

淡塩 2 層流境界面における抵抗係数について

A THEORY ON THE FRICTION AT THE INTERFACE OF
TWO-LAYERED FLOWS

玉井 信行*・浅 枝 隆**

By Nobuyuki TAMAI and Takashi ASAEDA

1. はじめに

感潮部における塩水楔の挙動は、感潮河口域の水利用その他に直接の関連を有している。境界面の形状、楔の侵入長さなどは通常の開水路流れと同様に 1 次元解析によって予測されるが、繰返しの試算を行わないためには水理量と界面抵抗との関係が明らかにされている必要がある。

2 層流の大きな特徴は境界面に内部波が発生し、それがかなり広い範囲の水理条件に対して安定である点にある。流れの状態として通常は層流と乱流とに区分されるが、規則的な内部波が存在している状態は層流でも乱流でもなくその中間のモードを形成していると言える。乱れが発生して境界面が完全に攪乱されるようになると、いわゆる緩混合あるいは強混合の状態となり水平方向の密度勾配も重要な役割を果たすようになり、2 層系とは異なる取扱いが必要になる。さらに内部波が発生している場合にはたとえ上層（淡水層）は乱流であっても、境界面付近は密度勾配により乱れの発生が抑制され、中間のモードに属していると考えるのが適当である。本論文においては 2 層間の混合は非常に弱いあるいはないものと仮定している。もし 2 層の間にある程度の混合が存在する場合には、密度分布あるいは界面に沿う混合層の厚さが淡水の流下距離とともに変化し、初期において考えていた流れの場がつかいには大きく変化してしまうことになる。したがって、ここでは淡塩境界面の第 1 次近似として、界面に安定な内部波が存在し、密度勾配は上・下層で不連続な場合を考える。

理論的取扱いは大別して 2 つの型式に分類される。その 1 つは界面の内部波を保持するためのエネルギー逸散から抵抗係数を算定する方法である。この手法は Keu-

legan (1949) によって初めて用いられた。彼は界面波のエネルギー逸散は空気と接する表面波と同一であると考えて抵抗係数を導いた。彼はまた静止している下層の重い流体が混合により上層へ運ばれることにより上層の流体は運動量を減ずるので、これによる付加的な抵抗についても言及している。Shi-igai (1965) はクーリガンの手法を淡塩 2 層流の流れの場に適用した。流れの場は大域的には非粘性と考えられ速度ポテンシャルによって記述される。したがって、ここで考えられたのは、粘性の影響は流れに対してはあまり大きくはないが、しかし界面付近のエネルギー逸散に対しては十分に影響を有するという仮想的な流れであった。界面波の波高、波長などの特性を要約し、彼は界面抵抗係数は ψ に逆比例するという結論を得た。ここに $\psi = R_o F_d^2$ であり、 R_o は上層のレイノルズ数、 F_d は密度フルード数である。浜田 (1966) は Rayleigh-Taylor 型の不安定理論を応用して成層している粘性流体の境界面に形成される微小振幅波のエネルギー逸散を求めた。界面波のスケールに関しては詳細は不明であるので適宜オーダーを論じ、最終的には界面抵抗係数は ψ の平方根に逆比例するという結果が得られた。しかしながらこの理論は 2 層間に主流による速度差はない場合に基づいているので、その点が現実には塩水楔が生ずる場合との大きな相違となっている。

もう 1 つの理論的研究のグループとして、表面抵抗あるいは静止している下層水の混入に伴う運動量の損失を考える研究がある。もし定常塩水楔が層流状態にあると考えるならば、速度分布を決定し、それにより界面における剪断抵抗を計算することができる。層流においては、界面の抵抗係数は流れが存在する層のレイノルズ数に逆比例することが導かれる（例えば嶋・椎貝・玉井 (1964)）。Valembois (1963) は界面における剪断抵抗を層流抵抗と乱流抵抗の和と考え、乱流抵抗は界面における混入速度により表わされるとした。彼は Lofquist (1960) の資料の内 4 例の結果を用いて各成分のオーダ

* 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

** 学生会員 東京大学大学院 工学系研究科土木工学専修

一を求めているが、混入速度の一般的な特性については何も触れていない。Pedersen (1972) は 2 層流れにおける連行の機構について論じた。運動量とエネルギー方程式とを考慮することにより、界面抵抗係数は連行係数に等しいことが導かれた。しかし彼の論文の主目的は界面抵抗を論ずることではなかったので、連行係数と 2 層系の水理量との関係などには言及されていない。

前述の検討の如く界面抵抗には幾つもの因子が寄与している。しかし感潮部で塩水楔が見られる場合のように淡水層のレイノルズ数は非常に大きく、また成層が安定である場合には、在来提案されている関数形を参照すれば層流抵抗は界面波の形成に伴う粘性逸散による抵抗に比し十分に小さくなると考えられる。さらに、2 層流を考える限りは 2 層間の混合の程度は弱く、ここで考えているような明瞭な成層の場合には混合に伴う抵抗は主要な役割を果たすことはないと考えられる。したがって、本論文では塩水楔を不連続成層流に抽象化できると考え、またその界面抵抗には界面波の形成が主要な役割を果たしていると考えられるので、界面波が存在する場合の流れの場を従来より詳しく論じて界面抵抗を理論的に求めることを目的としている。上層の流れは非粘性部と粘性部との和より成ると考え、摂動法により界面に沿う粘性境界層内の第 2 次の速度成分までが求められた。それに基づいて粘性逸散が計算され、界面抵抗係数の関数形が定められた。

なお、本論文の一部は著者の 1 人によりすでに発表されているが (玉井 (1974), Tamai (1976)), 今回の論文は内容を摂動法で統一的に見直すとともに新しく摂動速度の第 2 近似解を求めて議論を展開した。ここでは主として理論的な観点から従来の研究の見直しおよび本論文における基本的な立場を述べたが、実験・実測結果も含めた総括は水理委員会密度流研究小委員会 (1975) によっても報告されている。

2. 理論的考察

本論文における理論的な取扱いは、界面付近での流れの場を非粘性の主流と界面波成分および粘性成分の両者から成る摂動流との和で表わし、粘性境界層内でのエネルギー逸散より界面抵抗を求めることを基本的な考えとして展開されている。したがって、考察の内容を大別すると、流れの場の解析と界面抵抗の算定との 2 つになり、この 2 つに大別して説明を進める。

(1) 界面付近の流れの場の解析

a) 曲線座標系への変換および摂動展開

記号を 図-1 の 2 層流系の模式図のごとく定める。

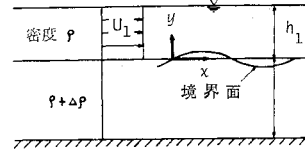


図-1 2 層流系の模式図

座標系 (x, y) は内部流速 c とともに進行する移動座標系とし、 x 軸は流れの方向に水平に、 y 軸は鉛直上方を正とする。 U_1 は上層で一様な流速； h_1, h_2 はそれぞれ上・下層の水深； $\rho, \rho + \Delta\rho$ は上・下層の密度である。今回の解析においてはこれらの諸量は流れの方向には変化しないと考えている。界面の内部波は 2 次までの解を考慮し $y_s = a \cos kx - a^2 k \cos^2 kx$ (後述) とし、振幅 a は微小であるとする。ここに k は界面波の波数である。上層の流速分布は一様と仮定しているが、これは上層流は乱流状態にあると考えられるためである。しかもレイノルズ数の増加とともに境界面での摩擦抵抗は界面波を保持するための抵抗に比して小さくなるため、流速分布が一様であると仮定しても本質的な特性は表現し得ると考えられる故である。下層の塩水層は停止していると仮定されているが、相対的な動きを考えるならばこれも一般性を失う仮定ではない。

この (x, y) 平面を次の等角写像を用いて曲線座標系 (ξ, η) 面に写像する。

$$\zeta = \xi + i\eta = z - ia e^{ikz} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $z = x + iy$ であり、 a は界面波の振幅、 k は界面波の波数である。式 (1) より

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + a e^{-ky} \sin kx, \\ \eta &= y - a e^{-ky} \cos kx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

となり、変換のヤコビアンは次式となる。

$$J = 1 + 2 a k e^{-ky} \cos kx + a^2 k^2 e^{-2ky} \dots\dots\dots (3)$$

一方、定常状態での渦度の輸送方程式は次式である。

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} - \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \cdot \nabla p \dots\dots\dots (4)$$

ここに $\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}$ は速度と渦度のベクトルであり、 ν は動粘性係数、 ρ は流体の密度、 p は圧力、 ∇ はグラディエントオペレーター、 \cdot は内積、 ∇ はベクトル積を示す。非圧縮性流体の連続式は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

であり、密度変化がある流れの場でもこの関係がよい近似で成立することは Yih (1965) により得られている。連続式 (5) を曲線座標系に変換すると

$$J \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (J^{-1/2} u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J^{-1/2} v) \right\} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

である。ここに u, v はそれぞれ流速の ξ, η 成分である。式 (6) は

$$u = J^{1/2} \frac{\partial X}{\partial \eta}, v = -J^{1/2} \frac{\partial X}{\partial \xi} \dots\dots\dots (7)$$

