

## 管路，薄肉はりなどの線形常微分方程式の一次数値解析法

### A NUMERICAL METHOD FOR LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PIPELINES AND THIN-WALLED BEAMS

中 村 秀 治\*

By Hideharu NAKAMURA

#### 1. ま え が き

土木構造物の解析を行うにあたり，しばしば直面する重要な問題の一つは高階多元の連立常微分方程式の境界値問題，初期値問題の数値解を所要の精度で得ることである。非定常熱伝導解析，動的応答解析などの初期値問題に対しては逐次積分の立場から多くの研究が行われ，さまざまな特性を有する漸化式が提案された。その結果，特殊な現象を除いてはほとんど実用上十分な解が得られるようになった。しかし，境界値問題，特に薄肉はりの立体的挙動を解く場合などは，種々の境界条件に対して必ずしもすべて満足 of いく解が得られる状態ではない。

管路，薄肉はりなどは，はりとしての特性とシェルとしての特性を兼ね備えた構造物である。これらの計算には有限要素法も一つの方法として用いられているが，通常，必要以上の自由度を与えすぎたり，集中荷重に対する応力変化に対応しにくい所から得策ではなく，常微分方程式の境界値問題として解析的に解きたい場合が多い。

管路，薄肉はりなどの線形常微分方程式というのは，ここでは，文献1)～14)などにあげられた方程式を意味しているが，その誘導法は大きく次の2つに分けられる。

I) 板殻の偏微分方程式の解を，軸と直角方向にはある変位関数で仮定し，軸方向座標のみに関する常微分方程式に変換したもの<sup>1)～7), 13)</sup>。

II) そりなどは考慮するが，断面形状は不変と仮定して，幾何的あるいはエネルギー的考察から常微分方程式を誘導するもの<sup>12), 14)</sup>。

これらは一般に高階多元の線形常微分方程式であり，任意の境界条件，荷重条件で解くのは，原理的には可能であっても実際には難しい。両端単純支持あるいは一端固定，他端自由の境界条件に対して Fourier 級数解

法が多くの場合用いられ，他に，II)の断面不変の理論式または Vlasov の箱型はりの式<sup>9)</sup>に対して，伝達マトリックス法<sup>12), 13)</sup>，Shooting 法，Runge-Kutta 法<sup>12)</sup>，Laplace 変換法<sup>10)</sup>が若干用いられている程度である。伝達マトリックス法などの境界値問題を初期値問題に変換して解く方法は，境界条件，荷重条件を比較的任意に選ぶうの反面，I)の板殻の式を基本にして導いた方程式にはほとんど適用不可能なことを指摘しておかなければならない。理由は後に詳しく述べるが，計算過程は本質的に極度に発散的であり，支間のきわめて短い場合，あるいは肉厚が厚く，かなり断面が剛な場合を除いて良好な解を得るのは難しい。

このような現状から，本論文では I)，II)の両方に適用できるが，特に I)の管路，薄肉はりなどの線形常微分方程式に有効な一次数値解析法を検討し提案する。

方法の概要は次のとおりである。

- (i) 高階多元の線形常微分方程式を正規形に変換する。
- (ii) 正規形方程式の係数マトリックスを観察し，固有値，固有ベクトルの特性を検討する。
- (iii) 検討に基づいて係数マトリックスの固有値解析を行い，固有値と右，左の固有ベクトル，主要ベクトルを算出する。これにより同次式の解が数値的に求められる。
- (iv) 提案する漸化式を用いて，特解を高精度で算出する。
- (v) 同次解と特解が数値的に求められたので，境界条件にあわせて任意定数を決定する。

本方法と伝達マトリックス法とは正規形常微分方程式の解を求める点で類似しているが，任意定数の取り方で大きく異なる。つまり，伝達マトリックス法が初期値問題として両端の物理量の関係を求め，境界条件から両端の未知量を決定して解くのにに対して，本方法では境界値問題として数値的に一般解を求めている。したがって，

\* 正会員 工修 電力中央研究所土木技術研究所

任意定数と物理量の間に特定の関係はない。

なお、本方法では解析理論のほかに正規形常微分方程式の係数マトリックスの固有値、固有ベクトル、主要ベクトル<sup>15)</sup>の算出など実際の数値計算手順が大きな問題であった。そこで、多くの試行の中から得られた精度の高い計算方法についても述べた。

本方法はまた、動的解析へも容易に拡張することが可能である。数回の試行錯誤で固有周期と固有モードが求められ、応答解析も行える。

文献 7) には本方法と類似の方法が多少述べられているが、その説明は十分でなく、本論文で述べるような係数マトリックスの特性、漸化式による特解の算出法、動的問題への拡張などについてはまったく触れられていない。

数値計算例は単純支持および多経間の管路、薄肉箱型はりについて静的、動的解析を行ったが、他の解法による値、実験値との比較から非常に有効なことが明らかになった。本方法の適用により、従来、容易には解けなかった境界条件、荷重条件で、複雑な管路、薄肉はりの方程式が解かれるものと思われる。

## 2. 解析理論

### (1) 管路、薄肉はりなどの正規形常微分方程式の特性

高階多元の連立線形常微分方程式は、次に示す正規形の式に変換することができる。

$$\frac{dY}{dz} = AY + Q(z) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $Y$  は求めたい未知関数ベクトルであり、 $z$  は軸方向座標、 $A$  は係数マトリックス、 $Q$  は荷重項（非同次項）である。通常、マトリックス  $A$  は定数であり、もし  $z$  の関数の場合でもある  $z$  の領域内では定数と見なしうると仮定して、以下  $A$  は定数マトリックスとして扱う。

大きさ  $n \times n$  のマトリックス  $A$  が  $k$  個の異なる固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  を持ち、それらがそれぞれ  $m_j$  重根であれば、

$$\sum_{j=1}^k m_j = n \dots\dots\dots (2)$$

である。ただし、たまたま  $\lambda_i = \lambda_j (i \neq j)$  の場合でも、 $\lambda_i, \lambda_j$  が異なる Jordan 細胞<sup>15)</sup>に属する場合にはお互いに重根と見なさないことにする。

$A$  の Jordan 標準形を  $D$  とすれば、

$$D = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix}_{n \times n} \dots\dots\dots (3)$$

$$A_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda_j \end{bmatrix}_{m_j \times m_j} \dots\dots\dots (4)$$

であり、 $A$  の固有値に対応する右固有ベクトル、右主要ベクトルを列成分にもつ正則なマトリックスを  $R$  とすれば、対応する左固有ベクトル、左主要ベクトルを行成分にもつ正則なマトリックスは  $R^{-1}$  と置くことができ、

$$A = RDR^{-1} \dots\dots\dots (5)$$

となる。ただし、固有ベクトルは正規化されているものとする。

そこで、次式で  $r$  がべき乗を表わすものとすれば、

$$A^r = R D^r R^{-1} \dots\dots\dots (6)$$

となり、

$$D^r = \begin{bmatrix} A_1^r & & 0 \\ & A_2^r & \\ & & A_k^r \end{bmatrix}_{n \times n} \dots\dots\dots (7)$$

$$A_j^r = \begin{bmatrix} \lambda_j^r & rC_1\lambda_j^{r-1} & rC_2\lambda_j^{r-2} & \dots \\ & \lambda_j^r & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda_j^r \\ 0 & & & \lambda_j^r \end{bmatrix}_{m_j \times m_j} \dots\dots\dots (8)$$

(ただし、 $rC_i$  は 2 項係数)

したがって、

$$e^{Az} = R e^{Dz} R^{-1} \dots\dots\dots (9)$$

と置けば、

$$e^{Dz} = \begin{bmatrix} e^{A_1 z} & & 0 \\ & e^{A_2 z} & \\ & & e^{A_k z} \end{bmatrix}_{n \times n} \dots\dots\dots (10)$$

$$e^{A_j z} = e^{\lambda_j z} \begin{bmatrix} 1 & z & \frac{z^2}{2!} & \dots & \frac{z^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ & 1 & z & \ddots & \\ & & 1 & \ddots & z \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}_{m_j \times m_j} \dots\dots\dots (11)$$

となる。

以上の値を用いて、式 (1) の境界値問題の一般解は次のようになる。

$$Y(z) = R e^{Dz} d + R \int_0^z e^{D(z-s)} R^{-1} Q(s) ds \dots\dots (12)$$

(ただし、 $d$  は任意定数ベクトル)

初期値問題では、

$$Y(z) = e^{Az} Y(0) + \int_0^z e^{A(z-s)} Q(s) ds \dots\dots (13)$$

である。具体的に棒，ねじり，はりの曲げの式について  $D$  と  $e^{Dz}$  を示すと次のようになる。

(棒)

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e^{Dz} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \cdots (14)$$

