

自由表面をもつ層流せん断流中の球に働く抗力と揚力

DRAG AND LIFT ON SPHERES IN A FREE SURFACE POISEUILLE FLOW

福岡捷二*・石田貴**・迹目英正***
By Shoji FUKUOKA, Takashi ISHIDA and Eisei NIGEME

1. 序

流体中の固体粒子に作用する流体力は、通常2つの成分に分解される。流れに平行な抗力 (drag force) と流れに直角な揚力 (lift force) である。粘性流体中の固体粒子に作用する流体力は、ナビエ・ストークスの方程式 ($N-S$ 方程式) を適切な境界条件のもとに解き求める。しかし、 $N-S$ 方程式の慣性項は、速度について非線形なため、解析的に解が得られる流れはきわめて限定される。レイノルズ数 (Re 数) の小さい非常に遅い流れでは、慣性項は粘性項に比して無視でき (ストークス近似)、この場合には解が求まる¹⁾。Stokes は、このような方法で最初に一樣流中の球のまわりの軸対称流れを解き、抗力を算定した。Ossen は、慣性項を限られた範囲で考慮し (オセーン近似)、Goldstein は、オセーンの方法を改良し、抗力を求めている。しかし、これらは $N-S$ 方程式の線形化によって得られたもので、解の適用範囲は $Re < 2$ 程度に限定される。また、Saffman²⁾ や Bretherton³⁾ によって指摘されているように慣性項を省略した解は、運動方向に直角な力 (揚力) が零となる問題点をもつ。

このように、境界のない無限領域の非常に遅い流れのような最も単純な場合でもその流れの中に球が存在する場合には、解析的に取り扱える範囲に限度がある。にもかかわらず、壁で制限された速度分布のある流れの中に球が存在するときの抗力と揚力を算定することは、粒子浮遊流の運動を知るうえで重要である。この問題は、特に化学工学の分野で扱われる流動層上の流れ、圧搾空気による粉体輸送等に関連し多く研究されてきた。この場合、無限域のストークス抵抗、あるいはオセーン抵抗に

補正をくわえ、境界のある有限域の抵抗を算定することが多かった。

さて、壁の存在は2つの異なった様式で流体力に影響すると考えられる。

1) 壁により付加される抵抗のため、球と流体の間に相対速度が生じる。

2) 壁の存在は、球のまわりの流況を変化させ、流体の慣性力の影響が無限域の場合と異なる。この影響は、壁の付近で特に著しい。

Segré と Silberburg⁴⁾ は、管内ポアズイユ流中を浮遊する小さな中立粒子が、管軸から6割の位置に集中して運動することを示し、球の運動に及ぼす揚力の重要性を明確にした。

Saffman⁶⁾ は上述の1) の場合、すなわち、流体中の固体粒子は、壁によって直接には影響を受けないが、流速分布の影響を受ける場合の揚力について理論的に考察した。その結果、遅い速度 V をもつ一樣せん断流中を運動する球は、運動方向に直角に揚力

$$L = 81.2 \mu V a^2 \kappa^{1/2} / \nu^{1/2}$$

を受けることを示した。ここに、 a は球の半径、 κ は速度勾配である。Rubinow と Keller⁷⁾ は、遅い粘性流体中を回転しながら運動する球に作用する抗力と揚力を Ossen 方程式にもとずいて解析した。すなわち、

$$\text{抗力: } F = -6 \pi \mu a V \left[1 + \frac{3}{8} Re + O(Re) \right]$$

$$\text{揚力: } L = \pi a^3 \rho \Omega \times V [1 + O(Re)]$$

を求め、Ossen によって求められた抗力は、回転があっても Re のオーダーまで補正の必要がないこと、揚力の主たる部分の第一項には、粘性係数は関係なく、ポテンシャル理論を用いた翼に働く揚力と同型であること等を明らかにした。これらが、 Re 数の小さい層流せん断流中に球が存在する時の抗力、揚力に関する主要な研究である。

一方、 Re 数が比較的大きな ($Re > 10$) 層流せん断流

* 正会員 Ph.D 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 日本下水道事業団

*** 正会員 (株)協和コンサルタンツ

中の球のまわりの流れに関する解析的研究は、非線型項の重要性から、著者らの知る限り存在せず、relaxation法等を用いた数値解があるにすぎない⁸⁾。FayonとHappel⁹⁾、Young¹⁰⁾、EichhornとSmall¹¹⁾らは、このような R_0 の範囲で壁の影響のある層流せん断流中の球に作用する流体力の実験的研究を行った。Fayonらは、管内ポアズイユ流れの中に軸から種々の距離に球を吊し、抗力を測定し $R_0 < 40$ に対し実験式を提案した。Youngは、傾斜管を上昇する層流中で流体力と釣り合って底面に接して静止している球に及ぼす抗力と揚力を測定した。しかし、Youngの測定値には管壁と球の摩擦の影響が入っているため測定資料の信頼性は乏しい。Eichhornらは、Youngと同様に、直径1.0cmの円管を用いて流量、球の重量、直径を変えながら壁から種々の距離で流体力と球の水中重量を平衡させ、この状態で管の傾斜角、球の水中重量、位置等を知ることによって粒子 R_0 数が(80~250)の範囲のポアズイユ流中の壁から各位置での抗力、揚力、回転速度を求めた。実験的に求めた抗力係数、揚力係数、無次元回転速度が粒子 R_0 数や無次元シアパラメーターに対し検討されているが、無次元量の選び方や抗力および揚力に及ぼす球の回転の効果など十分な考察がなされていないなど問題点を含む。しかし、速度勾配と壁の影響がある流れの中に球が固定されずに自由な状態で存在する時の揚力の測定は彼等が最初であり、得られた実験結果の意義は大きい。

一般に、固体粒子浮遊流では、流体と固体の密度差のために相対速度差が生じる。せん断流中で流体と球が相対運動している時の球に作用する流体力を知ることは、粒子浮遊流の力学特性を理解するうえで重要である。本研究はその第一段階として、底面と水面で境界された層流中に吊されて静止している球に作用する抗力と揚力を測定し、固定境界(底面)、変形境界(水面)、流速分布の流体力に及ぼす影響を明らかにする。さらに円管内層流での測定値¹¹⁾と著者らの開水路層流での測定値を比較検討し、抗力、揚力の統一的な説明を試みる。

2. 実験装置と実験方法

(1) 実験装置

乱流中で球に作用する流体力を測定しようとするとう速度変動のために流体力も大きく変動する。本研究の目的は、せん断流中の抗力と揚力を算定し、かつ境界の存在と流速分布が流体力に如何なる影響を及ぼすかを調べることにあるので、乱流変動に起因する影響を取り除いて検討することが望ましい。そこで、流体としてグリセリン溶液(温度10°Cで比重1.1974、動粘性係数 $\nu=53$

センチストークス)を用い、層流で実験を行った。グリセリン溶液の動粘性係数は、温度に敏感なため流体力の測定時に頻りに測温し、あらかじめオストワルド粘度計で求めておいた動粘性係数と温度の関係より、その時の正しい動粘性係数を求めた。

