土木学会論文報告集
第 271 号・1978 年 3 月

【ノート】

構造解析における動的応答解析の一方法に対する補足

SUPPLEMENTS FOR A METHOD OF DYNAMIC RESPONSE COMPUTATION FOR STRUCTURAL ANALYSIS

塩 尻 弘 雄*・中 村 秀 治**
By Hiroo SHIOJIRI and Hideharu NAKAMURA

1. まえがき

先に筆者らは文献 1) において，構造解析における動的応答析の一方法を提案した．方法の概要は運動方程式を正規形に変換し，その初期値問題の一般解と，荷重変化に関する若干の仮定を用いることにより漸化式を導き，逐次積分により解を得るものであった．

本方法の利点は，文献1)に述べたとおり，計算精度，計算時間など数多くあげられるが，大次元の場合に対して In Core 処理するための検討の必要性が指摘された[2]．In Core で処理する際，大きな障害となるのは，系の自由度を n としたとき正規形常微分方程式の係数マトリックス $\boldsymbol{A}$ が $2n$ 元となり，逆行列などすべてのマトリックス演算の寸法も $2n$ となることである。$2n$ 元のマトリックスを処理することは計算時間の面でも負担が大きくなる．しかしながら，マトリックス $\boldsymbol{A}$ を考察することにより n 元の演算のみで漸化式の係数マトリックスを組み立てることが可能である。また，減衰がレーリー型の場合，n 元の係数行列を持つ漸化式に変換することも可能である．

文献 1) で触れられなかったこれらの点について，以下に補足したい．

2. 係数マトリックス A に関係した各種のマトリックスの計算法[1]

運動方程式

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{U}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}(t) \quad (\dot{}\ は時間微分) \cdots(1)$$

を正規形に変換すれば，

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Q} \quad \cdots\cdots(2)$$

ここで，

$$\boldsymbol{y}=\begin{Bmatrix}\dot{\boldsymbol{U}}\\ \boldsymbol{U}\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{I} & 0\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{I}\ は単位マトリックス)\cdots\cdots(4)$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{P}\\ 0\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(5)$$

となる．式 (2) の初期値問題の一般解は，

$$\boldsymbol{y}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{y}(0)+e^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{Q}(s)\,ds \quad \cdots\cdots(6)$$

であり，漸化式において $e^{\boldsymbol{A}\Delta t}$ (Δt は時間きざみ) が重要なことは文献 1) に述べたとおりである。文献 1) の式 (20) までに表われるすべてのマトリックスを求める際，n 元の演算で行う方法は次のとおりである．

a) $\boldsymbol{A}^{-1}$ の計算法

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M} & -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(7)$$

b) $\boldsymbol{A}^n$ の計算法[3]

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}{}_n\boldsymbol{A}_{11} & {}_n\boldsymbol{A}_{12}\\ {}_n\boldsymbol{A}_{21} & {}_n\boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(8)$$

とおけば，${}_{n+1}\boldsymbol{A}_{ij}$, ${}_n\boldsymbol{A}_{ij}$, ${}_{n-1}\boldsymbol{A}_{ij}$ の間には次の関係式

$${}_{n+1}\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}\,{}_n\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\,{}_{n-1}\boldsymbol{A}_{ij}=0$$

$$(ただし，1\leqq i,\ j\leqq 2)\cdots\cdots(9)$$

が成り立ち，

$$\left.\begin{aligned}{}_1\boldsymbol{A}_{11}&=-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}\\ {}_1\boldsymbol{A}_{12}&=-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\\ {}_1\boldsymbol{A}_{21}&=\boldsymbol{I}\\ {}_1\boldsymbol{A}_{22}&=0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(10)$$

$$\left.\begin{aligned}{}_2\boldsymbol{A}_{11}&=(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C})^2-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\\ {}_2\boldsymbol{A}_{12}&=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\\ {}_2\boldsymbol{A}_{21}&=-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}\\ {}_2\boldsymbol{A}_{22}&=-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(11)$$

$${}_3\boldsymbol{A}_{11}=-(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C})^3+\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}$$

$${}_3\boldsymbol{A}_{12}=-(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C})^2\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}+(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K})^2$$