(ねじり)

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e^{Dz} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \cdots (15)$$

(はりの曲げ)

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e^{Dz} = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2/2 & z^3/6 \\ 0 & 1 & z & z^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \cdots (16)$$

これらはねじり，曲げなどの2階あるいは4階の常微分方程式を正規形に変換すれば，ただちに求められる。

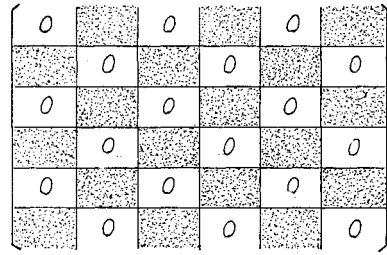
式 (3), (4) で述べたように  $D$  の対角成分は  $A$  の固有値に等しいので，棒，ねじり，曲げの式における式 (1) の係数マトリックス  $A$  は固有値 0 を重根でもつことになる。管路，薄肉はりの方程式においても同様であって，一般に，

$$D = \left[ \begin{array}{cccc} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_m & & \\ & & \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} & \\ & & & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & \end{array} \end{array} \right] \cdots \cdots (17)$$

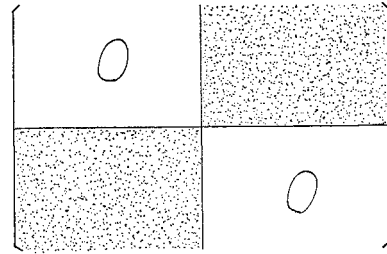
(ただし， $\lambda_1, \dots, \lambda_m \neq 0$ )

である。 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  は実数あるいは複素数で重根をもたず，そり，断面変形などのシェルとしての特性に対応し，固有値 0 ははりとしての特性に対応する。そして， $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  の絶対値は板厚が薄く，シェルとしての特性が強くなるほど大きくなる傾向がある。もし， $\lambda_j$  の実部が正で大きければ， $e^{Dz}$  の対角成分である  $e^{\lambda_j z}$  は膨大になり，式 (9) から得られる式 (13) の  $e^{Az}$  のマトリックス成分はすべて過大あるいは過小になる。これがシェル特性の強い管路，薄肉はりの式に，式 (13) に基づく伝達マトリックス法などが適用できない最大の理由である。

式 (12) から明らかのように，式 (1) を境界値問題として解く場合， $A$  の Jordan 標準形  $D$  と固有ベクトル，主要ベクトルが求めれば数学的には問題は解決されたことになる。しかし，式 (12) の形で解くだけでは伝達マトリックス法で遭遇した難問をなら回避することにならない。そこで，マトリックス  $A$  についての考察



(a) 石だたみ型マトリックス



(b) (a) の行と列を入れ替えたマトリックス

図-1 マトリックス A の形

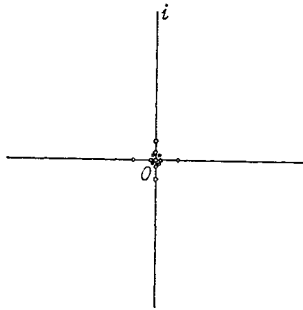
をさらに続けるが，式 (17) および以下の事実は証明なしに述べることになる。経験あるいは理屈のうえからはきわめて当然であるにもかかわらず，厳密な証明はまったく困難だからである。

まず，筆者が文献 1)~14) その他について調べた範囲では，正方マトリックス  $A$  の大きさ  $n$  は偶数で，図-1 (a) に示すような石だたみ型<sup>15)</sup>である。ただし，考察している領域内で断面寸法などが変化する場合には必ずしもこれがいえないが，一定ならばぼあてはまる事実である。このようなマトリックスの固有変数  $\lambda$  に関する奇数乗の項を持たないことは数学的帰納法で証明できる。また，図-1 (a) のマトリックスの行および列を，入れ替えれば，図-1 (b) のようになるが，これは対応する  $Y(z)$  の物理量のうち単純支持で 0 になる量を下半分に寄せ集めたとき見られる形である。以上のことは  $A$  の固有値および固有ベクトルに関する重要な情報を与えてくれる。

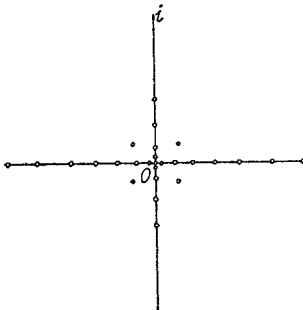
実数マトリックス  $A$  の固有値は，大きさ  $n$  が偶数で，石だたみ型である所から固有変数  $\lambda$  が奇数乗の項を持たず， $(\lambda^2+a)$ ， $(\lambda^2+b\lambda^2+c)$  の形の因数に分解されて，複素平面上，実軸および虚軸に対して対称に分布することになる。実際，文献 1), 3), 4), 7), 8), 12) などについて固有値計算した範囲では，図-2 (a), (b) に示すように分布することが確認された。(a) は断面不変を仮定した理論式あるいは Vlasov の式の場合であり，(b) はシェル特性の強い式の場合である。

固有ベクトルについても興味ある関係が指摘できる。互いに共役な固有値に対応する固有ベクトル成分は互い

に共役であるが、虚軸に対して対称な固有値同士に対応する固有ベクトル同士もベクトル成分の絶対値は等しい。行、列の入れ替えにより図-1(b)の形になる時、下半分に集められる量の符号が互いに異なるのみである。これについては証明可能である<sup>19)</sup>。



(a) 固有値が狭い範囲に分布



(b) 固有値が広い範囲に分布

図-2 マトリックス A の固有値分布

なお前に式(14)~(17)で述べたとおり、管路、はりなどでは断面変形を考慮するか否かにかかわらず A が退化しており 0 を重根に持つ。0 以外の固有値は、式(2)の説明で述べた意味において重根ではない。したがって、マトリックス A

の Jordan 標準形は対角型にならず、主要ベクトルが存在する。固有値 0 は図-3 に示すような剛体的変位に対応するものと思われる。

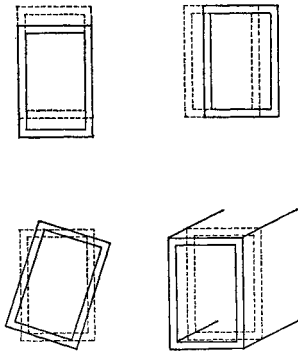


図-3 固有値 0 に対応する変形

(2) 係数マトリックス A の固有ベクトルと主要ベクトル

マトリックス A の Jordan 標準形が対角型の場合、一つの固有値に対して対応する右、左の固有ベクトルが存在し、それらは直交関係を満たしている。もし、重根の固有値があり、Jordan 標準形が対角型にならないければ、対応する固有ベクトルのほかに主要ベクトルが存在する。

固有値  $\lambda_j$  が  $m_j$  重根 ( $m_j \geq 2$ ) であり、その Jordan 細胞に属する右固有ベクトル  $\mathbf{x}_j^1$  と右主要ベクトル  $\mathbf{x}_j^2, \dots, \mathbf{x}_j^{m_j}$  の間には次の関係がある。ただし、 $\mathbf{I}$  は単位マトリックスとする。

$$(A - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{x}_j^1 = 0 \dots \dots \dots (18)$$

$$(A - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{x}_j^\tau = \mathbf{x}_j^{\tau-1} \quad (\tau=2, \dots, m_j) \dots \dots (19)$$

同様に、左固有ベクトル  $\mathbf{y}_j^1$  と左主要ベクトル  $\mathbf{y}_j^2, \dots, \mathbf{y}_j^{m_j}$  の間にも次の関係がある。

$$(A^T - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{y}_j^1 = 0 \dots \dots \dots (20)$$

$$(A^T - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{y}_j^\tau = \mathbf{y}_j^{\tau-1} \quad (\tau=2, \dots, m_j) \dots \dots (21)$$

また、右、左の固有ベクトル同士の直交性は存在せず、固有ベクトルと主要ベクトルの間に次の関係が存在する。

$$(\mathbf{y}_j^i)^T (\mathbf{x}_j^{m_j-i+1}) = 1 \dots \dots \dots (22)$$

その他の組み合わせは、すべて 0 になる。式(18)~(22)の関係が実際に主要ベクトルを算出するのに用いられる。

管路、薄肉はりなどの方程式では、(1)で指摘したとおり、固有値 0 が重根で存在し、主要ベクトルがある。0 以外の固有値に対しては主要ベクトルが存在しない。したがって、固有値 0 に対する固有ベクトル、主要ベクトルの算出を行わなければならない。具体的な算出法は次章で述べよう。