で定義される流れ関数 X により満足される。ここで考えているような2次元問題においては、渦度ベクトルは $\xi-\eta$ 平面に垂直な1成分のみであり、 $|\omega|=\omega$ と書いてスカラー的な取扱いが可能である。2次元問題では式(4)の左辺第2項は消失する。また密度は上下両層でそれぞれ一定であり、両層間には不連続的な跳びがあると仮定しているので、こうした場合には密度勾配と圧力勾配とは同一方向のベクトルとなる。したがって、本論文で扱かう問題では式(4)の右辺第2項も消失し、式(2)から導かれる次式が2次元2層流の支配方程式となる。

$$-\frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \nu D^2 \omega \dots\dots\dots(8)$$

ここに

$$\omega = -JD^2 X \dots\dots\dots(9)$$

であり、 $D^2 = \partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \eta^2$ である。

これらの基本式を解くために式(7)で示される流れ関数 X を式(10)に表わされるように摂動展開する。ここに X に付された添数字は摂動項の次数を表わし、 $\varepsilon = ak$ である。本論文では流れの場の解析は ε の2次項までの精度で行うので、2次の項までを具体的な形で記す。

$$X = X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \dots\dots\dots(10)$$

流れの場の諸量はすべて流れ関数 X から演繹されるので、渦度および速度の ξ, η 成分も次のように摂動形で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \\ u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \\ v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

速度場の解析に際しての基本的な前提は次のようなものである。前述の如く、界面波が発達している場合には層流型の摩擦抵抗の役割は小さいので、主流は非粘性の流れを仮定する。したがって、0次の流れ関数には非粘性の条件下での解を用いる。1次以上の解は界面における滑りなしの条件を満足するように定められる。このために n 次 ($n \geq 1$) の摂動流れ関数 X_n は、非粘性の条件下での界面波に基づく波動成分 X_{nw} と粘性を考慮した場合に発生する粘性流成分 X_{nv} との和から成立していると考える。 X_{nw} は非粘性理論による解を (ξ, η) 系で展開すれば得られるもので、滑りなしの条件より界面における X_{nv} の値が求められる。この境界条件を満足する式(8)の解が求められれば、粘性を考慮した流れの場が決定できることになる。

b) 非粘性解の2次理論

流れ関数の非粘性部を決定するにはケルビン-ヘルムホルツの結果を基礎として、界面波高の2次項を含む解を求める。1次までの非粘性解は既知であり、2次項の未知係数を m として上層に対する2次までの非粘性流

の流れ関数 ψ を次式のように仮定する。

$$\psi = (U_1 - c)y + \frac{(U_1 - c)a}{\sinh kh_1} \sinh k(y - h_1) \cos kx + ma^2 \sinh k(y - h_1) \cos^2 kx \dots\dots\dots(12)$$

ここに U_1 は上層の流速、 c は界面波の波速である。界面の運動学的条件として次式が成立するの必要があり、これにより m の形が決定される。

$$v|_{y=y_s} = (U_1 - c) \frac{dy_s}{dx} \dots\dots\dots(13)$$

右辺は $y_s = a \cos kx - a^2 k \cos^2 kx$ を代入して求めることができる。左辺は $v = -\partial \psi / \partial x$ に式(12)を代入して

$$v = \frac{(U_1 - c)ak}{\sinh kh_1} \sinh k(y - h_1) \sin kx + 2ma^2 k \sinh k(y - h_1) \cos kx \cdot \sin kx$$

となる。 v の界面における値を a^2 の項まで求めるには、右辺第1項では係数に a を含むので $y_s = a \cos kx$ の近似で十分であり、右辺第2項は係数に a^2 を含むので $y_s = 0$ の近似で十分である。このようにして

$$v|_{y=y_s} = \frac{(U_1 - c)ak}{\sinh kh_1} \sin kx (ak \cos kx \cosh kh_1 - \sinh kh_1) - 2ma^2 k \sinh kh_1 \cos kx \cdot \sin kx$$

を得る。これらの結果を式(13)に代入して

$$m = \frac{(U_1 - c)k}{\sinh kh_1} \left(\frac{1}{2} \coth kh_1 - 1 \right) = \frac{(U_1 - c)k}{2 \sinh kh_1} e^{-kh_1} \dots\dots\dots(14)$$

を得る。したがって、式(12),(14)により (x, y) 系における2次までの非粘性流の流れ関数が求められた。

これを式(2)を利用して曲線座標 (ξ, η) 系に変換する。この場合も a を微小量を考え、 a^2 (あるいは ε^2) のオーダーまでを含んで級数展開を行う。

$$\begin{aligned} \psi &= (U_1 - c)y + \frac{(U_1 - c)a}{\sinh kh_1} \sinh k(y - h_1) \cos kx \\ &+ \frac{(U_1 - c)k}{2 \sinh^2 kh_1} e^{-kh_1} a^2 \sinh k(y - h_1) \cos^2 kx \\ &= (U_1 - c)\eta + \varepsilon \frac{U_1 - c}{k} \cdot \left\{ e^{-k\eta} \cos k\xi + \frac{\sinh k(\eta - h_1)}{\sinh kh_1} \cos k\xi \right\} \\ &- \frac{\varepsilon^2 (U_1 - c)}{k} \left\{ e^{-2k\eta} \cos 2k\xi - \frac{e^{-k\eta}}{\sinh kh_1} \cdot [\sinh k(\eta - h_1) \sin^2 k\xi + \cosh k(\eta - h_1) \cos^2 k\xi] \right. \\ &\left. - \frac{e^{-kh_1}}{2 \sinh kh_1} \sinh k(\eta - h_1) \cos^2 k\xi \right\} \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

したがって、式(10)における流れ関数を次式のように置くことができる。

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= (U_1 - c)\eta \\ X_1 &= X_{1w} + X_{1v} \\ X_2 &= X_{2w} + X_{2v} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

式 (16) における X_{nv} は前述のように非粘性解からの波動成分であり、式 (15) より

$$\left. \begin{aligned} X_{1w} &= \frac{U_1-c}{k} e^{-k\eta} \cos k\xi \\ &+ \frac{U_1-c}{k \sinh kh_1} \sinh(\eta-h_1) \cos k\xi \\ X_{2w} &= -\frac{U_1-c}{k} e^{-2k\eta} \cos 2k\xi + \frac{U_1-c}{k \sinh kh_1} e^{-k\eta} \\ &\cdot [\sinh k(\eta-h_1) \sin^2 k\xi + \cosh k(\eta-h_1) \cos^2 k\xi] \\ &+ \frac{(U_1-c)e^{-kh_1}}{2k \sinh^2 kh_1} \sinh k(\eta-h_1) \cos^2 k\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

となる。

c) 粘性成分に関する基礎方程式の誘導

まず渦度 ω の各振動項と流れ関数 X との関係を求める。これは式 (9) の両辺に式 (3), (10), (11)₁ を代入して ε の次数の等しい項を等置すればよい。

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= -D^2 X_0 = 0 \\ \omega_1 &= -D^2 X_1 = -D^2 X_{1v} \\ \omega_2 &= -D^2 X_2 - 2e^{-k\eta} \cos k\xi \cdot D^2 X_1 \\ &= -D^2 X_{2v} - 2e^{-k\eta} \cos k\xi \cdot D^2 X_{1v} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここに X_0, X_{1w}, X_{2w} は式 (16), (17) に示される如く非粘性解から成立しているの、そのラプラシアンは 0 であり渦度への寄与はなく $\omega_0 = 0$ であり、また高次の渦度は流れ関数の粘性成分のみによって表現されることになる。

また界面に沿う方向の速度成分の各振動項は、速度の定義式 (7) の両辺に式 (3), (10), (11)₂ を代入して同様に求められる。

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= U_1 - c \\ u_1 &= \frac{\partial X_1}{\partial \eta} + (U_1 - c) e^{-k\eta} \cos k\xi \\ u_2 &= \frac{\partial X_2}{\partial \eta} + e^{-k\eta} \cos k\xi \cdot \frac{\partial X_1}{\partial \eta} \\ &+ (U_1 - c) \left(\frac{1}{4} e^{-2k\eta} - \frac{5}{4} e^{-2k\eta} \cos 2k\xi \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ここで 0 次解としては式 (16)₁ を用いている。

次に式 (16)₁, (18)₁ で得られた流れ関数、渦度の 0 次解の特性を用いて、基本方程式 (8) の ε の各次数に関する表示を求める。 $\omega_0 = 0$ であるので ε の 0 次に関する方程式は考える必要がない。 ε の 1 次に関する方程式は式 (10), (11)₁ を式 (8) に代入し、 $\omega_0 = 0, \partial X_0 / \partial \xi = 0$ を考慮すると次式となる。

$$\varepsilon^1 : (U_1 - c) \frac{\partial \omega_1}{\partial \xi} = \nu D^2 \omega_1 \dots\dots\dots (20)$$

また ε の 2 次に関する方程式は次式で与えられる。

$$\varepsilon^2 : (U_1 - c) \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi} + \frac{\partial X_1}{\partial \eta} \frac{\partial \omega_1}{\partial \xi} - \frac{\partial X_1}{\partial \xi} \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta}$$

$$= \nu D^2 \omega_2 \dots\dots\dots (21)$$

支配方程式 (20), (21) における未知関数はそれぞれ ω_1, ω_2 であるが、境界条件は速度に関して与えられる。したがって、渦度と速度の各項との関係求めて式 (20), (21) を速度による表示に書直す必要がある。式 (18) に ω と流れ関数 X との関係が得られているが、流れ関数と速度との関係は ε に関して線形ではなく、変換のヤコビアン J を含んだ定義式により求める必要がある。この場合に式 (18) からわかるように渦度に寄与するのは粘性成分のみであるので、速度も非粘性成分 u_w, v_w と粘性成分 u_v, v_v の和で表わし、渦度 ω との関係を求める際には u_v, v_v の展開式

$$\left. \begin{aligned} u_v &= u_{0v} + \varepsilon u_{1v} + \varepsilon^2 u_{2v} + \dots \\ v_v &= v_{0v} + \varepsilon v_{1v} + \varepsilon^2 v_{2v} + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