実験水路は、長さ200cm、幅15cm、高さ10cmの

表-1 球の直径とグリセリン中重量

記号	直径 (mm)	グリセリン 中重量 (グラム重)	記号	直径 (mm)	グリセリン 中重量 (グラム重)		
A	1	7.5	E	12'	13.2		
	2	7.4		14	13.2		
	3	7.4		16	13.0		
	3'	7.4		17	13.1		
	3''	7.4		17'	13.1		
	4	7.4		20	13.1		
	6	7.4		G	1	16.1	
	12	7.4			2	16.1	
	15	7.4			3	16.1	
	20	7.5			4	16.1	
	C	1			10.0	17	15.9
		2			10.0	18	15.9
2'		10.0	20	15.9			
3		9.9	Re	15.9	-0.98		
3'		9.9		I'	1	18.9	
4		10.0	2		18.9		
5		10.0	3	18.9			
6		10.0	4	18.8			
14		10.0	11	18.8			
Ye		10.0	12	18.8			
Re		10.0	13	18.8			
D		1	11.4	14	18.9		
	2	11.4	I	1	21.0		
	3	11.4		2	20.9		
	4	11.4		3	21.0		
	5	11.4		4	21.0		
	13	11.4		11	20.9		
	14	11.4		11	21.0		
	16	11.4		12	21.0		
	E	1		13.4	12	21.0	
		2		13.2	13	21.0	
		3		13.2	13	21.0	
		3'		13.2	14	21.0	
4		13.2		14	21.0		
5		13.2	J	2	24.9		
9		13.2		4	24.9		
12		13.2		5	24.9		

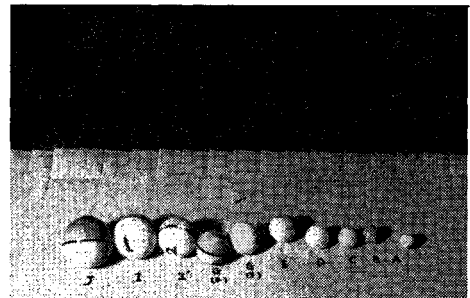


写真-1 球の一覧

アクリル製循環式開水路である。測定は、境界層が水面まで到達し、流れが等流とみなせる区間で行った。実験は、常に水深を 7.1 cm に保って行われた。用いた球は、市販の玉うきでそれらを写真-1 に示す。玉うきは、ほとんど球とみなしてもよいものを用いた。球は 8 種類で直径の小さい方から順番に A, B, C, ..., J と名づけた。直径 A ~ J の球に油, グリセリン溶液, 水, 鉛玉などを重心が偏らないように玉うき内部につめ, それぞれの径の球に対し 4~10 個の異なる重量の球を製作した。球のグリセリン溶液中重量は 0.1 mg まで測定可能な直示天秤を用いて秤量した。それぞれの球の直径とグリセリン中重量を表-1 に示す。負のグリセリン中重量は球の密度がグリセリン密度よりも小さいことを示す。

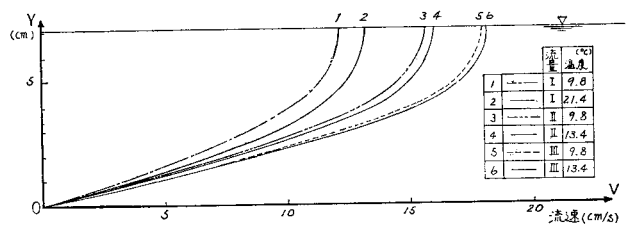


図-1 流速分布

(2) 実験方法

6 種類の異なる流量について、球に作用する流体力の測定を行った。流速分布は、等流区間の水路中央線上で水素気泡発生装置を用いて写真撮影し読み取った。図-1 に示すように、流速は放物線分布をしていることがわかる。すなわち、

$$\bar{u} = \frac{u}{u_0} = (2\eta - \eta^2) \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $\eta = y/h$, h : 水深, u_0 は表面流速で平均流速 u_m と $u_0 = 1.5 u_m$ の関係にある。

次に球の抗力と揚力の測定法を述べる。等流区間で図-2のごとく、糸を用いて球を下から支持したとき、支点 O のまわりのモーメントの釣り合いより式 (2) が成立する。

$$F \times y_c + \int_0^{y_c-a} q_i(y) y dy - (L + W_i) x_i = 0 \dots (2)$$

ここに、 F : 抗力, L : 揚力, y_c : 底から球の中心までの高さ, x_i : 糸の支点より水平方向の距離, $q_i(y)$: 糸に分布する単位長さあたりの抗力, W_i : 球のグリセリン中重量, a : 球の半径である。球に作用する偶力は式 (2) に示されたモーメントに比較して小さく無視できる。なぜならば、球と糸の交点に接する平面に対し、糸はすべての実験にわたって、ほぼ 90° の角度をなしていたためである。次に、グリセリン中重量のみが異なる同一径の球を同じ高さに支持したとき、流れは等流であるので球に作用する抗力、揚力は等しい。したがって次式が成立する。

$$F \times y_c + \int_0^{y_c-a} q_i(y) y dy - (L + W_i) x_i = 0 \dots (3)$$

よって、これら一連の (y_c, W_i, x_i) の測定により、 F と L を求めることができる。しかし、球を図-2 のように下から支持すると水表面に近づくにつれて、糸の抗力の影響が比較的大きくなる。この場合には図-3 に示

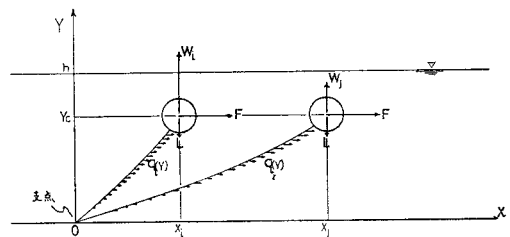


図-2 球の支持方式 (下から支持)

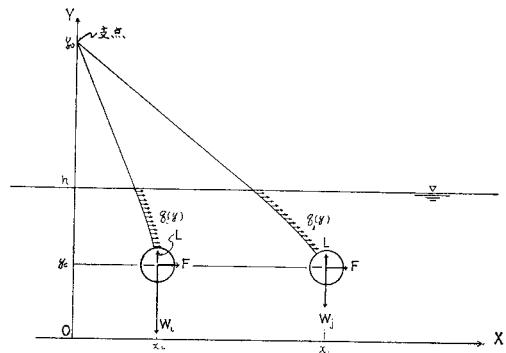


図-3 球の支持方式 (上から支持)

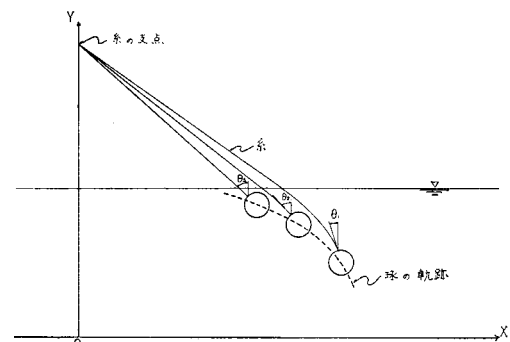


図-4 球の動く軌跡

すように球を上方より支持する。すなわち、球の支持方式を変えて同一の水理条件で測定を行い実験の信頼性を高めるようにした。上から支持した場合のモーメントの釣り合い式は式 (4) で与えられる。

$$F \times (y_0 - y_c) + \int_{y_c+a}^h q_i(y) (y_0 - y) dy - (W_i - L) x_i = 0$$

$$F \times (y_0 - y_c) + \int_{y_c+a}^h q_i(y)(y_0 - y) dy \Bigg\} \dots (4)$$

$$-(W_i \cdot L) x_i = 0$$

ここに、 y_0 ：底から糸の支点までの高さ、 h ：水深。図—2の型式で球を支持したとき、図—4に模式的に示すように、球は支点を中心とし、糸の長さ l を半径とする円周上を動く。角 θ に対し安定な釣り合い状態にあるとき、球の静止する場所は、支点の位置、糸の長さ l_i 、 $F(y)$ 、 $L(y)$ 、 W_i に応じ一意的に定まる。したがって、糸の長さ l_i を変えることによって任意の位置 y に球を静止させ、この状態での球の左端、下端を透明紙上に写し取り、球の半径を加えて中心座標を読み取った。このようにして得た離散的な点を連ね、球の動く軌跡を決定する。測定の一例を図—5(a)、(b)に示す。これより任意の高さ y_c における x_i 座標を決定することができる。これらの軌跡の測定は、流れが二次元とみなせる水路中央線上で行った。

