

任意四角形断面箱桁のせん断変形を 考慮した断面変形理論*

PROFILVERFORMUNGSTHEORIE DES KASTENTRÄGERS MIT VIER
WÄNDEN UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER SCHUBVERFORMUNG

平嶋 政治**・臼木 恒雄***

By Masaharu HIRASHIMA and Tsuneo USUKI

1. ま え が き

大径間の橋梁によく箱桁が利用されるが、それは箱桁が材料の使用量に対して比較的の高い曲げ剛性ならびにねじり剛性をもっているからである。そして最近の自動化された工事方法の遂行のために箱桁の中空部分になるべく少なく隔壁などを設ける傾向にある。このような場合には、断面変形によって発生する応力は無視しえない。

箱桁の断面変形問題は曲げねじり理論同様に1930年代以降発達してきたものであるが、曲げねじり理論ほどには正確に位置づけられていない。したがって、その解析法も種々さまざまである。

歴史的にみると、1933年にEbner¹⁾の折板理論による解析法が発表され、後にResinger²⁾, DeFries-Skene and Scordelis³⁾, 能町⁴⁾, 尾崎⁵⁾などによって報告がなされている。一方、Wlassow⁶⁾による一般化座標法は1940年代に登場した。そして、この方法を用いてLacher⁷⁾, Abdel-Samad, Wright and Robinson⁸⁾, 奥村・坂井^{9), 10)}などが報告を行っている。1950年代以降、電子計算機の発達とともに発展してきた有限要素法を用いて奥村・坂井¹¹⁾による箱桁の解析があり、また有限帯板法によってdu Preez¹²⁾の報告など現在なおさかんに研究されている。また、Wlassowの一般化座標法と有限要素法を結びつけた手法を用いて坂井・長井・佐野¹³⁾およびHirashima and Yajima¹⁴⁾が解析を行っている。

有限要素法および有限帯板法を用いた手法は、局所的な挙動をも細かく追跡しうるし、断面の自由な形状を取扱えるなどの利点のある反面、電子計算機自体の問題をそのまま解析にもちこむことになり、求めた結果から一

般的かつ理論的示唆を得るにはやや難がある。特に構造系全体の挙動を考えるには最適とは言いがたい。

以上の解析法のほかに古くからあるはりの曲げ理論および曲げねじり理論の拡張された形としての“拡張曲げ理論”とも言うべき手法がある。著者の知るかぎりではこの手法をはじめて発表したのはDabrowski^{15), 16)}と思われる。後にSteinle^{17), 18)}などが設計に利用しやすいようにした形で報告をしている。また、西野・長谷川・名取¹⁹⁾は軸力、曲げ、ねじりおよび断面変形を含んだ形での拡張曲げ理論を二軸対称長方形断面に適用している。

この手法はWlassowの一般化座標法と同様に棒理論であるので、従来のはりの曲げ理論および曲げねじり理論と同じ感覚で取り扱え、そのため境界条件もすっきりとまとめることができる。同じ棒理論の一般化座標法との大きな違いはそのせん断応力の取り出し方にある。一般化座標法ではすべてのせん断応力をHooke則から求めるのに対して、拡張曲げ理論では微少要素の応力の釣合条件から求める。したがって、せん断応力分布が一般化座標法では定数となるのに対して、拡張曲げ理論では二次放物線となる。そして現実の板要素の挙動から推定して実際に近いのは後者のほうである。また西野・長谷川・名取¹⁹⁾が指摘したように一般化座標法では座標、変位、力などを一般化した形で与えているため、一般に用いられるはり理論との対応関係、さらに解を求めるために必要な境界条件が必ずしも明らかにされていない。さらに、この拡張曲げ理論の先駆的役割をはたしたDabrowski^{15), 16)}においても変位および断面力の定義が不明確で、はりの曲げ理論および曲げねじり理論との対応関係が、十分に把握しえない。また、Steinle^{17), 18)}の研究も上述の問題点を解決しないで行っている。一方、西野・長谷川・名取¹⁹⁾の研究は厳密な変位場の仮定のもとに曲げねじりおよび断面変形の相関関係を一般化座標法との比較をまじえて考察したものである。ただ、理論的に厳密すぎて実際の箱桁の解析に応用するには複雑すぎる。

* 第26回応用力学連合講演会にて一部発表済み。

** 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科

*** 正会員 Dr.-Ing. 東京理科大学講師 理工学部土木工学科

また、この論文のようにせん断中心と断面変形中心を一点に一致させて考えられるのはこのような二軸対称長方形断面の場合のみである。

本論文では以上の観点から拡張曲げ理論のひとつとしての“断面変形理論”を文献 20) を出発点として組み立てた。そして同時に、この断面変形理論とはりの曲げ理論および曲げねじり理論との対応づけを明確にした。周知のごとく断面変形問題と曲げねじり問題は互いに連成する 2 本の微分方程式であらわされ、厳密に解くことは容易ではない。そこで本論文では曲げねじりの微分方程式のなかの断面変形そりとの連成項を無視して従来の曲げねじり問題と同様に解いた。次に断面変形の微分方程式のなかの曲げねじりそりとの連成項を微小要素の応力の釣合条件よりせん断応力の成分に変換し、それを断面変形にとっての分布外荷重として取込むことにした。当然これは近似的手法であるが、それによって断面変形問題を独立させて考えることができる。そして、従来の曲げ理論および曲げねじり理論との対応づけが可能となる。本論文では四枚の板で構成される任意断面箱桁をあつかう。これによって、もはや長方形断面の場合、台形断面の場合と別個に考える必要はなくなる。また、任意四角形断面では断面変形の自由度が 1 であり、かつ各節点の変形角が異なるため、断面変形のメカニズムを把握するのに好都合である。さらに現実問題として最近一軸対称でない薄肉箱桁が橋梁に用いられるようになってきた。なお、任意四角形断面の理論なので、他の構造工学の分野に応用することも可能である。

求まる“せん断変形を考慮した断面変形の微分方程式”は“せん断変形を考慮した弾性支承上のはりの微分方程式”とアナロジーである。この微分方程式に伝達マトリックス法を適用して解を得た。この伝達マトリックス法は中間に種々の隔壁をもつ箱桁などの解析に効果的である。本論文では中間に二つの隔壁をもったコンクリート箱桁の断面変形解析を数値計算例としてあつかった。

2. 仮 定

- 1) 幾何学的条件
 - a) 構造系は、 x 軸方向に定断面とする。
 - b) 各板の厚さ t_i は、その幅 a_i に比べて十分小さいものとする。
 - c) 断面は、四枚の板を任意に組合わせた閉断面形とする。各節点からの張出し部分も自由によろすものとする^{†1}。
 - d) 座標系として、重心 S を原点とする主座標を選

^{†1} ただし、各節点からの張出し長さは、棒理論の適用しうる範囲内とする。

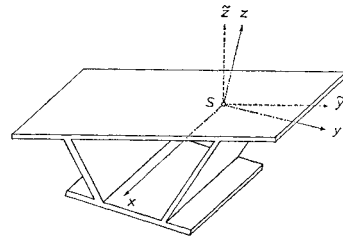


図-1 座 標 系

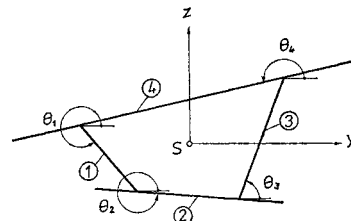


図-2 各板の傾き角

ぶ(図-1)。各板の断面内傾き角は、図-2のごとく y 軸となす角度とする。

- 2) 材料の仮定
 - e) 材料は、Hooke 則にしたがうものとする。
 - 3) ひずみの仮定
 - f) 断面中央線方向の直ひずみは無視する。
 - g) 3. ではせん断ひずみ γ_{xs} は無視するが、4. では考慮する。その場合、軸方向そりに影響するせん断ひずみの成分は無視する。
 - 4) 応力の仮定
 - h) そり応力は、板厚方向には一定、断面中央線方向には線形に分布するものと仮定する。
 - 5) 変形の仮定
 - i) 断面形は保持されない。しかし、そのために生ずる重心 S およびせん断中心 M の移動量は、微小として無視する。
 - j) 断面は、隅角部を剛結されたラーメンとして取扱われた。ただし、そのときに生ずる構成板要素の板曲げによる板厚方向の変位は微小として無視する。
 - k) 断面内で変形前に直線を保っているある板とその延長線上の張出し部分は、変形後も折れずに連続しているものとする。
 - l) 各構成板の回転により生ずる St. Venant のねじり剛性の影響は微小として無視する。
 - 6) 荷重条件
 - m) 軸方向分布荷重をのぞいたあらゆる静的荷重を取扱う。

