

# 粒子の移動による移流分散方程式の数値解法の検討

## ON THE NUMERICAL SOLUTIONS OF CONVECTIVE-DISPERSION EQUATION BY SHIFTING PARTICLES

神野 健二\*・上田年比古\*\*  
By Kenji JINNO and Toshihiko UEDA

### 1. ま え が き

河川、沿岸海域、地下浸透領域あるいは大気における汚染物質などの拡散現象には移流分散方程式が適用され、その差分法による数値解については多くの研究がなされている。この場合、移流項が分散項に比べて卓越するときには移流項の離散化誤差が問題となり、この誤差防止の計算法が種々考えられているが、計算条件によっては十分な効果をあげていないようである。さてPinder, Cooper<sup>1)</sup>は地下密度流における塩水楔の侵入過程を移流分散方程式により数値計算したが、この方法は濃度を与えた粒子を領域に多数配置し、これをその点の流速で移動させて、その特性曲線上で粒子濃度の変化を算定し領域内の濃度分布の時間変化を求めてゆくものである。本報ではまずこの計算法を若干修正した方法を示し、次に1次元および2次元の移流分散方程式の理論解と、ここで述べる方法による数値解および従来の差分法による数値解を比較して、移流分散方程式の移流項、分散項の離散化誤差および数値解の安定性など本報による数値解の基本的特性について検討を行ったものである。

### 2. 計算方法について

Pinder らの計算方法を説明するため、ここでは1次元移流分散方程式：

$$\partial C/\partial t + u\partial C/\partial x = D\partial^2 C/\partial x^2 \dots\dots\dots (1)$$

あるいは

$$dC/dt = D\partial^2 C/\partial x^2 \dots\dots\dots (2)$$

を考える。いま浸透層内の流れを対象にして考えて、式(1),(2)のCを濃度、uをx方向の空隙内の平均実流速、Dをx方向の分散係数とし、ここでは一定値と

する。

移流分散方程式の式(2)による表示は、浸透層内の全領域にわたって配置された、ある塩分濃度をもつ流体粒子(以後粒子という)がその位置の流速uで移動したときの濃度変化を示すもの、すなわち粒子移動の特性曲線上での濃度算定の式である。Pinder らの計算法はこのような式(2)についての数値解である。いまその算定過程を1次元を例にとって具体的に示そう。図-1のようにはじめに全浸透領域(x軸)に、ある濃度を与えたN個の粒子をδXの間隔で配置しその粒子番号をKとする。次にx軸上にhの等間隔で固定格子点iをきめ、この区分領域を区間SiとしSi区間の中にn個の粒子が入っているものとする。また数値計算の時間間隔をδt=k、時間ステップ数をjとし、ある時刻jkの粒子Kの濃度をC<sup>j</sup>(K)とする。いま与えられたj時刻の粒子の配置とその濃度からj+1時刻の状態を求める方法を述べよう。まず各粒子をそのときの濃度を保持したままその点の速度で1ステップの時間だけ移動させてi区間に流入する粒子(個数をnとする)を求める。次にこれら粒子濃度の平均値を格子点iの仮濃度C<sub>i,j'</sub>とする。すなわち

$$C_{i,j'} = (1/n) \sum_{i_i=1}^n C^j(l_i) \dots\dots\dots (3)$$

ここにl<sub>i</sub>はSi区間内で単独につけた粒子番号である。なお、ここでiは時刻j+1に粒子が流入した区間iを意味し、jは粒子の濃度がj時刻の値であることを意味している。次にこの値を式(2)の右辺の離散値に

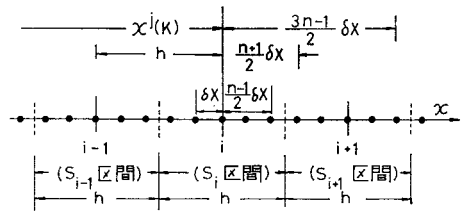


図-1 1次元の粒子配置図

\* 正会員 工修 九州大学助手 工学部水工土木学教室  
\*\* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学教室

用いて、次のように格子点  $i$  の濃度増分  $\delta C_{i,j+1}$  を求め、これを前述の格子点  $i$  の仮濃度および  $j$  時刻の粒子濃度に加えて、 $j+1$  時刻の格子点 および各粒子濃度を求める。すなわち、濃度増分  $\delta C_{i,j+1}$  は

$$\delta C_{i,j+1} = (kD/h^2)(C_{i+1,j}' - 2C_{i,j}' + C_{i-1,j}') \dots\dots\dots (4)$$

$j+1$  時刻の格子点濃度

$$C_{i,j+1} = C_{i,j}' + \delta C_{i,j+1} \dots\dots\dots (5)$$

$j+1$  時刻の粒子濃度

$$C^{j+1}(K) = C^j(K) + \delta C_{i,j+1} \dots\dots\dots (6)$$

このようにして時刻  $j+1$  の格子点  $i$  の濃度および各粒子の濃度と位置が求められるのでふたたび各粒子を速度  $u$  で移動させ上述の操作を繰り返す。以上が Pinder らの用いた計算法である。本報ではこれに若干の修正を加える。すなわち上述の計算法では式 (6) のように格子点の濃度増分  $\delta C_{i,j+1}$  を等しくその区分領域内に含まれる粒子の濃度増分としている。このため各格子点に対して算定された濃度増分の相違がそのまま領域境界をはさんで相隣る粒子の濃度増分の相違となるため、この両粒子の濃度に不連続をきたし、数値解の誤差の原因となると考えられる。

したがって、本報ではこの Pinder らの方法を修正して、上述の不連続をできるだけなくすように次の方法を提案した。すなわち隣り合う格子点間の濃度増分の変化を 2 次曲線と仮定しこの曲線を  $\delta C_{i-1,j+1}$ ,  $\delta C_{i,j+1}$  および  $\delta C_{i+1,j+1}$  を用いて求め、 $i$  区分領域内の各粒子の濃度増分  $\delta C^{j+1}(K)$  および時刻  $j+1$  の濃度を次のように算定する方法である。

$$\begin{aligned} \delta C^{j+1}(K) &= \delta C_{i,j+1} + (\delta C_{i+1,j+1} - 2\delta C_{i,j+1} \\ &\quad + \delta C_{i-1,j+1}) \cdot \xi^2 / 2h^2 \\ &\quad + (\delta C_{i+1,j+1} - \delta C_{i-1,j+1}) \cdot \xi / 2h \\ &\quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$C^{j+1}(K) = C^j(K) + \delta C^{j+1}(K) \dots\dots\dots (8)$$

