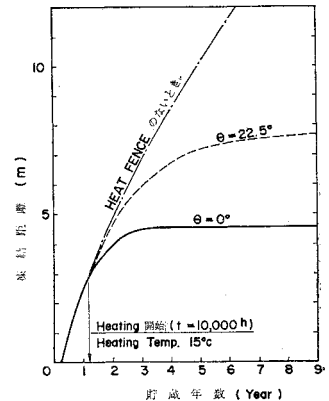


図-18 Heat Fence による凍土の成長状況

についてもこの点を考慮して実際に把握する必要がある。

2) 次に、地下タンクの周囲に断続的な Heat Fence 兼凍結膨張緩和溝を設けたときの凍土の成長状況が図-17 である。Heat Fence は同図に示すようにタンク外壁の R.C. から 6.3 m の位置に円周に沿って 8 個を断続的に設けた (Fence 間角度: 30°)。このときの計算条件は

$$\frac{\partial U_i}{\partial \theta} = 0 \text{ on } \theta = 0, 45^\circ \dots\dots\dots(33)$$

Heating 開始: 貯蔵開始 10 000 時間後

Heating 温度: 15°C

その他 : 表-3 による。

図-18 は図-17 の Heat Fence による各方向の凍土の成長がとまる様子を時間的に示したものである。θ = 0° の方向 (Heat Fence の中央) の凍結は約 3 年でとまり (定常状態)、Heat Fence にはさまれた θ = 22.5° の方向の凍結は 9 年目までにまだ完全にはとまっていないが、やがて定常状態に近づくことが予想される。このことから Heat Fence が凍土の成長を防止するうえで非常に有効であることが予測できる。

(3) 1 次元自由境界増減問題

いままでの計算例では凍結は進行していくのみで自由境界 (凍結面) は唯一であった。しかし、実際の現象を考えると寒冷地においては一度凍結した土が日中の気温で融け夜になって再び凍結することがある。このようなときには地表から順に再凍結土、融解土、凍土そして未凍土の順に層をなしていることが考えられ、3 自由境界 (再凍結面、融解面、凍結面) となっている。これらの自由境界は地表の温度条件によって増えたり減ったりしており、われわれは、これを自由境界増減問題とよび、この問題解法について考えてみる。簡単のために 2 自由境界のときの温度分布のモデルを図-19 に示すが、自由境界がいくつになっても以下に述べる手法を拡張していくだけでよい。図-19 に示すように自由境界が 2 つになったときは、実際は液相と固相の 2 相しか存在していないが、処罰法では図のように液相 (1) と (2) を区別して 3 相と考慮して取り扱う。固相の温度 U2 は液相においては存在しないのでその両側に処罰領域をもち、領域係数も両側で変える必要がある。液相についてはそれぞれ反対側だけに処罰領域をもつ従来の考え方と同じである。さて、U2 に関する領域係数を x21, x22 と

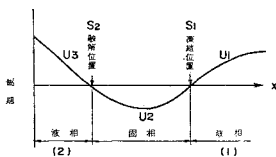


図-19 自由境界増減モデル

すると、偏微分方程式は次のようにかける。

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = \sigma_2 \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} + \frac{c}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} \right)$$

$$-K_2(x_{21} + x_{22})(U_2 - U_f) \dots\dots\dots(34)$$

ただし、c=0 は slab, c=1 は cylinder である。U1, U3 に関する偏微分方程式は 3. (1) で述べたものとまったく同じであるので省略する。2 つの自由境界を求める方法は 3. (1) と同じで吸排水速度 v=0 とすると次のように表わせる。サフィックス 1, 2, 3 はそれぞれの温度に対応する。

$$S_1(t) = S_{01} - \frac{1}{L_3 \rho_2} \left\{ \frac{\alpha_1}{\sigma_1} \int dt \int K_{1x_1}(U_1 - U_f) dr + \frac{\alpha_2}{\sigma_2} \int dt \int K_{2x_{21}}(U_2 - U_f) dr \right\} \dots\dots(35)$$

$$S_2(t) = S_{02} + \frac{1}{L_3 \rho_2} \left\{ \frac{\alpha_3}{\sigma_3} \int dt \int K_{3x_3}(U_3 - U_f) dr + \frac{\alpha_2}{\sigma_2} \int dt \int K_{2x_{22}}(U_2 - U_f) dr \right\} \dots\dots(36)$$