3. 単純断面変形理論

この章においては、せん断変形の影響を無視して問題

を取扱うものとする。

(1) 応力分布と断面力

図-3 のごとき断面寸法の箱桁を考えてみよう。断面変形と同時に生ずる軸方向変位によって、断面全体は、もはや平面を保持しない。すなわち、“そり”を生ずる。しかし、それぞれの板自体は、平面を保持するものとする。したがって、軸方向そり $u_{II}(x, s)$ は、一軸応力状態を満足し、ある軸方向座標関数 $\vartheta_{II}(x)$ と単位そり関数 $\varphi_{II}(s)$ との積として次のごとく表現される。

$$u_{II}(x, s) = -\vartheta_{II}(x) \cdot \varphi_{II}(s) \dots\dots\dots (1)$$

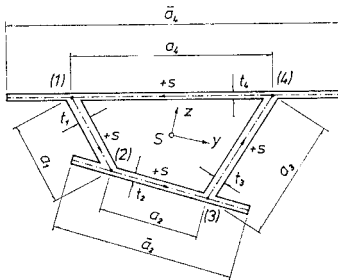


図-3 箱桁断面の諸寸法

ここで、サフィックスIIは、断面変形の諸量を意味する。のちほど用いる曲げねじり理論の諸量は、サフィックスIを付記するものとする。

Hooke 則より断面変形の軸方向そり応力は、式(1)から

$$\sigma_{II}(x, s) = -E\vartheta_{II}'(x) \cdot \varphi_{II}(s) \dots\dots\dots (2)$$

とあらわされる。ただし、()' は、 x による微分を意味する。ここで、さらに新しい関数

$$f_{II}(x) \equiv -E\vartheta_{II}'(x) \dots\dots\dots (3)$$

を導入して、軸方向そり応力は、

$$\sigma_{II}(x, s) = f_{II}(x) \cdot \varphi_{II}(s) \dots\dots\dots (4)$$

とも表現される。

曲げねじり理論のバイモーメントと同様に、“断面変形バイモーメント”なる概念を導入して、これを

$$W_{II}(x) = \int_F \sigma_{II}(x, s) \cdot \varphi_{II}(s) dF \dots\dots\dots (5)$$

と定義するならば、式(2)、式(4)を代入することによって、

$$W_{II}(x) = -EC_{II} \cdot \vartheta_{II}'(x) = C_{II} \cdot f_{II}(x) \dots\dots\dots (6)$$

となる。ただし、ここで C_{II} は、“断面変形そり抵抗”ともいべき量で、次式で与えられる。

$$C_{II} = \int_F \varphi_{II}^2(s) dF \dots\dots\dots (7)$$

また、式(6)より

$$f_{II}(x) = \frac{W_{II}(x)}{C_{II}} \dots\dots\dots (8)$$

と書けるから、式(4)の軸方向そり応力は

$$\sigma_{II}(x, s) = \frac{W_{II}(x)}{C_{II}} \varphi_{II}(s) \dots\dots\dots (9)$$

となる。

単位そり関数 $\varphi_{II}(s)$ は、次のごとく決定される。軸方向そり応力 $\sigma_{II}(x, s)$ が、外力系と釣合状態を形成しないので

$$\left. \begin{aligned} \int_F \sigma_{II} dF &= 0 \\ \int_F \sigma_{II} y dF &= 0 \\ \int_F \sigma_{II} z dF &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

の3つの条件式を得て箱桁断面の4節点の φ_{II} 値 φ_{II1} , φ_{II2} , φ_{II3} , φ_{II4} の比が求まる。そこで、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{II1} &= 1 \cdot \varphi_{II1} \\ \varphi_{II2} &= \beta_2 \cdot \varphi_{II1} \\ \varphi_{II3} &= \beta_3 \cdot \varphi_{II1} \\ \varphi_{II4} &= \beta_4 \cdot \varphi_{II1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

とおくならば、式(10)の3条件より3つの定数 β_2 , β_3 , β_4 が決定される。ここで、 φ_{II1} , φ_{II2} , φ_{II3} , φ_{II4} を絶対値で扱うことにすれば、 β_2 , β_3 , β_4 もまた正の値となる。単位そり図の振幅に相当する φ_{II1} は、次節式(31)から与えられる。

ここで注目しなければならないことは、箱桁断面が節点からの張出し部分をまったく持たない場合には、この $\varphi_{II}(s)$ の分布は、曲げねじり理論の単位そり関数 $\varphi_I(s)$ の分布と増幅量のみ変えて同じ形になるという事実である^{†2}。

断面変形によるせん断応力 $\tau_{II}(x, s)$ は、微少要素の力の釣合条件

$$\frac{\partial(\sigma_{II}t)}{\partial x} dx \cdot ds + \frac{\partial(\tau_{II}t)}{\partial s} ds \cdot dx = 0 \dots\dots\dots (12)$$

から、

$$T_{II}(x, s) = \tau_{II}(x, s) \cdot t(s) = f_{II}'(x) \cdot [\vartheta_{II} - S_{II}(s)] \dots\dots\dots (13)$$

とあらわされる。ただし、

$$\vartheta_{II} = \frac{\int_F S_{II}(s) \cdot r_t(s) ds}{\oint r_t(s) ds} \dots\dots\dots (14)$$

$$S_{II}(s) = \int_0^s \varphi_{II}(s) dF \dots\dots\dots (15)$$

である。ここで、積分記号 \oint は箱桁断面の閉じた部分のみに関する積分を意味し、 \int_F は張出し部分も含めたすべての部分に関する積分を意味する。上式において、 r_t はせん断中心 M より各板までの距離である。積分定

†2 そのために、Wlassow⁹⁾の14章の長方形断面の例題においては、1つの φ_1 図で曲げねじり理論の単位そり図と断面変形理論の単位そり図を共用してすませている。西野・長谷川・名取¹⁹⁾のFig. 5からも同様のことが言える。

数 ϕ_{II} はせん断流 $T_{II}(x, s)$ が断面全体でねじりモーメントを与えないという条件

$$\int_F T_{II}(x, s) \cdot r_I(s) ds = 0 \dots\dots\dots (16)$$

から決定された (付録参照).

式 (12) に仮想変位の原理を適用すると次式が得られる.

$$\int_F \frac{\partial \sigma_{II}}{\partial x} \varphi_{II} dF + \int_F \frac{\partial \tau_{II}}{\partial s} \varphi_{II} dF = 0 \dots\dots\dots (17)$$

ここで, x 軸方向に分布する外力は存在しないものとした (仮定 (m)). φ_{II} は, ここでは, $-\varphi_{II}(x) = 1$ のときの軸方向仮想変位 $\bar{u}_{II}(x, s)$ を意味する. 式 (17) の左辺 2 項目に部分積分を行って

$$\int_F \frac{\partial \sigma_{II}}{\partial x} \varphi_{II} dF - \int_F \tau_{II} \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial s} dF = 0 \dots\dots\dots (18)$$

となる. この左辺 2 項目の値を“断面変形せん断力”と呼んで新しく定義するならば, 次のごとく書ける¹³.

$$Q_{II}(x) = \int_F \tau_{II}(x, s) \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial s} dF \dots\dots\dots (19)$$

したがって, 式 (5) と式 (19) を式 (18) に代入するならば, はりの曲げモーメントとせん断力の間の関係とアナロジーに

$$W_{II}'(x) - Q_{II}(x) = 0 \dots\dots\dots (20)$$

の式を得る.

式 (8) および式 (20) の関係を用いて, 式 (13) のせん断流は,

$$\begin{aligned} T_{II}(x, s) &= \frac{W_{II}'(x)}{C_{II}} \cdot [\phi_{II} - S_{II}(s)] \\ &= \frac{Q_{II}(x)}{C_{II}} \cdot [\phi_{II} - S_{II}(s)] \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

とも表現される.

式 (5) および式 (19) の断面力の定義からまったく同様に外力の断面変形パイモーメント荷重 W_{II}^* , 断面変形集中荷重 Q_{II}^* , さらに断面変形分布荷重 $q_{II}^*(x)$ を定めることができる.