3. 球の抗力と揚力の算定

(1) 支持糸の抗力

式(2)、(3)、(4)により球に作用する抗力、揚力を計算するには糸に作用する分布荷重 $q_i(y)$ を決める必要がある。用いた糸は0.2号の釣糸で直径6/100mmときわめて細く、加わる抗力も高々数十mg重である。これは、最小の球Aを除いては球自身に作用する流体力に比し十分小さい。したがって次の仮定のもとに糸に作用する抗力を算定する。

- (i) 糸の弾性、重量は無視できる。
- (ii) 糸は流下方向の投影面積に比例する抗力のみを受け、糸の抗力係数は一様流中の円柱の抗力係数で表わすことができる。

これらの仮定より、分布荷重は次式で与えられる。

$$q_i(y) = C_D \frac{1}{2} \rho u(y)^2 d \dots (5)$$

ここに、 C_D ：円柱の抗力係数、 d ：糸の直径、 ρ ：流体の密度。一様流中の非常に小さい Re 数に対する円柱の抗力は Stokes 近似では無限遠点の境界条件を満足しないため Ossen 近似にもとずいて Lamb¹²⁾ によって理論的に求められている。

すなわち、

$$C_D = \frac{8\pi}{Re} [\varepsilon + O(Re\varepsilon)] \dots (6)$$

ここに、

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{r_0 Re}{8}\right)}, Re = \frac{ud}{\nu}, r_0 = e^{\gamma} = 1.781$$

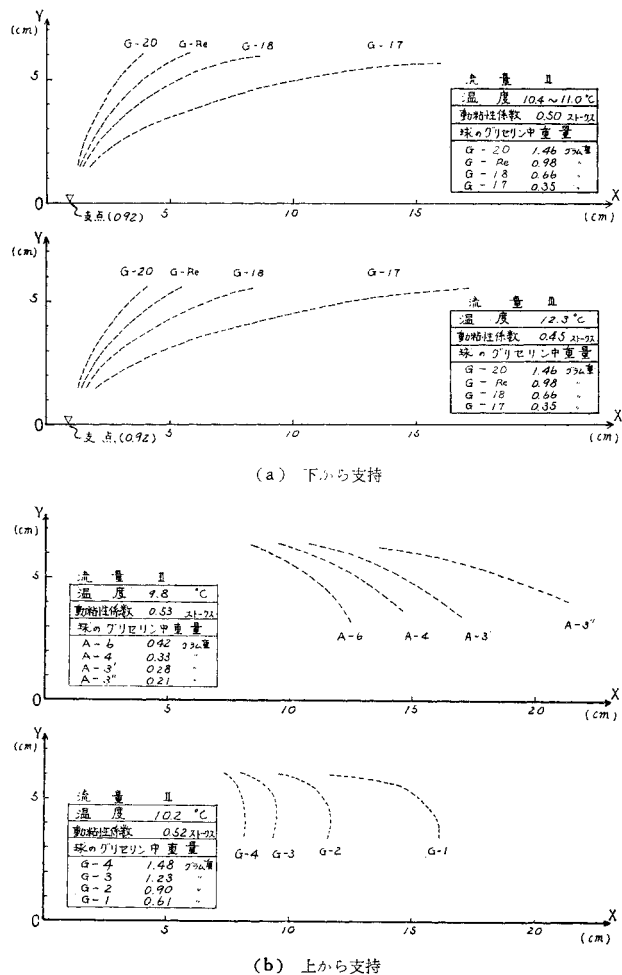
これまでに実測された円柱の抗力は $Re=0.06$ が最小で、これ以下の Re 数での実測は存在しないが、 Re が 10^{-5} の球についてなされた抗力の実測から類推して、Ossen 近似による解は $Re < 0.06$ の範囲に対しても成立することが知られている^{12), 13)}。本実験の範囲では $Re \sim 0.1$ であるので、式(6)は第一項のみを考慮すればよい。このとき、式(5)は

$$q_i(y) = 4\pi\mu u(y) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{r_0 Re}{8}\right)} \dots (7)$$

となる。球に作用する流体力は式(3)または(4)から式(7)による糸に作用する抗力を差し引くことによって求めることができる。

(2) 球の抗力、揚力の算定

A~Jの各球について4~10個重量の異なる球を用い



図—5 球の動く軌跡の測定例

て、各球について数組の測定を行った。式(3)または(4)より F, L に関する式をたて2組の観測値を用いて F と L を求める。式(3)で (i) 番目と $(i+k)$ 番目の測定値を用いると

$$F = \frac{1}{y_c} \left[\frac{x_i x_{i+k} (W_i - W_{i+k})}{x_i - x_{i+k}} - \int_0^{y_c - a} q_i(y) y dy \right] \dots\dots\dots (8)$$

$$L = - \frac{W_i x_i - W_{i+k} x_{i+k}}{x_i - x_{i+k}} \dots\dots\dots (9)$$

同様に式(4)により

$$F = \frac{1}{y_0 - y_c} \left[\frac{x_i x_{i+k} (W_i - W_{i+k})}{x_i - x_{i+k}} - \int_{y_c + a}^h q(y) (y_0 - y) dy \right] \dots\dots\dots (8)'$$

$$L = \frac{W_i x_i - W_{i+k} x_{i+k}}{x_i - x_{i+k}} \dots\dots\dots (9)'$$

このようにして計算したものに系統的誤差があらわれたときにそのデータを除去し、残りの計算値の平均をもって、 F と L とした。また式(3), (4)を観測方程式として、最小自乗法を適用して求めた F と L は、第一の方法とほとんど違いは現われなかった。

4. 実験結果と考察

球の抗力、揚力と水深の関係を、球径をパラメーターとして示したのが 図-6, 図-7 である。図中黒点は球の中心を示し、実線は下から支持、点線は上から支持した場合である。点線と実線は、球径が同一であれば、同一高さでは一致すべきものであるがわずかにずれている。この理由は、測定に時間がかかるため、測定中にグリセリン溶液の温度が変化し、そのため流体力にわずかな差が生じること、支持糸の抗力の補正に小さな誤差を伴うこと、両球は平均的にみて直径が同じであるが同一球ではないことによる。しかし、測定のみずかしさ、および測定値に影響する多くの要因を考慮すると測定値の精度は非常によいといえる。

(1) 境界のある層流せん断流中の球の抗力

一樣流中の球の抗力係数の定義に倣い、せん断流中の抗力係数を球の中心にあたる流速 u_c を用いて次のように表示する。

$$C_{DC} = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho u_c^2 \pi a^2} \dots\dots\dots (10)$$

このとき、せん断流中で静止している球の抗力係数 C_{DC} は、粒子レイノルズ数 $Re_c = u_c \cdot d_s / \nu$, 水

深と底面から粒子の中心までの距離の比、 y_c/h , 水深と粒径の比 h/d_s の関数

$$C_{DC} = f_1 \left(Re_c, \frac{y_c}{h}, \frac{d_s}{h} \right) \dots\dots\dots (11)$$

または、式(1)の速度分布形を y で微分して、相対水深を速度勾配の無次元形で書き表わすと、

$$C_{DC} = f_2 \left(Re_c, \frac{h}{u_0} \frac{du}{dy}, \frac{d_s}{h} \right) \dots\dots\dots (12)$$