* 正会員 工修 電力中央研究所土木技術研究所
** 正会員 工修 電力中央研究所土木技術研究所

$$\left.\begin{aligned}{}_3A_{21}&=(M^{-1}C)^2-M^{-1}K\\ {}_3A_{22}&=M^{-1}CM^{-1}K\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(12)$$

のとおりである．しかるに A^n を求める場合，n 元のマトリックス ${}_nA_{11}$, ${}_nA_{12}$, ${}_nA_{21}$, ${}_nA_{22}$ を個別に式 (9) の漸化式で計算すればよいのであるが，${}_{n+1}A_{ij}$, ${}_nA_{ij}$, ${}_{n-1}A_{ij}$（ただし，$1\leqq i,\ j\leqq 2$）の間には有利な関係が存在し，実際は ${}_nA_{11}$, …, ${}_nA_{22}$ の中の任意の一つを計算すれば他はただちに求められる．関係式は次のとおりである．

$$\left.\begin{aligned}{}_{n+1}A_{12}&={}_nA_{11}(-M^{-1}K)\\ {}_{n+1}A_{21}&={}_nA_{11}\\ {}_{n+1}A_{22}&={}_{n-1}A_{11}(-M^{-1}K)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(13)$$

$$\left.\begin{aligned}{}_{n+1}A_{11}&={}_{n+1}A_{12}(K^{-1}C)+{}_nA_{12}\\ {}_{n+1}A_{21}&={}_{n+1}A_{12}(-K^{-1}M)\\ {}_{n+1}A_{22}&={}_nA_{12}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(14)$$

$$\left.\begin{aligned}{}_{n+1}A_{11}&={}_{n+1}A_{21}(-M^{-1}C)+{}_nA_{21}(-M^{-1}K)\\ {}_{n+1}A_{12}&={}_{n+1}A_{21}(-M^{-1}K)\\ {}_{n+1}A_{22}&={}_nA_{21}(-M^{-1}K)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(15)$$

$$\left.\begin{aligned}{}_{n+1}A_{11}&=-M^{-1}(C_{n+1}A_{22}+K_nA_{22})\\ &\quad\times(K^{-1}C)-M^{-1}(C_nA_{22}+K_{n-1}A_{22})\\ {}_{n+1}A_{12}&=(-M^{-1}C)_{n+1}A_{22}+(-M^{-1}K)_nA_{22}\\ {}_{n+1}A_{21}&={}_{n+1}A_{22}(K^{-1}C)+{}_nA_{22}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(16)$$

これらを用いることにより，$e^{A\Delta t}$ の多項式近似が n 元のマトリックス演算で行えることになる．式(13)～(16)を考察すると，${}_nA_{21}$ をまず式 (9) で求め，式 (15) を用いて他を求めるのが比較的容易と思われる．

c) $(A^n)^{-1}$ の計算法

$$(A^n)^{-1}=R=\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(17)$$

とすれば，

$$\left.\begin{aligned}R_{11}&=({}_nA_{11}-{}_nA_{12}\,{}_nA_{22}^{-1}\,{}_nA_{21})^{-1}\\ R_{12}&=-R_{11}\,{}_nA_{12}\,{}_nA_{22}^{-1}\\ R_{21}&=-{}_nA_{22}^{-1}\,{}_nA_{21}R_{11}\\ R_{22}&={}_nA_{22}^{-1}(I-{}_nA_{21}R_{12})\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(18)$$

である．式 (9) によりまず ${}_nA_{21}$ を求め，式 (15) を用いて ${}_nA_{11}$, ${}_nA_{12}$, ${}_nA_{22}$ を求めた後，それらを式 (18) へ代入すれば $(A^n)^{-1}$ が計算できる．

d) A の多項式の逆行列の計算法

A の多項式を H とし，

$$\sum_{i=0}^{m}a_iA^i=H=\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(19)$$

とおく．

この場合も c) で述べたのとまったく同様の式が成り立ち，また，式 (15) より，

$$\left.\begin{aligned}H_{11}&=H_{21}(-M^{-1}C)+H_{22}\\ H_{12}&=H_{21}(-M^{-1}K)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(20)$$