ここに  $\xi = x^{j+1}(K) - ih$  で、格子点  $i$  からの距離のずれである。以上の方法による数値解析法、すなわち

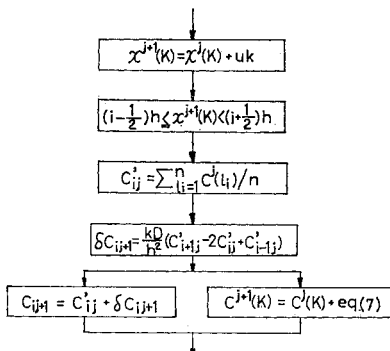


図-2 粒子移動法による計算のフローチャート

Pinder らの方法 および上記の修正法を一括してここでは“粒子移動法”と略称する。図-2 にはこのフローチャートを示している。

### 3. 粒子移動法の離散化誤差について

粒子移動法の数値計算結果の誤差については後述の計算例について検討することにして、ここではこの計算誤差の原因となる移流分散方程式の離散化に伴う誤差について粒子移動法と explicit 差分法（ここで用いたものは各種の explicit 差分法のうち、もっとも簡単なものであり以下においても同様である）とを比較検討する。まず Taylor 展開により

$$\begin{aligned} C(x \pm h, t) &= C(x, t) \pm h\partial C/\partial x + (h^2/2)\partial^2 C/\partial x^2 \\ &\quad \pm (h^3/6)\partial^3 C/\partial x^3 + (h^4/24)\partial^4 C/\partial x^4 \pm \dots \end{aligned}$$

および

$$C(x, t+k) = C(x, t) + k\partial C/\partial t + (k^2/2)\partial^2 C/\partial t^2 + \dots$$

したがって、高次の微分項を省略すれば

$$\begin{aligned} \partial C/\partial x &= (1/2h) \{C(x+h, t) - C(x-h, t)\} \\ &\quad - (h^2/6)\partial^3 C/\partial x^3 \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial^2 C/\partial x^2 &= (1/h^2) \{C(x+h, t) - 2C(x, t) \\ &\quad + C(x-h, t)\} - (h^2/12)\partial^4 C/\partial x^4 \dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial C/\partial t &= (1/k) \{C(x, t+k) - C(x, t)\} \\ &\quad - (k/2)\partial^2 C/\partial t^2 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

したがって式 (1) は

$$\begin{aligned} &\{C(x, t+k) - C(x, t)\} + (uk/2h) \\ &\quad \cdot \{C(x+h, t) - C(x-h, t)\} - (kD/h^2) \\ &\quad \cdot \{C(x+h, t) - 2C(x, t) + C(x-h, t)\} \\ &= (k^2/2)\partial^2 C/\partial t^2 + (ukh^2/6)\partial^3 C/\partial x^3 \\ &\quad - (kDh^2/12)\partial^4 C/\partial x^4 \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

となる。この式の右辺を 0 としたものが explicit 差分法であり、したがって右辺がこの差分法の離散化誤差となるが、とくに右辺第 2 項は移流項の離散化誤差であって、これには流速が含まれており流速が大きい場合にはその誤差が大きくなる。これに比べて粒子移動法は式 (2) によるため、移流項の離散化誤差の発生がなく、これは粒子移動法の最大の利点といえよう。

次に分散項  $D\partial^2 C/\partial x^2$  の離散化に伴う誤差について検討する。explicit 差分法では分散項に含まれる微分項  $\partial^2 C/\partial x^2$  を次のように近似している。

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv (1/h^2) \{C(x+h, t) - 2C(x, t) + C(x-h, t)\} \\ &\quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

すなわち、そのための離散化誤差は式 (10) との差をとって、

$$f_1 - \partial^2 C/\partial x^2 = (h^2/12)\partial^4 C/\partial x^4 \dots\dots\dots (14)$$

次に粒子移動法について考える。式 (10) の離散値は格子点濃度をとらねばならないが、粒子移動法では式

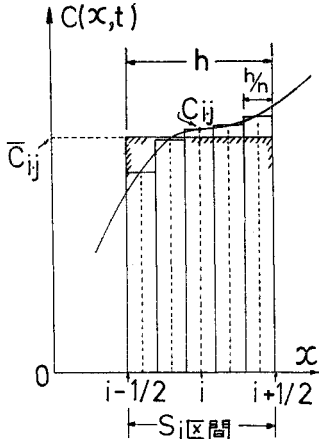


図-3 格子点値  $C_{i,j}$  と区間平均値  $\bar{C}_{i,j}$  との相異

(3) のように 格子点  $i$  の濃度のかわりにその区分領域  $S_i$  内にある粒子の濃度の平均値を用いて式 (4) により差分計算を行っている。したがって、離散値に平均値を用いることによる差分計算の誤差を考えてみよう。いま時刻  $t$  (or  $j$ ) について離散値をとることにして、まず式 (10) 右辺の離散値、たとえば  $C(x, t) = C_{i,j}$  を図-3 のように  $S_i$  区間の連続関数の平均値  $\bar{C}_{i,j}$  で代用する場合を考える。ここに  $\bar{C}_{i,j}$  は式 (3)~(5) の  $C_{i,j}'$  に相当するものである。いま  $x = ih$  とし  $C(x, t)$  を  $x = ih$  のまわりに Taylor 展開すると

$$C(x, t) = C_{i,j} + (x - ih) \partial C / \partial x |_{i,j} + \{(x - ih)^2 / 2\} \partial^2 C / \partial x^2 |_{i,j} + \dots$$

$$\bar{C}_{i,j} = (1/h) \int_{(i-1/2)h}^{(i+1/2)h} C(x, t) dx$$

$$= C_{i,j} + (h^2/24) \partial^2 C / \partial x^2 |_{i,j} + (h^4/1920) \partial^4 C / \partial x^4 |_{i,j} + \dots$$

同様に

$$\bar{C}_{i\pm 1,j} = C_{i\pm 1,j} + (h^2/24) \partial^2 C / \partial x^2 |_{i\pm 1,j} + (h^4/1920) \partial^4 C / \partial x^4 |_{i\pm 1,j} + \dots$$

これらの式より

$$f_2 \equiv (1/h^2) (\bar{C}_{i+1,j} - 2\bar{C}_{i,j} + \bar{C}_{i-1,j}) \dots \dots \dots (15)$$

を式 (13) に対応して定義し式 (10) との差をとればこの場合の誤差は

$$f_2 - \partial^2 C / \partial x^2 = (1/24) (\partial^2 C / \partial x^2 |_{i+1,j} - 2 \partial^2 C / \partial x^2 |_{i,j} + \partial^2 C / \partial x^2 |_{i-1,j}) + (h^2/1920) (\partial^4 C / \partial x^4 |_{i+1,j} - 2 \partial^4 C / \partial x^4 |_{i,j} + \partial^4 C / \partial x^4 |_{i-1,j}) + (h^2/12) \partial^4 C / \partial x^4 |_{i,j}$$

右辺第 2 項を省略すれば

$$f_2 - \partial^2 C / \partial x^2 \doteq (h^2/24) \partial^4 C / \partial x^4 |_{i,j} + (h^2/12) \partial^4 C / \partial x^4 |_{i,j} = (h^2/8) \partial^4 C / \partial x^4 |_{i,j} \dots \dots \dots (16)$$