実数、非対称マトリックスの全固有値、固有ベクトルを数値計算する場合、Hessenberg 型に変換した後、Double-QR 法で固有値を求め、Inverse-Iteration で固有ベクトルを求める<sup>19)</sup>のが一般的であり、この方法には重根のあるか否かに対する制約はつけられていない。しかし、Jordan 標準形が対角型にならないマトリックス A では、上記方法による既存の固有値解析プログラム(たとえば、東大大型計算機センターの DHQ3)を用いても誤差が大きくなる場合が多い。

固有値 0 に対する固有ベクトル、主要ベクトルの算出を特別に行い、それらを用いて A に deflation<sup>20)</sup>を施した後、他の固有値と対応する固有ベクトルを上記の方法で算出する。筆者が検討した限りでは、これにより初めて、実用上十分な精度を持つ式(5)の分解が行い得るのである。

(3) 管路、薄肉はりなどの特性を考慮した常微分方程式の解

(1)で正規形常微分方程式の一般解と数値計算上の難点を述べた。ここでは、それらを回避しつつ、管路、薄肉はりの特性を生かした数値解法について考察する。

マトリックス A の固有値分布が図-2(a), (b)のようになり、固有値 0 に対する固有ベクトル、主要ベクトルおよび、0 以外のすべての固有値  $\lambda_j (j=1, \dots, m)$  と

右, 左の固有ベクトル  $\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j (j=1, \dots, m)$  が求められたとすれば, 式 (5) の  $\mathbf{D}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^{-1}$  は次のようになる. 実際には,  $\mathbf{R}^{-1}$  は  $\mathbf{R}$  の逆行列計算で求めればよい.

□内は固有値0と前節で述べた固有ベクトル, 主要ベクトルに関するものである.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 & & & & & & \\ & \lambda_m & & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \dots (17)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_m & \boxed{\mathbf{x}_{m+1} \mathbf{x}_{m+1}^2} \cdots & \mathbf{x}_k^1 \mathbf{x}_k^2 \mathbf{x}_k^3 \mathbf{x}_k^4 \end{bmatrix} \dots (23)$$

$$(\mathbf{R}^{-1})^T = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_m & \boxed{\mathbf{y}_{m+1}^2 \mathbf{y}_{m+1}} \cdots & \mathbf{y}_k^4 \mathbf{y}_k^3 \mathbf{y}_k^2 \mathbf{y}_k^1 \end{bmatrix} \dots (24)$$

そこで, 式 (1) の解  $\mathbf{Y}(z)$  を同次式の解  $\mathbf{Y}_1(z)$  と特解  $\mathbf{Y}_2(z)$  に分ければ,

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{Y}_1(z) + \mathbf{Y}_2(z) \dots (25)$$

となり, 式 (12) より,

$$\mathbf{Y}_1(z) = \mathbf{R}e^{\mathbf{D}z} \mathbf{d} \dots (26)$$

である. ただし, (1) で述べたとおり,  $\mathbf{A}$  の固有値  $\lambda_j$  の実部が正ならば,  $e^{\lambda_j z}$  が過大になる. それを避けるためには計算過程で  $\lambda_j$  の判定を行い,  $R_e \lambda_j > 0$  ならば  $e^{\lambda_j z}$  を  $e^{-\lambda_j(L-z)}$  (ただし,  $0 \leq z \leq L$ ) と置きなおせばよい. そのような変換を施した  $e^{\mathbf{D}z}$ ,  $\mathbf{d}$  をそれぞれ  $e^{\mathbf{D}'z}$ ,  $\mathbf{d}'$  とすれば式 (26) は,

$$\mathbf{Y}_1(z) = \mathbf{R}e^{\mathbf{D}'z} \mathbf{d}' \dots (27)$$

となる.

特解  $\mathbf{Y}_2(z)$  については,

$$\tilde{\mathbf{Y}}(z) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y}_2(z) \dots (28)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}(z) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}(z) \dots (29)$$

を用いて式 (1) を次式に変換する.

$$\frac{d\tilde{\mathbf{Y}}}{dz} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{Y}} + \tilde{\mathbf{Q}} \dots (30)$$

式 (17), (23), (24) を参照して,  $\tilde{\mathbf{Y}}, \tilde{\mathbf{Q}}$  の成分を

$$\tilde{\mathbf{Y}}^T = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \cdots \tilde{y}_m & \boxed{\tilde{y}_{m+1} \tilde{y}_{m+2}} \cdots & \tilde{y}_{n-3} \tilde{y}_{n-2} \tilde{y}_{n-1} \tilde{y}_n \end{bmatrix} \dots (31)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}^T = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \cdots \tilde{q}_m & \boxed{\tilde{q}_{m+1} \tilde{q}_{m+2}} \cdots & \tilde{q}_{n-3} \tilde{q}_{n-2} \tilde{q}_{n-1} \tilde{q}_n \end{bmatrix} \dots (32)$$

と置けば, 式 (30) は分解して次のように書き表わされる.

$$\frac{d\tilde{y}_1}{dz} = \lambda_1 \tilde{y}_1 + \tilde{q}_1 \dots (33)$$

$$\frac{d\tilde{y}_m}{dz} = \lambda_m \tilde{y}_m + \tilde{q}_m \dots (34)$$

$$\boxed{\frac{d\tilde{y}_{m+1}}{dz} = \tilde{y}_{m+2} + \tilde{q}_{m+1}} \dots (35)$$

$$\boxed{\frac{d\tilde{y}_{m+2}}{dz} = \tilde{q}_{m+2}} \dots (36)$$

$$\boxed{\frac{d\tilde{y}_{n-3}}{dz} = \tilde{y}_{n-2} + \tilde{q}_{n-3}} \dots (37)$$

$$\boxed{\frac{d\tilde{y}_{n-2}}{dz} = \tilde{y}_{n-1} + \tilde{q}_{n-2}} \dots (38)$$

$$\boxed{\frac{d\tilde{y}_{n-1}}{dz} = \tilde{y}_n + \tilde{q}_{n-1}} \dots (39)$$

$$\boxed{\frac{d\tilde{y}_n}{dz} = \tilde{q}_n} \dots (40)$$

これらの解は次のようになる.  
( $\lambda_j \neq 0; j=1, \dots, m$  の場合)

$$\tilde{y}_j(z) = e^{\lambda_j z} \tilde{y}_j(0) + \int_0^z e^{\lambda_j(z-s)} \tilde{q}_j(s) ds \dots (41)$$

(ただし,  $R_e \lambda_j \leq 0$ )

$$\tilde{y}_j(z) = e^{-\lambda_j(L-z)} \tilde{y}_j(L) - \int_0^{L-z} e^{-\lambda_j(L-z-s)} \tilde{q}_j(L-s) ds \dots (42)$$

(ただし,  $R_e \lambda_j > 0$ )

( $\lambda_j = 0; j=m+1, \dots, n$  の場合)

$$\tilde{y}_{m+1}(z) = \tilde{y}_{m+1}(0) + \int_0^z \{\tilde{y}_{m+2}(s) + \tilde{q}_{m+1}(s)\} ds \dots (43)$$

$$\tilde{y}_{m+2}(z) = \tilde{y}_{m+2}(0) + \int_0^z \tilde{q}_{m+2}(s) ds \dots (44)$$

$$\tilde{y}_{n-3}(z) = \tilde{y}_{n-3}(0) + \int_0^z \{\tilde{y}_{n-2}(s) + \tilde{q}_{n-3}(s)\} ds \dots (45)$$

$$\tilde{y}_{n-2}(z) = \tilde{y}_{n-2}(0) + \int_0^z \{\tilde{y}_{n-1}(s) + \tilde{q}_{n-2}(s)\} ds \dots (46)$$

$$\tilde{y}_{n-1}(z) = \tilde{y}_{n-1}(0) + \int_0^z \{\tilde{y}_n(s) + \tilde{q}_{n-1}(s)\} ds \dots (47)$$

$$\tilde{y}_n(z) = \tilde{y}_n(0) + \int_0^z \tilde{q}_n(s) ds \dots (48)$$

式 (41)~(48) において、 $\tilde{y}_j(0)$  あるいは  $\tilde{y}_j(L)$  ( $j=1, \dots, n$ ) は任意に選びうる。それにより他端の  $\tilde{y}_j$  の値が決まるので  $Y_2(0)$  と  $Y_2(L)$  が決まり、境界条件から同次式の解に表われた任意定数ベクトル  $d'$  が定められる。

(4) 漸化式による特解の計算法

特解は式 (41)~(48) で表わされるが、 $\tilde{q}_i(z)$  が任意の関数である場合、この計算は容易ではない。そこで、簡便で、なおかつ解析的に厳密な漸化式による高精度計算法を提案する。