与えられる。式(11)または式(12)をみると、せん断流中の球の抗力係数は、一樣流中の抗力係数と異なることが予想される。

図-8は、式(10)で定義した C_{DC} と Re_c の関係を示す。当然のことながら C_{DC} は Re_c と一義的な関係がなく、球径、流量等によって分れることを示している。図中には、比較のため、一樣流中の球の抗力係数 C_{DO}

$$C_{DO} = \frac{24}{Re} + \frac{3}{\sqrt{Re}} + 0.34 \dots\dots\dots (13)$$

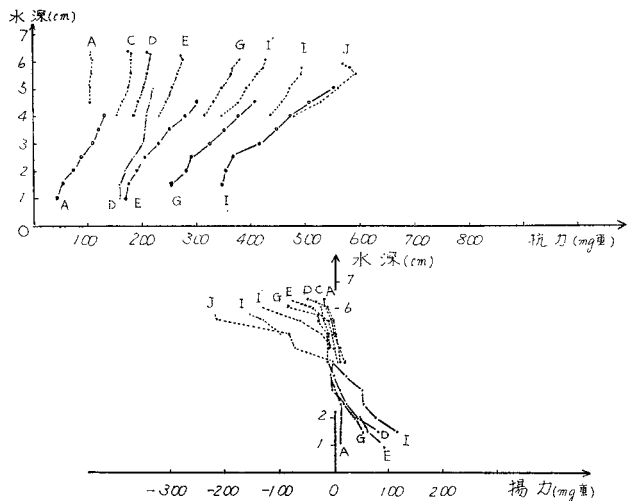


図-6 抗力・揚力の実測値 (流量 I)

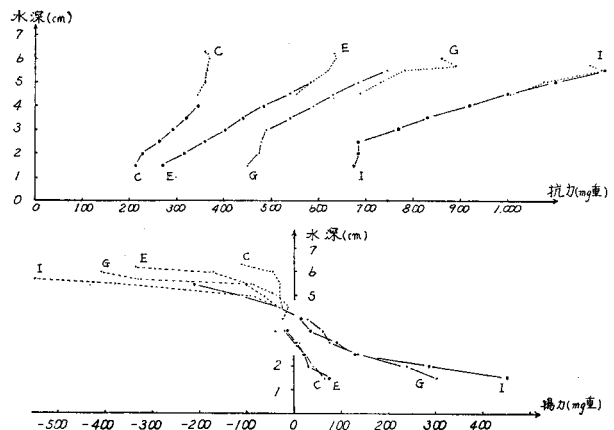


図-7 抗力・揚力の実測値 (流量 III)

も示す¹⁴⁾。

さて、図-8で特定の流量で特定の球の C_{DC} と Re_c の関係に注目する。この曲線上で Re_c が增大するときは、球は水面方向に移動し、 u_c が増大、 du/dy が減少する。このとき、球の抗力には速度勾配の影響が減じ、一様流中のそれに漸近すると考えられる。しかし、開水

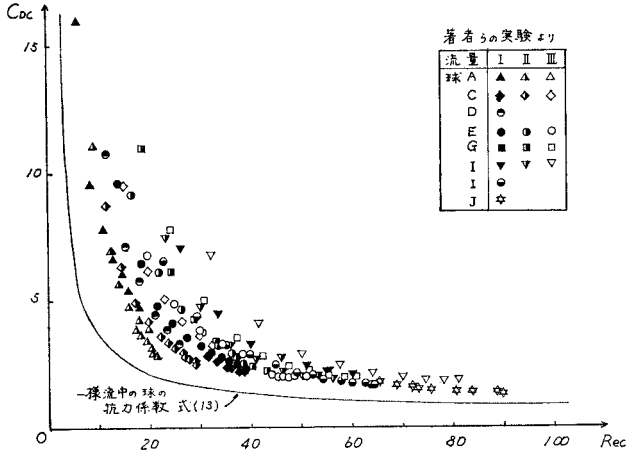
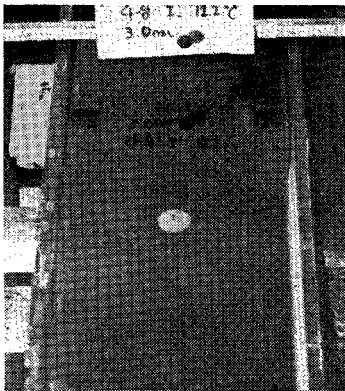


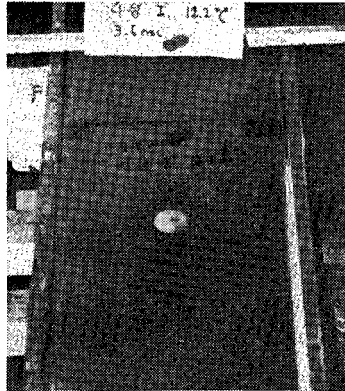
図-8 C_{DC} と Re_c の関係

路流の場合には、球が水面に近づくにつれて水面が変形し造波抵抗が大きくなる。この結果、 Re_c が大きくなるときの C_{DC} は、一様流中の抗力係数に造波抵抗係数をくわえたものに近い値をとる。写真-2は、球Iが流体中の種々の高さで吊されているときに板に描いた平行線を水面に反射させ、水面の変形を写真撮影したものである。写真-2(1)は、球の中心が水底から3.0cmの位置にあるときのもので水面の変形はほとんど認められないが、写真-2(2)に示すように、 $y_c = 3.5$ cmでは小さな変形が認められ、以下順次水面に近づくにつれて水面の変形、したがって造波抵抗が増大することがわかる。一方、 Re_c が小さい方向へ移動するときは、球が水底近くへ移動し、 u_c は減少、 du/dy は増大する。抗力には速度勾配と壁の影響が顕著に表われ、一様流の抗力係数に比して大きくなるのがわかる。

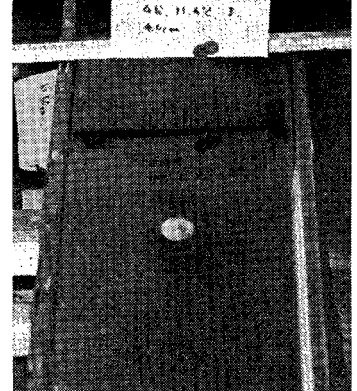
次に、流量を変化させ、底から球の中心までの高さを一定に保ちながら球の径を変化させたとき(このとき、それぞれの流量に対し速度勾配は一定)の C_{DC} と Re_c の関係を図-9に示す。流量が異なると Re_c 、 du/dy が同じでも、このときと



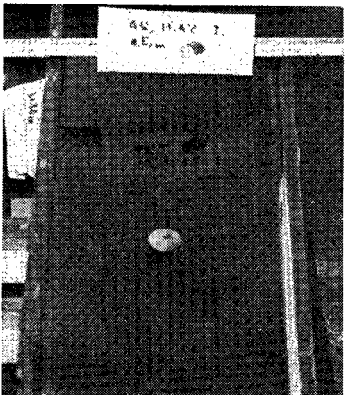
(1) $y_c = 3.0$ cm



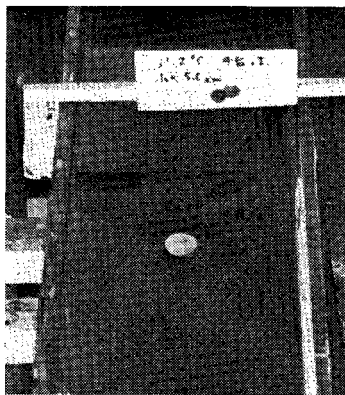
(2) $y_c = 3.5$ cm



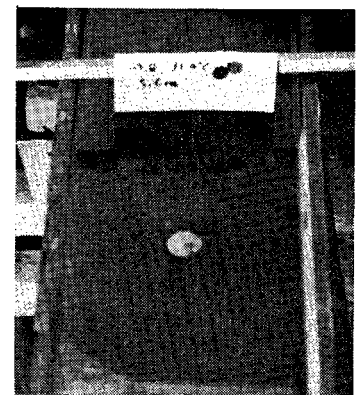
(3) $y_c = 4.0$ cm



(4) $y_c = 4.5$ cm



(5) $y_c = 5.0$ cm



(6) $y_c = 5.6$ cm

写真-2 球による水面の変形状況(球 I)