次に図-3 の柱状図に示すように  $S_i$  区間を  $n$  個の

小区間に分けて上述の積分計算の代わりに部分求積で平均値  $\bar{C}_{i,j}$  を求めると、次のようになる。図-3 において  $i$  点より  $\pm m$  番目の小区間の濃度  $C_{ih \pm (mh/n), j}$  を  $ih$  のまわりに Taylor 展開すると

$$C_{ih \pm (mh/n), j} = C_{i,j} \pm (mh/n) \partial C / \partial x |_{i,j} + \{(mh/n)^2 / 2\} \partial^2 C / \partial x^2 |_{i,j} \pm \dots$$

$$\therefore \bar{C}_{i,j} = (1/n) \sum_{m=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} C_{ih \pm (mh/n), j}$$

$$= C_{i,j} + (h^2/24) (1 - 1/n^2) \partial^2 C / \partial x^2 |_{i,j} + (h^4/1920) (1 - 1/n^2) (1 - 7/3 n^2) \partial^4 C / \partial x^4 |_{i,j} + \dots$$

同様に  $\bar{C}_{i\pm 1,j}$  を求め式 (15) から算定した値を  $f_2'$  とし、 $f_2'$  と式 (10) との差をとればこの場合の誤差は

$$f_2' - \partial^2 C / \partial x^2 = (1/24) (1 - 1/n^2) (\partial^2 C / \partial x^2 |_{i+1,j} - 2 \partial^2 C / \partial x^2 |_{i,j} + \partial^2 C / \partial x^2 |_{i-1,j}) + (h^2/1920) (1 - 1/n^2) (1 - 7/3 n^2) \cdot (\partial^4 C / \partial x^4 |_{i+1,j} - 2 \partial^4 C / \partial x^4 |_{i,j} + \partial^4 C / \partial x^4 |_{i-1,j}) + \dots + (h^2/12) \partial^4 C / \partial x^4 |_{i,j}$$

式 (16) と同様にして

$$f_2' - \partial^2 C / \partial x^2 \doteq (h^2/24) (1 - 1/n^2) \partial^4 C / \partial x^4 |_{i,j} + (h^2/12) \partial^4 C / \partial x^4 |_{i,j} = (h^2/24) (3 - 1/n^2) \partial^4 C / \partial x^4 |_{i,j} \dots (17)$$

式 (17) で示される誤差は粒子移動法で  $S_i$  区間内の  $n$  個の粒子が等間隔にある場合の分散項の微分項の誤差に相当していると考えられる。式 (14), (16), (17) を比較するとこの場合の離散化誤差は explicit 差分法より粒子移動法の方が 1.5 倍程度になるようであるが、オーダー的には同じく  $h^2$  のオーダーである。なお、これに分散係数  $D$  を乗じた分散項の誤差は  $D$  が大きくなればそれに応じて大きくなっていくものと考えられる。表-1 は式 (1) の  $u=0$  の場合の 1 次元分散方程式

$$\partial C / \partial t = D \partial^2 C / \partial x^2$$

表-1 1 次元分散方程式の  $\partial^2 C / \partial x^2$  とこれに対する粒子移動法の離散化誤差 [(16) 式] (単位 (%)/ $\text{cm}^2$ )  
[ $h=3.4 \text{ cm}$ ,  $k=37 \text{ sec}$ ,  $D=0.084 \text{ cm}^2/\text{sec}$ ]

i	t=5k		t=10k	
	$\partial^2 C / \partial x^2$	eq.(16)	$\partial^2 C / \partial x^2$	eq.(16)
1	0.0130	-0.001517	0.0051	-0.000322
2	0.0149	-0.001027	0.0076	-0.000393
3	0.0088	0.000112	0.0072	-0.000221
4	0.0032	0.000423	0.0050	-0.000006
5	0.0007	0.000222	0.0027	0.000101
6	0.0001	0.000060	0.0012	0.000099
7	0.0	0.000010	0.0004	0.000058
8		0.000001	0.0001	0.000024
9		0.0	0.0	0.000008
10				0.000002
11				0.0

の境界条件  $C(0, t)=1.0, C(\infty, t)=0$ , 初期条件  $C(x, 0)=0$  での解析解

$$C(x, t) = \text{erfc}(x/2\sqrt{Dt}) = (2/\sqrt{\pi}) \int_{x/2\sqrt{Dt}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta \quad \dots\dots\dots (18)$$

を用いて算定した  $\partial^2 C/\partial x^2$  および式 (16) の粒子移動法の離散化誤差であり、この約 2/3 倍が explicit 差分法の離散化誤差である。表から  $\partial^2 C/\partial x^2$  に対する離散化誤差の比率がわかる。またこの比率は時間の経過につれて小さくなるのがわかる。なお、この誤差が実際の数値計算結果にどの程度の影響をもつかについては後の計算例で述べている。

4. 粒子移動法の安定性について

差分方程式の安定性を調べるには直接差分を求めるか<sup>2)</sup>、差分方程式を空間座標について Fourier 変換し波数ごとの増幅因子を検討する方法が従来よりとられている<sup>3), 4), 5)</sup>。後者の方法による explicit 差分法の安定性については次のように述べられている。いま式 (12) の右辺を 0 とした式から

$$C_{i,j+1} = (kD/h^2 - uk/2h) C_{i+1,j} + (1 - 2kD/h^2) C_{i,j} + (kD/h^2 + uk/2h) C_{i-1,j}$$

これに Fourier 変換

$$\hat{C}_j(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{i,j} e^{-I\sigma x} dx, \quad I = \sqrt{-1}$$

を行うと

$$\left. \begin{aligned} \hat{C}_{j+1}(\sigma) &= (a + Ib) \hat{C}_j(\sigma) \\ a &= 1 - (2kD/h^2)(1 - \cos \sigma h) \\ b &= -(ku/h) \sin \sigma h \end{aligned} \right\} \dots\dots (19)$$

この場合の増幅因子は  $\hat{q} = a + Ib$  であり  $|\hat{q}| = \sqrt{a^2 + b^2} \leq 1$  のとき安定である。とくに  $u=0$  の場合は

$$0 \leq kD/h^2 \leq 0.5 \quad \dots\dots\dots (20)$$

さて粒子移動法については本法が各粒子の濃度変化を数値計算の基本としていることから粒子濃度の差分式について上述の考えと同様にしてその安定性を検討する。なお差分式として Pinder らの式を修正した式 (8) は取り扱いがかなり複雑となることからここでは式 (6) について行うことにする。いま式 (3) の  $n$  を各区間で一定と考えれば、

$$C^{j+1}(K) = C^j(K) + (kD/nh^2) \cdot \left[ \sum_{l_{i+1}=1}^n C^j(l_{i+1}) - 2 \sum_{l_i=1}^n C^j(l_i) + \sum_{l_{i-1}=1}^n C^j(l_{i-1}) \right] \quad \dots\dots\dots (21)$$