たとえば, ある断面 $x = x_0$ において, 図-4 のごとく軸方向分布荷重 $n(s)$ および軸方向集中荷重群 N_k が作用するとき, この断面の断面変形パイモーメント荷重は,

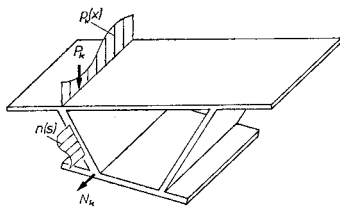


図-4 外荷重

$$W_{II}^* = \int_F n(s) \cdot \varphi_{II}(s) dF + \sum_k N_k \cdot \varphi_{II}(s) \dots\dots (22)$$

与えられる. また, 断面に平行に集中横荷重群 P_k や, 分布横荷重群 $p_k(x)$ が作用するとき, これらの荷重は, それぞれの板の s 方向成分の力 P_i や $p_i(x)$ に分解されて, 次式

$$Q_{II}^* = \sum_{i=1}^4 P_i \left(\frac{\partial \varphi_{II}}{\partial s} \right)_i \dots\dots\dots (23)$$

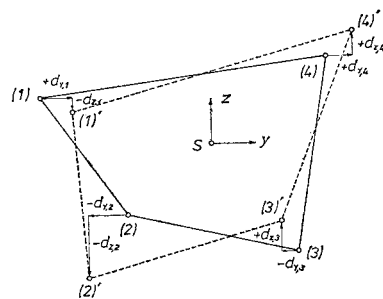
$$q_{II}^*(x) = \sum_{i=1}^4 p_i(x) \left(\frac{\partial \varphi_{II}}{\partial s} \right)_i \dots\dots\dots (24)$$

より, 断面変形集中荷重および断面変形分布荷重を求めることができる. ただし, φ_{II} は, 線形に分布しているため, $\partial \varphi_{II} / \partial s$ は, 板ごとに一定値をとる.

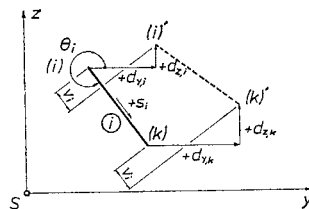
(2) 断面変形角

ある任意断面四角形が図-5 (a) のごとく断面変形を生じたとする. このとき, ある節点 (i) をはさむ二枚の板の同転角の絶対値の和を“断面変形角 τ_{IIi} ”と呼ぼう. 長方形断面が, 断面変形をおこしたとき, 生ずる各節点の断面変形角は, すべて等しい大きさである. しかし, 任意断面形では, $\tau_{II1}, \tau_{II2}, \tau_{II3}, \tau_{II4}$ はすべて異なる値をとる. そこで, この四つの断面変形角の代表として, 節点 (1) の値 τ_{II1} を選ぼう.

四角形の断面変形の自由度は 1 であるから, ある 1 節点での断面変形角が与えられれば, 残りの 3 節点での断面変形角は, おのずと定まる. いま, 節点 (1) で断面変形角 τ_{II1} が生ずるとき, 他の節点の断面変形角はどの位の割合になるか考えてみよう. Williot の変位図または F' 図の助けを借りてこれらの関係を求め, マトリック



(a) 断面全体の变形図



(b) 板 (i) の变形図

図-5 断面の变形形状

13 西野・長谷川・名取¹⁹⁾は, これに類似の断面力 T_Q を定義して, “断面変形モーメント”と呼ぶことを提案している.

クス表示で与えるならば、次のごとくなる。

$$\begin{bmatrix} r_{\Pi 1} \\ r_{\Pi 2} \\ r_{\Pi 3} \\ r_{\Pi 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{a_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)}{a_2 \sin(\theta_3 - \theta_2)} \\ \frac{a_1 a_4 \sin(\theta_1 - \theta_4)}{a_2 a_3 \sin(\theta_3 - \theta_2)} \\ -\frac{a_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{a_3 \sin(\theta_3 - \theta_2)} \end{bmatrix} \cdot r_{\Pi 1} = \begin{bmatrix} A_{10} \\ A_{20} \\ A_{30} \\ A_{40} \end{bmatrix} \cdot r_{\Pi 1} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここで新しく導入した $A_{10}, A_{20}, A_{30}, A_{40}$ は、 $r_{\Pi 1}=1$ のときの各節点での断面変形角である。

図-5 (a) より、節点 (1) の断面変形角は、次のごとく与えられる。

$$r_{\Pi 1} = \frac{d_{y,2} - d_{y,1}}{a_1 \sin \theta_1} + \frac{d_{z,1} - d_{z,4}}{a_4 \cos \theta_4} \quad \dots\dots\dots (26)$$

この変位量 $d_{y,1}, d_{y,2}, d_{z,1}, d_{z,4}$ は、図-5 (b) より、各板の s 方向変位 v_1, v_2, v_3, v_4 を用いて、次のごとく表わされる。

$$\left. \begin{aligned} d_{y,1} &= \frac{-v_1 \sin \theta_4 + v_4 \sin \theta_1}{\sin(\theta_1 - \theta_4)} \\ d_{z,1} &= \frac{v_1 \cos \theta_4 - v_4 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 - \theta_4)} \\ d_{y,2} &= \frac{-v_2 \sin \theta_1 + v_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ d_{z,4} &= \frac{v_4 \cos \theta_3 - v_3 \cos \theta_4}{\sin(\theta_4 - \theta_3)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

この s 方向変位を x で 2 回微分した量 $v_i''(x)$ は、はりの曲げ理論から次式で表現される。

$$v_i''(x) = -\frac{\sigma_{\Pi}(x, s_i)}{E \cdot s_i} = -\frac{\varphi_{\Pi i} + \varphi_{\Pi k}}{E \cdot a_i} \cdot f_{\Pi}(x) \quad \dots\dots\dots (28)$$

式 (26) を x で 2 回微分して、式 (27)、式 (28) を代入し、整理すると、

$$r_{\Pi 1}''(x) = -\frac{f_{\Pi}(x)}{E} \cdot \Omega \cdot \varphi_{\Pi 1} \quad \dots\dots\dots (29)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{a_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) \cdot (1 + \beta_2)}{a_1^2 a_4 \sin(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_1 - \theta_4)} \\ & + \frac{(\beta_2 + \beta_3)}{a_1 a_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)} + \frac{(\beta_3 + \beta_4)}{a_3 a_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)} \\ & + \frac{a_2 \sin(\theta_3 - \theta_2) \cdot (\beta_4 + 1)}{a_1 a_4^2 \sin(\theta_1 - \theta_4) \sin(\theta_4 - \theta_3)} \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

である。そこで、

$$\varphi_{\Pi 1} = \frac{1}{\Omega} \quad \dots\dots\dots (31)$$

となるように $\varphi_{\Pi 1}$ を選ぶならば、式 (29) は

$$r_{\Pi 1}''(x) = -\frac{f_{\Pi}(x)}{E} \quad \dots\dots\dots (32)$$

となる。この式に式 (8) を代入すると

$$r_{\Pi 1}''(x) = -\frac{W_{\Pi}(x)}{EC_{\Pi}} \quad \dots\dots\dots (33)$$

となり、はりの曲げ理論における弾性曲線の式とアナロジーな表現を得る。

(3) 横曲げモーメントとラーメン剛性

隣接する板と板は節点で互いに横曲げモーメントを伝達するように剛結し、この横曲げモーメントは節点から隣の接点へと線形に分布している (仮定 (j))。

この横曲げモーメントの値を求めるため、箱桁から単位幅 $dx=1$ を切取ってラーメンとして考えてみる。その際、板のねじり剛性の効果は微小として無視された (仮定 (l))。また、節点からの張出し部分は横曲げモーメントを伝達しないので、この (3) では無視して考える。

まず、この断面ラーメンを図-6のごとく展開して、4 次不静定の連続桁として解いてみる。桁の支点 (すなわち、箱桁断面の節点) ごとに、不静定モーメント X_1, X_2, X_3, X_4 を導入し、弾性方程式をたてると、マトリックス表示で、次のごとく与えられる。

$$\begin{bmatrix} \bar{E} \delta_{11} & \bar{E} \delta_{12} & 0 & \bar{E} \delta_{14} \\ \bar{E} \delta_{21} & \bar{E} \delta_{22} & \bar{E} \delta_{23} & 0 \\ 0 & \bar{E} \delta_{32} & \bar{E} \delta_{33} & \bar{E} \delta_{34} \\ \bar{E} \delta_{41} & 0 & \bar{E} \delta_{43} & \bar{E} \delta_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{E} \delta_{10} \\ \bar{E} \delta_{20} \\ \bar{E} \delta_{30} \\ \bar{E} \delta_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (34)$$