の関係がある．

$$H^{-1}=F=\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(21)$$

とすれば，

$$\left.\begin{aligned}F_{11}&=(H_{11}-H_{12}H_{22}^{-1}H_{21})^{-1}\\ F_{12}&=-F_{11}H_{12}H_{22}^{-1}\\ F_{21}&=-H_{22}^{-1}H_{21}F_{11}\\ F_{22}&=H_{22}^{-1}(I-H_{21}F_{12})\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(22)$$

であるから，H_{21} と H_{22} を b) で述べた方法により求め，その後，式 (20) を用いて H_{11}, H_{12} を求めれば，式 (22) で最終的な A の多項式の逆行列が計算できる．

これにより，$e^{A\Delta t}$ の有理式近似が n 元のマトリックス演算で行えることになる．

e) B^0, B^1, B^2 の逆行列演算を含まない計算法

以上述べた計算法は主として $e^{A\Delta t}$ を計算するためのものである．文献 1) に述べたとおり，$e^{A\Delta t}$ が漸化式の同次項の係数マトリックスそのものであり，この近似法がスキーム自体の安定性に大きく影響するのであるから計算法の重要性はいうまでもない．

さらに，ここでは，漸化式の非同次項の係数マトリックスを作るのに必要となる B^0, B^1, B^3 マトリックスの計算方法を検討する．A が正則であれば，

$$B^0=\int_0^{\Delta t}e^{As}ds=A^{-1}(e^{A\Delta t}-I)\quad\cdots\cdots(23)$$

$$B^1=\int_0^{\Delta t}se^{As}ds=A^{-1}\{\Delta te^{A\Delta t}-A^{-1}(e^{A\Delta t}-I)\}\quad\cdots\cdots(24)$$

$$B^2=\int_0^{\Delta t}s^2e^{As}ds=A^{-1}[\Delta t^2e^{A\Delta t}-2A^{-1}\{\Delta te^{A\Delta t}-A^{-1}(e^{A\Delta t}-I)\}]\quad\cdots(25)$$

であり，a)～d) までに述べた計算法でこれらを求めることはできるが，A が特異な場合，この方法は適用できないし，また，特異でなくても，A が特異に近い場合，あるいは Δt が小さい場合など，かなりの桁落ちによる誤差が生じる可能性がある．そのような場合，次の方法によればよい．

$$e^{As}\fallingdotseq\sum_{i=0}^{m}a_iA^is^i\quad\cdots\cdots(26)$$

としたとき，

$$B^0=\int_0^{\Delta t}e^{As}ds\fallingdotseq\sum_{i=0}^{m}\frac{\Delta t^{i+1}}{i+1}a_iA^i\quad\cdots\cdots(27)$$

$$B^1=\int_0^{\Delta t}se^{As}ds\fallingdotseq\sum_{i=0}^{m}\frac{\Delta t^{i+2}}{i+2}a_iA^i\quad\cdots\cdots(28)$$

$$B^2=\int_0^{\Delta t}s^2e^{As}ds\fallingdotseq\sum_{i=0}^{m}\frac{\Delta t^{i+3}}{i+3}a_iA^i\quad\cdots\cdots(29)$$

A^i は b) に述べた方法で求めればよい．

f) $e^{A\Delta t}$, B^0, B^1, B^2 の精度および安定性向上のための計算法

文献 1) において，

$$\Delta t_l=\frac{\Delta t}{2^l}\cdots\cdots(30)$$

を用いることにより，$e^{A\Delta t}$ の精度，安定性を向上し得ること を述べた．ここでは，Δt_l について求められた $e^{A\Delta t_l}$, B^0, B^1, B^2 から Δt に関するものへ変換する式を示す．

$$\left.\begin{aligned}E^k&=e^{A\Delta t_l}\\F_0{}^k&=\int_0^{\Delta t_k}e^{As}ds\\F_1{}^k&=\int_0^{\Delta t_k}se^{As}ds\\F_2{}^k&=\int_0^{\Delta t_k}s^2e^{As}ds\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(31)$$

とすれば，

$$\left.\begin{aligned}E^{k-1}&=E^k\cdot E^k\\F_0{}^{k-1}&=F_0{}^k+E^kF_0{}^k\\F_1{}^{k-1}&=F_1{}^k+E^k(F_1{}^k+\Delta t_kF_0{}^k)\\F_2{}^{k-1}&=F_2{}^k+E^k(F_2{}^k+2\,\Delta t_kF_1{}^k+\Delta t_k{}^2F_0{}^k)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(32)$$