粒子間隔  $\delta X$  がすべて等しい場合を考え、 $K$  番目の粒子濃度  $C^j(K)$  の Fourier 変換を行えば、

$$\hat{C}^j(K) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-I\sigma X} C^j(K) dX, \quad \text{ここに } K = X/\delta X \quad \dots\dots\dots (22)$$

また  $(K+m)$  番目の粒子濃度  $C^j(K+m)$  の Fourier 変換は

$$\begin{aligned} \hat{C}^j(K+m) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-I\sigma X} C^j(K+m) dX \\ &= e^{I\sigma m\delta X} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-I\sigma(X+m\delta X)} C^j(K+m) d(X+m\delta X) \\ &= e^{I\sigma m\delta X} \hat{C}^j(K) \end{aligned}$$

これらの式を用いて式 (21) 右辺の各粒子濃度について Fourier 変換し等比級数の和を求めれば

$$\begin{aligned} \hat{C}^{j+1}(K) &= \hat{C}^j(K) + (kD/nh^2) \{ e^{(3n-1)I\sigma\delta X/2} \\ &\quad - e^{-(n-1)I\sigma\delta X/2} - 2(e^{-(n-1)I\sigma\delta X/2} \\ &\quad - e^{(n+1)I\sigma\delta X/2} + e^{(n+1)I\sigma\delta X/2} \\ &\quad - e^{(3n+1)I\sigma\delta X/2} \} \times \{ \hat{C}^j(K) / (1 - e^{I\sigma\delta X}) \} \end{aligned}$$

すなわち

$$\hat{C}^{j+1}(K) = \hat{Q}_1 \hat{C}^j(K)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに, } \hat{Q}_1 &= 1 - \{ 4 \sin^3(\sigma h/2) / (2\sigma h / \sin(\sigma h/2n)) \} \cdot (kD/nh^2) \\ &\quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned} \right\}$$

したがって粒子移動法で濃度が時間が経過しても発散しないためには式 (23) の増幅因子が  $-1 \leq \hat{Q}_1 \leq 1$  の条件を満足する必要がある。したがって  $kD/h^2 = \lambda_1$  のとりうる範囲は

$$0 \leq \lambda_1 \leq f(\theta, n) \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに

$$f(\theta, n) = 2n / \{ 4 \sin^3 \theta / \sin(\theta/n) \}, \quad \theta = \sigma h/2 \dots (25)$$

図-4 には  $n$  をパラメーターとして  $f(\theta, n)$  のグラフを示している。 $f(\theta, n)$  の最小値を与える  $\theta$  は  $n=1$  個のときには  $\theta = \pi/2$ ,  $n$  を増すにつれて小さくなってゆく。この図より  $\lambda_1 = kD/h^2$  は各  $n$  に対して、その黒丸点以下の値の必要があることがわかる。なおこの結果は粒子が等間隔の場合の算定結果であるので、 $n=1$  は粒子の位置が格子点位置に一致している場合であり explicit 差分法と同じになる。したがって安定条件は式 (20) と

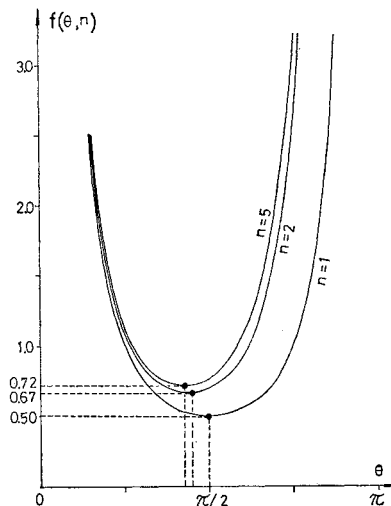


図-4  $f(\theta, n) \sim \theta, n$  の関係 (●印は最小値)

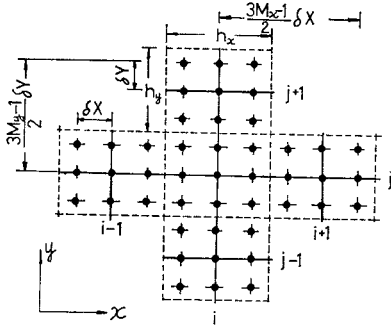


図-5 2次元の粒子配置図  
( $M_x, M_y$  は区分領域の  $x, y$  方向の粒子数)

同じ結果となっている。

次に次式で示す2次元移流分散方程式について同様の評価を行ってみよう。

$$dC/dt = \partial C/\partial t + u\partial C/\partial x + v\partial C/\partial y \\ = D_x \partial^2 C/\partial x^2 + D_y \partial^2 C/\partial y^2 \dots \dots \dots (26)$$

ここに  $u, v$  は  $x$  および  $y$  方向の実流速,  $D_x, D_y$  は  $x$  および  $y$  方向の分散係数である。図-5 に各区分領域の  $x$  方向に  $M_x$  個,  $y$  方向に  $M_y$  個の粒子を配置したモデルを示している。粒子移動法により式(26)を差分化すれば,

$$\delta C_{i_x, i_y, j+1} = \{D_x/(M_x \cdot M_y \cdot h_x^2)\} [\sum C^j(l_{i_x+1, i_y}) \\ - 2 \sum C^j(l_{i_x, i_y}) + \sum C^j(l_{i_x-1, i_y})] \\ + \{D_y/(M_x \cdot M_y \cdot h_y^2)\} [\sum C^j(l_{i_x, i_y+1}) \\ - 2 \sum C^j(l_{i_x, i_y}) + \sum C^j(l_{i_x, i_y-1})] \\ \dots \dots \dots (27)$$

ここに  $h_x, h_y$  は  $x, y$  方向の区分領域の長さ, すなわち  $x, y$  方向の格子点間隔である。1次元の場合と同様に粒子間隔を  $x, y$  両方向について等しいとして, 粒子  $K$  についての濃度変化の式 (ここでも簡単のため Pinder らの式 (6) を用いる),

$$C^{j+1}(K) = C^j(K) + \delta C_{i_x, i_y, j+1} \dots \dots \dots (28)$$

に  $C^j(K)$  の2重 Fourier 変換;

$$\hat{C}^j(K) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma_x X} e^{-i\sigma_y Y} C^j(K) dX dY$$

を行うと, この場合の増幅因子  $\hat{Q}_2$  は

$$\hat{Q}_2 = 1 - 4k \{ (D_x/h_x^2) \sin^3(\sigma_x h_x/2) \cdot \sin(\sigma_y h_y/2) \\ + (D_y/h_y^2) \cdot \sin^3(\sigma_y h_y/2) \cdot \sin(\sigma_x h_x/2) \} \\ \cdot 1/\{M_x \cdot M_y \cdot \sin(\sigma_x h_x/2 M_x) \\ \cdot \sin(\sigma_y h_y/2 M_y)\} \dots \dots \dots (29)$$