ここでは、板の曲げ剛性を考慮して

$$\bar{E} = \frac{E}{1 - \mu^2} \quad \dots\dots\dots (35)$$

である。ただし、 μ は、ポアソン比である。

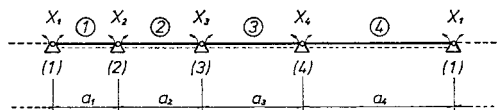


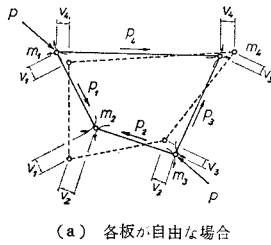
図-6 断面ラーメンの展開図

式 (34) の $\delta_{10}, \delta_{20}, \delta_{30}, \delta_{40}$ は、すでに式 (24) の $r_{\Pi 1}, r_{\Pi 2}, r_{\Pi 3}, r_{\Pi 4}$ として与えられているので、マトリックス $[\bar{E} \delta_{ik}]$ の逆マトリックスを $[\beta_{ik}]$ と表示するならば、横曲げモーメントは、次式で与えられる。

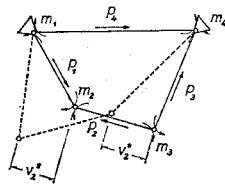
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = -\bar{E} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{10} \\ A_{20} \\ A_{30} \\ A_{40} \end{bmatrix} \cdot r_{\Pi 1} \quad \dots\dots\dots (36)$$

いま、図-7 (a) のごとく断面ラーメンの節点 (1)、(3) を結ぶ線上で向きあう 2 つの等しい力 p が作用しているならば、各節点には、角度変化 $r_{\Pi 1}, r_{\Pi 2}, r_{\Pi 3}, r_{\Pi 4}$ を生じ、同時に各板は、 s 方向変位 v_1, v_2, v_3, v_4 を生ずる。したがって、仮想変位の原理から、次式が得られる。

†4 文献 20)、21) においては、板のねじり剛性の効果も考慮して取扱った。



(a) 各板が自由な場合



(b) 板④が変位拘束を受ける場合

図-7 断面ラーメンの外力と変形

$$m_1 \bar{r}_{11} + m_2 \bar{r}_{12} + m_3 \bar{r}_{13} + m_4 \bar{r}_{14} + p_1 \bar{v}_1 + p_2 \bar{v}_2 + p_3 \bar{v}_3 + p_4 \bar{v}_4 = 0 \quad (37)$$

ここで、仮想変位は、横線 — で表現された。

ところが、図-7 (b) のごとく、板④の変位が拘束されていたとすると、 s 方向変位を生ずるのは、板②のみであるから、同様に仮想変位の原理から、次式を得る。

$$m_1 \bar{r}_{11} + m_2 \bar{r}_{12} + m_3 \bar{r}_{13} + m_4 \bar{r}_{14} + p_2 \bar{v}_2^* = 0 \quad (38)$$

この式に、式 (25)、式 (36)、そして幾何学的関係

$$\bar{v}_2^* = -a_1 \cdot \bar{r}_{11} \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (39)$$

を代入し、整理すると、次なる関係式を得る。

$$r_{11} = -\frac{p_2 \cdot a_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{EI_k} \quad (40)$$

ここで、 EI_k は、この断面のラーメン剛性である。

$$EI_k = \bar{E} \cdot [A_{10} A_{20} A_{30} A_{40}] \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{10} \\ A_{20} \\ A_{30} \\ A_{40} \end{bmatrix} \quad (41)$$

これより、ラーメン剛性とは、断面変形角 $r_{11} = 1$ を生ずる時の各節点の横曲げモーメントのなす仕事の総和である。

(4) 断面変形の微分方程式

単位幅 $dx=1$ に切取った箱桁要素を考えてみる (図-8)。箱桁要素の切口の端部に作用するせん断流の合力

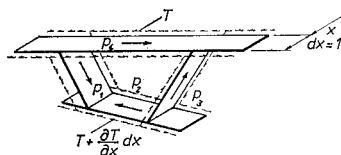


図-8 せん断流より生ずる断面変形分布力

の差が断面変形を生ぜしめるので、板②における断面変形分布力は次式で与えられる。

$$p_2 = \int_2 \frac{\partial T}{\partial x} \cdot 1 \cdot ds \quad (42)$$

断面変形を生ぜしめるせん断流には二種類ある。曲げねじりのせん断流 T_I と断面変形のせん断流 T_{II} である。 T_I は付録にも示したごとく

$$T_I(x, s) = \frac{W_I'(x)}{C_I} [\phi_I - S_I(s)] \quad (43)$$

で与えられる。ここで、 W_I は曲げねじりバイモーメント、 C_I は曲げねじりそり抵抗である。そして、

$$\phi_I = \frac{\int_F S_I(s) \cdot r_I(s) ds}{\int r_I(s) ds} \quad (44)$$

$$S_I(s) = \int_0^s \phi_I(s) dF \quad (45)$$

である。せん断流 T_I は断面剛と仮定する箱桁では断面を回転させる成分にはなりえないが、断面変形を許す箱桁では断面変形分布荷重として作用する (付録の図-15 参照)。

式 (43) を式 (42) に代入し、式 (40) を用いて整理すると、曲げねじりのせん断流 T_I による断面変形角への寄与 $r_{11, I}$ は、

$$r_{11, I} = \frac{q_I^*(x)}{EI_k} \quad (46)$$

で与えられる。ただし、

$$q_I^*(x) = -\frac{W_I''(x)}{C_I} \int_2 (\phi_I - S_I) ds \cdot a_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (47)$$

である。この式は断面変形と曲げねじりのそりの連成項を微小要素の応力の釣合条件より面内断面変形分布荷重に変換したものであることが容易に証明できる。

断面変形のせん断流 T_{II} はすでに式 (21) に与えられている。この値を用いて同様の計算を行うと、 T_{II} による断面変形角への寄与 $r_{11, II}$ は、次式で与えられる。

$$r_{11, II} = -\frac{W_{II}''(x)}{C_{II}} \cdot \frac{\int_2 (\phi_{II} - S_{II}) ds \cdot a_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{EI_k} \quad (48)$$

ところが、式 (18) に式 (4), (13) を代入して整理すると容易に

$$C_{II} = -\int_2 (\phi_{II} - S_{II}) ds \cdot a_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (49)$$

の関係を求めることができるので式 (48) は結局次式となる。

$$r_{11, II} = \frac{W_{II}''(x)}{EI_k} \quad (50)$$

純粋な外力である分布荷重 $q_{II}^*(x)$ による断面変形角への寄与 $r_{11, q}$ は、

表-1 曲げ理論, 曲げねじり理論, 断面変形理論の対応関係

	はりの曲げ理論	曲げねじり理論	断面変形理論
垂直応力	$\sigma_B = \frac{M_B}{I_B} z$	$\sigma_1 = \frac{W_1}{C_1} \varphi_1$	$\sigma_{II} = \frac{W_{II}}{C_{II}} \varphi_{II}$
せん断応力	$\tau_B t = \frac{M_B'}{I_B} (\Phi_B - S_B)$	$\tau_1 t = \frac{W_1'}{C_1} (\Phi_1 - S_1)$	$\tau_{II} t = \frac{W_{II}'}{C_{II}} (\Phi_{II} - S_{II})$
曲げモーメントまたはバイモーメント	$M_B = \int_F \sigma_B \cdot z dF$	$W_1 = \int_F \sigma_1 \cdot \varphi_1 dF$	$W_{II} = \int_F \sigma_{II} \cdot \varphi_{II} dF$
せん断力または2次ねじりモーメント	$Q_B = \int_F \tau_B \cdot l dF$	$M_{T_2} = \int_F \tau_1 \cdot \dot{\varphi}_1 dF$	$Q_{II} = \int_F \tau_{II} \cdot \dot{\varphi}_{II} dF$
断面力間の関係	$M_B' = Q_B$	$W_1' = M_{T_2}$	$W_{II}' = Q_{II}$
断面2次モーメントまたはそり抵抗	$I_B = \int_F z^2 dF$	$C_1 = \int_F \varphi_1^2 dF$	$C_{II} = \int_F \varphi_{II}^2 dF$
弾性曲線の微分方程式	$w'' = -\frac{M_B}{EI_B}$	$\chi'' = -\frac{W_1}{EC_1}$	$\tau_{II}'' = -\frac{W_{II}}{EC_{II}}$

$$\tau_{II, q} = \frac{q_{II}^*(x)}{EI_k} \dots\dots\dots (51)$$

で与えられるから, 結局これらの総和として, 断面変形角 τ_{II} は, 次のごとく表現される.

$$\begin{aligned} \tau_{II}(x) &= \tau_{II, I} + \tau_{II, II} + \tau_{II, q} \\ &= \frac{W_{II}''(x) + q_{I+II}^*(x)}{EI_k} \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

ただし, ここでは,

$$q_{I+II}^*(x) = q_I^*(x) + q_{II}^*(x) \dots\dots\dots (53)$$

とあらわした.