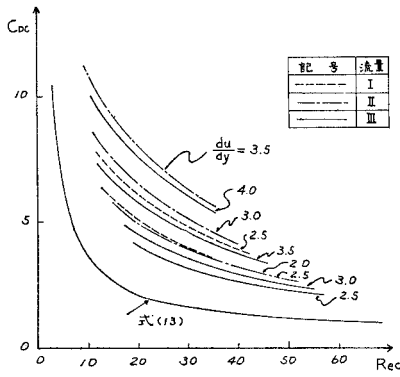


図-9 C_{DC} に及ぼす速度勾配の効果

る C_{DC} の値は異なる。これは、流量が大のときと小のときでは、同じ du/dy のあらわれる位置は、流量が大のときのほうが小のときより壁から遠くなるためである。したがって、図-9 は、抗力に及ぼす速度勾配の影響をよく捕えてはいるが壁からの距離が考慮されていず、不十分である。さて、式 (1) を η で微分すると

$$\frac{d\bar{u}}{d\eta} = \frac{h}{u_0} \frac{du}{dy} = 2(1-\eta) \dots\dots\dots (14)$$

となる。式 (14) によると、 h が一定のもで壁から球の中心までの距離を一定 ($\eta_c = \text{一定}$) とすると、代表流速 u_0 (または流量) と速度勾配でつくられた無次元速度勾配 $d\bar{u}/d\eta$ が一定になる。したがって、速度勾配そのものでなく、無次元速度勾配に関係する壁からの距離をパラメーターに選ぶと、図-9 で示された問題点は解決されると思われる。図-10 は、このような考えのもとに整理されたものである。図中の破線は、 y_c (または η_c) が一定のものについて、実測値の中心を通るようにひいたものであり、矢印は、本来測定値が属すべきグループを示している。式 (11) または、式 (12) が示すように C_{DC} には、 d_s/h も影響すると思われる。本研究では、実験全体を通じて水深を一定に保ち球径を変化させて、 $0.11 < d_s/h < 0.3$ の範囲で実験を行った。図-10 より、壁のごく近くを除くと、等しい Re_c と η_c をもち、球径のみが異なる (すなわち d_s/h が異なる) 2つの球の C_{DC} の値は、ほぼ等しく、本実験の範囲では d_s/h は η_c と Re_c ほど C_{DC} には重要でないことがわかる。これより Re_c と η_c を知るとほぼ一義的に C_{DC} が求まる。すなわち、流体の物理特性と流量が既知のポアズイユ流中の任意の位置に、ある大きさの球が存在するとき、 u_0 または u_m が既知であるので、式 (1) より u_c 、したがって Re_c が決まりこれと η_c より C_{DC} を求めることができる。

図-10 では、壁の付近 ($\eta_c \approx 0.2$) では、他の位置に比し、測定値のばらつきがやや大きい。このばらつきの

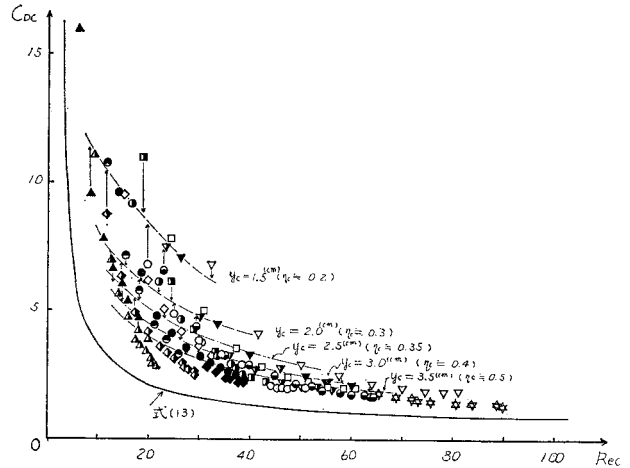


図-10 壁と速度勾配の影響のあるせん断流中の抗力係数

最大の理由は、壁の近くでは、壁から球の中心までの距離 y_c と球の半径 a の相対的な大きさ ($\eta_c \approx 0.2$ では $1.2 < y_c/a < 4$) によって、球のまわりの流れが影響され、圧力分布が変化するためであり、第二の理由は、壁の近くでは抗力が小さいため、測定値に含まれる誤差が相対的に大きくなるためである。しかし、図-10 は、壁の影響が強い層流せん断流中の球の抵抗特性を知りうえて重要である。

図-11 は、Eichhorn と Small による円管内層流中の回転自由な球の抗力係数と、著者らによるほぼ同じ Re_c 範囲 ($Re_c > 50$) での静止球の抗力係数の測定値の比較を示す。

この図は、壁の存在と球の回転が、抗力にどのように影響するかを理解するのに役立つ。Eichhorn らのデータの横の数字は、回転角速度 (rad/sec) を示す。回転数 0 は、管の中心軸上に球が存在し、回転数増大とともに管壁方向に球が移動することを意味している。図-11 によれば、Sphere No. 1 と Sphere No. 2 の実験は、球の回転数が小さいにもかかわらず、著者らによる同じ Re_c 数の静止球の実験値よりも C_{DC} がかなり大きく、Sphere No. 3 と No. 4 の実験は、逆に球の回転数が大きいにもかかわらず、静止球の実験値とほぼ同一の C_{DC} の値をもつ。この理由は、Sphere No. 1 と No. 2 を用いた実験では、管径と球径の比 D/d_s が、それぞれ 3.3 と 4.5 で、Sphere No. 3 と No. 4 の実験 ($D/d_s \approx 7$) に比して、管壁が球のまわりの流れに影響し、流れの慣性力の影響が大きくなったためである。しかし、球の回転は、壁の影響ほど抗力には影響しない。このことは、序論で述べたように、球の抗力には、回転がそれほど影響しないという Rubinow らの結論が $Re_c > 50$ の層流でも大筋において成立していることを示しているようにみえる。しかし、Eichhorn らの測定値は、壁の影響

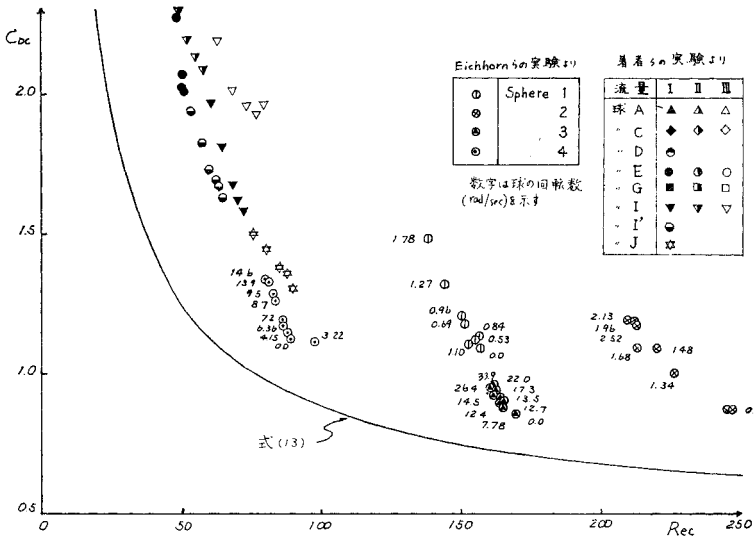


図-11 球の抗力に及ぼす回転の効果

響と球の回転が加わった抵抗であるので、両者の影響を分離した実験によって、ここで得られた定性的な結論を確認する必要がある。

さて、図-10は、壁と速度勾配の影響が卓越する流れの中に球が存在するときの抗力について有用な情報を与えるが、すべての y_c で C_{DC} を求めるためには、図-6, 7 を用いてすべての η_c について図-10 を完成しなければならない。したがって、図-10 の表示はせん断流中の球の抗力係数を統一的に考えるうえで本質的ではあるが実用的に不便である。そこで、せん断流中の球の抗力係数 C_{DC} から、これと同じ Re_c をもつ一様流中の球の抗力係数 C_{D0} を差し引いたもの、すなわち壁と速度勾配のみに起因する抗力係数 ($C_{DC} - C_{D0}$) を縦軸に、球径、速度分布、壁の影響を考慮に入れたせん断