漸化式は次に示すものである。

a)  $\lambda_j \neq 0$  かつ  $Re\lambda_j \leq 0$  の場合 (式 (41) に対応する)

$$\tilde{y}_j(z+Dz) = e^{\lambda_j Dz} \tilde{y}_j(z) - \frac{1}{\lambda_j} (1 - e^{\lambda_j Dz}) \tilde{q}_j(z) \dots\dots\dots(49. a)$$

$$\tilde{y}_j(z+Dz) = e^{\lambda_j Dz} \tilde{y}_j(z) - \left( \frac{1}{\lambda_j} + \frac{1 - e^{\lambda_j Dz}}{\lambda_j^2 Dz} \right) \cdot \tilde{q}_j(z+Dz) + \left( \frac{e^{\lambda_j Dz}}{\lambda_j} + \frac{1 - e^{\lambda_j Dz}}{\lambda_j^2 Dz} \right) \tilde{q}_j(z) \dots\dots\dots(49. b)$$

$$\tilde{y}_j(z+Dz) = e^{\lambda_j Dz} \tilde{y}_j(z) - \left\{ \frac{1}{\lambda_j} + \frac{4}{\lambda_j^2 Dz} - \left( \frac{1}{\lambda_j^2 Dz} - \frac{4}{\lambda_j^3 Dz^2} \right) (1 - e^{\lambda_j Dz}) \right\} \tilde{q}_j(z+Dz) + \left\{ \frac{8}{\lambda_j^2 Dz} + \left( -\frac{4}{\lambda_j^2 Dz} + \frac{8}{\lambda_j^3 Dz^2} \right) (1 - e^{\lambda_j Dz}) \right\} \cdot \tilde{q}_j\left(z + \frac{Dz}{2}\right) + \left\{ \frac{e^{\lambda_j Dz}}{\lambda_j} - \frac{4}{\lambda_j^2 Dz} + \left( \frac{3}{\lambda_j^2 Dz} - \frac{4}{\lambda_j^3 Dz^2} \right) (1 - e^{\lambda_j Dz}) \right\} \tilde{q}_j(z) \dots\dots\dots(49. c)$$

ここで、 $\tilde{y}_j(z+Dz)$ 、 $\tilde{y}_j(z)$ 、 $\tilde{q}_j(z+Dz)$ 、 $\tilde{q}_j(z+Dz/2)$ 、 $\tilde{q}_j(z)$  はそれぞれ、 $z+Dz$ 、 $z$ 、 $z+Dz/2$ 、 $z$  における  $\tilde{y}_j$ 、 $\tilde{q}_j$  の値であり、式 (49.a)、(49.b)、(49.c) の違いは  $Dz$  間における  $\tilde{q}_j$  を、一定、直線変化、2次式で表わされる変化をすると仮定したことである。荷重を十分よく近似できるさきみ幅で積分して行けば、どれを用いてもよい解が得られる。

b)  $\lambda_j \neq 0$  かつ  $Re\lambda_j > 0$  の場合 (式 (42) に対応する)

$$\tilde{y}_j(z-Dz) = e^{-\lambda_j Dz} \tilde{y}_j(z) - \frac{1}{\lambda_j} (1 - e^{-\lambda_j Dz}) \tilde{q}_j(z) \dots\dots\dots(50. a)$$

$$\tilde{y}_j(z-Dz) = e^{-\lambda_j Dz} \tilde{y}_j(z) - \left( \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1 - e^{-\lambda_j Dz}}{\lambda_j^2 Dz} \right) \cdot \tilde{q}_j(z-Dz) + \left( \frac{e^{-\lambda_j Dz}}{\lambda_j} - \frac{1 - e^{-\lambda_j Dz}}{\lambda_j^2 Dz} \right) \tilde{q}_j(z) \dots\dots\dots(50. b)$$

$$\tilde{y}_j(z-Dz) = e^{-\lambda_j Dz} \tilde{y}_j(z) - \left\{ \frac{1}{\lambda_j} - \frac{4}{\lambda_j^2 Dz} + \left( \frac{1}{\lambda_j^2 Dz} + \frac{4}{\lambda_j^3 Dz^2} \right) (1 - e^{-\lambda_j Dz}) \right\} \tilde{q}_j(z-Dz) - \left\{ \frac{8}{\lambda_j^2 Dz} + \left( -\frac{4}{\lambda_j^2 Dz} - \frac{8}{\lambda_j^3 Dz^2} \right) (1 - e^{-\lambda_j Dz}) \right\} \cdot \tilde{q}_j\left(z - \frac{Dz}{2}\right) + \left\{ \frac{e^{-\lambda_j Dz}}{\lambda_j} + \frac{4}{\lambda_j^2 Dz} - \left( \frac{3}{\lambda_j^2 Dz} + \frac{4}{\lambda_j^3 Dz^2} \right) (1 - e^{-\lambda_j Dz}) \right\} \tilde{q}_j(z) \dots\dots\dots(50. c)$$

a) の場合と記号はまったく同じである。式 (50.a)、(50.b)、(50.c) はそれぞれ  $Dz$  間における  $\tilde{q}_j$  を、一定、直線変化、2次式で表わされる変化をすると仮定した漸化式である。ただし、a) と逆方向に  $\tilde{y}_j(L)$  から逐次積分し、 $Dz$  は常に正の値である点は注意を要する。

c)  $\lambda_j = 0$  の場合 (式 (43)~(48) に対応する)

この場合、未知関数が単独に分離していないが、それぞれの組の中で一つ後の式により解が求められているので、式 (44) について漸化式を与えておけば十分である。

$$\tilde{y}_j(z+Dz) = \tilde{y}_j(z) + Dz \tilde{q}_j(z) \dots\dots\dots(51. a)$$

$$\tilde{y}_j(z+Dz) = \tilde{y}_j(z) + \frac{Dz}{2} \tilde{q}_j(z+Dz) + \frac{Dz}{2} \tilde{q}_j(z) \dots\dots\dots(51. b)$$

$$\tilde{y}_j(z+Dz) = \tilde{y}_j(z) + \frac{Dz}{6} \tilde{q}_j(z+Dz) + \frac{2}{3} Dz \tilde{q}_j\left(z + \frac{Dz}{2}\right) + \frac{Dz}{6} \tilde{q}_j(z) \dots\dots\dots(51. c)$$

ここで、記号などは a) の場合と同様であり、式 (51.a)、(51.b)、(51.c) は  $\tilde{q}_j$  を  $Dz$  間で一定、直線変化、2次式で表わされる変化をすると仮定した場合である。

(5) 複雑な境界条件に対する対策

以上述べた方法で両端単純支持、一端固定他端自由などの静定な境界条件に対しては精度よく解くことができる。しかし、2径間連続、3径間連続など不静定の場合に対してはさらに検討が必要である。不静定反力を未知量とし、単位荷重を与えて解き、変位の適合性から未知量を決定するのも一つの方法であるが、計算精度のうえからはあまり好ましくない。

ここでは、管路、はりを中間支点などで分割し、複数の要素の集合体として解く方法を提案する。

(3) で述べたとおり、式 (1) の境界値問題の解は、 $Y(x) = K(x) d' + (\text{特解}) \dots\dots\dots(52)$

である。ただし、 $K(x) = R e^{D'x}$  とする。

構造物全体を図-4(a) のように  $m$  個の要素に分割すれば、第  $i$  番目の要素について次式が成り立ち、

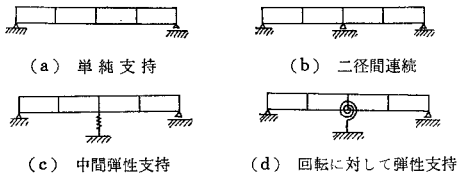


図-4 複雑な境界条件の例

$$Y_i(z) = K_i(z) d_i' + (\text{特解})_i \dots (53)$$

要素両端間の距離を  $L_i$  とすれば，両端で次式が成り立つ．

$$Y_i(0) = K_i(0) d_i' + (\text{特解}(0))_i \dots (54)$$

$$Y_i(L_i) = K_i(L_i) d_i' + (\text{特解}(L_i))_i \dots (55)$$

式(54),(55)と同様の関係式を  $m$  個の要素それぞれについてたて，第1および第  $m$  番目の要素については境界条件を考慮して各要素間の連続条件から連立一次方程式を構成すれば，未知の任意定数  $d_1', \dots, d_m'$  がすべて求められる．

もし，図-4(b)のように中間に支点があり，支点上で要素分割した場合は， $Y$  に属する量のいくつかが不連続になる．具体的には変位を三回微分したものが不連続になるのでそれを連続条件から除き，関係式の減少した分は，変位0の条件で補われることになる．

図-4(c)は中間に弾性支点のある場合である．支点上では変位の三回微分のみが不連続であるが，不連続量は変位とばね定数の積である．したがって，図-4(a)の場合と同じ式をたてた後，式(54),(55)などの  $K$  マトリックスの一部にばね定数の入った項を加えて解けばよい．