いま  $kD_x/h_x^2 = kD_y/h_y^2 = \lambda_2$  とし,  $M_x = M_y = M$  の場合の  $-1 \leq \hat{Q}_2 \leq 1$  の条件を求めると

$$0 \leq \lambda_2 \leq g(\theta_x, \theta_y, M), \theta_x = \sigma_x h_x/2, \theta_y = \sigma_y h_y/2 \\ \dots \dots \dots (30)$$

$$g(\theta_x, \theta_y, M) = M^2 \sin(\theta_x/M) \cdot \sin(\theta_y/M) / \\ \cdot [2 \sin \theta_x \cdot \sin \theta_y (\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y)] \\ \dots \dots \dots (31)$$

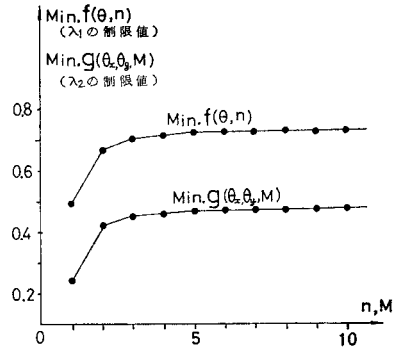


図-6 差分間隔の制限値  
( $\lambda_1 = kD/h^2, \lambda_2 = kD_x/h_x^2 = kD_y/h_y^2$ )

以上の1次元および2次元に対する  $f(\theta, n)$  および  $g(\theta_x, \theta_y, M)$  の最小値と区分領域内の粒子個数との関係を図-6に示している。図の1次元の場合の点は図-4の黒丸点に相当している。なお区分領域に配置する粒子の個数が1個の場合は  $f(\theta, 1), g(\theta_x, \theta_y, 1)$  の最小値はそれぞれ0.5および0.25でいずれも流速が0の場合のexplicit差分法の安定条件に一致する。これは1個の場合はその粒子の位置を格子点の位置に一致させているからである。次に図-6から適切な粒子数と差分間隔を考えてみよう。一般に  $\lambda_1$  または  $\lambda_2$  の制限値が大きくなれば定められた  $h$  または  $h_x, h_y$  に対して  $k$  を大きくでき計算量を減少できるが, 一方図-6から制限値の増大につれ  $n$  を大きくする必要があり, この点からは計算量は増大する。したがってなるべく制限値は大きく,  $n$  は小さくすることが望ましい。いま図-6をみると両曲線とも同じ傾向を示し, 1次元の場合で  $n=2 \sim 3$ , 2次元の場合で  $M_x = M_y = M = 2 \sim 3$  を越えると  $\lambda_1, \lambda_2$  の制限値の増加は少なく, ほぼその極限值,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Min} f(\theta, n) = 0.726$  および  $\lim_{M \rightarrow \infty} \text{Min} g(\theta_x, \theta_y, M) = 0.476$  に近い値を示している。したがって各区分領域内の粒子の配置個数は1次元の場合  $n=2 \sim 3$  個, 2次元の場合  $M_x = M_y = M = 2 \sim 3$  個程度が適切と考えられ, この場合あまり多くの粒子数を必要としないようである。またこの場合の差分間隔は  $\lambda_1 = kD/h^2 < 0.72$ , または  $\lambda_2 = kD_x/h_x^2 = kD_y/h_y^2 < 0.47$  を満足するように格子間隔  $h$  または  $h_x, h_y$  および時間間隔  $k$  を選ばばよいであろう。なお図-6は式(21), 式(27)からわかるように, 粒子が等間隔を維持する理想状態での計算の安定条件である。場所的に流速が異なる場合などでは, 粒子の配列は不規則となり, この状態での安定条件は図-6とは異なってくると考えられる。したがって, 実際の適用にあたっては, 前述の理想状態での計算の安定条件からえられる必要個数を目安としてこのほかに, 計算が進行しても常時適当な数の粒子が各区分領域内に存在するよ

うな、また初期条件を十分表現できるような粒子数を検討してきめる必要がある。

5. 計算結果による検討

まず式(1)で条件  $C(0, t) = C_0, C(\infty, t) = 0, C(x, 0) = 0$  を与えた場合の解析解<sup>6)</sup>

$$C(x, t)/C_0 = (1/2) \left\{ \operatorname{erfc} \left( \frac{x-ut}{2\sqrt{Dt}} \right) + e^{ux/D} \operatorname{erfc} \left( \frac{x+ut}{2\sqrt{Dt}} \right) \right\} \dots\dots\dots (32)$$

と粒子移動法の Pinder らの計算式(6)と本報で修正を加えた式(8)とを比較しよう。表-2 は1区間に粒子を等間隔に5個配置した  $kD/h^2=0.5$  および  $0.6$  の場合を示している。ここでは  $h=3.4 \text{ cm}, k=37 \text{ sec}, u=0.046 \text{ cm/sec}$  で時刻  $t=10k$  における濃度分布である。 $kD/h^2=0.5$  のときには式(6),(8)とも大差ないが、 $kD/h^2=0.6$  のときには式(6)では計算誤差が大きくなって負や100%以上の濃度が生じている。これに比べて式(8)は比較的精度よく計算されている。したがって式(8)は式(6)に比べて精度が増していると考えられる。この原因は前述のように同一区間内の粒子に一律に等しい濃度増分を与える式(6)では、式(8)に比べて区間境界を境にして相隣る粒子間の濃度に不連続を生じ、これが各時間ステップごとに発生してゆくためと考えられる。

次に式(8)と他の差分法とを比較してみよう。 $u=0$

表-2 1次元移流分散方程式の解(算定濃度%)  
(粒子移動法の Pinder らの法とその修正法との比較)

$$[h=3.4 \text{ cm}, k=h/(2u)=37 \text{ sec}, u=0.046 \text{ cm/sec}, t=10k \cdot \text{sec の値}]$$

i	$kD/h^2=0.50(D=0.156 \text{ cm}^2/\text{sec})$		$kD/h^2=0.60(D=0.187 \text{ cm}^2/\text{sec})$	
	解析解	粒子移動法, n=5 式(6) 式(8)	解析解	粒子移動法, n=5 式(6) 式(8)
1	100.00	100.00 100.00	100.00	100.00 100.00
2	99.96	99.90 99.94	99.93	99.52 99.86
3	99.83	99.84 99.76	99.70	100.69 99.56
4	99.45	98.93 99.25	99.13	95.00 98.77
5	98.53	98.40 98.06	97.92	105.17 97.20
6	96.62	94.53 95.70	95.65	77.97 94.39
7	93.12	92.42 91.56	91.84	115.94 89.90
8	87.44	82.81 85.13	86.06	44.12 83.40
9	79.22	77.89 76.22	78.10	124.29 74.85
10	68.56	62.31 65.09	68.12	6.55 64.52
11	56.16	54.92 52.58	56.72	112.63 53.10
12	43.18	37.70 39.84	44.79	-14.21 41.46
13	30.96	30.31 28.13	33.38	77.69 30.53
14	20.57	17.19 18.38	23.37	-14.41 21.10
15	12.62	12.27 11.05	15.31	38.30 13.60
16	7.12	5.47 6.08	9.36	-6.84 8.14
17	3.68	3.36 3.04	5.33	12.73 4.49
18	1.74	1.07 1.37	2.82	-1.76 2.27
19	0.75	0.55 0.56	1.38	2.52 1.04
20	0.30	0.10 0.20	0.63	-0.20 0.43
21	0.11	0.04 0.02	0.27	0.24 0.16