のみを考慮すればよい。したがって、式 (9) と (7) を用いて

$$\omega = -J \frac{\partial}{\partial \xi} (-J^{-1/2} v_v) - J \frac{\partial}{\partial \eta} (J^{-1/2} u_v)$$

である。この両辺を式 (3), (11)₁, (22) を用いて展開し、 ε の等しい次数で整理すると次式を得る。この場合 0 次の流れ関数は非粘性成分のみから成立しているの、 $u_{0v} = v_{0v} = 0$ であることを考慮する。

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{\partial u_{1v}}{\partial \eta} \\ \omega_2 &= -\frac{\partial u_{2v}}{\partial \eta} - u_{1v} k e^{-k\eta} \cos k\xi - e^{-k\eta} \cos k\xi \frac{\partial u_{1v}}{\partial \eta} \\ &+ v_{1v} k e^{-k\eta} \sin k\xi + e^{-k\eta} \cos k\xi \frac{\partial v_{1v}}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

境界面に沿った方向の長さの代表スケールを波長 λ 、境界面に垂直な方向の代表長さを半波高 a とする。境界面が明瞭であるとするれば

$$\frac{a}{\lambda} \sim \frac{\eta}{\xi} \sim O(\varepsilon) \dots\dots\dots (24)$$

である。 u_{nv} と v_{nv} は ξ と η との代表スケールが等しい大きさの場合は同一のオーダーであるが、式 (24) が成立すると考えると式 (7) の定義より速度項のオーダーは

$$\frac{v_{nv}}{u_{nv}} \sim O(\varepsilon), \frac{\partial v_{nv}}{\partial \xi} / \frac{\partial u_{nv}}{\partial \eta} \sim O(\varepsilon^2) \dots\dots\dots (25)$$

となる。これらを考慮すると式 (23)₂ の右辺第 4 項、第 5 項は ε^3 以上のオーダーとなり、最終的には 2 次解においては無視することができる。また式 (20), (21) の右辺においては ξ に関する微分項は η に関するものより ε^2 以上高次であり、無視することができる。このとき式 (21) の左辺にはこうした近似を行った後に得られる 1 次解 ω_1 を用いるが、 ε の 1 次解で ε^2 以上の項を省略しているの、省略した誤差は ε^3 以上の高次項とな

り、このようにして得られた2次解は ϵ の2次項までを正しく評価していると言える。したがって、解くべき方程式の最終的な形は式(20),(21),(23)とオーダー比較より次のように求められる。まず ϵ の1次の方程式として、

$$\epsilon^1 : (U_1 - c) \frac{\partial^2 u_{1v}}{\partial \xi \partial \eta} = \nu \frac{\partial^2 u_{1v}}{\partial \eta^2} \dots\dots\dots (26)$$

ϵ の2次の方程式として

$$\begin{aligned} \epsilon^2 : (U_1 - c) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u_{2v}}{\partial \eta} + u_{1v} k e^{-k\eta} \cos k\xi \right. \\ \left. + e^{-k\eta} \cos k\xi \frac{\partial u_{1v}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial X_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u_{1v}}{\partial \xi \partial \eta} \\ - \frac{\partial X_1}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{1v}}{\partial \eta^2} \\ = \nu \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial u_{2v}}{\partial \eta} + u_{1v} k e^{-k\eta} \cos k\xi \right. \\ \left. + e^{-k\eta} \cos k\xi \frac{\partial u_{1v}}{\partial \eta} \right) \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

となり、粘性速度成分により記述された基礎方程式を導くことができた。これら式(26),(27)の特徴は、界面に沿う境界層が薄いと考えると、 ϵ の2次までの近似においては界面に沿う速度成分のみで記述できることである。

ここで界面位置の表示について触れておく。直角座標系での界面を2次項までを含めて表示し $y = a \cos kx - a^2 k \cos^2 kx$ と考えている。この左辺 y の曲線座標系での2次までの展開は

$$\begin{aligned} \text{左辺} = \eta + a e^{-k\eta} \cos k\xi + a^2 k e^{-2k\eta} \sin^2 k\xi \\ - a^2 k e^{-2k\eta} \cos^2 k\xi + \dots\dots \end{aligned}$$

であり、右辺の展開は同様に

$$\begin{aligned} \text{右辺} = a \cos k\xi + a^2 k e^{-k\eta} \sin^2 k\xi \\ - a^2 k \cos^2 k\xi + \dots\dots \end{aligned}$$

となる。したがって、 (ξ, η) 系では $\eta=0$ がこの方程式を ϵ^2 のオーダーまで満足させることがわかり、以後の取扱いでは $\eta=0$ が曲線座標系における境界面を表わすものとする。

d) 1次の解

1次の解の支配方程式は式(26)のように導かれており、ここではまず境界条件について論ずる。振動速度は境界面では滑りなしの速度を満足するものとし、上層の流速は下層のそれに界面で一一致するものとする。また界面から十分離れたところでは非粘性流れと見なしうるものとし、粘性成分は消失する。式(11)₂, (16)₂, (19)₂より1次の速度に対して

$$\left. \begin{aligned} \eta=0 \quad \text{で} \quad u_{1v} = 0 \\ \eta=\infty \quad \text{で} \quad u_{1v} = \frac{\partial X_{1w}}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

これを、粘性流成分 u_{1v} で書直すことを考える。式(16)₂, (19)₂より

$$\left. \begin{aligned} u_1 = u_{1w} + u_{1v} + (U_1 - c) e^{-k\eta} \cos k\xi \\ u_{1w} = \frac{\partial X_{1w}}{\partial \eta}, \quad u_{1v} = \frac{\partial X_{1v}}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

と書き、式(17)₁を利用すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \eta=0 \quad \text{で} \quad u_{1v} = (c - U_1) \coth kh_1 \cos k\xi \\ \eta=\infty \quad \text{で} \quad u_{1v} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (30)$$

基礎式(26)を η について積分すると次式を得る。

$$(U_1 - c) \frac{\partial u_{1v}}{\partial \xi} = \nu \frac{\partial^2 u_{1v}}{\partial \eta^2} + H(\xi) \dots\dots\dots (31)$$

ここで ξ のみの関数 $H(\xi)$ は圧力勾配を表わす ϵ のオーダーの項である。今回の解析においては境界面は水面に平行で、主流の流速は一定と考えているので $H(\xi) = 0$ である。圧力勾配が存在する場合には、主流(0次の解)が流れの方向に変化する関数となり圧力変化と平衡を保つので、高次の圧力項はやはり0と考えてよいであろう。 $H(\xi) = 0$ に対し、式(30)の境界条件を満たす式(31)の解は

$$u_{1v} = (c - U_1) \coth kh_1 e^{-\beta\eta} \cos(k\xi + \beta\eta) \dots\dots (32)$$

で与えられる。ここに

$$\beta = \sqrt{|c - U_1| k / 2\nu} \dots\dots\dots (33)$$

である。この結果、粘性成分を考慮した1次の流れ関数が式(16)₂, (17)₁, (29)より次のように定まり、これは2次の解の基礎式で既知項として用いられる。

$$\begin{aligned} X_1 = X_{1w} + X_{1v} \\ = \frac{(U_1 - c)}{k \sinh kh_1} \sinh k(\eta - h_1) \cos k\xi + \frac{(c - U_1)}{2\beta} \\ \cdot \coth kh_1 e^{-\beta\eta} \{\sin(k\xi + \beta\eta) - \cos(k\xi + \beta\eta)\} \\ \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

このようにして得られた粘性境界層の厚さは β^{-1} のオーダーとなる。物理的に考えると $(c - U_1)$ の符号にかかわらず界面には境界層が発達する。ただし、移動座標系への相対速度の正負により発達する方向が異なることが考えられる。ここでは平衡状態(定常問題)を考えているから、発達の過程、方向性などは無関係であるので、式(33)の根号内には絶対値を付し、 $(c - U_1)$ の正負にかかわらず β が実数となるようにした。本論文では主流は非粘性流と考えており、それによって主要な特性は表現できると思われるので、1次までの非粘性解に基づいて界面波の波速を求め、 $(c - U_1)$ の符号につき場合分けをしておこう。定常で上下層の密度差が小さく、下層が停止している場合には、界面波の波速は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} c = \frac{U_1 \coth kh_1 + \{(\Delta\rho/\rho)g(\coth kh_1 + \coth kh_2)/k\}}{\coth kh_1} \cdot \\ \frac{-U_1^2 \coth kh_1 \coth kh_2 \}^{1/2}}{+\coth kh_2} \dots\dots (35) \end{aligned}$$