ただし、S01, S02 は初期値である。

このようにして、自由境界が 3 個のときもまったく同様にして求めることができ、2 次元、3 次元問題に拡張することも 4. (1), (2) で述べられた手法によればよい。

さて、LNG 地下タンクでは凍土が融解したり、また、再凍結するというような複数自由境界の状態は現在のところ生じていない。しかし、将来定期検査や自主検査および補修等のためにタンクの使用を一時中断しなければならぬことが予想される。このようなときには凍土の融解がいつ始まり、どこまで進むか、また、温度分布がどのようになっているかを推定しておくことが必要となる。4. (1) で述べた 10 万 kL, 地下タンクについて 1 次元 (円筒) 3 自由境界増減問題として計算した結果が図-20 と図-21 である。タンク内の温度変化は両図の挿入図のように仮定した。

図-20 は自由境界の増減状況の時間変化を示したものである。なお、タンク内の温度変化の様子は 4 年目で液抜き、12 年目で再使用と仮定している。この計算結果によれば液抜き後しばらくは凍結が進行するが、やがて融解しはじめ、約 1.8 年後にタンク側からも融解し

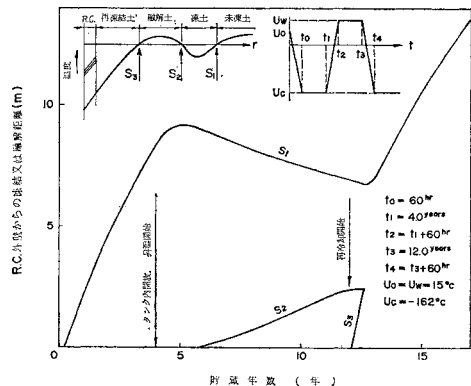


図-20 自由境界増減状況

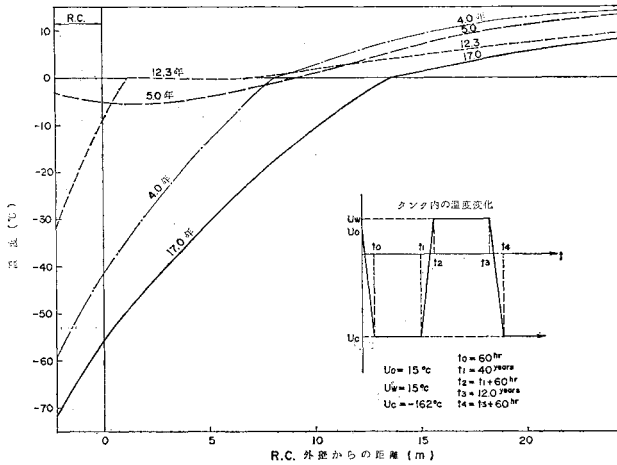


図-21 半径方向の温度分布

始める (S_2 の発生). 再使用後はすぐに融解がとまり, 再凍結が始まって約 0.6 年で自由境界は 1 つになって凍結が進行していく. この計算は円筒座標による 1 次元計算のため, 他からの入熱を考慮していないので, 凍結は実際より速く, 融解は遅い結果となっていることは否定できないが, 現象の定性的な把握には十分である.