図-4(d)の場合は支点上で変位の2回微分と3回微分が不連続になるが，不連続量は変位の1回微分とばね定数で表わされるので，図-4(c)の場合と同様に  $K$  マトリックスの若干の変更を行って解けばよい．

(6) 動的解析への拡張

動的問題では，式(1)は次のようになる．

$$\frac{\partial Y(z, t)}{\partial z} = AY(z, t) + Q(z, t) + M \frac{\partial^2 Y(z, t)}{\partial t^2} \dots (56)$$

ここで，右辺第三項は慣性項である．

固有周期と固有モードを求めるには，

$$Y(z, t) = \hat{Y}(z) e^{j\omega t} \text{ (ただし, } j = \sqrt{-1} \text{ とする)} \dots (57)$$

$$Q(z, t) = 0 \dots (58)$$

と置き，式(56)を次のように変形する．

$$\frac{d\hat{Y}(z)}{dz} = (A - \omega^2 M) \hat{Y}(z) \dots (59)$$

式(59)において， $\omega^2$  にある正の値を与え，

$$\hat{A} = A - \omega^2 M \dots (60)$$

として，

$$\frac{d\hat{Y}}{dz} = \hat{A} \hat{Y} \dots (61)$$

に対して静的解析で行ったのと同様の操作を施す．すなわち， $\hat{A}$  の Jordan 標準形とマトリックス  $\hat{R}$  および  $\hat{R}^{-1}$  を求め，

$$\hat{A} = \hat{R} \hat{D} \hat{R}^{-1} \dots (62)$$

と表わす． $\hat{A}$  には管路では通常，主要ベクトルは存在しない．

式(61)の解は， $\hat{d}'$  を任意の定数ベクトルとすれば，式(26)と同様に次式で表わされる．

$$\hat{Y} = \hat{R} e^{\hat{D}z} \hat{d}' \dots (63)$$

式(63)に両端の境界条件を考えると， $\hat{K}$  を定数マトリックスとして，次の関係式が導びかれる．

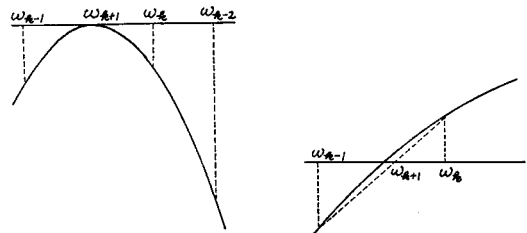
$$\hat{K} \hat{d}' = 0 \dots (64)$$

$\hat{d}'$  が0以外の値を持つには  $\hat{K}$  の行列式が0でなければならないので，そのような  $\omega^2$  を試行錯誤で見出すことになる．複雑な境界条件で，複数の要素に分割した場合でもまったく同様である．このような方法は，一般に計算精度はよいが，注意深く  $|\hat{K}|=0$  になる  $\omega^2$  を見い出して行かないと見落とす危険性を有している．また，特に注意すべき点は，式(61)  $\hat{A}$  の右固有ベクトルが最大値1となるように定め， $\hat{R}$  の列成分に組み込むことである．この操作を省くと正解の  $\omega$  付近で  $|\hat{K}| \rightarrow 0$  の様子をとらえるのは難しい．

なお，一般に  $\hat{K}$  は複素数マトリックスであるため， $|\hat{K}|$  も複素数である．理由は明確でないが，数値計算結果によれば，正解の  $\omega$  近傍では  $Re|\hat{K}|$  および  $Im|\hat{K}|$  が図-5(a),(b)のように変化する．少ない回数試行錯誤で  $|\hat{K}|=0$  になる  $\omega$  を見出すには次の方法が有効である<sup>17)</sup>．

$\omega_{k-2}, \omega_{k-1}, \omega_k$  における  $|\hat{K}|$  の実部，虚部をそれぞれ  $z_r(k-2), z_r(k-1), z_r(k)$  および  $z_i(k-2), z_i(k-1), z_i(k)$  とする．実部については，すでに計算された3点を2次式で結び，最小点の  $\omega_{k+1}$  を次式で求める．

$$\omega_{k+1} = \frac{(\omega_{k-2}^2 - \omega_{k-1}^2) z_r(k) + (\omega_{k-1}^2 - \omega_k^2) z_r(k-2)}{2\{(\omega_{k-2} - \omega_{k-1}) z_r(k) + (\omega_{k-1} - \omega_k) z_r(k-2)\}} \dots$$



(a)  $|\hat{K}|$  の実部 (b)  $|\hat{K}|$  の虚部

図-5 正解の  $\omega$  付近における  $|\hat{K}|$  の挙動

$$* \frac{+(\omega_k^2 - \omega_{k-2}^2)z_r(k-1)}{+(\omega_k - \omega_{k-2})z_r(k-1)} \dots\dots\dots (65)$$

虚部については、すでに計算された 2 点を直線で結び、

$$\omega_{k+1} = \frac{\omega_{k-1}z_i(k) - \omega_k z_i(k-1)}{\omega_k - \omega_{k-1}} \dots\dots\dots (66)$$

式 (65), (66) いずれの場合も、ある微小な値  $\mu$  に対して、

$$\left| \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{\omega_1 - \omega_0} \right| \leq \mu \dots\dots\dots (67)$$

になれば、 $\omega_{k+1}$  を解とする。

固有モードは、式 (64) より正解の  $\omega$  に対する  $\hat{d}'$  を求め、それを式 (63) に代入することにより計算される。

動的応答解析はモード解析法で行うことができる。その際、文献 5), 18) にあげられた解析的に厳密な漸化式による逐次積分は有効と思われる。

### 3. 数値計算法

以上述べた手順で数値計算すれば解は求まるが、現実にマトリックス  $A$  の Jordan 標準形、 $R$  および  $R^{-1}$  を算出するのは容易でない。本方法では丸め誤差を除去しつつ、これらを精度よく求めるための検討が大きな比重を占める。

ここでは、固有値 0 に対する固有ベクトル、主要ベクトルの算出と、その他の全固有値および対応する固有ベクトルの算出法について述べるが、参考文献 15), 19) ~ 21) も参照されたい。

#### (1) 固有値 0 に対する固有ベクトル、主要ベクトルの算出方法

管路、薄肉はりなどの方程式では、式 (1) のマトリックス  $A$  が固有値 0 を持ち、それが重根であることを 2. で述べた。そこで、まず固有値 0 に対応する固有ベクトル、主要ベクトルを求めるが、その手順の一つは次のとおりである。

初めに  $A$  を掃き出して行く。その際、絶対値最大のものをピボットに選びながら、行と列の入れかえを行いつつ計算を進める。最後に、ある微小な値  $\epsilon$  以下の値のみが残れば、残りはすべて丸め誤差と見なし 0 とする。図-6 の形になる。

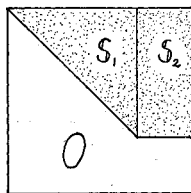


図-6 掃き出し後のマトリックス

図-6 のマトリックスを  $S$  とし、上半三角マトリックスを  $S_1$ 、長方形マトリックスを  $S_2$  とする。 $S_2$  の列要素を  $v_i (i=1 \sim r_0)$ 、ただし  $r_0$  は  $A$  の退化次数) とすれば、

$$S_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_{r_0}\} \dots\dots\dots (68)$$

であり、固有値 0 に対する右固有ベクトル  $x_i (i=1 \sim r_0)$  は

$$\hat{x}_i = -S_1^{-1} v_i \dots\dots\dots (69)$$

を用いて次のようになる。

$$x_1 = \begin{Bmatrix} \hat{x}_1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, x_2 = \begin{Bmatrix} \hat{x}_2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \dots, x_{r_0} = \begin{Bmatrix} \hat{x}_{r_0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (70)$$

掃き出し過程で入れ替えた配列は元にもどしておく。左固有ベクトル  $y_i (i=1 \sim r_0)$  も  $A^T$  について同様の操作を行えば求まる。