式 (33) と式 (52) から $W_{II}(x)$ の項を消去すると, 次式を得る.

$$EC_{II} \cdot \tau_{II, IV} + EI_k \cdot \tau_{II} = q_{I+II}^*(x) \dots\dots\dots (54)$$

これが, 求める断面変形の微分方程式である.

最後に, この章のまとめとして, はりの曲げ理論, 曲げねじり理論, および断面変形理論の間にある対応関係を, 表-1 に示した.

4. せん断変形を考慮した断面変形理論

(1) せん断変形の影響

せん断変形は各板の面内変位にのみ影響し, 軸方向のそりには影響しないと仮定するならば(仮定(g)), 前章で求めたそり応力およびせん断流の表示式(9), (21)はこの章でも成立する. しかし, 式(33)の断面変形角とバイモーメントの関係はここではもはや成立しない.

そこで仮想仕事の原理を用いて各板のせん断力 Q_i による変位増加量 v_{Q_i} を x で1回微分した値を求めると,

$$v_{Q_i}' = \frac{1}{GQ_i} \int_i \tau_{II}^2(x, s) dF_i \dots\dots\dots (55)$$

とあらわされる. これをもう1回微分して式(28)のそり応力のみによる変位の2回微分と加え合わせると, 結局

$$v_i''(x) = -\frac{\varphi_{II} + \varphi_{IIk}}{Ea_i} [f_{II}(x) - k_i \cdot f_{II}''(x)] \dots\dots (56)$$

となる. ただし

$$k_i = \frac{E}{G} \cdot \frac{a_i}{\varphi_{IIi} + \varphi_{IIk}} \cdot \frac{\int_i (\Phi_{II} - S_{II})^2 (ds/t_i)}{\int_i (\Phi_{II} - S_{II}) ds} \dots\dots (57)$$

である.

前章同様に式(56)を式(26)に代入して, 式(27)の関係をを用いるならば, 最終的に次式が得られる.

$$\tau_{II}''(x) = -\frac{1}{E} [f_{II}(x) - k_{II} \cdot f_{II}''(x)] \dots\dots (58)$$

ただし,

$$\begin{aligned} k_{II} = \varphi_{II} \cdot & \left[\frac{a_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) \cdot (1 + \beta_2) k_1}{a_1^2 a_4 \sin(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_1 - \theta_4)} \right. \\ & + \frac{(\beta_2 + \beta_3) k_2}{a_1 a_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)} + \frac{(\beta_3 + \beta_4) k_3}{a_3 a_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)} \\ & \left. + \frac{a_2 \sin(\theta_3 - \theta_2) \cdot (\beta_4 + 1) k_4}{a_1 a_4^2 \sin(\theta_1 - \theta_4) \sin(\theta_4 - \theta_3)} \right] \dots\dots (59) \end{aligned}$$

である.

式(8)の関係を式(58)に代入すると,

$$\tau_{II}''(x) = -\frac{1}{EC_{II}} [W_{II}(x) - k_{II} \cdot W_{II}''(x)] \dots\dots (60)$$

となる. これが新しい断面変形角とバイモーメントの関係式である. この式は, せん断変形を考慮したはりの弾性曲線の方程式

$$w''(x) = -\frac{1}{EI_B} [M_B(x) - k_B \cdot M_B''(x)] \dots\dots (61)$$

と完全に対応していることがわかる. この式で, w は, はりのたわみ, I_B は, 断面2次モーメント, M_B は, 曲げモーメント, そして, k_B は, はりのたわみのせん断変形のパラメーターで, 次式で与えられる.

$$k_B = \kappa \cdot \frac{EI_B}{GF} \dots\dots\dots (62)$$

ただし, F は, はりの断面積である.

(2) 弾性支承上のはりとの対応

せん断変形を考慮した断面変形理論が, せん断変形を考慮した弾性支承上のはりの理論とアナロジーなので,

まず、弾性支承上のはりを考えてみよう。

せん断変形の影響を考慮するため、垂直応力によるたわみを w_M 、せん断応力によるたわみを w_Q とするならば、全たわみ w は、

$$w = w_M + w_Q \dots\dots\dots (63)$$

で与えられる。このとき、はりの曲げモーメント M_B および、せん断力 Q_B は、

$$M_B = -EI_B \cdot w_M'' \dots\dots\dots (64)$$

$$Q_B = \frac{GF}{\kappa} w_Q' = \frac{EI_B}{k_B} (w' - w_M') \dots\dots\dots (65)$$

で表現される。式 (65) には、式 (62) の関係が用いられた。

さらに、はり要素の力のつり合いから、

$$Q_B' + q_B - K \cdot w = 0 \dots\dots\dots (66)$$

$$M_B' = Q_B \dots\dots\dots (67)$$

の2条件式を得る。ただし、 K は、弾性支承のばね定数であり、 q_B は、はりに載荷された分布荷重である。

次に、断面変形理論を考慮してみる。垂直応力による断面変形角を $r_{\Pi, W}$ 、せん断応力による断面変形角を $r_{\Pi, Q}$ と表示するならば、全断面変形角 r_{Π} は、

$$r_{\Pi} = r_{\Pi, W} + r_{\Pi, Q} \dots\dots\dots (68)$$

で与えられる。したがって、弾性支承上のはりと同様にバイモーメント W_{Π} とせん断力 Q_{Π} は、

$$W_{\Pi} = -EC_{\Pi} \cdot r_{\Pi}' \dots\dots\dots (69)$$

$$Q_{\Pi} = \frac{EC_{\Pi}}{k_{\Pi}} (r_{\Pi} - r_{\Pi}', W) \dots\dots\dots (70)$$

で表現される。また、箱桁要素 $dx=1$ の力のつり合いから次の2条件式が得られる。

$$Q_{\Pi}' + q_{1+\Pi} - EI_k \cdot r_{\Pi} = 0 \dots\dots\dots (71)$$

$$W_{\Pi}' = Q_{\Pi} \dots\dots\dots (72)$$

この両式は、すでに前章の式 (52) と式 (20) で与えられている。式 (70) を x で1回微分して式 (72) と式 (69) を代入するならば、前節の式 (60) が得られる。

はりのたわみ角 $w' = \vartheta_B$ に対応させて“断面変形角の傾き”なる概念を導入し、これを

$$r_{\Pi}' = \psi_{\Pi} \dots\dots\dots (73)$$

とあらわすならば、式 (68) の両辺を x で一回微分して $\psi_{\Pi} = \psi_{\Pi, W} + \psi_{\Pi, Q} \dots\dots\dots (74)$

表一2 弾性支承上のはりの理論と断面変形理論の対応関係

	弾性支承上のはりの理論			断面変形理論	
	次元	次元	次元		
曲げ剛性	EI_B	FL^2	FL^4	EC_{Π}	そり剛性
弾性支承定数	K	FL^{-2}	F	EI_k	ラーメン剛性
せん断変形パラメーター	k_B	L^2	L^2	k_{Π}	せん断変形パラメーター
たわみ	w	L	—	r_{Π}	断面変形角
たわみ角	ϑ_B	—	L^{-1}	ψ_{Π}	断面変形角の傾き
曲げモーメント	M_B	FL	FL^2	W_{Π}	バイモーメント
せん断力	Q_B	F	FL	Q_{Π}	断面変形せん断力
分布荷重	q_B	FL^{-1}	F	$q_{1+\Pi}$	分布荷重

F: 力の次元, L: 長さの次元

と表現することができる。

断面変形理論と弾性支承上のはりの理論との対応関係を、表一2 に示した。

(3) せん断変形を考慮した断面変形の微分方程式

前節の4つの関係式 (69), (70), (71), (72) から、せん断変形を考慮した断面変形の微分方程式を求めてみる。式 (70), (71) から Q_{Π} の項を消去すると、

$$\frac{EC_{\Pi}}{k_{\Pi}} (r_{\Pi}'' - r_{\Pi}'', W) + q_{1+\Pi} - EI_k \cdot r_{\Pi} = 0 \dots\dots\dots (75)$$

となる。また、式 (69), (70), (72) から、 W_{Π} , Q_{Π} の項を消去して整理すると

$$r_{\Pi}' = -k_{\Pi} \cdot r_{\Pi}''', W + r_{\Pi}', W \dots\dots\dots (76)$$

となる。(75), (76) の両式から r_{Π} の項を消去して式 (73) の関係を用いれば、結局、次式を得る。

$$-EC_{\Pi} \cdot \psi_{\Pi}''', W + k_{\Pi} \cdot EI_k \cdot \psi_{\Pi}'', W - EI_k \cdot \psi_{\Pi}, W + q_{1+\Pi} (x) = 0 \dots\dots\dots (77)$$