図-21 は各時間における半径方向の温度分布を示している. 4 年目まで進行してきた凍土は液抜き後昇温し, 凍土全体が融解, 凍結温度である 0°C に近づき, 全体がほぼ 0°C となった時点で融解が始まり, 0°C の凍土と 0°C の融解土の状態と融解が進み, 再冷却後はすぐに凍結が始まり, 0°C の領域が徐々に減少して, やがて自由境界が 1 つだけとなっていくことがわかった. なお, この問題については, 数値解のみであり, 他の数値解析例, 実験例も見あたらないので, さらに実験により検証中である.

5. 結 論

(1) 処罰法で定式化し差分法で数値計算する方法は, 相変化を伴う自由境界問題の数値解析法として, 精度がよく非常に優れた手法といえる. ただし, 多次元多層問題に対しては等距離差分法を使っているため計算時間が長くなる欠点がある. 一般に, 不等距離差分法の精度は等距離差分法のそれより劣るといわれるが, 工学的には不等距離差分法の併用もおもしろい.

(2) 本手法の一つの応用例として, 自由境界が増減する問題に適用したところ, 定性的には予想どおりの結果が得られたが, 定量的には比較検討するデータがないので実験により確認したうえで次の機会に発表したいと考える.

(3) 凍結領域への吸排水速度の影響は非常に大きい

ことがわかったので, 吸排水速度の推定法または計算法の早期確立が望まれる.

(4) 凍結の相互干渉については古くから経験されている現象であるが, 理論的にはほとんど取り扱われていなかった. 本解析により, 定性的ではあるが納得のいく結果が得られた. いろいろの境界条件やタンク形状等の影響を加味するためには 3 次元多層問題を解析すればよいが, コアサイズと計算時間が膨大となり実用性が薄くなる.

(5) 凍土の成長を制御しほかの地下構造物に凍結膨張の悪影響を与えない方法として Heat Fence を設けることは, 非常に有効な方法であることがわかった. Heat Fence の深さはおおむねタンクの深さと同程度であれば十分であり, Heat Fence は周方向に連続でなくても十分効果が期待できる.

(6) LNG のような超低温の液体の貯蔵に関しては地盤凍結温度の凍結領域への影響は非常に小さいことがわかった.

以上の数値解析結果より材料定数が温度に依存しないとき (線形) の低温地下タンク周辺地盤の相変化を伴う熱伝導数値解析法として処罰法と差分法の併用は有効であることがわかった. 最後に, 河原田, 名取先生には終始ご指導をいただき感謝の意を表します.

参 考 文 献

- 1) Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C.: Conduction of Heat in Solids, Oxford, 1959.
- 2) 庄司正弘: 凍結問題の数値解法, 冷凍, 第50巻第573号, 昭和50年7月
- 3) 近藤尚夫: 防熱構造の外部に生ずる凍結状態の数値解析, 機械学会講演論文集 740-17, 昭和49年11月.
- 4) H. Kawarada, M. Natori: On Numerical Solutions of Stefan Problem I Memoirs of Numerical Mathematics No. 1, 1974.
- 5) H. Kawarada, M. Natori: On Numerical Solutions of Stefan Problem II Memoirs of Numerical Mathematics No. 2, 1974.
- 6) 河原田・名取: 相変化を伴う多相熱拡散問題, 第13回, SICE 学術講演会, 昭和49年8月.
- 7) H. Kawarada, M. Natori: On numerical methods for the Stefan problem by means of the finite difference and the penalty Japan-France Seminar on Functional Analysis and Numerical Analysis, Tokyo, Japan, Sept., 1976.
- 8) 片山功蔵ほか: 伝熱工学の進展3, 養賢堂, 1974.
- 9) E. Penner: The Importance of Freezing Rate in Frost Action in Soils, Res. Paper No. 126, Nat. Res. Council, Ottawa, Canada, Jul. 1961.
- 10) 高志勤ほか: 土の凍結膨張率におよぼす凍結速度, 有効応力の影響に関する研究, 雪氷, 36巻, 2号, 1974.

(1977.7.8・受付)