$c \geq U_1$ の条件は

$$g \frac{\Delta\rho}{\rho} \geq k U_1^2 \coth kh_2 \dots\dots\dots (36)$$

と表わせる。界面波が長波に属すると考えれば $\coth kh_2 = (kh_2)^{-1}$ と書けるので、式 (36) は次のようになる。

$$(h_2/h_1)F_d^{-2} \geq 1 \dots\dots\dots (37)$$

ここに

$$F_d = \frac{U_1}{\sqrt{\frac{4\rho}{\rho}gh_1}} \dots\dots\dots (38)$$

で、密度フルード数である。塩水楔のような成層流れでは通常 $F_d < 1$ であるので、下層厚さが極端に小さくない限り式 (37) の左辺は 1 より大となる。したがって、界面波が長波であればほとんどの場合 $c > U_1$ と考えられる。もう一方の極限として、界面波が深海波に属する場合には $\cosh kh_2 = 1$ と近似でき、式 (36) は次式となる。

$$\lambda \geq 2\pi h_1 F_d^2 \dots\dots\dots (39)$$

この式より波長 λ が $2\pi h_1 F_d^2$ より大きければ $c > U_1$ であり、 λ が $2\pi h_1 F_d^2$ より小であれば $c < U_1$ である。

$$\begin{aligned} (U_1 - c) \frac{\partial u_{2v}}{\partial \xi} - \nu \frac{\partial^2 u_{2v}}{\partial \eta^2} = e^{(k-\beta)\eta} \cos(2k\xi + \beta\eta) & \frac{1}{(\beta-k)^2 + \beta^2} \{Bk + E(k-\beta)\} + e^{(k-\beta)\eta} \sin(2k\xi + \beta\eta) \\ & \cdot \frac{1}{(\beta-k)^2 + \beta^2} \{B(2\beta-k) + E\beta\} + e^{-(k+\beta)\eta} \cos(2k\xi + \beta\eta) \frac{1}{(\beta+k)^2 + \beta^2} \\ & \cdot \{-kC - (\beta+k)(D+J+H) - \beta(G+K)\} + e^{-(k+\beta)\eta} \sin(2k\xi + \beta\eta) \\ & \cdot \frac{1}{(\beta+k)^2 + \beta^2} \{(2\beta+k)C + \beta(D+J+H) - (\beta+k)(G+K)\} + e^{(k-\beta)\eta} \cos \beta\eta \\ & \cdot \frac{kB + (\beta-k)E}{(\beta-k)^2 + \beta^2} + e^{(k-\beta)\eta} \sin \beta\eta \frac{(2\beta-k)B - \beta E}{(\beta-k)^2 + \beta^2} + e^{-(\beta+k)\eta} \frac{\cos \beta\eta}{(\beta+k)^2 + \beta^2} \\ & \cdot \{-kC + (\beta-k)(D-J) - \beta K\} + e^{-(\beta+k)\eta} \frac{\sin \beta\eta}{(\beta+k)^2 + \beta^2} \\ & \cdot \{(2\beta+k)C - \beta(D-J) - (\beta+k)K\} + \frac{k}{2}(c-U_1)^2 \coth^2 kh_1 e^{-2\beta\eta} \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

ここに大文字で示された係数は次の内容を示す。

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{4}\beta k(c-U_1)^2 \frac{\coth kh_1}{\sinh kh_1} e^{-kh_1}, \quad C = \frac{\beta k}{2}(c-U_1)^2 \coth kh_1 - \frac{1}{4}\beta k(c-U_1)^2 \frac{\coth kh_1}{\sinh kh_1} e^{kh_1}, \\ D &= -\beta^2(c-U_1)^2 \coth kh_1 + \frac{\beta^2}{2}(c-U_1)^2 \frac{\coth kh_1}{\sinh kh_1} e^{kh_1}, \quad E = -\frac{\beta^2}{2}(c-U_1)^2 \frac{\coth kh_1}{\sinh kh_1} e^{-kh_1}, \\ G &= -k(k-\beta)(c-U_1)^2 \coth kh_1, \quad H = -\beta k(c-U_1)^2 \coth kh_1 \\ J &= \frac{\nu}{2}(c-U_1)(k^3 + k^2\beta + 2\beta^2) \coth kh_1, \quad K = \frac{\nu}{2}(c-U_1)(\beta k^2 - 2\beta^2 k - 2\beta^3) \coth kh_1 \end{aligned}$$

ここで 1 次解で述べた如く、圧力勾配に関する項は高次解では 0 である。

式 (40) の境界条件を満足する式 (41) の解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_{2v} = e^{-(\beta+k)\eta} \{K_1 \cos \beta\eta + K_2 \sin \beta\eta + K_3 \cos(2k\xi + \beta\eta) + K_4 \sin(2k\xi + \beta\eta)\} \\ + e^{(k-\beta)\eta} \{K_5 \cos \beta\eta + K_6 \sin \beta\eta + K_7 \cos(2k\xi + \beta\eta) + K_8 \sin(2k\xi + \beta\eta)\} \\ + K_9 e^{-\sqrt{2}\beta\eta} \cos(2k\xi + \sqrt{2}\beta\eta) + K_{10} e^{-\sqrt{2}\beta\eta} \sin(2k\xi + \sqrt{2}\beta\eta) + K_{11} e^{-2\beta\eta} + K_{12} \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

ここに K_1 から K_{12} は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} K_1 = \left[\coth kh_1 \left\{ -\frac{\beta k^2}{2\nu}(c-U_1)^4 - \frac{k^3}{\nu}(c-U_1)^4 - 4\beta k^3(c-U_1)^3 - 3k^4(c-U_1)^3 - \frac{1}{2}\beta\nu k^4(c-U_1)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\nu}{2}k^2(c-U_1)^2 - \beta\nu k^5(c-U_1) - \frac{\nu^2}{2}k^6(c-U_1) \right\} + e^{kh_1} \frac{\coth kh_1}{\sinh kh_1} \left\{ \frac{\beta k^2}{4\nu}(c-U_1)^4 + \frac{k^3}{4\nu}(c-U_1)^4 \right. \right. \\ \left. \left. + \beta k^3(c-U_1)^3 + \frac{1}{4}k^4(c-U_1)^3 - \frac{\beta}{4}\nu k^4(c-U_1)^2 \right\} \right] / \left\{ \frac{k^3}{\nu}(c-U_1)^3 + 6\beta k^3(c-U_1)^2 \right. \end{aligned}$$

e) 2 次 の 解

2 次 の 解 も 前 項 の 1 次 の 解 と 同 様 な 考 え 方 で 求 め る 。

2 次 の 粘 性 速 度 成 分 で 書 表 わ し た 境 界 条 件 は 式 (16)₃、

(17)₂、(19)₃、(34) を 利 用 し て

$$\left. \begin{aligned} \eta=0 \quad \text{で} \quad u_{2v} &= \frac{1}{4}(U_1 - c) - \frac{1}{4}(U_1 - c) \cos 2k\xi \\ &+ (U_1 - c) \coth kh_1 \cos 2k\xi \\ &- \frac{U_1 - c}{4 \sinh^2 kh_1} (1 + \cos 2k\xi) e^{-kh_1} \cosh kh_1 \\ &+ (U_1 - c) \sin 2k\xi \\ \eta=\infty \quad \text{で} \quad u_{2v} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