となる．この計算法は精度改善に有効なことが知られている．

3．減衰がレーリー型の場合の漸化式の提案

文献 1）より，外力が時間きざみ Δt 間で直線変化するとした場合の解析的方法による漸化式は次式で与えられる．

$$\begin{Bmatrix}\dot{\boldsymbol{U}}_{t+\Delta t}\\\boldsymbol{U}_{t+\Delta t}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{11}&\boldsymbol{E}_{12}\\\boldsymbol{E}_{21}&\boldsymbol{E}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\boldsymbol{U}}_t\\\boldsymbol{U}_t\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_{11}&\boldsymbol{G}_{12}\\\boldsymbol{G}_{21}&\boldsymbol{G}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{P}_{t+\Delta t}\\\boldsymbol{P}_t\end{Bmatrix}\cdots\cdots(33)$$

ここで，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{11}&\boldsymbol{E}_{12}\\\boldsymbol{E}_{21}&\boldsymbol{E}_{22}\end{bmatrix}=e^{A\Delta t}\cdots\cdots(34)$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_{11}&\boldsymbol{G}_{12}\\\boldsymbol{G}_{21}&\boldsymbol{G}_{22}\end{bmatrix}=\int_0^{\Delta t}e^{A(\Delta t-s)}\times\begin{bmatrix}\frac{s}{\Delta t}\boldsymbol{I}&\frac{\Delta t-s}{\Delta t}\boldsymbol{I}\\0&0\end{bmatrix}ds\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}^{-1}&0\\0&\boldsymbol{M}^{-1}\end{bmatrix}\cdots\cdots(35)$$

とする．減衰マトリックス $\boldsymbol{C}$ がレーリー形（$\boldsymbol{C}=\alpha\boldsymbol{M}+\beta\boldsymbol{K}:\alpha,\beta$ は正の定数）の場合に $\boldsymbol{E}_{11}$ と $\boldsymbol{E}_{21}$ の積の交換可能なことがいえる．すなわち，

$$\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{E}_{21}=\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{E}_{11}\cdots\cdots(36)$$

である．これは，$\boldsymbol{E}_{11}$, $\boldsymbol{E}_{21}$ が，$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$ の有理式で表わされ，$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$ の積が交換可能なことから明らかである．

以上の $\boldsymbol{E}_{11}$, $\boldsymbol{E}_{21}$ に関する特性を用いて，式 (33) は次のように表わされる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{21}\dot{\boldsymbol{U}}_{t+\Delta t}=\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{U}_{t+\Delta t}&+(\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{E}_{12}-\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{U}_t\\&+(\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{G}_{11}-\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{G}_{21})\boldsymbol{P}_{t+\Delta t}\\&+(\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{G}_{12}-\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{G}_{22})\boldsymbol{P}_t\cdots\cdots(37)\end{aligned}$$

式 (33) で t のかわりに $t+\Delta t$ を代入し，式 (37) と組み合わせると，n 元の漸化式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_{t+2\Delta t}=(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{U}_{t+\Delta t}&+(\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{E}_{12}-\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{U}_t\\+\boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{P}_{t+2\Delta t}&+(\boldsymbol{G}_{22}+\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{G}_{11}-\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{G}_{21})\boldsymbol{P}_{t+\Delta t}\\&+(\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{G}_{12}-\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{G}_{22})\boldsymbol{P}_t\cdots\cdots(38)\end{aligned}$$

を得る．

出発値として $t=0$ および $t=-\Delta t$ における $\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{P}_{-\Delta t}$, $\boldsymbol{U}_0$, $\boldsymbol{U}_{-\Delta t}$ が与えられれば，そのまま式 (38) で計算を進められるが，もし，$\boldsymbol{U}_0$, $\dot{\boldsymbol{U}}_0$, $\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{P}_{\Delta t}$ が与えられた場合は，最初の 1 ステップのみ

$$\boldsymbol{U}_{\Delta t}=\boldsymbol{E}_{21}\dot{\boldsymbol{U}}_0+\boldsymbol{E}_{22}\boldsymbol{U}_0+\boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{P}_{\Delta t}+\boldsymbol{G}_{22}\boldsymbol{P}_0\cdots\cdots(39)$$