主要ベクトルは、式 (5) の  $R^{-1}$  を  $R$  の逆マトリックス計算で求めればよい。右主要ベクトルのみを計算すればよい。

主要ベクトルは固有ベクトルを補うもので、式 (18) ~ (22) の性質をもっている。実際の計算法および理論的根拠は文献 15), 19) に述べられているが、ここでその方法を略述する。

$$\psi_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{r_0}\} \dots\dots\dots (71)$$

$$Q_1 = \{y_1, y_2, \dots, y_{r_0}\} \dots\dots\dots (72)$$

と置き、次の  $r_0$  元のマトリックス  $\bar{N}_1$  を求める。

$$\bar{N}_1 = \psi_1^T Q_1 \dots\dots\dots (73)$$

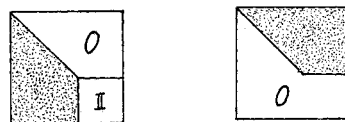
$\bar{N}_1$  マトリックスを掃き出しの場合同様、ピボット選択を行いながら LU 分解<sup>15)</sup>する。ピボット選択の際、ある微小な値  $\epsilon$  以下の値のみになれば、丸め誤差と見なし、残りはすべて 0 とする。もし、 $\bar{N}_1$  の Rank が  $r_0$  であれば主要ベクトルは存在せず、完全な下半、上半三角マトリックスの積に分解される。通常は Rank が  $r_0$  より小さいので  $r_1$  とすれば、図-7 のように LU 分解され、これを  $L_1$  および  $U_1$  と置くことにする。

次に、

$$\hat{\psi}_1^T = -L_1^{-1} \psi_1^T \dots\dots\dots (74)$$

を計算する。 $\hat{\psi}_1^T$  の第一行から第  $r_1$  行までは付属する主要ベクトルを持たない固有ベクトルになり、第  $r_1+1$  行以後は主要ベクトルを持つ。そこで  $\hat{\psi}_1^T$  を 2 つに分け、

$$\hat{\psi}_1^T = \begin{Bmatrix} \psi_{11}^T \\ \psi_{12}^T \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (75)$$



(a)  $L$  マトリックス (I は単位マトリックス) (b)  $U$  マトリックス

図-7 LU 分解



とすれば,

$$A\psi_2 = \psi_{12} \dots \dots \dots (76)$$

より第一主要ベクトルからなる  $\psi_2$  が求められる.  $\psi_2$  を求める手順は固有ベクトルの場合と同様,  $A$  を図-6の形に掃き出した後,  $S_1^{-1}$  と  $\psi_{12}$  の積を計算するだけである. LU 分解, 掃き出しに伴う行, 列の変換は常に注意しなければならない.

$\psi_2$  を用いて, 式 (73) と同様  $N_2$  を求める.

$$N_2 = \psi_2^T \Omega_1 \dots \dots \dots (77)$$

$N_2$  は 図-8 上段に示すような  $(r_0 - r_1) \times r_0$  の長方形マトリックスである. そこで,  $(r_0 - r_1) \times r_1$  のマトリックス  $P_1$  を見出し, 図-8 中段に示す形に  $N_2$  を変換する.

$$\begin{aligned} [0 : \bar{N}_2] \\ = -(N_2 + P_1 U_1) \\ \dots \dots \dots (78) \end{aligned}$$

$\bar{N}_2$  は  $(r_0 - r_1) \times (r_0 - r_1)$  の正方マトリックスであるから, 図-8 下段に示すように LU 分解できる.  $\bar{N}_2$  の Rank が  $r_2 (= r_0 - r_1)$  であれば, これ以上の主要ベクトルは存在しない. もし  $\bar{N}_2$  の Rank が  $r_2 (< r_0 - r_1)$  であればさらに  $r_0 - r_1 - r_2$  個の第2主要ベクトルが存在し, 次式により第1主要ベクトル止まりの主要ベクトルと第2主要ベクトルをもつ主要ベクトルに分離される.

$$\hat{\psi}_2^T = -L_2^{-1} (\psi_{12} + P_1 \psi_{11}) \dots \dots \dots (79)$$

ここで,  $\hat{\psi}_2^T$  を2つに分け,

$$\hat{\psi}_2^T = \begin{Bmatrix} \psi_{22}^T \\ \psi_{23}^T \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (80)$$

とすれば,  $\psi_{22}^T$  にはさらに上の主要ベクトルが存在するのであるから, 式 (76) と同様に,

$$A\psi_3 = \psi_{23} \dots \dots \dots (81)$$

から第2主要ベクトルの組  $\psi_3$  が求められる.

以下同様の手順で計算を進め, LU 分解で完全な上半, 下半三角マトリックスに分けられるまで続ける. 最後にそれ以上の主要ベクトルが存在しない主要ベクトルの組  $\psi_{22}, \psi_{33}, \dots$  を用いて, 式 (19) より,

$$A\psi_{22} = \psi_{21} \dots \dots \dots (82)$$

$$A\psi_{33} = \psi_{32}, A\psi_{32} = \psi_{31} \dots \dots \dots (83)$$

.....  
.....

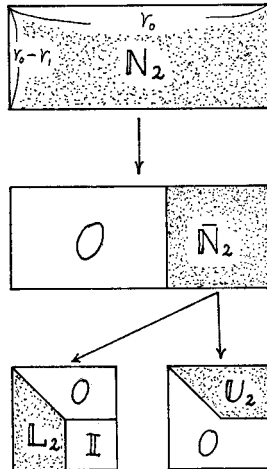


図-8 主要ベクトルふるい分けの手順 (I は単位マトリックス)

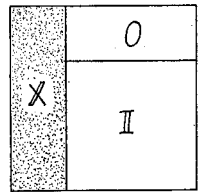


図-9 H と T を作るためのマトリックスの例 (I は単位マトリックス)

で, すべての主要ベクトル, 固有ベクトルが求められる. なお, 式 (82), (83) の  $\psi_{21}, \psi_{31}, \dots$  は固有ベクトルの組である. 詳細は文献 (15), (19) を参照されたいが, この計算で最大の問題は, 掃き出しと LU 分解における丸め誤差の除去である. 通常, 倍精度で計算するならば, 判定基準に用いる微小な値  $\epsilon$  は,

$$\epsilon = 10^{-7} \sim 10^{-10} \dots \dots \dots (84)$$

程度でよいことを筆者は経験している.

また, 伝達マトリックス法では変数の基準化が不可欠であるが, 数多く試みた結果, 本方法では基準化が必ずしも必要ではないことも確認されている.

(2) 0 以外のすべての固有値と対応する固有ベクトルの計算法<sup>20)</sup>

固有値 0 に対する右固有ベクトル, 主要ベクトルを列成分に持つマトリックスを  $X$  とする. また,  $A$  の Jordan 標準形の固有値 0 に関する部分マトリックスを  $\hat{D}$  とすれば, 式 (5) より次の関係が成り立つ.

$$AX = X\hat{D} \dots \dots \dots (85)$$

ここで, 次式を満たす正則なマトリックス  $H$  と  $T$  を考える.

$$HX = \begin{bmatrix} T & \\ & 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (86)$$

$H$  と  $T$  は一意的には決まらないが, たとえば次のようなものを考えればよい. 図-9 のマトリックスを LU 分割して下半マトリックスを  $L$  と置き,

$$H = L^{-1} \dots \dots \dots (87)$$

とする. この場合  $T$  が正則な上半三角マトリックスになることは明らかである.

式 (85) の両辺に  $H$  をかければ,

$$HAH^{-1} \begin{bmatrix} T & \\ & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & \\ & 0 \end{bmatrix} \hat{D} \dots \dots \dots (88)$$

となり,

$$HAH^{-1} \begin{bmatrix} E & F \\ G & A \end{bmatrix} \dots \dots \dots (89)$$

とすれば,

$$ET = T\hat{D} \dots \dots \dots (90)$$

$$GT = 0 \dots \dots \dots (91)$$

マトリックス  $A$  の固有値は相似変換を受けても不変であり, 式 (91) より,

$$G = 0 \dots \dots \dots (92)$$

であるから,  $A$  の固有値は  $E$  と  $A$  の固有値に分けられた. さらに, 式 (90) と  $\hat{D}$  の定義から  $E$  の固有値

は0である。したがって、 $A$ の固有値が求める0以外のすべての固有値になる。文献 20) では  $A$  を invariant subspace とよんでいる。

$A$  を 2. (2) で述べた通常の方法による既存のサブルーチンで計算すれば、全固有値は求まるが、必ずしも十分な精度で求められるわけではない。精度向上のためには  $A$  に Balancing を施すのが有効<sup>22), 23)</sup>であり、筆者の知る限りでは EISPACK<sup>21)</sup> を利用するのが最も得策である。

固有値  $\lambda_p$  に対する  $A$  の固有ベクトル  $v_p(A)$  は、 $A$  の固有ベクトル  $v_p(A)$  から次式で求められる。

$$v_p(A) = H^{-1} \begin{bmatrix} -(E - \lambda_p I)^{-1} F v_p(A) \\ v_p(A) \end{bmatrix} \dots (93)$$

ただし、式 (93) から得た固有ベクトル  $v_p(A)$  は、EISPACK で  $v_p(A)$  を求めた場合でも精度の悪いことが多い。精度の良否は 2. に述べた固有ベクトルに関する事項から判定できる。もし、精度が悪ければ次の方法が有効である。