である。ここに $u_{2v} \equiv \partial X_{2v} / \partial \eta$ である。支配方程式 (27) における未知数は u_{2v} のみであり、式 (34) で与えられる 1 次の流れ関数を代入した後、 η について 1 度積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 & +9k^4(c-U_1)^2 + 16\beta\nu k^4(c-U_1) + 13\nu k^5(c-U_1) + 6\beta\nu^2 k^5 + \nu^2 k^6 \Big\} \\
 K_2 = & \left[\coth kh_1 \left\{ -\frac{\beta k^2}{2\nu}(c-U_1)^4 - \frac{k^3}{2\nu}(c-U_1)^4 - \beta k^3(c-U_1)^3 - \frac{5}{2}k^4(c-U_1)^3 - \frac{7}{2}\beta\nu k^4(c-U_1)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. \beta\nu^2 k^5(c-U_1) \right\} + e^{kh_1} \frac{\coth kh_1}{\sinh kh_1} \left\{ \frac{\beta k^2}{4\nu}(c-U_1)^4 + \frac{\beta}{2}k^3(c-U_1)^3 + 2k^5(c-U_1)^3 + \frac{\beta\nu}{4}k^4(c-U_1)^2 \right\} \right] / \\
 & \cdot \left\{ \frac{k^3}{\nu}(c-U_1)^3 + 6\beta k^3(c-U_1)^2 + 9k^4(c-U_1)^2 + 16\beta\nu k^4(c-U_1) + 13\nu k^5(c-U_1) + 6\beta\nu^2 k^5 + \nu^2 k^6 \right\} \\
 K_3 = & \left[\coth kh_1 \left\{ -\frac{\beta k^2}{2\nu}(c-U_1)^4 - 2k^4(c-U_1)^3 - \frac{5}{2}\beta\nu k^4(c-U_1)^2 + \frac{3}{2}\nu k^5(c-U_1)^2 + 3\beta\nu^2 k^5(c-U_1) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{3}{2}\nu^2 k^6(c-U_1) \right\} + e^{kh_1} \frac{\coth kh_1}{\sinh kh_1} \left\{ -\frac{\beta k^2}{4\nu}(c-U_1)^4 - \frac{k^3}{4\nu}(c-U_1)^4 + \beta k^3(c-U_1)^3 + \frac{k^4}{4}(c-U_1)^3 \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{4}\beta\nu k^4(c-U_1)^2 \right\} \right] / \left\{ \frac{k^3}{\nu}(c-U_1)^3 - 2\beta k^3(c-U_1)^2 + k^4(c-U_1)^2 + 8\beta\nu k^4(c-U_1) \right. \\
 & \left. + 5\nu k^5(c-U_1) + 6\beta\nu^2 k^5 + \nu^2 k^6 \right\} \\
 K_4 = & \left[\coth kh_1 \left\{ -\frac{\beta k^2}{2\nu}(c-U_1)^4 + \frac{k^3}{2\nu}(c-U_1)^4 + \frac{1}{2}k^4(c-U_1)^3 - \frac{9}{2}\beta\nu k^4(c-U_1)^2 - 2\nu k^5(c-U_1)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. - \beta\nu^2 k^5(c-U_1) \right\} + e^{kh_1} \frac{\coth kh_1}{\sinh kh_1} \left\{ \frac{\beta k^2}{4\nu}(c-U_1)^4 - \frac{k^3}{4\nu}(c-U_1)^4 - \frac{\beta k^3}{2}(c-U_1)^3 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{3}{4}k^4(c-U_1)^3 + \frac{1}{4}\beta\nu k^4(c-U_1)^2 \right\} \right] / \left\{ \frac{k^3}{\nu}(c-U_1)^3 - 2\beta k^3(c-U_1)^2 + k^4(c-U_1)^2 \right. \\
 & \left. + 8\nu\beta k^4(c-U_1) + 5\nu k^5(c-U_1) + 6\beta\nu^2 k^5 + \nu^2 k^6 \right\} \\
 K_5 = & e^{-kh_1} \frac{\coth kh_1}{\sinh kh_1} \left\{ -\frac{\beta k^2}{4\nu}(c-U_1)^4 + \frac{k^3}{4\nu}(c-U_1)^4 - \frac{1}{4}k^4(c-U_1)^3 + \frac{1}{4}\beta\nu k^4(c-U_1)^2 \right\} / \\
 & \cdot \left\{ \frac{k^3}{\nu}(c-U_1)^3 - 6\beta k^3(c-U_1)^2 + 9k^4(c-U_1)^2 - 16\beta\nu k^4(c-U_1) + 9\nu k^5(c-U_1) - 6\beta\nu^2 k^5 + \nu^2 k^6 \right\} \\
 K_6 = & e^{-kh_1} \frac{\coth kh_1}{\sinh kh_1} \left\{ -\frac{\beta k^2}{4\nu}(c-U_1)^4 + \frac{k^3}{4\nu}(c-U_1)^4 - \frac{3}{2}\beta k^3(c-U_1)^3 + k^4(c-U_1)^3 - \frac{1}{4}\beta\nu k^4(c-U_1)^2 \right\} / \\
 & \cdot \left\{ \frac{k^3}{\nu}(c-U_1)^3 - 6\beta k^3(c-U_1)^2 + 9k^4(c-U_1)^2 - 16\beta\nu k^4(c-U_1) + 9\nu k^5(c-U_1) - 6\beta\nu^2 k^5 + \nu^2 k^6 \right\} \\
 K_7 = & e^{-kh_1} \frac{\coth kh_1}{\sinh kh_1} \left\{ -\frac{\beta k^2}{4\nu}(c-U_1)^4 - \frac{k^3}{2\nu}(c-U_1)^4 - \beta k^3(c-U_1)^3 + \frac{k^4}{4}(c-U_1)^3 + \frac{\beta}{4}\nu k^4(c-U_1)^2 \right\} / \\
 & \cdot \left\{ \frac{k^2}{\nu}(c-U_1)^3 - 6\beta k^3(c-U_1)^2 + 9k^4(c-U_1)^2 - 16\beta\nu k^4(c-U_1) + 9\nu k^5(c-U_1) - 6\beta\nu^2 k^5 + \nu^2 k^6 \right\} \\
 K_8 = & e^{-kh_1} \frac{\coth kh_1}{\sinh kh_1} \left\{ -\frac{\beta k^2}{4\nu}(c-U_1)^4 - \frac{k^3}{4\nu}(c-U_1)^4 + \frac{1}{2}\beta k^3(c-U_1)^3 + \frac{3}{4}k^4(c-U_1)^3 - \frac{1}{4}\beta\nu k^3(c-U_1)^2 \right\} / \\
 & \cdot \left\{ \frac{k^3}{\nu}(c-U_1)^3 - 6\beta k^3(c-U_1)^2 + 9k^4(c-U_1)^2 - 16\beta\nu k^4(c-U_1) + 9\nu k^5(c-U_1) - 6\beta\nu^2 k^5 + \nu^2 k^6 \right\} \\
 K_9 = & -\frac{U_1-c}{4\sinh^2 kh_1} e^{-kh_1} \cosh kh_1 - \frac{1}{4}(U_1-c) + (U_1-c)\coth kh_1 - K_3 - K_7 \\
 K_{10} = & -K_4 - K_8 + (U_1-c) \\
 K_{11} = & (U_1-c)\coth^2 kh_1/4 \\
 K_{12} = & -\frac{U_1-c}{4\sinh^2 kh_1} e^{-kh_1} \cosh kh_1 + \frac{1}{4}(U_1-c) - K_1 - K_5
 \end{aligned}$$

である。

粘性速度成分の 2 次解 u_{2v} が求まったことにより、2 次の流れ関数、2 次の渦度が定まるが、これらは 3 次の解を求めるには必要であるが、本論文ではそこまでは取扱わないし、また非常に煩雑な式ともなるので省略する。また界面に垂直な方向の速度成分 v についても同様に

ある。

(2) 界面抵抗係数の算定

粘性によるエネルギー逸散はその厚さが β^{-1} で代表される境界層内で生ずる。この解析では境界の上面に沿う境界層のみを取扱っているが、内部波高が微小でかつ境

界面で不連続な密度分布を仮定し、しかも下層が静止していることなどを考慮すれば、こうした取扱いも近似的には可能であると考えられる。単位面積、単位時間当りのエネルギー逸散量の1波長についての平均 \bar{E} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\bar{E} &= -\frac{\mu}{\lambda} \int_0^\lambda \int_0^\delta E(x, y) dy dx \\ &= -\frac{\mu}{\lambda} \int_0^\lambda \int_0^\delta E(\xi, \eta) J^{-1} d\eta d\xi \dots \dots \dots (43)\end{aligned}$$

ここに、 δ は境界層の厚さであり

$$\begin{aligned}E(x, y) &= 2\left(\frac{\partial u_v}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_v}{\partial x}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial u_v}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial v_v}{\partial x} \frac{\partial u_v}{\partial y}\end{aligned}$$

である。ここで添字 v は粘性成分のみがエネルギー逸散に関係することを表わしている。エネルギー逸散密度の曲線座標系における表示式は次式となる。

$$\begin{aligned}E(\xi, \eta) &= u_v^2 \{2a^2 k^4 e^{-2k\eta} (1 - \cos 2k\xi)\} + \left(\frac{\partial u_v}{\partial \xi}\right)^2 \\ &\quad \cdot (2 + 8a^2 k^2 e^{-2k\eta}) + \left(\frac{\partial u_v}{\partial \eta}\right)^2 (1 + 4a^2 k^2 e^{-2k\eta}) \\ &\quad + v_v^2 \{2a^2 k^4 e^{-2k\eta} (1 + \cos 2k\xi)\} + \left(\frac{\partial v_v}{\partial \xi}\right)^2 \\ &\quad \cdot (1 + 4a^2 k^2 e^{-2k\eta} + 2a^2 k^2 e^{-2k\eta} \cos 2k\xi) \\ &\quad + \left(\frac{\partial v_v}{\partial \eta}\right)^2 (2 + 8a^2 k^2 e^{-2k\eta}) + u_v \frac{\partial u_v}{\partial \xi} \\ &\quad \cdot (4ak^2 e^{-k\eta} \sin k\xi - 12a^2 k^3 e^{-2k\eta} \sin 2k\xi) \\ &\quad + u_v \frac{\partial u_v}{\partial \eta} (-8a^2 k^3 e^{-2k\eta}) + u_v v_v 4a^2 k^3 e^{-2k\eta} \\ &\quad \cdot \sin 2k\xi + u_v \frac{\partial v_v}{\partial \xi} (-8a^2 k^3 e^{-2k\eta}) + u_v \frac{\partial v_v}{\partial \eta} \\ &\quad \cdot (4ak^2 e^{-k\eta} \sin k\xi - 12a^2 k^3 e^{-2k\eta} \sin 2k\xi) \\ &\quad + v_v \frac{\partial u_v}{\partial \xi} (4ak^2 e^{-k\eta} \cos k\xi - 12a^2 k^3 e^{-2k\eta} \\ &\quad \cdot \cos 2k\xi) + \frac{\partial u_v}{\partial \eta} \frac{\partial v_v}{\partial \xi} (2 + 8a^2 k^2 e^{-2k\eta} \\ &\quad + 2a^2 k^2 e^{-2k\eta} \cos 2k\xi) + v_v \frac{\partial v_v}{\partial \eta} (4ak^2 e^{-k\eta} \\ &\quad \cdot \cos k\xi - 16a^2 k^3 e^{-2k\eta} - 12a^2 k^3 e^{-2k\eta} \cos 2k\xi) \\ &\quad \dots \dots \dots (44)\end{aligned}$$

ここで速度の粘性成分は ϵ の1次項より高次であることを考えて粘性逸散の振動展開形を求める。まず式(44)より E は速度項の2乗で表わされ(速度の微係数であっても ϵ の次数との関係は変わらない)、速度は ϵ^2 のオーダーまでが求められているので

$$\begin{aligned}E &= (\epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \dots)^2 = \epsilon^2 U_1^2 + 2\epsilon^3 U_1 U_2 + \dots \\ &\quad \dots \dots \dots (45)\end{aligned}$$