流の特性量から構成された無次元量を横軸を選んで整理したものが図-12 である。著者らの実測値は、 $(C_{DC} - C_{D0})$ の値が、

$$\frac{du}{dy} \frac{d_s}{u_c} \frac{1}{(Re_c)^2} < 10^{-3}$$

では、全体的な傾向と若干異なり ($C_{DC} - C_{D0}$) の値がやや大きくなる。この理由は、 10^{-3} 以下では、球が水面の付近にあり、造波抵抗が加わるためである。著者らの測定値によれば、球の抗力係数は近似的に次式で表わすことができる。

$$(C_{DC} - C_{D0}) = 32 \left\{ \left(\frac{du}{dy} \right) \left(\frac{d_s}{u_c} \right) \frac{1}{(Re_c)^2} \right\}^{1/2} \dots \dots \dots (15)$$

図-12 には、Eichhorn らの実験値もプロットされている。Sphere No. 3 ($D/d_s=6.8$) と Sphere No. 4 ($D/d_s=6.9$) は、ともにほぼ式 (15) の関係を満足している。一方 Sphere No. 1 ($D/d_s=3.3$) と Sphere No. 2 ($D/d_s=4.5$) は式 (15) で示される関係よりも大きい値を示している。これは、前述のように、Sphere No. 1 を用いた実験では、管径と球径の比 D/d_s が他に比して小さく、管壁の影響が大きいためである。Sphere No. 2 も Sphere No. 1 ほどではないが、管壁の影響が大きく、しかも $Re_c \approx 220$ で著者らや Spheres No. 3, No. 4 の Re_c よりも大きいため、回転のない静止球にたいして見出された式 (15) が成り立たないためと思われる。

(2) 境界のある層流せん断流中の球の揚力

層流せん断流中に球が存在したとき、この球に働らく揚力は、次の2種類からなると考えられる。

- (i) 球の存在のため流線の曲がりにより生ずるもの
- (ii) せん断流中で球の回転運動により生ずるもの

一般的には、この2つの力の合成されたものが揚力であるが、序でも述べたように、境界の存在は (i), (ii) の効果を高め、無限領域中の球の揚力よりも大きくなる。

さらに、本研究で取り扱っている自由表面のある層流では、変形境界 (自由表面) が抗力に影響したと同様に揚力にも影響すると思

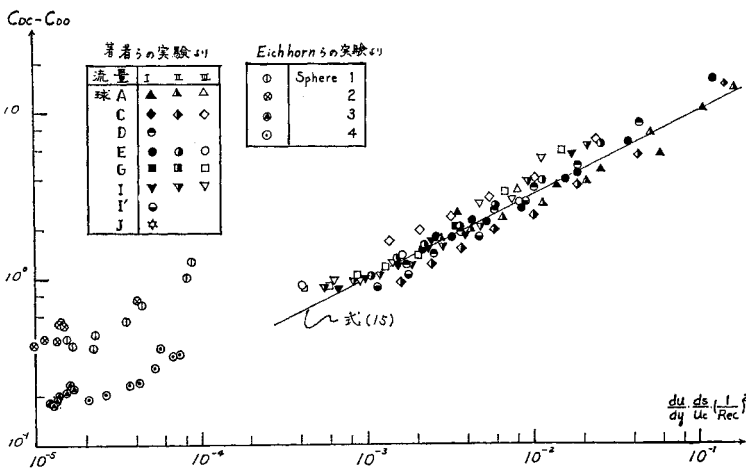


図-12 $(C_{DC} - C_{D0})$ と $\frac{du}{dy} \frac{d_s}{u_c} \left(\frac{1}{Re_c} \right)^2$ の関係

われる。本節では、これらの点に着目し、境界のある流れの中での揚力について調べる。

揚力の実測値を示す 図-6, 7 によれば、水深 $y_c=3.5$ cm 付近で揚力の符号が変化しているのが認められる。すなわち、この位置より上では、揚力は下向きに働き、下では上向きに働らく。慣性力と速度勾配が重要な流れの場では、球に上向き揚力が生ずることはいうまでもない。一方、下向き揚力には、水面の存在が不可欠であり、この力は、球が存在することによる水面の変形によって及ぼされる反力と考えられる。両者の力は逆方向に働くので、それらの重ね合せとして 図-6, 7 の揚力が観測される。水面と底面の揚力に対する影響の度合は、球の大きさによって異なり、大きな球の方が揚力の符号の変化する点は、水面方向に寄る傾向がある。

揚力係数を抗力係数と同様に次式で定義する。

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho u_c^2 \pi a^2} \dots \dots \dots (16)$$

せん断流中の揚力係数も抗力係数と同様に式 (11) または (12) の関数関係で表わされる。

(a) 負の揚力

写真-2 が示すように、球 I が流体中にあるとき、 $y_c=3.5$ cm 付近で水面の変形が現われ始め、球が水面に近づくにつれて変形は顕著になる。図-7 は、 $y_c=3.5$ cm 付近で揚力が負になることを示す。水面の変形開始点が揚力の負になる点とほぼ一致し、変形増大とともに

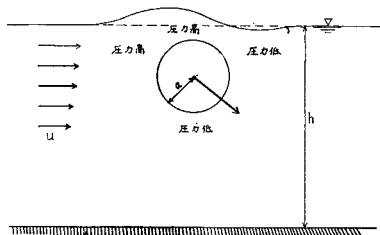


図-13 水面付近の球のまわりの圧力分布

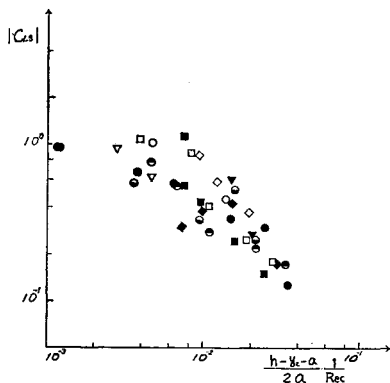


図-14 水面からの負の揚力

負の揚力が大きくなっている。図-13 は、球が水面に近づいたときの水面の変形および周囲の圧力状態を模式的に示す。このような場合、球は、図示したような“力”を受けると考えられる。この水面からの反力に起因する負の揚力に対し、式 (16) で定義される揚力係数 C_{Ls} と、球が流体中に存在しないときの乱されていない水深から球の上面までの距離を球径で除し、それに $1/Re_c$ を乗じた無次元量の関係を 図-14 に示す。