この四階線形微分方程式の解は、次の形で与えられる。

$$\psi_{\Pi}, W(x) = C_1 \sinh \lambda_1 x \cdot \sin \lambda_2 x + C_2 \cosh \lambda_1 x \cdot \cos \lambda_2 x + C_3 \sinh \lambda_1 x \cdot \cos \lambda_2 x + C_4 \cosh \lambda_1 x \cdot \sin \lambda_2 x + F_P(x) \dots\dots (78)$$

ここで C_1, C_2, C_3, C_4 は、積分定数であり、 $F_P(x)$ は、特解である。そして

$$\lambda_1 = \lambda_{\Pi} \sqrt{1 + k_{\Pi} \cdot \lambda_{\Pi}^2} \dots\dots\dots (79. a)$$

$$\lambda_2 = \lambda_{\Pi} \sqrt{1 - k_{\Pi} \cdot \lambda_{\Pi}^2} \dots\dots\dots (79. b)$$

である。ただし、

$$\lambda_{\Pi} = \sqrt[4]{\frac{EI_k}{4 EC_{\Pi}}} \dots\dots\dots (79. c)$$

である。

他の変位量、断面力を $\psi_{\Pi, W}$ で表現するならば、次のごとくあらわせる。

$$r_{\Pi} = -\frac{EC_{\Pi}}{EI_k} \cdot \psi_{\Pi}''', W + \frac{q_{1+\Pi}(x)}{EI_k} \dots\dots (80)$$

$$W_{\Pi} = -EC_{\Pi} \cdot \psi_{\Pi}', W \dots\dots\dots (81)$$

$$Q_{\Pi} = -EC_{\Pi} \cdot \psi_{\Pi}'', W \dots\dots\dots (82)$$

したがって、式 (78) を上式に代入することによって、すべての状態量が、積分定数 C_i で表現される。

(4) 伝達マトリックス法の適用

前節までに求めた関係式群を用いて伝達マトリックス法で断面変形問題の解を求めることができる。前節より断面変形の状態量ベクトルを次のごとくおく。

$$V = \begin{bmatrix} r_{\Pi} \\ \psi_{\Pi}, W \\ W_{\Pi} \\ Q_{\Pi} \\ 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (83)$$

表-3 断面変形の格間伝達マトリックス

$\left(\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2}\right)S_S + C_c$	$\frac{\lambda_2 S_c + \lambda_1 C_s}{2\lambda_1\lambda_2}$	$-\frac{S_s}{2EC_{II}\lambda_1\lambda_2}$	$\frac{\lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2)S_{c_s}}{2EC_{II}\lambda_1\lambda_2} + \frac{\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2)C_{s_s}}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}$	$-\left[\frac{\lambda_2 S_c + \lambda_1 C_s}{2\lambda_1\lambda_2}\right]F_P(0) - \frac{EC_{II}}{EI_k} F_P'''(L) + \frac{q_1 + \Pi^*(L)}{EI_k} + \left[\left(\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2}\right)S_S + C_c\right] \times \left(\frac{EC_{II}}{EI_k} F_P'''(0) - \frac{q_1 + \Pi^*(0)}{EI_k}\right) - \left[\frac{S_s}{2\lambda_1\lambda_2}\right]F_P'(0)$
$\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\lambda_2 S_c - \lambda_1 C_s)}{2\lambda_1\lambda_2}$	$-\left(\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2}\right)S_S + C_c$	$-\frac{-\lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2)S_{c_s}}{2EC_{II}\lambda_1\lambda_2} + \frac{\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2)C_{s_s}}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}$	$-\frac{S_s}{2EC_{II}\lambda_1\lambda_2}$	$\left[\left(\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2}\right)S_S - C_c\right]F_P(0) + F_P(L) + \left[\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\lambda_2 S_c - \lambda_1 C_s)}{2\lambda_1\lambda_2}\right] \times \left(\frac{EC_{II}}{EI_k} F_P'''(0) - \frac{q_1 + \Pi^*(0)}{EI_k}\right) + \left[\frac{-\lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2)S_{c_s} + \lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2)C_{s_s}}{2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}\right] \times F_P'(0)$
$\frac{EI_k S_s}{2\lambda_1\lambda_2}$	$\frac{EI_k(\lambda_1 C_s - \lambda_2 S_c)}{2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}$	$-\left(\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2}\right)S_S + C_c$	$\frac{\lambda_2 S_c + \lambda_1 C_s}{2\lambda_1\lambda_2}$	$-\left[\frac{EI_k(\lambda_1 C_s - \lambda_2 S_c)}{2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}\right]F_P(0) - EC_{II} \cdot F_P'(L) + \left[\frac{S_s}{2\lambda_1\lambda_2}\right](EC_{II} \cdot F_P'''(0) - q_1 + \Pi^*(0)) - EC_{II} \left[\left(\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2}\right)S_S - C_c\right]F_P'(0)$
$\frac{EI_k(\lambda_2 S_c + \lambda_1 C_s)}{2\lambda_1\lambda_2}$	$\frac{EI_k S_s}{2\lambda_1\lambda_2}$	$\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\lambda_2 S_c - \lambda_1 C_s)}{2\lambda_1\lambda_2}$	$\left(\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2}\right)S_S + C_c$	$-\left[\frac{EI_k S_s}{2\lambda_1\lambda_2}\right]F_P(0) - EC_{II} \cdot F_P''(L) + \left[\frac{\lambda_2 S_c + \lambda_1 C_s}{2\lambda_1\lambda_2}\right] \times (EC_{II} \cdot F_P'''(0) - q_1 + \Pi^*(0)) + EC_{II} \left[\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\lambda_2 S_c - \lambda_1 C_s)}{2\lambda_1\lambda_2}\right]F_P'(0)$
0	0	0	0	1

ただし $S_s = \sinh \lambda_1 l_k \cdot \sin \lambda_2 l_k$, $C_c = \cosh \lambda_1 l_k \cdot \cos \lambda_2 l_k$, $S_c = \sinh \lambda_1 l_k \cdot \cos \lambda_2 l_k$, $C_s = \cosh \lambda_1 l_k \cdot \sin \lambda_2 l_k$ である。

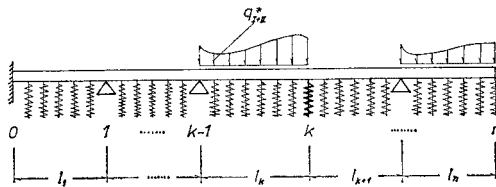


図-9 断面変形モデルとしての連続桁

そして図-9 より格間 l_k において

$$V_k^R = F_k \cdot V_k^L \dots \dots \dots (84)$$

なる格間伝達方程式が得られる。ここで、 F_k は格間 l_k の伝達マトリックスである。 F_k は表-3 で与えられる。図-9 の格点 k の左右の状態量ベクトル V_k^L と V_k^R の間には、

$$V_{k+1}^L = P_k \cdot V_k^R \dots \dots \dots (86)$$

なる格点伝達方程式が得られる。ここで、 P_k は格点 k の伝達マトリックスである。

格点の種類もはりの曲げ問題同様に種々のものが考えられるが、特に代表的な格点を挙げると次のごとくなる。

a) 弾性隔壁

ある格点を弾性的な隔壁によって断面変形に抵抗させるが、軸方向よりは拘束しない。この弾性隔壁のばね定

表-4 境界条件の対応関係

弾性支承上への梁の理論		断面変形理論	
自由端 	w 未知量 $S_{\theta, \theta}$ 未知量 $M_{\theta} = 0$ $Q_{\theta} = 0$	Z_{EI} 未知量 $V_{EI, w}$ 未知量 $W_{EI} = 0$ $Q_{EI} = 0$	自由端
単純支持端 	$w = 0$ $S_{\theta, \theta}$ 未知量 $M_{\theta} = 0$ Q_{θ} 未知量	$Z_{EI} = 0$ $V_{EI, w}$ 未知量 $W_{EI} = 0$ Q_{EI} 未知量	剛体隔壁
弾性支持端 	w 未知量 $S_{\theta, \theta}$ 未知量 $M_{\theta} = 0$ $Q_{\theta} = c_{\theta} w$	Z_{EI} 未知量 $V_{EI, w}$ 未知量 $W_{EI} = 0$ $Q_{EI} = c_{\theta} Z_{EI}$	弾性隔壁
固定端 	$w = 0$ $S_{\theta, \theta} = 0$ M_{θ} 未知量 Q_{θ} 未知量	$Z_{EI} = 0$ $V_{EI, w} = 0$ W_{EI} 未知量 Q_{EI} 未知量	剛体固定隔壁
弾性支持+弾性固定端 	w 未知量 $S_{\theta, \theta}$ 未知量 $M_{\theta} = -c_{\theta} S_{\theta}$ $Q_{\theta} = c_{\theta} w$	Z_{EI} 未知量 $V_{EI, w}$ 未知量 $W_{EI} = -c_{\theta} Z_{EI}$ $Q_{EI} = c_{\theta} Z_{EI}$	弾性支持+弾性固定隔壁