となる。ここに U_1, U_2 はそれぞれ1次項, 2次項の総体を表わしている。そして U_2 までが正しく求められているとき、 E としては ϵ の3次項までが正しく求まる

ことがわかる。変換のヤコビアン逆数の J^{-1} は

$$J^{-1} = 1 + \epsilon J_1 + \dots, \quad J_1 = -2e^{-k\eta} \cos k\xi \dots \dots \dots (46)$$

と表わせる。したがって、式(43)の被積分関数は

$$\begin{aligned}E J^{-1} &= (\epsilon^2 U_1^2 + 2\epsilon^3 U_1 U_2 + \dots) (1 + \epsilon J_1 + \dots) \\ &= \epsilon^2 U_1^2 + \epsilon^3 (2U_1 U_2 + U_1^2 J_1) + \dots \dots \dots (47)\end{aligned}$$

となる。積分操作は ϵ の次数に影響しないから、本論文の解析では粘性逸散が ϵ の3次のオーダーまで求められることになる。またそのとき式(44)の E の表現では ϵ の3次のオーダーまでの項を考慮すればよいことがわかる。 $\epsilon = ak$ であり、式(25)に示される ξ 方向と η 方向の速度のオーダー比較を利用すると、 ϵ の2次あるいは3次の項を含む可能性のあるのは式(44)の右辺第3項のうち $(\partial u_v / \partial \eta)^2$ のみであり、他の項はすべて $O(\epsilon^4)$ より高次な項であることがわかる。したがって、式(45)において $U_1 = \partial u_{1v} / \partial \eta$, $U_2 = \partial u_{2v} / \partial \eta$ であり、粘性逸散は次式に従って計算される。 η 方向の積分は粘性成分が消失する地点まで行われ、演算上は $\delta \rightarrow \infty$ である。

$$\begin{aligned}\bar{E} &= -\frac{\mu}{\lambda} \int_0^\lambda \int_0^\infty \left[\epsilon^2 \left(\frac{\partial u_{1v}}{\partial \eta}\right)^2 + 2\epsilon^3 \left\{ \left(\frac{\partial u_{1v}}{\partial \eta}\right) \right. \right. \\ &\quad \cdot \left. \left. \left(\frac{\partial u_{2v}}{\partial \eta}\right) - \left(\frac{\partial u_{1v}}{\partial \eta}\right)^2 e^{-k\eta} \cos k\xi \right\} \right] d\eta d\xi \\ &= \epsilon^2 M + \epsilon^3 N \dots \dots \dots (48)\end{aligned}$$

前節で求められた式(32), (42)に示される1次解, 2次解を用いた式(48)の演算を実行すると、 ϵ のオーダーの項と ϵ^2 のオーダーの項との積である ϵ^3 の項は1波長当りの平均操作ですべて0となり、 $N=0$ であることがわかる。したがって、 ϵ の3次項までの粘性逸散は粘性速度の1次解のみによって決定されていることがわかり

$$\bar{E} = -\frac{1}{2} \beta \mu a^2 k^2 (c - U_1)^2 \coth^2 kh_1 \dots \dots \dots (49)$$

となる。このエネルギー逸散は上層流により惹き起されるものであり、上層流の受ける単位面積当りの抵抗抗力 τ はエネルギー逸散率を平均流速で割り、符号を考えたものである。

$$\tau = -\frac{\bar{E}}{U_1} \dots \dots \dots (50)$$

境界面の摩擦抵抗係数 f_i は

$$f_i = \frac{2\tau}{\rho U_1^2} \dots \dots \dots (51)$$

で定義される。式(49), (50), (51)より

$$\begin{aligned}f_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} R_e^{-1/2} \left| \frac{c}{U_1} - 1 \right|^{5/2} a^2 k^2 (kh_1)^{1/2} \coth^2 kh_1 \\ &\quad \dots \dots \dots (52)\end{aligned}$$

となる。ここに $R_e = U_1 h_1 / \nu$ は上層のレイノルズ数である。

界面抵抗係数とレイノルズ数との関係は、陽な形で式(52)に示されているが、密度フルード数との関係は界面波の波速を通して求められている。波速としては非粘

性流の界面波速を示す式 (35) を近似的に用いて具体的な関数形を求める。長波および深海波の近似が成立する場合にはさらに簡単な形にまとめることができる。

a) 界面波が長波と考える場合

この場合には $\coth kh=1/kh$ と近似できるため、式 (35) は次のようになる。

$$\frac{c}{U_1} = \frac{h_2 + \{F_d^{-2}h_2(h_1+h_2) - h_1h_2\}^{1/2}}{h_1+h_2} \dots\dots(53)$$

この表示は上下層の水深比が下記のような条件に対してはさらに簡単化され、界面の抵抗係数が次のように求められる。

$h_2 \gg h_1$ のとき

$$f_i = 0.707 (R_e F_d^5)^{-1/2} a^2 k^2 (kh_1)^{-3/2} \dots\dots(54)$$

$h_2 \simeq h_1$ のとき

$$f_i = 0.125 R_e^{-1/2} \sqrt{2 F_d^{-2} - 1} a^2 k^2 (kh_1)^{-3/2} \dots\dots(55)$$

またこの場合において $F_d \ll 1$ であると考えたと次式に帰着する。

$$f_i = 0.297 (R_e F_d^5)^{-1/2} a^2 k^2 (kh_1)^{-3/2} \dots\dots(56)$$

b) 界面波が深海波と考える場合

この場合には $\coth kh \simeq 1$ と近似できるため、式 (35) は次のようになる。

$$\frac{e}{U_1} = \frac{1}{2} \{1 + \sqrt{\lambda/(\pi h_1 F_d^2) - 1}\} \dots\dots(57)$$

これを式 (52) に代入すると次式となる。

$$f_i = 0.125 R_e^{-1/2} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi h_1 F_d^2} - 1}^{5/2} a^2 k^2 (kh_1)^{1/2} \dots\dots(58)$$

深海波の波長 λ が $\lambda = 2\pi h_1 F_d^2$ の場合には式 (39) に示唆されるように界面波の波速は平均流速に等しくなる。したがって式 (49) で示されるとおりエネルギー逸散は消失する。また深海波の条件をみたま最も長い波の波長は $\lambda = 2h_1$ で与えられる。この場合も $F_d \ll 1$ に対しては式 (58) は次のように簡単化され、他の場合と同一の形式になる。

$$f_i = 0.0711 (R_e F_d^5)^{-1/2} a^2 k^2 (kh_1)^{1/2} \dots\dots(59)$$

3. 観測結果との比較および考察

塩水楔に関する実験および現地における観測は従来もいくつか行われてきた。こうした従来の成果を新しく得られた公式の考え方に沿って見直してみよう。式 (54), (55), (58) などに見られるように、界面波の性質、上下層の水深比などが特定の場合であっても、界面の抵抗係数は界面波および流れの場の幾何学的な条件の関数となっている。しかしながら従来の報告では界面波の波長、波高、波速などには触れられておらず、資料的にはまだ

不十分である。したがって、いずれの公式と比較するにしても、このような界面波の特性に関する部分は棄却して残りの要因のみで比較せざるを得ないので、観測資料は1つの公式の周りにはかなりばらつくことが予測される。

界面抵抗に関する従来の公式は

$$f_i = \alpha \psi^{-n} \dots\dots(60)$$

という形にまとめられている。ここに $\psi = R_e F_d^2$ である。観測資料と最もよく一致する半経験則として $\alpha = 0.2, n = 1/2$ が提案されている(金子 [1966])。前述したように界面波の幾何形状、波速などについての情報は従来の資料には含まれていないので、理論式 (52) と観測資料とを比較するためには何らかの簡略化を行わねばならない。

式 (54), (56), (59) を参照し、かつ界面波の幾何学的な条件、相対水深などの条件はすべての観測例において同一であると仮定すると、新しく得られた公式 (52) の実用的な形式として

$$f_i = A (R_e F_d^5)^{-1/2} \dots\dots(61)$$

を得る。ここに A は定数であり、観測資料と最もよく一致するよう値を決める。玉井 (1974) においては同様な立論により抵抗係数が求められたが、そこではエネルギー逸散から抵抗係数を導く際に誤りが含まれているので、速度の2次項までを含み式 (61) の形に訂正する。

従来発表されている資料を用いて、界面抵抗係数と $R_e F_d^5$ との関係を示したのが図-2である。図-2に掲げた資料以外にも界面抵抗係数として文献中に呈示されているものはあるが、それらは式 (60) に見られる ψ の値のみしか分らず、レイノルズ数、密度フルード数の値を独立に知り得ないために、式 (61) に沿っての再整理が不可能であった。図-2に掲げた資料の内容について略述する。また個々の資料は今後も活用される機会があるかと考え、補遺として掲げる。

図-2においてはこれらの資料のすべてをプロットしていないが、これは資料がほぼ同じ位置に配置されるときに非常に見にくくなるので、表現上の手段として略してある。実験上の係数その他を定める場合にはすべての資料を用いている。