表-3 1次元分散方程式の解(算定濃度%)  
(分散項の離散化誤差の影響)

$$[h=3.4 \text{ cm}, k=37 \text{ sec}, u=0, D=0.084 \text{ cm}^2/\text{sec}, kD/h^2=0.269, t=40k \cdot \text{sec の値}]$$

i	C% 解析解		粒子移動法式(8) n=4	i	C% 解析解		粒子移動法式(8) n=4
	explicit 差分法	implicit 差分法			explicit 差分法	implicit 差分法	
1	100.00	100.00	100.00	12	1.76	1.77	1.30
2	82.92	83.04	82.91	13	0.96	0.96	0.65
3	66.61	66.84	66.48	14	0.50	0.50	0.31
4	51.75	52.04	51.40	15	0.25	0.24	0.14
5	38.81	39.12	38.21	16	0.12	0.11	0.06
6	28.07	28.36	27.24	17	0.06	0.05	0.02
7	19.55	19.79	18.58	18	0.02	0.02	0.01
8	13.10	13.28	12.01	19	0.01	0.01	0.00
9	8.44	8.56	7.50	20	0.00	0.00	0.00
10	5.22	5.29	4.41	21	0.00	0.00	0.00
11	3.10	3.13	2.47				

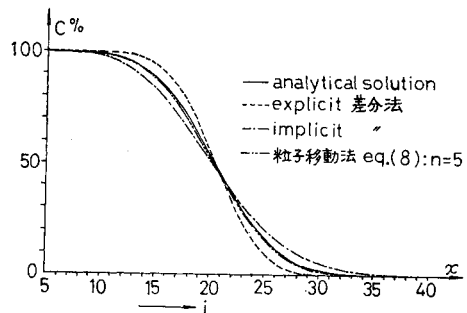


図-7 1次元移流分散方程式の解  
(移流項, 分散項の離散化誤差の影響)

$$[h=3.4 \text{ cm}, k=h/(2u)=37 \text{ sec}, u=0.046 \text{ cm/sec}, D=0.084 \text{ cm}^2/\text{sec}, kD/h^2=0.269, t=40k \cdot \text{sec の値}]$$

の場合、すなわち分散項のみの場合を表-3に示している。時刻は  $t=40k$  である。ここでは粒子は常に等間隔としているので、粒子移動法の  $n=1$  の場合は explicit 差分法と一致する。表によると分散項のみの場合には精度は式(8)の  $n=4$  の場合がやや劣るようであるが、その相異は少なく粒子移動法と explicit 差分法の精度は同程度であり解析解とほぼよい一致を示している。なお式(8) ( $n=4$ ) の場合に精度がやや劣るのは前述のように式(17)の分散項の離散化誤差が式(14)のそれよりやや大きいことによるものと考えられる。次に流速がある場合には図-7に示すように explicit 差分法、および implicit 差分法とも移流項の離散化で発生すると考えられる誤差が現われているが、式(8)ではこのための誤差はなく、 $u=0$  の場合と同程度で解析解とよい一致を示している。以上のように従来の差分法では移流項が卓越してくるとこの項の離散化誤差が大きくなり、算定結果の精度が悪くなるのがわかる。次に、上述の従来の差分法における移流項の離散化誤差を防ぐために、次のような種々の工夫がなされている<sup>7)</sup>。すなわち Bella らが提案した擬似分散係数;  $D_N=uh(1-uk/h)/2$  を用いた差分方程式は、

$$C_{i,j+1} = C_{i,j} + (uk/h)(C_{i-1,j} - C_{i,j}) + (D - D_N) \cdot k/h^2 \cdot (C_{i+1,j} - 2C_{i,j} + C_{i-1,j}) \dots \dots \dots (33)$$

また Lax-Wendroff の差分方程式は

$$C_{i,j+1} = (1 - F^2)C_{i,j} + (F/2 + F^2/2)C_{i-1,j} + (-F/2 + F^2/2)C_{i+1,j} + G(C_{i+1,j} - 2C_{i,j} + C_{i-1,j}) \dots \dots \dots (34)$$

Fromm の差分方程式は

$$C_{i,j+1} = C_{i,j} + (F/4)(C_{i-1,j} - C_{i+1,j} + C_{i-2,j} - C_{i,j}) + (F^2/4)(C_{i-1,j} + C_{i+1,j} - 2C_{i,j}) + (F^2 - 2F)(C_{i-2,j} + C_{i,j} - 2C_{i-1,j}) + G(C_{i+1,j} - 2C_{i,j} + C_{i-1,j}) \dots \dots \dots (35)$$

ある。ここに  $F = uk/h$ ,  $G = Dk/h^2$  である。いまこれの方法と式 (8) による粒子移動法とを比較してみよう。この計算例としてここでは文献 7) に記載のものを

利用することにする。これは、 $C(x, 0) = 0 (-\infty < x < -h/2, h/2 < x < \infty)$ ,  $C(x, 0) = C_0 (-h/2 \leq x \leq h/2)$ ,  $C(\pm \infty, t) = 0$  の条件での解析解；

$$C/C_0 = (1/2) \left[ \operatorname{erf} \left\{ \frac{h/2 - (x - ut)}{2\sqrt{Dt}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{h/2 + (x - ut)}{2\sqrt{Dt}} \right\} \right]$$

と比較するものであり、式 (33), (34), (35) の差分解は図-8, 9 のように示されている。  $0 \leq F \leq 1$  のとき  $D \geq D_N$  の条件がみたされる場合には図-8 のように式 (33), (34), (35) の差分解はほぼよく解析解と一致している。一方式 (8) の粒子移動法では区分領域に配置する粒子の個数を  $n=5, 10$  としても前節 3 で考察したように分散項が卓越する場合には精度がよくない。次に図-9 には移流項が分散項よりも卓越し、もはや  $D \geq D_N$  がみたされない場合を示している。前述のように移流項の離散化誤差を小さくするように工夫された式 (33), (34), (35) のどの差分法でも濃度ピークの後方に負の濃度があらわれている。一方、粒子移動法では負の濃度はあらわれていない。また  $n=5$  より  $n=10$  の方が精度がよくなるのがわかる。以上のことから粒子移動法は他の差分法に比べて移流項には依存しない計算法であって、流速が大きく移流項が分散項よりも卓越するような計算に適しているといえよう。