数を c_P とすると、断面変形の反力は $Q_{II, k} = c_P \cdot \tau_{II, k}$ となる。

b) 剛体隔壁

ある格点を剛体的な隔壁によって断面変形に抵抗させるが、軸方向よりは拘束しない。この格点 k には未知支点反力 $Q_{II, k}^s$ が発生する。

連続桁の左右両端には常に二つの未知量と二つの境界条件が存在する。そこで左端の二つの未知量を右端の二つの境界条件による連立方程式で解くことによりすべての状態量を求めることができる。この境界条件のパターンを弾性支承上のはりの場合と対応させて表-4 に示す。

5. 数値計算例

図-10 で与えられるコンクリート箱桁断面を考えてみよう。式 (10), 式 (31) から図-11 (a) の単位そり図が求まり、式 (13) から図-11 (b) の $(\phi_{II} - S_{II})$ 図

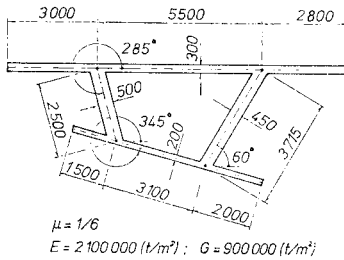
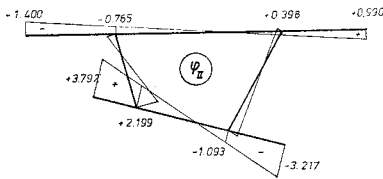
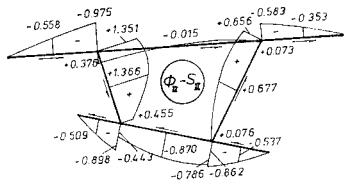


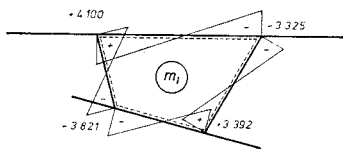
図-10 数値計算例の断面の諸寸法



(a) 単位そり図



(b) $(\phi_{II} - S_{II})$ 図



(c) $r_{II} = 1$ のときの横曲げモーメント図

図-11 数値計算例の断面関数分布図

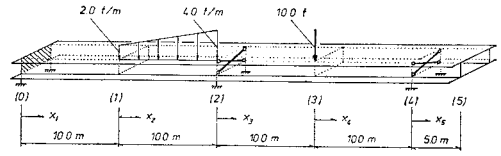
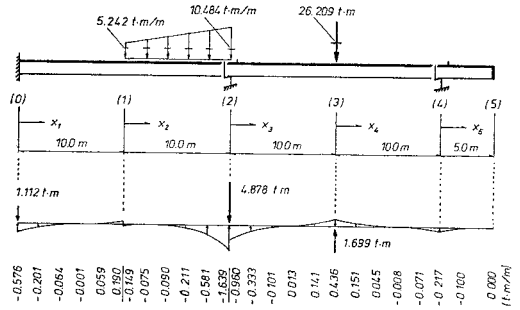
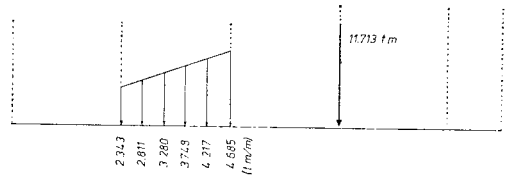


図-12 数値計算例の構造系



(a) 曲げねじりによる断面変形集中荷重 Q_I^* および分布荷重 $q_I^*(x)$



(b) 純粋断面変形集中荷重 Q_{II}^* および分布荷重 $q_{II}^*(x)$

図-13 断面変形の外荷重

が求まる。この $(\phi_{II} - S_{II})$ 図はせん断流の分布と増量が異なるだけで同じ形である。また、式 (36) より図-11 (c) の横曲げモーメントの分布が求まる。

構造系としては、図-12 で与えられる連続桁を考えてみよう。左端 (0) には剛体固定隔壁があり、当然、断面全体の回転も拘束されている。(2) 点、(4) 点には剛体隔壁があって断面変形を拘束するとともに、断面の回転も止められているものとする。この連続桁に図のごとき分布荷重と集中荷重が板④に垂直に節点 (1) 上に載るとしよう。

まず最初に曲げねじり問題として解いて、断面変形集中荷重 Q_I^* および分布荷重 $q_I^*(x)$ を求めると、式 (47) から、図-13 (a) のごとく与えられる。また、外力の分解のみによって生ずる断面変形集中荷重 Q_{II}^* および分布荷重 $q_{II}^*(x)$ は、式 (23), 式 (24) から、図-13 (b) のごとく与えられる。この両者の和 $Q_I^* + Q_{II}^*$ および $q_I^*(x) + q_{II}^*(x)$ が断面変形問題の外荷重として、図-14 最上段の図のごとく載荷される。この図は弾性支承上のはりとの対応から描かれたもので、固定端は剛体固定隔壁、ヒンジ支承は剛体隔壁を意味する。

前章の伝達マトリックス法を用いてこの連続桁を解くと、状態量 $r_{II}(x)$, $W_{II}(x)$, $Q_{II}(x)$ の分布が図-14

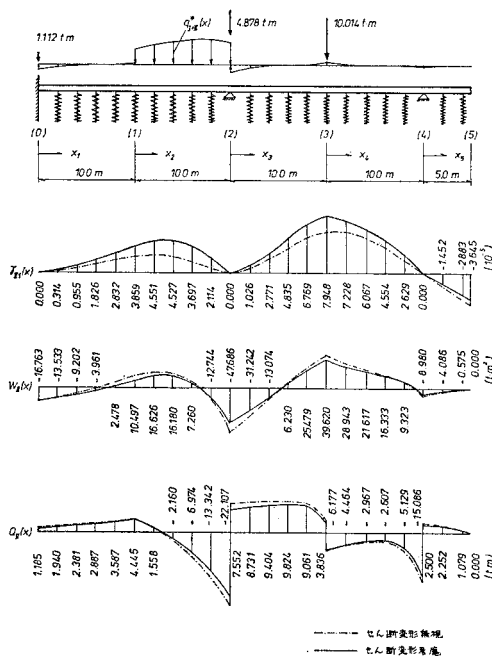


図-14 各状態量の分布図

のごとく求められた。この図で一点鎖線はせん断変形を無視した場合であり、実線ならびに挙げられた数値はせん断変形を考慮した場合である。両者の相違は、断面変形角 τ_{II} の最大値発生点 (3) で約 30% の大きさとなる。パイモーメント W_{II} の最大値発生点 (2) では約 25% であり、せん断力 Q_{II} では同様に (2) 点で約 15% となる。

したがって、この構造系においては、せん断変形の考慮は十分な意味があると思われる。

6. あとがき

任意四角形断面箱桁のせん断変形を無視した断面変形理論を 3. に、せん断変形を考慮した断面変形理論を 4. に述べた。この 3. 4. において、Wlassow⁶⁾, Dabrowski^{15), 16)}, Steidle^{17), 18)} が明確にしなかった変位、断面力をわかりやすく定義し、同時に、はりの曲げ理論および曲げねじり理論との対応関係をあきらかにした。さらに、断面変形の境界条件および支点条件として考えられるかぎりのものを弾性支承上のはりの境界条件と対応させて表示した。

4. のせん断変形を考慮した断面変形の微分方程式を用いて伝達マトリックス法で 5. の数値計算例を解いた。3. のせん断変形を無視する場合は、簡単にせん断変形のパラメーター $k_{II}=0$ とおくことによって、解を得ることができる。数値計算例においては、図-14 に

せん断変形考慮と無視のずれを図示した。

いままでの理論および考察は鋼橋、コンクリート橋共通のものであるが、コンクリート橋においては横曲げモーメントによって節点部に発生する引張り応力 σ_q の影響が大きく、設計に際しては特に注意が必要である。

おわりに、ドイツ留学の機会を与えてくれたドイツ大学交換奉仕会 (Deutscher Akademischer Austauschdienst) および Darmstadt 工科大学の R. Schardt 教授、G. König 教授に深く感謝の意を表します。