を用いて $\boldsymbol{U}_{\Delta t}$ を求めなければならない．

同様に文献 1）に示した外力 $\boldsymbol{P}$ が Δt 間で一定の場合の漸化式から，次の n 元の漸化式が導かれる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_{t+2\Delta t}=(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{U}_{t+\Delta t}&\\+(\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{E}_{12}-\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{U}_t&\\+(\boldsymbol{D}_{21}+\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{D}_{11}-\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{D}_{21})\boldsymbol{P}_{t+\Delta t}&\cdots(40)\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11}\\\boldsymbol{D}_{12}\end{bmatrix}=\int_0^{\Delta t}e^{A(\Delta t-s)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\0\end{bmatrix}ds\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}^{-1}\\0\end{bmatrix}\cdots\cdots(41)$$

とする．出発値として $\boldsymbol{U}_0$, $\dot{\boldsymbol{U}}_0$, $\boldsymbol{P}_0$ が与えられる場合，最初の 1 ステップは，

$$\boldsymbol{U}_{\Delta t}=\boldsymbol{E}_{21}\dot{\boldsymbol{U}}_0+\boldsymbol{E}_{22}\boldsymbol{U}_0+\boldsymbol{D}_{21}\boldsymbol{P}_0\cdots\cdots(42)$$

を用いて $\boldsymbol{U}_{\Delta t}$ を求めればよい．

減衰がレーリー型でない場合，$\boldsymbol{E}_{21}$, $\boldsymbol{E}_{11}$ は一般には積が交換可能でなく，式 (37), (38), (40) は成立しない．$\boldsymbol{E}_{21}$ が正則であれば，式 (38), (40) に類似な n 元の漸化式が誘導できるが，$\boldsymbol{E}_{21}$ が正則かどうかは，$\boldsymbol{A}$, Δt に依存し，通常判定は困難である（一自由度系の場合，文献 1）の式 (73) に示したとおり，$\omega_D\Delta t=n\pi$ ならば $\boldsymbol{E}_{21}=0$ となる）．なお，文献 4）には式 (40) に相当する一自由度の漸化式が示されている．

4．結　　び

n 自由度系の動的応答解析を行う場合，解析的方法によれば扱うマトリックスサイズがすべて $2n$ になり，それが計算を難しくする一つの要因であると考えられるが，実際にはほとんどの計算が n 元のまま行い得るので，その計算法を示した．

マトリックス $\boldsymbol{A}$ から作られる $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^n$, $(\boldsymbol{A}^n)^{-1}$, $\left(\sum_{i=0}^m a_i\boldsymbol{A}^i\right)^{-1}$ などのマトリックスが，$\boldsymbol{A}$ の特殊性から n 元の演算で求められ，$e^{A\Delta t}$ の多項式近似，有理式近似が行えるわけである．また，漸化式の非同次項の係数マ

トリックス作成に必要な $\boldsymbol{B}^0$, $\boldsymbol{B}^1$, $\boldsymbol{B}^2$ マトリックスの計算法および Δt の 2^l 分割による精度向上法について述べたが，これらは解析的方法の適用にあたってきわめて重要である．

さらに，減衰マトリックスがレーリー型（厳密にいえば $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}$ と，$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$ の積が交換可能）であれば，$e^{A\Delta t}$ の特性により解析的方法による $2n$ 元の漸化式を n 元の係数マトリックスからなる漸化式に帰着できることが示された．数値計算例は特に示さないが，先の論文で示したものとまったく同様の解が得られ，大きな時間きざみ Δt に対してもよい解の得られることは確認されている．この方法の適用により記憶容量の節約，計算時間の短縮が行えるものと思われる．

参 考 文 献

1) 塩尻弘雄・中村秀治：構造解析における動的応答解析の一方法について，土木学会論文報告集，No. 246，1976. 2.
2) 大地羊三：第 30 回年次学術講演会の総括展望，I-1～45，土木学会誌．1975.12.
3) 滝沢春男：構造物の振動解析 I，II，東京大学建築学科修士論文．1971.
滝沢春男：強震時における建築構造物の挙動の解析，東京大学建築学科博士論文．
4) Cronin, D.L.: Short Communications, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 6, 137～152, 1973.

（1977.8.11・受付）