これにより次のことがいえる。水面からの反力が比較的小さいところ、すなわち、球が水面から遠いところでは流量、球径等に関係なく $-C_{Ls}$ と $(h-y_c-a) \cdot 1/2 a \cdot Re_c$ はほぼ一定の関係にあるが、水面に球が近づくにつれて測定値は、散らばる傾向がある。この領域では、流れの慣性力が大きいので、球による水面の変形も大きい。したがって、 h が一定という仮定は不十分であり、むしろ h の変化量が重要である。図-14 から判断して、負の揚力が水面の変形の影響で起っていることは確かである。しかし、負の揚力に対し次のような考え方があることもここで付記しておく。序で述べたように、管内ポアズイユ流中の中立粒子が半径の 6 割の位置に集中し運動することを、Segré と Silberburg⁹⁾ が実験的に見出し、これは、古くから知られている血管中の赤血球の挙動とともに、球に作用する流れと直角方向の力に関して興味ある問題を提起している。この事実、球に対し壁から中心方向に、また中心からは壁方向に力が働いているとも考えることができ、水面の存在がなくても、流れの流速分布と粒子の相互作用でこのような揚力の場が決定する可能性もある。しかし、Segré らの結果は低レイノルズ数で見出されたものであり、Eichhorn¹¹⁾ による実験 ($80 < Re_c < 250$) では、このような特異な現象は観測されなかった。

(b) 正の揚力

図-15 は、正の揚力に関する揚力係数 C_{LB} と壁の影響、流速分布を考慮に入れたせん断流の無次元特性量

$$\frac{du}{dy} \frac{d_s}{u_c} \frac{1}{Re_c}$$

の関係を示す。回転のない正の揚力に関する著者らの実験値によれば、 C_{LB} は、無次元量

$$\frac{du}{dy} \frac{d_s}{u_c} \frac{1}{Re_c}$$

によって一義的に決定され、

$$C_{LB} = \frac{L_B}{\frac{1}{2} \rho u_c^2 \pi a^2} = 18 \left(\frac{du}{dy} \frac{d_s}{u_c} \frac{1}{Re_c} \right)^2 \dots \dots (17)$$

で与えられる。

図中に、Eichhorn らの実測値も再整理してプロットしてある。回転のある球の揚力係数に関する Eichhorn らの測定値は、著者らの測定値より数段大きい。この理

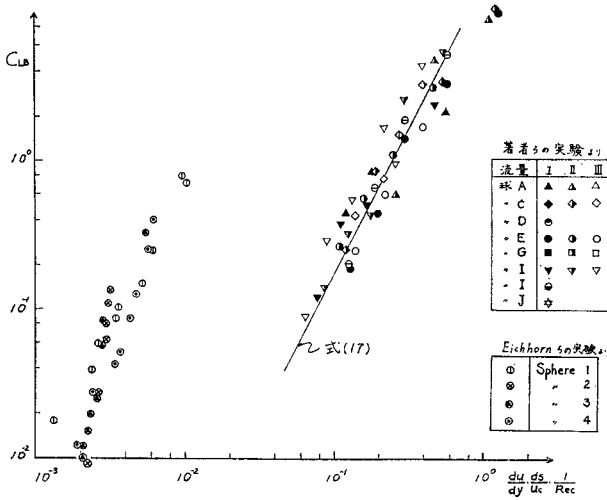


図-15 C_{LB} と $\frac{du}{dy} \frac{d_s}{u_c} \frac{1}{Re_c}$ の関係

由は Eichhorn らの実験では、球が回転し、しかも管径に対する球径の比が小さいため、両者の影響が揚力に極端に効くためである。しかし、図-12 が示すように、これら2つの影響は、抗力には揚力ほど顕著に効かず、Eichhorn らと著者らの実測値が、ほぼ同じ抗力特性を示していることは興味深い。

次に、揚力に及ぼす球の回転効果を考えてみる。いま球は滑らず、回転するものとする。図-16 のように球を微小厚さをもった円板の集合と考えて解析を進める。球は、小さいものと考え円板の上端と下端の流速分布を直線で近似する。

$$\frac{du}{dy} = \beta = \text{一定}$$

球が回転角速度 ω (rad/sec) で回転するものとする、円板の上端、下端の速度は、それぞれ次式で与えられる。

$$u_u = \beta \frac{d_s}{2} (1 + \cos \theta) - \left(\frac{d_s}{2} \omega + \frac{d_s}{2} \cos \theta \cdot \omega \right)$$

$$u_l = \beta \frac{d_s}{2} (1 - \cos \theta) - \left(\frac{d_s}{2} \omega - \frac{d_s}{2} \cos \theta \cdot \omega \right)$$

したがって、円板の上下端の速度差は

$$\Delta u = (\beta - \omega) d_s \cos \theta$$

となる。このとき、球の回転によって生ずる揚力 L_r を、各円板のまわりの循環による揚力の和として表わすと、次式で与えられる。

$$L_r = \rho \left(u_c - \frac{\omega d_s}{2} \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\pi \left(\frac{d_s}{2} \cos \theta \right)^2 \omega \frac{d_s}{2} \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{\pi}{3} \rho \left(u_c - \frac{\omega d_s}{2} \right) \omega d_s^3 \dots \dots \dots (18)$$

式 (18) を揚力係数で表わすと、式 (19) となる。

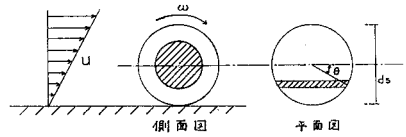


図-16 球のまわりの循環の計算モデル

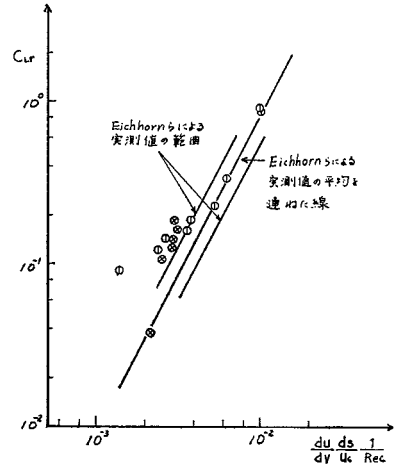


図-17 球の回転による揚力

$$C_{Lr} = \frac{L_r}{\frac{1}{2} \rho u_c^2 \pi a^2} = \frac{8 \left(u_c - \frac{\omega d_s}{2} \right) \omega d_s}{3 u_c^2} \dots \dots \dots (19)$$

式 (18) は Rubinow ら⁷⁾の回転球の理論式と同型であることは興味深い。図-17 は、Eichhorn らによる Sphere No. 1 ($0 < \omega < 4.84$ rad/sec) と Sphere No. 2 ($0 < \omega < 2.52$ rad/sec) の実測回転角速度 ω を用いて式 (19) より計算した C_{Lr} と、それらの計算値に対応する Eichhorn らの実測値 C_L の比較を示す。理論値は、かなり粗い仮定を含むにもかかわらず、実測値に比較的よい説明を与えている。理論値が実測値よりやや大きいのは次の理由によると思われる。球の場合には上流側から球の全周にわたって流体を下流に送りこめるが、円板の集合の場合には上面と下面からのみ送りこむ。したがって、球のほうが円板の集合よりも圧力分布を、一様化しやすいため、実測値の揚力が計算値よりも小さくなる。

図-17 では、Eichhorn らの Sphere No. 3 と Sphere No. 4 の実験値が除外されている。Sphere No. 3 と Sphere No. 4 の実験値は、回転角速度がそれぞれ ($8 \text{ rad/sec} < \omega < 34 \text{ rad/sec}$) と ($3.2 \text{ rad/sec} < \omega < 14.6 \text{ rad/sec}$) で高く式 (19) では、揚力は過大にみつめられる。このことは、球の回転数が低いうちは、揚力が ω に比例して増加し、回転数が高くなると回転が球の揚力にそれほど効果的に寄与しないことを意味する。