付 録

曲げねじりおよび断面変形のせん断流分布

曲げねじり理論において閉断面材の二次せん断流 T_2 は、せん断ひずみの連続条件

$$\oint T_2 \frac{ds}{t} = 0 \quad \dots\dots\dots (A-1)$$

より

$$T_2 = \frac{W_I'}{C_I} [\phi_s - S_I(s)] \quad \dots\dots\dots (A-2)$$

となる。ここで、積分定数 ϕ_s は

$$\phi_s = \frac{\oint S_I \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} \quad \dots\dots\dots (A-3)$$

である。 $S_I(s)$ は、式 (45) で与えられている。

したがって、全せん断流 T は、Bredt のせん断流 T_1 との和として

$$T = T_1 + T_2 = \frac{M_{T1}}{2F_B} + \frac{W_I'}{C_I} [\phi_s - S_I(s)] \quad \dots\dots\dots (A-4)$$

で与えられる。ただし、 M_{T1} は Bredt のねじりモーメント、 F_B は Bredt の断面積である。

上記二次せん断流 T_2 は純断面変形力の成分 T_{I1} と純ねじり力の成分 T_{2*} に分解して次のごとく書き直せる。

$$T_2 = T_{2*} + T_{I1} = \frac{M_{T2}}{2F_B} + \frac{W_I'}{C_I} [\phi_{I1} - S_I(s)] \quad \dots\dots\dots (A-5)$$

ここで、 M_{T2} は二次ねじりモーメント、 ϕ_{I1} は

$$\int_F T_{I1} \cdot r_t ds = 0 \quad \dots\dots\dots (A-6)$$

より与えられる積分定数で式 (44) で表わされる。なお、式 (A-5) の分解には

$$2F_B(\phi_{I1} - \phi_s) + C_I = 0 \quad \dots\dots\dots (A-7)$$

の関係式を用いた。式 (A-5) を用いると全せん断流 T は式 (A-4) の代りに、

$$T = T_1 + T_2 = \frac{M_T}{2F_B} + \frac{W_I'}{C_I} [\phi_{I1} - S_I(s)] \quad \dots\dots\dots (A-8)$$

と表わされる。ここで、 $M_T = M_{T1} + M_{T2}$ より全ねじり

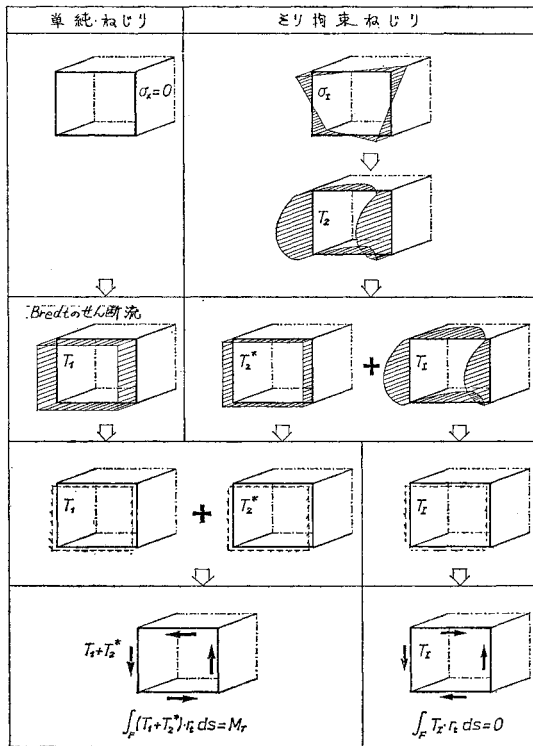


図-15 ねじりにより生ずる応力

モーメントを意味し、 T_1 がねじりモーメントの成分をまったく持たないことがわかる。これらの関係は長方形断面を用いた例、図-15 より明らかである。

次に断面変形のせん断流 T_{II} は

$$T_{II} = \frac{W_{II}'}{C_{II}} [\phi_{II} - S_{II}(s)] \dots \dots \dots (21)$$

で与えられている。積分定数 ϕ_{II} は式 (A-6) に対応する条件

$$\int_F T_{II} \cdot r_1 ds = 0 \dots \dots \dots (16)$$

から定められた。これは、断面変形のせん断流 T_{II} はねじりモーメントを与えてはならないからである。もしも式 (A-1) のごときせん断ひずみの連続条件を適用して積分定数 ϕ_{II} を決定するならば、断面全体で T_{II} がねじりモーメントを生じてしまい、断面変形問題として取出すことができなくなるのである。

参考文献

- 1) Ebner, H. : Die Beanspruchung dünnwandiger Kastenträger auf Drillung bei behinderter Querschnittswölbung, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Nr. 23, pp. 645-655, pp. 684-692, 1933.
- 2) Resinger, F. : Der dünnwandiger Kastenträger, Forschungsheft aus dem Gebiet des Stahlbaus, Nr. 13,

Stahlbau-Verlags G.m.b.H., Köln, 1959.

- 3) DeFries-Skene, A. and Scordelis, A.C. : Direct stiffness solution for folded plates, Proc. of ASCE, ST 4, pp. 15-47, 1964.
- 4) 能町純雄：剛なダイヤフラムで等区画に分けられる薄肉長方形箱げたの曲げねじりについて、土木学会論文報告集 No. 146, pp. 13-21, 1967.10.
- 5) 尾崎 訥：折板構造解析による単一箱桁の曲げねじりについて、土木学会論文報告集 No. 179, pp. 1-12, 1970.7.
- 6) Wlassow, W.S. : Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik, Akademie Verlag, 1958.
- 7) Lacher, G. : Zur Berechnung des Einflusses der Querschnittsverformung auf die Spannungsverteilung bei durch elastische oder starre Querschotte versteiftem Querschnitt unter Querlast, Der Stahlbau, Vol. 31, Nr. 10, pp. 299-308, Nr. 11, pp. 325-335, 1962.
- 8) Abdel-Samad, S.R., Wright, R.N. and Robinson, A.R. : Analysis of box girders with diaphragms, Proc. of ASCE, Vol. 94, No. ST 10, pp. 2231-2256, 1968.
- 9) 奥村敏恵・坂井藤一：箱型ばりの断面変形と中間ダイヤフラムの影響、土木学会論文報告集 No. 190, pp. 23-36, 1971.6.
- 10) 奥村敏恵・坂井藤一：リップ台形桁の断面変形挙動とダイヤフラムの効果、土木学会論文報告集 No. 209, pp. 1-14, 1973-1.
- 11) 奥村敏恵・坂井藤一：薄肉平板より成る立体的構造物の静力学的解析に関する一方法とその応用、土木学会論文報告集 No. 176, pp. 43-59, 1970.4.
- 12) du Preez, R. : Berechnung Prismatischer Flächen-tragwerke mit Hilfe von finiten Streifenelementen, Die Bautechnik, Vol. 49, Nr. 5, pp. 151-162, 1972.
- 13) 坂井藤一・長井正嗣・佐野信一郎：ブロック有限要素法による薄肉箱桁の立体解析、土木学会論文報告集, No. 255, pp. 17-29, 1976-11.
- 14) Hirashima, M. and Yajima, S. : Beitrag zur Berechnung von Querschotten in Hohlkastenträgern, Proc. of JSCE, No. 264, pp. 113-123, Aug., 1977.
- 15) Dabrowski, R. : Der Schubverformungseinfluß auf die Wölbkrafttorsion der Kastenträger mit verformbarem biegesteifem Profil, Der Bauingenieur, Vol. 40, Nr. 11, pp. 444-449, 1965.
- 16) Dabrowski, R. : Gekrümmte dünnwandige Träger, Springer, 1968.
- 17) Steinle, A. : Torsion und Profilverformung, Dissertation Universität Stuttgart, 1967.
- 18) Steinle, A. : Torsion und Profilverformung beim einzelligen Kastenträger, Beton- und Stahlbetonbau, Vol. 65, Nr. 9, pp. 215-222, 1970.
- 19) 西野文雄・長谷川彰夫・名取悦朗：断面変形とせん断変形を考慮した長方形薄肉断面はりの理論、土木学会論文報告集 No. 248, pp. 25-40, 1976-4.
- 20) Usuki, T. : Torsion und Profilverformung des einzelligen Kastenträgers mit vier Wänden unter Berücksichtigung der Schubverformungen und der Drillsteifigkeit der Wände, Dissertation Technische Hochschule Darmstadt, 1976.
- 21) 白木恒雄：任意断面形箱桁の断面変形理論、第26回応用力学連合講演会講演論文抄録集, pp. 423-424, 1976-10. (1977.1.17・受付)