玉井 (1964) の実験は幅 15 cm, 長さ 420 cm, 底勾配 1.27/100 の水路で停止した塩水楔を観測したものである。界面抵抗係数の値としては原文には楔の界面形状に最もよく合致する値が示されているが、今回は整理方法を統一するため、他の報告で多く取られている区分的な界面抵抗係数の算定式を用いて、楔の各部分での値を新しく求め直した。用いられた式は

$$f_i = 2 F_d^{-2} \frac{h_2}{h_1 + h_2} \cdot$$

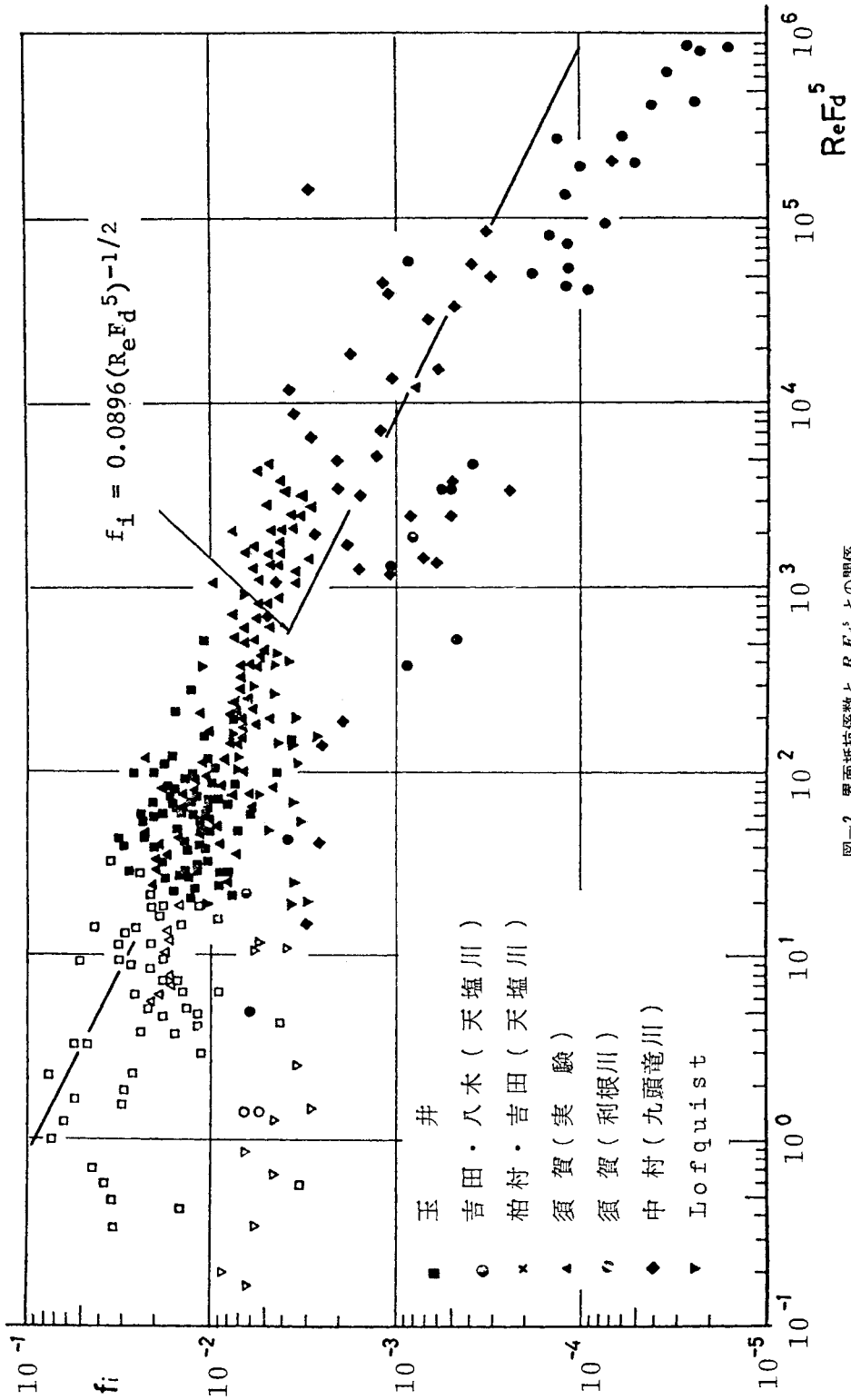


図-2 界面抵抗係数と $R_e F_d^5$ との関係

$$\cdot \left\{ -(1-Fd^2) \frac{\Delta h_1}{\Delta x} + \frac{U_1^2}{(\Delta\rho/\rho_1)gB} \frac{\Delta B}{\Delta x} \right\} \dots\dots\dots(62)$$

で、この方式の原形は浜田・堀口(1960)により提案され、中村・阿部(1970)により幅の変化する水路に対して拡張された。ここに下層は停止していると考え、 B は水路幅である。記号 Δ はそれが付された量のある区間内の差を示し、 x は淡水流の方向の座標軸である。実験水路は一樣な幅である。Lofquist(1960)は幅 23.3cm、長さ 30m の水平水路で実験を行った。彼の実験は重い塩水層が静止した淡水層の下部を流れる形式で行われた。水路幅平均の界面での剪断応力は界面の勾配、底面の剪断応力および速度勾配から計算されている。原論文では界面抵抗係数は最大速度に関して与えられているが、示されている実験条件により平均流速に関する表示に変換できる。

中村・阿部(1970)は九頭竜川における塩水楔の観測結果を報告している。界面抵抗係数は式(62)を用いて算定された。式(62)により得られた界面抵抗係数は、塩水楔に沿うある場所における局所的な値であると言える。須賀・高橋(1971)は利根川における観測と2種の水路における実験結果を報告している。実験は幅 80cm、長さ 100m の大型水路と幅 30cm で長さ 30m の水路で行われ、界面抵抗係数は式(62)を用いて算定されている。

柏村・吉田(1976)は天塩川における1潮汐周期にわたる時間平均の界面抵抗係数について触れている。現実の河川では潮位変化に伴い塩水楔の運動も非定常的であるので、この点を考慮した取扱いを考えている。彼らを用いた算定式は

$$f_i = \frac{-2g}{|\bar{u}_1|\bar{a}_1} \left(\frac{\bar{h}_1\bar{h}_2}{\bar{h}_1+\bar{h}_2} \right) \cdot \left\{ \frac{\Delta\bar{h}_1}{\Delta x} \left(\bar{\varepsilon} - \frac{\bar{a}_1^2}{g\bar{h}_1} \right) - \frac{\bar{h}_2}{2\bar{\rho}_2} \frac{\Delta\bar{\rho}_2}{\Delta x} \right\} \dots\dots\dots(63)$$

であり、上付きの横棒は潮汐周期にわたる時間的平均値を示し、 \bar{u}_1 は上層の断面平均流速、 $\bar{\varepsilon} = \Delta\rho/\rho_2$ である。こうして得られた資料は 図-2 では ●印で表わしており、 Δx としては 4.6km で計測された(吉田・八木、私信による)。また ×印で示した資料は同様に天塩川において塩水楔の長さから柏村・吉田のり求められたものである。

従来用いられてきた f_i を ψ の関数として表わす形式においては、式(60)の指数として $-1/2$ が用いられてきた。しかしこうした図においては ψ の最も大きな領域の資料群(レイノルズ数の大きな資料群に対応)での観測結果の指数はほぼ $-6/5$ であり、経験式は実河川のように ψ の値が大きな場合の挙動をあまり忠実には表わし得ていない。観測資料において最も大きなレイノ

ルズ数を示すのは利根川における結果であり、 図-2 に黒丸印で示されている利根川の資料は

$$f_i = 0.0312(R_e F_d^5)^{-1/2} \text{ (利根川)} \dots\dots\dots(64)$$

という関係に従っており、この式からの偏差もそれほど大きくないと思われる。この形式は関数形を新しく得られた公式(61)に倣って定めているが、 $R_e F_d^5$ の指数も未知数として、実験公式を求めると $f_i = 0.0211(R_e F_d^5)^{-0.462}$ となり、理論的な考察により得られた式(61)の形式が妥当であることを示している。

図-2 中の実線は新しく得られた公式(61)の形式において係数を最小2乗法で定めたものであり

$$f_i = 0.0896((R_e F_d^5)^{-1/2} \text{ (全資料)} \dots\dots\dots(65)$$

の関係を表わしている。一般的に言って、この線からの実測値の偏差は従来の f_i と ψ の関係から得られるものより小さいと考えられる。例えば指数も未知数としてデータを表わす最適曲線を求めると、

$$f_i = 0.0843(R_e F_d^5)^{-0.490}$$

となり、指数は式(65)における理論的な予測値 $-1/2$ に非常に近く、新しく得られた公式(61)の構成が現象をよく説明していると言えよう。

図-2 に倒立の黒三角印で示される Lofquist(1960)の資料の傾向は他のものと異なっている。Valembos(1963)は43例のLofquistの資料のうちの4つを用いて界面の抵抗を論じたが、すべての実験例についての解析を行ってみると、レイノルズ数、密度フルード数の値によらず界面抵抗係数はほとんど一定であることが判明した。これはLofquistの実験が密度の大きな下層が流動し、軽い上層が静止しているという条件で行われたことに一因があり、したがって底面摩擦力がより強く影響を与えていると考えられるが詳細については不明である。