(3) 抗力と揚力の関係

揚力が正の領域では、速度勾配と壁の存在が抗力と揚力にはたす役割りは同じであるので抗力と揚力の間には一定の関係があると考えられる。式(15)と式(17)から

$$\frac{C_{LB}}{C_{DC}-C_{DO}} \propto \left(\frac{du}{dy} \cdot \frac{d_s}{u_c} \right)^{3/2} / Re_c \dots\dots\dots (20)$$

の関係が得られる。ここに式(20)を比例関係であらわしたのは次の理由による。すなわち、式(15)、(17)はいずれも、あるばらつきをもった実測値の平均を表わす関係式であり、したがって両式の比が、必ずしも $C_{LB}/C_{DC}-C_{DO}$ の実測値の平均値を表わすとは限らないためである。式(20)中の無次元量の関係を実験値を用いて検証したのが図-18である。式(20)は、層流せん断流中のシア効果による抗力の増分に対する揚力の関係をかなり適切に説明しているといえよう。ある Re_c をもつ粘性一様流中の球は、 $C_L=0, C_{DC}=C_{DO}$ をもち、このとき $du/dy=0$ である。一様流では、式(20)は $0/0=0$ となる。しかし、式(20)は、このような特別な流れの条件に対し導かれたものではない。式(20)は、ある Re_c をもつ壁のある層流せん断流れの中に球があるとき、速度勾配は、抗力の増加よりも揚力の増加に強く影響することを示していると解釈すべきである。

5. 結 語

本研究は、壁面と速度勾配が存在する自由表面のある層流せん断流中に球が静止しているとき、球に作用する抗力と揚力を調べたものである。同時に、流体力に及ぼす水面の影響も検討されている。実験の Re_c の範囲は(10~100)であり、Eichhorn らによる円管内層流中で回転自由な球の抗力と揚力の測定値との比較も行われている。ここで報告されている測定値の信頼性は十分高いが、得られた結果は、実験が行われたレイノルズ数の範囲について成立するものであり、この範囲を越える層流せん断流中の球の流体力については、さらに検討が望まれる。

本論で求められた揚力について若干説明を加える必要がある。前述のように、球は水面の変形によって下向きの力を受ける。一方、底面の存在は球に上向きの力を及ぼすので、球に作用する鉛直方向の力は、この2つの相反する方向をもつ力の合成である。したがって、特に、揚力の符号を変える付近では、両者の影響が加わって揚力の大きさが決っている。水面の影響が下向きに及ぶ範囲と底面の影響が上向きに及ぶ範囲は、球径を一定とすると、水深の大きさにも関係する。このとき、揚力は h/d_s に関係する。本論では、 h を一定に保ち、 d_s を

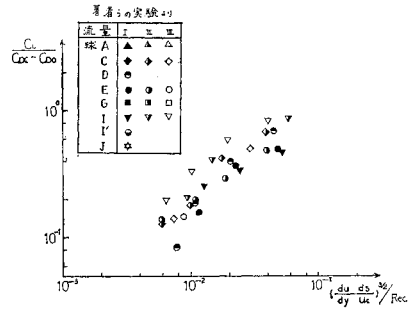


図-18 せん断流中の抗力と揚力の関係

変化させて実験を行ったため、揚力に及ぼす水深の影響を明確には見積れなかったが、この点に関してさらに検討する必要がある。

本文で得られた主要な結論を列挙すると次のとおりである。

1) 層流せん断流中の抗力は、無限の広がりをもつ一様流中の抗力よりも大きく、その差は、低 Re_c で著しく、 Re_c の増大につれて相対的に小さくなる。

2) 抗力は、次の4つの情報が与えられると一意的に決定できる(図-10)。

- (i) 流体の物理特性
- (ii) 最大流速または流量
- (iii) 球の直径
- (iv) 球の壁からの相対位置 ($\eta_c=y_c/h$)

3) せん断流中の球の抗力係数 C_{DC} から、同じ Re_c の一様流中の球の抗力係数 C_{DO} を取り除いたものは、壁と流速分布の影響を考慮にいれたシアパラメーターで決定できる。この関係式は

$$C_{DC}-C_{DO}=32 \left\{ \frac{du}{dy} \frac{d_s}{u_c} \frac{1}{(Re_c)^2} \right\}^{1/2}$$

と与えられる。

4) 自由表面のある層流せん断流中の揚力は、底面近くでは上向きに(正の揚力)、水面近くで下向き(負の揚力)に作用し、実際の揚力場は、両者の重ね合わせで決っている。

5) 下向き揚力の発生原因は、球の存在による水面の変形によって誘起される反力である。これは実験によって確かめられた。揚力の符号の変化する位置は、球の大小に関係し、大きい球のほうが水面側で起る。

6) 回転しない球の正の揚力は、次式で近似することができる。

$$C_{LB} = \frac{L_B}{\frac{1}{2} \rho u_c^2 \pi a^2} = 18 \left(\frac{du}{dy} \frac{d_s}{u_c} \frac{1}{Re_c} \right)^2$$

7) 回転数が 5 rad/sec 以下で回転する球の揚力は、球を円板の集合と考えて求めた循環の和から求める。しかし、回転数が高くなると理論は実験値を説明し得な

い。これは、回転数が高くなると、揚力が回転数に比例するほど増大しないためである。

8) シアー効果による抗力の増大に対する揚力の比を表わす関係式が求められた。この関係式は、ある Re_c をもつ壁のある層流せん断流れの中に球があるとき、速度勾配は、抗力の増加よりも揚力の増加に強く影響することを示す。

参考文献

- 1) Goldstein, S. : Modern developments in fluid dynamics, Vol. 2, Dover, 1965.
- 2) Saffman, P.G. : On the motion of small spheroidal particles in a viscous liquid, J. Fluid Mech. Vol. 1, 1956.
- 3) Bretherton, F.P. : The motion of rigid particles in a shear flow at low Reynolds number, J. Fluid Mech., Vol. 14, 1962.
- 4) Happel, J. and Brenner, H. : Low Reynolds number hydrodynamics, Prentice-Hall, 1965.
- 5) Segré, G. and Silberburg, A. : Behavior of macroscopic rigid spheres in poiseuille flow, Part 2. Experimental result and interpretation, J. Fluid Mech., Vol. 14, 1962.
- 6) Saffman, P.G. : The lift on a small sphere in a slow shear flow, J. Fluid Mech., Vol. 22, Part 2, 1965.
- 7) Rubinow, S.I. and Keller, J.B. : The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid, J. Fluid Mech., Vol. 11, 1961.
- 8) 例えば Jensen, V.G. : Viscous flow round a sphere at low Reynolds number < 40 , Proc. Roy. Soc. London, Series A, 249, 1959.
- 9) Fayon, A.M. and Happel, J. : Effect of a cylindrical boundary on a fixed rigid sphere in a moving viscous fluid, A.I.Ch.E. Journals, Vol. 6, No. 1, 1960.
- 10) Young, D.F. : Drag and lift on spheres within cylindrical tubes, J. of Hydraulics Div., Proc. ASCE, HY. 6, June, 1960.
- 11) Eichhorn, R. and Small, S. : Experiments on the lift and drag of spheres suspended in a poiseuille flow, J. Fluid Mech., Vol. 20, 1964.
- 12) Lamb, H. : Hydrodynamics, 6th ed. Cambridge Univ. Press, p. 616, 1932.
- 13) Moor, F.K. : Theory of Laminar Flow, Princeton Univ. Press, 1964.
- 14) 水理公式集：昭和 46 年度改訂版，土木学会編，p. 411, 1971.

(1977.7.22・受付)