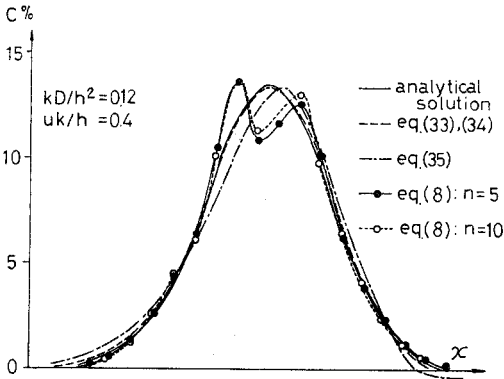


図-8 1次元移流分散方程式の解<sup>7)</sup>  
(移流項の離散化誤差防止の各差分法との比較)  
[ $h=300$  m,  $k=600$  sec,  $u=0.2$  m/sec,  $D=18.0$  m<sup>2</sup>/sec]

次に2次元移流分散方程式を例にとり、この場合の移流項の離散化誤差を考察してみよう。図-10 に示すような無限浸透領域に一樣流速  $u$  があって  $x=0$  における  $y$  軸下方の部分が 100% 塩分濃度をもっている場合の定常状態の濃度分布を求めてみよう。この場合の移流分散方程式は  $x$  方向の濃度分散項を小さいとして無視すれば式 (26) より

$$u \partial C / \partial x = D_y \partial^2 C / \partial y^2 \dots \dots \dots (36)$$

境界条件  $C(0, y) = C_0 (-\infty < y \leq 0)$ ,  $C(0, y) = 0 (0 < y < \infty)$ ,  $\partial C / \partial y = 0 (y = \pm \infty, x > 0)$  のもとでの解は

$$C(x, y) / C_0 = (1/2) \operatorname{erfc} (y / 2\sqrt{D_y x / u}) \dots \dots \dots (37)$$

である。いまこれと数値解との比較を行ってみよう。式

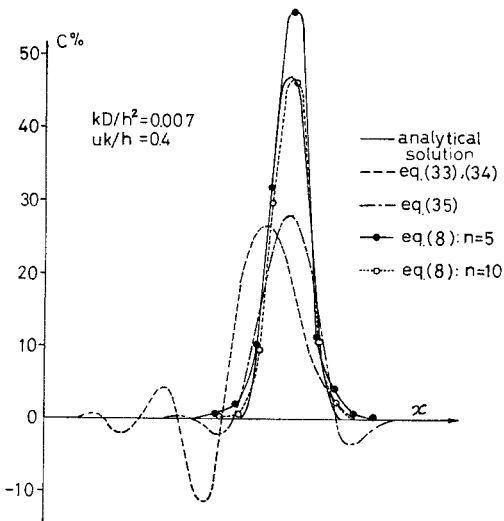


図-9 1次元移流分散方程式の解<sup>7)</sup>  
(移流項の離散化誤差防止の各差分法との比較)  
[ $h=300$  m,  $k=600$  sec,  $u=0.2$  m/sec,  $D=1.0$  m<sup>2</sup>/sec]

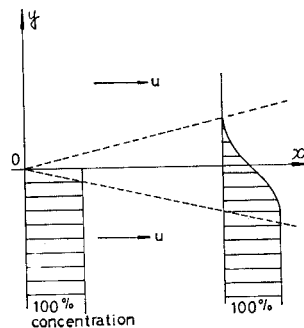


図-10 2次元移流分散モデル

(36) は微分方程式

$$\partial C/\partial t + u\partial C/\partial x = D_x \partial^2 C/\partial x^2 + D_y \partial^2 C/\partial y^2 \dots (38)$$

で  $\partial C/\partial t \approx 0, \partial^2 C/\partial x^2 \approx 0$  となった状態であるので explicit 差分法では式 (38) で非定常過程を計算しその終局としての定常状態を求めた。なおこの解は式 (36) を直接差分化し逐次修正してえられる解と同じになると考えられる。この場合の計算結果の誤差の原因となるものは式 (38) の左辺の移流項と右辺の分散項  $\partial^2 C/\partial y^2$  の離散化誤差である。次に粒子移動法では式 (26) で  $v=0, \partial^2 C/\partial x^2=0$  とした式；

$$dC/dt = D_y \partial^2 C/\partial y^2 \dots (39)$$

を用いて基本的には 1 次元移流分散方程式の計算と同じ算定法をとる。まず粒子を 図-11 に示すように全領域にわたって一様に配置する。次に  $y < 0$  の部分の粒子には 100% の濃度を、 $y=0$  上の粒子には 50% を、 $y > 0$  の部分の粒子には 0% を与え、一様流速  $u$  で粒子を移動させる。各格子点に対する区分領域は点線で囲まれた領域で、この中に含まれる粒子の濃度の平均値を格子点の濃度として  $D_y \partial^2 C/\partial y^2$  の離散値を求める。な

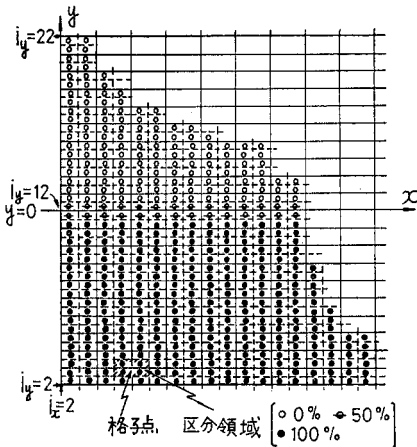


図-11 2次元移流分散計算の粒子の配置 (粒子数  $M_x=M_y=M=2$ )

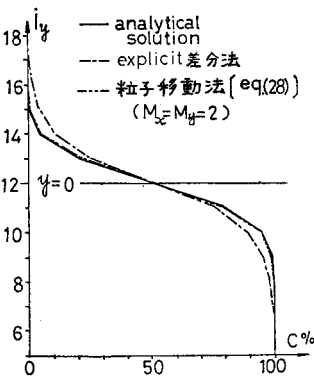


図-12 2次元移流分散方程式の定常解 (表-4 の  $u=0.06$  cm/sec の図)

表-4 2次元移流分散方程式の定常解 (算定濃度%)

$[L_x=100$  cm,  $L_y=50$  cm,  $h_x=(L_x/20)$  cm,  $h_y=(L_y/20)$  cm,  $k=(h_x/2u)$  sec,  $D_y=0.008$  cm<sup>2</sup>/sec,  $x=7h_x, t=36k$  の値]

C %	$u=0.02$ cm/sec, $kD_y/h_y^2=0.16$			$u=0.06$ cm/sec, $kD_y/h_y^2=0.053$		
	解析解	粒子移動法*	explicit 差分法	解析解	粒子移動法*	explicit 差分法
22	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
21	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01
20	0.01	0.01	0.03	0.0	0.0	0.04
19	0.05	0.05	0.12	0.0	0.0	0.17
18	0.23	0.24	0.45	0.0	0.0	0.64
17	0.91	0.92	1.44	0.0	0.02	1.86
16	2.94	2.94	3.92	0.05	0.16	4.32
15	7.82	7.81	9.12	0.70	1.10	8.34
14	17.24	17.23	18.42	5.09	5.68	14.76
13	31.38	31.88	32.47	20.66	20.63	27.22
12	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
11	68.17	68.12	67.53	79.34	79.37	72.78
10	82.76	82.77	81.58	94.91	94.32	85.24
9	92.18	92.19	90.88	99.30	98.90	91.66
8	97.06	97.06	96.08	99.95	99.84	95.68
7	99.09	99.08	98.56	100.00	99.98	98.14
6	99.77	99.76	99.55	100.00	100.00	99.36
5	99.95	99.95	99.88	100.00	100.00	99.83
4	99.99	99.99	99.87	100.00	100.00	99.96
3	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	99.99
2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