式 (93) を第一次近似と考え、 $v_p(A)$  の中で絶対値最大のものを選び出す。それが第  $i$  番目であったとすれば、第  $i$  番目の成分を1に固定する。他の成分は  $(A - \lambda_p I)$  の  $i$  行、 $i$  列を除去したものの逆行列を計算した後、マトリックス積の計算で容易に求められる。

以上述べた  $A$  の Jordan 標準形、 $R, R^{-1}$  の数値計算法は精度向上のために多数の方法を試行した中から得られたものであり、倍精度で計算すれば相当の精度を有するものと考えられる。

4. 数値計算例

(1) 両端単純支持の管路の静的、動的解析

図-10 に示す両端単純支持の薄肉円筒殻の静的、動的解析を行う。軸方向に板厚は変化しないものとし、一要素で計算する。両端は断面不変であるとする。

計算に用いたモデルの寸法および材料定数は次のとおりである。

半径 (円の中心から板厚中心まで) 69 cm

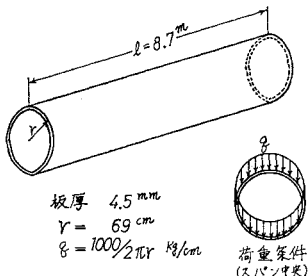


図-10 管路の計算モデル

板 厚	4.5 mm
ス パ ン	8.7 m
ヤング率	$2.1 \times 10^6$ kg/cm <sup>2</sup>
ポアソン比	0.3
密 度	$8.01 \times 10^{-6}$ kg·sec <sup>2</sup> /cm <sup>6</sup>

静的解析における荷重条件は、スパン中央に全周一様な横方向分布荷重であり、総計 1000 kg である。

正規形常微分方程式の誘導 および固有ベクトル、主要ベクトルに関する詳細はほかの機会に述べたいが、Novozhilov の式に基づき<sup>27)</sup>、荷重条件から円周方向に一波の sin, cos 展開を行っている。動的解析についても静的解析同様、円周方向一波の場合について、3次までの固有角速度、固有モードを計算した。

図-11 は静的計算結果であり、横軸に軸方向座標をとり、縦軸に横方向変位をとっている。図中には軸対称有限要素法による解<sup>24)</sup> (10 要素分割)、はり理論解 (せん断変形も考慮) も示したが、本解析法による値は他の方法による値とよく一致することがわかる。有限要素法では 70 元のマトリックス計算を行ったのに対し、本解析法では 8 元のマトリックス計算を行ったにすぎない。

表-1、図-12 は動的計算結果である。はりの横振動の固有周期から大体的見当をつけ、その付近で  $\omega$  を 1 ずつ変化させて解を見出した。式 (65)~(67) は用いず、単に  $I_m \hat{K}_1$  の符号の互いに異なる 2 点  $\omega_{k-1}, \omega_k$  間を直線で結んで得た解 (図-5 (b)) であるが、軸対称有限要素法、Flügge の 2 重 Fourier 級数解<sup>25)</sup> とほぼ一致することが認められる。固有モードについての結果も常識的である。

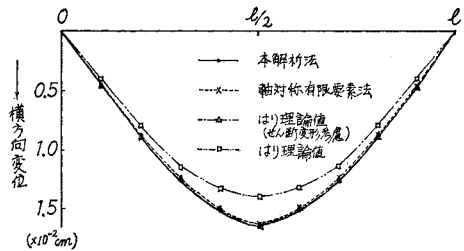


図-11 管路の横方向変位

表-1 円周方向波数  $n=1$  に対する固有角速度  $\omega$  (rad/sec)

モード	本解析法	軸対称有限要素法	Flügge の解
1	300.90	301.13	301.08
2	1010.78	1010.81	1010.79
3	1865.34	1865.39	1865.35

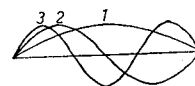


図-12 固有モード

(2) 4 径間連続管路の静的解析

複雑な境界条件の一例として，図-13 に示す 4 径間連続管路を取り上げ静的解析を行った．計算に用いた管路の寸法および材料定数は次のとおりである．

断面の半径 (円の中心から板厚中心まで)	$r=24.4 \text{ cm}$
板 厚	$h=0.8 \text{ cm}$
全長 (1 スパン長 $l \times 4$ )	$L=6 \text{ m} \times 4=24 \text{ m}$
ヤング率	$E=7.0 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$
ポアソン比	$\nu=0.34$

荷重は 図-13 に示したとおり，左端から 6 m の位置に全周一様に載荷し，載荷点を 1 cm 沈下させた．用いた理論式は計算例 (1) と同様であり，荷重条件から円周方向一波のみ考慮した．周方向 Fourier 級数展開は最上部を 0 として行っている．

$u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}, N_x^{(1)}, M_x^{(1)}$  はそれぞれ軸方向変位，周方向変位，面外変位，管軸に垂直な断面の単位長さに働く法線力，管軸に垂直な断面の単位長さに働く曲げモーメントに関する円周方向一波の係数である． $u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}, N_x^{(1)}$  が連続はりの式から予想される値に近いのに対して， $M_x^{(1)}$  は支点上および載荷点近傍にのみ大き

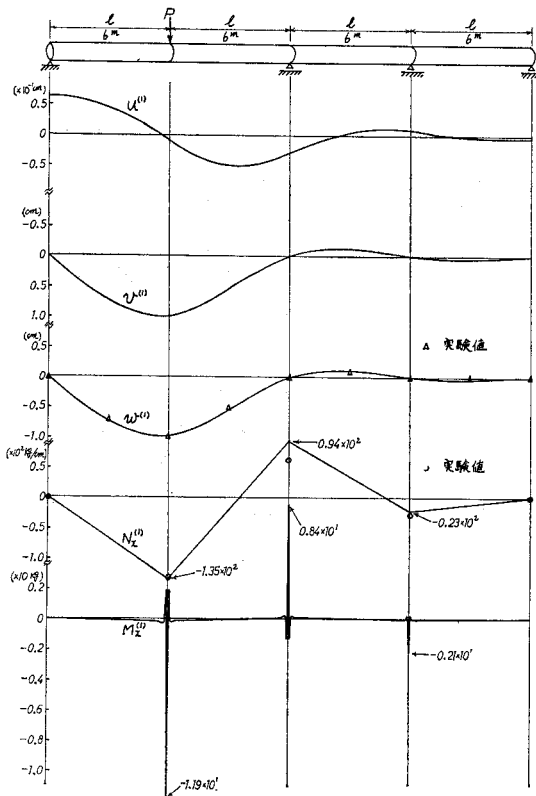


図-13 4 径間連続管路に生じる変位と単位幅あたり合力，曲げモーメント

な値を生じ，ただちに減衰する様子が見られる．

$w^{(1)}, N_x^{(1)}$  については別途行った実験値と対比し，計算値に比較的良好に一致することが確認されたが， $M_x^{(1)}$  については支点，載荷点近傍で計算値ほど急激な変化が見られなかった．実験では支点および載荷板に 10 cm 程度の幅があり，応力集中を緩和したものと考えられる．

(3) 両端単純支持の薄肉箱型はりの静的解析

図-14 に示す 両端単純支持の薄肉箱型はりの静的解析を行った．理論式は文献 4) に述べられたものであり，箱型はりを 4 つの折板要素に分割して解いている．中間ダイアフラムは入らないものとし，両端の断面形状は不変とした．

計算に用いたモデルの寸法および材料定数は次のとおりである．

断面の高さ	50 cm
断面の幅	30 cm
スパン	5 m
上下フランジ板厚	6 mm
ウェブ板厚	6 mm
ヤング率	$2.1 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$
ポアソン比	0.3

荷重条件は 図-14 中に示したような，スパン中央に

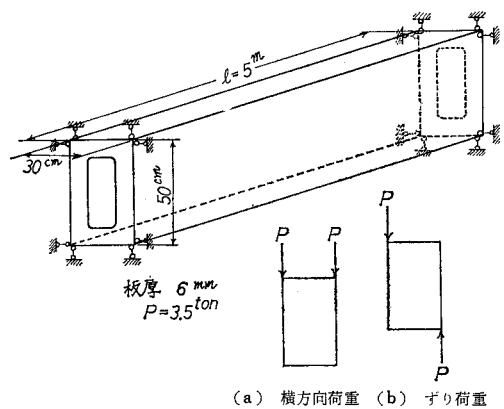


図-14 薄肉はりの計算モデルと荷重条件

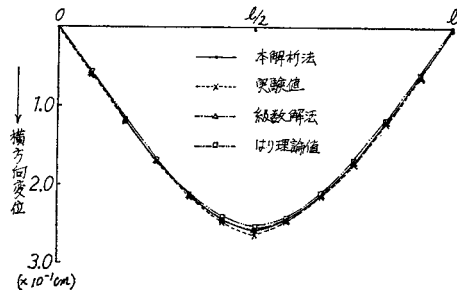


図-15 荷重条件 (a) に対するはりの横方向変位

作用する横方向荷重とずり荷重とした。

図-15 は横方向荷重に対する計算結果である。横軸にははりの軸方向座標をとり、縦軸には上フランジに接する二つの節線の横方向変位をとる。図中には実験値<sup>20)</sup>、はり理論値、本解析法で用いたのと同じ理論式を Fourier 級数解法 (級数項数 5) で解いた値を示したが、すべての結果はよく一致した。

図-16 はずり荷重に対する計算結果である。スパンを  $l$  としたとき、 $5/12l$  断面の断面形状を示している。実験値および同じ理論式を級数解法 (Fourier 級数 5 項まで取った) で解いた値も示した。図-15 の横荷重の場合、はりとしての挙動が顕著に表われ、固有値 0 と対応する固有ベクトル、主要ベクトルが結果に大きな影響を与えたのに対し、図-16 のずり荷重の場合は、シェルとしての挙動が顕著に表われ、0 以外の固有値と対応する固有ベクトルが結果に大きな影響を与えている。固有ベクトルの算出は、3.(2) に述べた式 (93) を第一次近似とする方法で求めた。級数解法では 5 項しか取らず、必ずしも項数が十分でないこと、および本解析法による値が実験値と傾向的にも数量的にもほぼ一致することを考慮すれば、本方法の有効なことは明らかである。なお、この場合に扱ったマトリックスの大きさは 56 元であり、固有値 0 に対して 4 つの固有ベクトルと 8 つの主要ベクトルが存在した。

動的解析も文献 5) に示された質量マトリックスを用いて、管路と同様に行えるがここでは省略した。

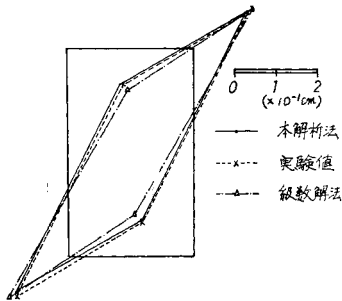


図-16 荷重条件 (b) に対するはりの断面変形 (5/12l 断面)

## 5. 結 び

管路、薄肉はり、はりとしての特性とシェルとしての特性を兼ねそなえている。方程式は高階多元の線形常微分方程式であるが、それを正規形に変換した場合、係数マトリックス  $A$  には共通した特長の存在することをなかば経験的に見出した。それらを列挙すると、

- i)  $A$  は石だたみ型であり、大きさ  $n$  は偶数である。
- ii)  $A$  の固有値は複素平面上、実軸および虚軸に対

称に、広範囲に分布する。

- iii)  $A$  は固有値 0 を重根でもつ。固有値 0 ははり特性に対応し、0 以外はシェル特性に対応する。
- iv) 固有値 0 に対する固有ベクトルには主要ベクトルが付随する。0 以外の固有値で実軸、虚軸に対称に分布するもの同士の固有ベクトル成分同士は絶対値が等しい。

などである。これらの特性を生かした常微分方程式の解法を検討し、数値的に境界値問題の一般解をうる方法を提案したが、本方法によれば境界条件、荷重条件を従来の方法よりかなり自由に選び得て、精度的にもよいことが数値計算例から確認された。

特解の算出、主要ベクトルのふるい分け、高精度の固有値解析など、実際の数値計算法も本方法においては重要な課題になるため、筆者が数多く試行した中から、最良と思われるものについて説明した。通常、倍精度で計算すれば、係数マトリックス  $A$  の大きさ  $n$  は 200 程度までは難なく行いうるものと考えている。数値計算例の管路、薄肉はりでは、 $A$  の大きさは 8 と 32 および 56 であった。

動的解析については、固有角速度  $\omega$  を試行錯誤で見出す方法を提案したが、これについては、なお問題を残しており、管路についての主要ベクトルに関する詳しい説明とあわせて、ほかの機会に譲ることにしたい。

なお、数値計算は、電研非線形シミュレーター室の HITAC-8500 を用いて行った。

謝 辞：本研究は先に筆者らが検討した逐次積分による動的応答解析法の延長上にあり、伝達マトリックス法の考え方も関連している。日頃、有益な助言をいただいている電力中央研究所、塩尻弘雄氏、伝達マトリックス法と本方法との関連において貴重な資料と助言をいただいた東海大学、遠田良喜助教授に深く感謝いたします。

## 参 考 文 献

- 1) Goldberg, J.E. and Bogdanoff, J.L.: Static and Dynamic Analysis of Nonuniform Conical Shells under Symmetrical and Unsymmetrical Conditions, Proc. 6th Symp. on Ballistic Missile and Aerospace Technology, Academic Press, 1961.
- 2) Kalnins, A.: Analysis of Shells of Revolution Subjected to Symmetrical and Nonsymmetrical Loads, J. Appl. Mech., 1964.
- 3) Kraus, H.: Thin Elastic Shells, John Wiley & Sons, 1967.
- 4) 奥村敏恵・坂井藤一：薄肉平板より成る立体的構造物の静力学的解析に関する一方法とその応用，土木学会論文報告集，No. 176, 1970.3.
- 5) 中村秀治：断面変形を考慮した薄肉はりの振動解析，土木学会論文報告集，No. 223, 1974.3.
- 6) 坂井藤一・中村秀治：薄肉曲線ばりの板殻構造としての一解析法，土木学会論文報告集，No. 235, 1975.3.

- 7) du Preez, R. : Berechnung Prismatischer Flächentragwerke mit Hilfe von Finiten Streifenelementen, Die Bautechnik, 1972.5.
- 8) Vlasov, V.Z. : Thin-Walled Elastic Beams, Publ. for the National Science Foundation, 1961, 邦訳, 奥村敏恵ほか : 薄肉弾性ばりの理論, pp. 150~158, 技報堂, 1967.
- 9) 小松定夫・西村宣男 : 吊構造の横断面変形を考慮した吊橋の立体解析, 土木学会論文報告集, No. 236, 1975.4.
- 10) 岡村隆夫・片岡 敬 : 吊橋補剛トラスの断面変形を考慮したねじり解析, 土木学会論文報告集, No. 231, 1974.11.
- 11) Dabrowski, R. : Gekrümmte dünnwandige Trager, Springer-Verlag, 1968.
- 12) 遠田良喜 : 伝達マトリックス法による薄肉開断面曲線ばりの有限変位理論の解析, 土木学会論文報告集, No. 199, 1972.3.
- 13) 清水作造 : 遷移行行列法によるタンカーの構造解析, 一船体の巨大化に対する内力の変化——, 石川島播磨技報 11-2, 1971.3.
- 14) 深沢泰晴 : 薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論, 土木学会論文集, No. 110, 1964.10.
- 15) Zurmühl, R. : Matrizen und ihre Technischen Anwendungen, Springer-Verlag, 1964, 邦訳, 瀬川富士・高市成方共訳 : マトリックスの理論と応用, pp. 247~252 プレイン図書, 1972.
- 16) 戸川隼人 : マトリックスの数値計算, オーム社, 1971.
- 17) Hildebrand, F.B. : Introduction to Numerical Analysis, McGraw-Hill, 1974.
- 18) 塩尻弘雄・中村秀治 : 構造解析における動的応答解析の一方法について, 土木学会論文報告集, No. 246, 1976.2.
- 19) Unger, H. : Zur Praxis der Biorthonormierung von Eigen- und Hauptvektoren, Z. angew. Math., Bd. 33, 1953.
- 20) Wilkinson, J.H. : The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, p. 587 1965.
- 21) Smith, B.T., Boyle, J.M., Dongarra, J.J., Garbow, B.S., Ikebe, Y., Klema, V.C. and Moler, C.B. : Matrix Eigensystem Routines-EISPACK Guide, 2nd ed., Springer-Verlag, 1976.
- 22) Osborne, E.E. : On Pre-Conditioning of Matrices, J. ACM, 7, 1960.
- 23) Parlett, B.N. and Reinsch, C. : Balancing a Matrix for Calculation of Eigenvalues and Eigenvectors, Numer. Math., 13, 1969.
- 24) 塩尻弘雄・高野 博・前野陽治 : 軸対称シェル of 動的解析と自然通風冷却塔への応用, 電力中央研究所技術第二研究所依頼報告, 71547, 1971年3月.
- 25) Flügge, W. : Statik und Dynamik der Schalen, Springer-Verlag, 1957.
- 26) 中村秀治 : 薄肉弾性梁の静力学的挙動について, 東京大学工学部修士論文, 1971.
- 27) Novozhilov, V.V. : Thin Shell Theory, P. Noordhoff, 1964.

(1977.4.19・受付)