(\* 式 (28) による。粒子数  $M_x=M_y=M=2$ )

お、本計算では各粒子に加える濃度増分は式 (6) のように格子点の濃度増分を均一に加えた。濃度が定常状態に達したかどうかについては格子点濃度の時間による変動の有無から判定する。これは 1 次元の場合で述べたように各区分領域に新たに流入してきた粒子の濃度の平均値  $C'_{i_x, i_y, j}$  などを求め、これらを離散値として  $D_y \partial^2 C/\partial y^2$  を算定して増分  $\delta C_{i_x, i_y, j+1}$  を求めこれを  $C'_{i_x, i_y, j}$  に加えてえられる  $j+1$  時刻の格子点濃度が  $j$  時刻の格子点濃度  $C_{i_x, i_y, j}$  に等しければ定常状態に達したものと考えた。算定結果を表-4 に示している。また表-4 の  $u=0.06$  cm/sec 欄を 図-12 に図示している。移流速度  $u$  が 0.02 cm/sec の場合には explicit 差分法の解と粒子移動法とはほぼ同程度の精度で解析解式 (37) とよく一致しているが、 $u$  を 0.06 cm/sec と大きくした場合には explicit 差分法では移流項の離散化誤差が大きくなるため、かなり精度が低下するのに比べ粒子移動法はこの場合も  $u=0.02$  cm/sec の場合と同程度の精度で、解析解とほぼ一致していることがわかる。

### 6. む す び

本報は移流分散方程式の数値解として Pinder らが述べた、領域に多数配置した濃度をもつ粒子を、その位置の流速で移動させ、その移動線上 (特性曲線上) で粒子濃度を算定してゆく方法 (粒子移動法と略称) を 1 次元と 2 次元の移流分散方程式について、従来の差分法の数



値解および理論解と比較し検討を加えたもので、その主な結果をあげると次のようである。

(1) 本法は粒子の濃度をその特性曲線上で計算するため粒子の濃度変化の方程式に移流項がなく、粒子の濃度変化は分散項から算定される。この分散項の算定に相隣る粒子間の濃度差分を用いれば計算量が非常に増加するので、領域を格子に組みその区分領域内に入った粒子の濃度の平均値を格子点の濃度として分散項の算定、濃度増分の算定を行い、これを各粒子の濃度増分として粒子濃度を求める方式である。すなわち本法の特長は粒子をその点の流速で移動させること(特性曲線上の計算)で移流項をなくしたことおよび粒子の濃度変化の算定(分散項の算定)で煩雑な粒子濃度の差分を単純化して粒子の濃度平均を格子点濃度としてその差分によっていることにあるといえる。

(2) 本法は格子を組むことでは従来の差分法と変りではなく、格子点に関する分散項の差分計算は従来と同じである。しかし移流項の差分計算がなく、新たに粒子の移動と粒子の濃度変化の算定が加わる。これらを考えると本法の計算の手数は従来の差分法よりやや増加すると考えられる。

(3) 本法の計算の精度・安定性については、本法の粒子濃度の平均値を格子点濃度とするときにやや誤差が生ずるようであるが、その量は小さく分散項の離散化誤差は従来の差分法とオーダー的には同程度とみてよい。次に本法の最大の特長である移流項がないことのため、この離散化誤差がなく、また流速に関する安定条件が不必要となるので、移流項が分散項に比べて卓越する場合には従来の差分法より、計算の精度および安定性がかなりよくなる。

(4) 本報では格子点濃度からえられた濃度増分を同一区分領域内の粒子に一律に加えた Pinder らの方法を修正して、粒子の位置に応じて粒子の濃度増分を変えて、区間境界を境にして相隣る粒子間の濃度の不連続をなくす方法を提案したが、これにより Pinder らの方法よりさらに計算の精度と安定性がよくなることを確認した。

(5) 本法は粒子をその点の流速で移動させることによって比較的容易に特性曲線上での濃度変化の算定ができるので、領域内の流速が場所的に異なる場合に有利な

算定法と考えられる。

(6) 粒子の配置数、差分間隔については、粒子が等間隔を維持する場合、1区分領域内の粒子数は1次元で2~3個、2次元で縦横同じ数の場合には縦横それぞれ2~3個程度で計算の安定上十分であり、あまり多い必要はないようである。またこの場合の格子間隔  $dx, dy$ , 時間間隔  $dt$  は1次元で  $dt \cdot D/dx^2 < 0.72$ , 2次元で  $dt \cdot D_x/dx^2 = dt \cdot D_y/dy^2 < 0.47$  ( $D, D_x, D_y$  は拡散係数)を満足するにとればよい。

なお本報は粒子移動法の精度、安定性など基本的事項について従来の差分法と比較しながら検討を行うことを目的として、モデルとしては解析解のえられる比較的簡単な現象を対象として研究を行ったものである。本法を実際に適用するにあたっての粒子の配置については前述の数値計算上の安定性の観点からの必要個数の外に計算が進行しても各区分領域に常時適当な数の粒子が存在するようにまた初期条件を十分表現できるように粒子数をきめることが必要であろう。また領域内の濃度変化の激しい箇所は粒子を多く配置し、変化のゆるやかな箇所は粗に配置することなども電算機の記憶容量上の制限から、また計算上の経済的面から考慮すべきことと考えられる。

謝辞：本研究を行うにあたり本学助手、藤野和徳氏の御助力をえました。ここに感謝いたします。

#### 参考文献

- 1) G.F. Pinder and H.H. Cooper : "A Numerical Technique for Calculating the Transient Position of the Saltwater Front", Water Resources Research, Vol. 6, No. 3, June 1970, pp. 875~882.
- 2) 赤坂 隆 : 「数値計算」, コロナ社, 1971, p. 419.
- 3) 伊藤 剛編 : 「数値解析の応用と基礎 (水理学を中心として)」アテネ出版, 昭和46年.
- 4) 山口昌哉・野木達夫 : 「数値解析の基礎」, 共立出版, 1968.
- 5) 村岡浩爾・中辻啓二 : 「河川流の非定常拡散解析における数値解析の誤差」, 土木学会論文報告集, 第213号, 1973年5月, p. 7.
- 6) A. Ogata and R.B. Banks : "A Solution of the Differential Equation of Longitudinal Dispersion in Porous Media", U.S. Geological Survey Professional Paper. 411-A, 1961.
- 7) 土木学会編 : 「数値解析/流体解析編」, サイエンス社, 昭和50年, p. 59.

(1977.7.12・受付)