観測された資料は大勢として式(65)に従っているように考えられるが、例えば式(64)のように個々のグループに対しては式(61)の係数値 A に対してより小さな値を用いる方がよい一致を示すと考えられる例もある。 図-2 を見ると天塩川と利根川とにおける観測結果とは図中で $-1/2$ の傾きをもつ帯を考えるとほぼ同一の領域にある。例えば天塩川と利根川の資料に対する最適式は

$$f_i = 0.0303(R_e F_d^5)^{-1/2} \text{ (天塩川・利根川)}$$

で、式(64)と一致していると言ってよい。九頭竜川で得られた界面抵抗係数の値はかなり大きいので確定的なことは言えないが、実際の河川での抵抗係数は式(65)の予測より小さ目になると思われる。これは実際の河川では塩水楔のスケールが大きく、波形勾配 ak が室内実験における結果に比べて小さな値になっているのではないかと推定される(式(52)参照)。

また同一の資料における界面抵抗係数値は ReF_d^5 の値が小さいと式 (61) で予測される他の部分に適した直線より図上で下側に位置するようになり、 ReF_d^5 の値が減少するにつれ段々と離れてゆくように見える。これを安定度を表わすクーリガン数 θ の観点から検討してみる。

$$\theta^{-3} = \frac{U_1^3}{\frac{d\rho}{\rho} g\nu} = \frac{U_1 h_1}{\nu} \frac{U_1^2}{\frac{d\rho}{\rho} g h_1} = ReF_d^2 \dots \dots (66)$$

と表わせる。式 (66)₂ の表現には Turner (1973) による境界層厚さ δ 、界面に沿う接触距離 x を用いた $\theta^{-3} = (\rho U_1^2 / d\rho \cdot g\delta) (U_1 x / \nu)^{1/2}$ という形式もあるが、 δ とか x に関する情報がないので式 (66) の形で値を求める。Keulegan (1949) によれば $Re > 450$ で $\theta > 0.178$ であれば安定であると報告されている。この限界値に対応する流速は、界面が滑らかな場合と界面波に碎波が認められる場合の算術平均であり、安定であるときは界面波がほとんどないと考えてよいであろう。しかし柏村・吉田 (1968) の実験を参照するとこの安定限界はレイノルズ数の関数でもあることがわかる。彼らは $\theta Re^{0.137} = \text{const.} = \alpha$ の値に応じて河口流出の形態を区分した。この実験からは、界面波の発生限界としての定数の値を決めることはできないが、図-2 に示されている資料はすべて $Re > 450$ の領域で得られているので、ここでは Keulegan の結果を用い、 $Re = 450$ で $\theta = 0.178$ に一致するよう定数を定める。すると定数 α は 0.411 と定まり、界面波のない安定な状態は

$$\Gamma = Re^{0.196} F_d^{0.667} < 2.43 \dots \dots \dots (67)$$

となる。

図-2 において掲げられている資料の内、式 (67) の条件を満しているものは各記号毎に中抜ききの白い記号により區別してある。安定度が高いと界面波は発生せず、界面波の存在により誘起させる流れの場の粘性逸散がないため、界面抵抗係数は相対的に小さくなる。この様子は図-2 にもよく現われており、中抜ききの記号で示されている資料は全体の傾向として図中で傾き $-1/2$ の直線より下側に移行してゆき、界面波が存在するときの予測値より小さくなってゆくことがわかる。こうした Γ の値が小さな資料はほとんどが実験室で得られたものであるが、 $\Gamma < 2.43$ の中にはレイノルズ数が 10^5 を越す利根川のデータも 2 例含まれており、その資料も上述の議論を裏付けているので、式 (67) は界面波の発生に関する安定条件としてはかなりよい推定式と考えられる。

このように式 (67) の $\Gamma < 2.43$ の条件を満す 1 群の資料は、今回の解析で対象とした“界面波の存在”という前提を満していないと考えられるので、式 (65) の係数を最小 2 乗法で決定する際には取除かれている。黒で

埋められている記号の分布を見ると式 (65) は全体の傾向をかなりよく表わしていると考えられる。

これまで述べてきたように界面波の存在により誘起される粘性流れの場の 2 次の擾動項までを求め、界面抵抗係数の関数形を定めることによって新しく得られた公式 (65) は全領域にわたって従来の観測例の傾向を表現しうることがわかった。しかしながら式 (65) の係数値を理論的に定めるためには界面波に関する知見が必要である。Keulegan (1949) の文中には 1 例だけ振幅、波長、上層流速に関する記述があるが (p. 499)、上層の水深、密度差などの条件については推定する以外にない。式 (52) により界面抵抗係数の概略の値を求めると式 (65) による予測よりかなり小さくなることが予想され、これを補正するためには波形勾配 (a/λ) などは通常の波で見られる値よりも大きな値を用いる必要があると思われる。こうした傾向は Shi-igai (1965) によっても指摘されており、界面波の存在による粘性逸散を考える手法の限界とも言えよう。また現実の河川において見られるような非定常性などを理論的に論ずるのは将来の問題である。

4. 結 論

2 層流の境界面に界面波が存在する場合、界面付近の流れの場を求めることにより界面抵抗係数について理論的に検討を加えた。本論文で得られた成果は次のようにまとめられる。

1) 界面付近での流れの場を非粘性の主流と界面波成分と粘性成分の両者とから成る擾動流との和で記述することにより、界面波の存在により誘起される粘性流れの場の 2 次の解までが得られた。

2) この流れの場に基づいて粘性によるエネルギー逸散が算出され、界面抵抗係数が擾動パラメーター ($\epsilon = ak$) の 3 次近似まで求められた。しかし第 3 次項は 0 であることが判明し、界面抵抗係数自体は流れの 1 次解より得られる結果と同一となることがわかった。したがって、近似度をもう 1 段階上げても界面抵抗係数への寄与は現在の解に比べて ϵ^2 のオーダーとなるので、実用的には今回の解析で十分な精度が得られたと考えられる。

3) 理論的な予測による関数形を従来の観測結果に適用した結果、界面抵抗係数 f_i に対する新しい公式として式 (65)

$$f_i = 0.0896 (ReF_d^5)^{-1/2} \dots \dots \dots (65)$$

を得た。

4) 界面波のない安定な場合の界面抵抗係数は本論文による理論的な予測値より小さくなる。この界面波のない安定の状態を判別する基準として新しく式 (67) が導

かれ、従来の資料の挙動よりその妥当性が証せられた。

謝 辞：この研究の過程で、建設省土木研究所 須賀堯三氏、電力中央研究所 中村 宏氏、北海道工学部 吉田静男氏の3氏よりは、発表されている個々の実験例、現地観測例におけるレイノルズ数、密度フルード数の値を提供して頂き、資料の再整理が可能となった。記して厚く謝意を表す次第である。

参 考 文 献

- ・ 柏村正和・吉田静男 (1968) : 河口の flow pattern について, 第12回水理講演会講演集, 13-18.
- ・ 柏村正和・吉田静男 (1976) : 天塩川の河口密度流, 第23回海岸工学講演会論文集, 477-481.
- ・ 金子安雄 (1966) : 2層流境界面抵抗係数の一例, 第13回海岸工学講演会講演集, 263-267.
- ・ 嶋 祐之・椎貝博美・玉井信行 (1964) : 河床勾配のある場合の塩水楔について, 第19回年次学術講演会講演集, 土木学会, II-71, 2 p.
- ・ 水理委員会密度流研究小委員会 (1975) : 成層密度流の界面現象 (1), 土木学会論文報告集, 第242号, 73-90.
- ・ 須賀堯三・高橋 晃 (1971) : 塩水くさびに関する大型水路実験による二・三の考察, 第26回年次学術講演会講演集, II, 137-140.
- ・ 玉井信行 (1964) : 河口密度流の研究, 東京大学卒業論文, 95 p.
- ・ 玉井信行 (1974) : 二層流境界面の抵抗係数に関する一考察, 第21回海岸工学講演会論文集, 449-452.
- ・ 中村 宏・阿部宣行 (1970) : 九頭竜川河口塩水くさびの研究, 電力中央研究所技術第二研究所報告, No. 70519, 42 p.
- ・ 浜田徳一 (1966) : 密度流の問題 (1), 第13回海岸工学講演会講演集, 259-262.
- ・ 浜田徳一・堀口孝男 (1960) : 塩水楔の性質について, 第7回海岸工学講演会講演集, 163-171.
- ・ Keulegan, G.H. (1949) : Interfacial instability and mixing in stratified flows, J. of Research, Nat. Bureau of Stands., Vol. 43, 487-500.
- ・ Lofquist, K. (1960) : Flow and stress near an interface between stratified liquids, The Physics of Fluids, Vol. 3, 158-175.
- ・ Pedersen, F.B. (1972) : Gradually varying two-layer stratified flow, J. Hydraulics Div., Proc. ASCE, Vol. 98, HY-1, 257-268.
- ・ Shi-igai, H. (1965) : On the resistance coefficient at the interface between salt and fresh water, Trans. JSCE, No. 123, 27-31.
- ・ Tamai, N. (1976) : Friction at the interface of two-layered flows, Proc. 15th Coastal Eng. Conf., ASCE, Vol. IV, Chapter 182, 3169-3188.
- ・ Turner, J.S. (1973) : Buoyancy Effects in Fluids, Cambridge Univ. Press, 108.
- ・ Valembos, J. (1963) : Courants de densité : tension tangentielle à l'interface, Essai d'interprétation des résultats de Lofquist, Bulletin du Centre de Recherches et d'Essais de Chatou, No. 5, 37-40.
- ・ Yih, C.-S. (1965) : Dynamics of Nonhomogeneous Fluids, Macmillan, 152-154.

補遺 界面抵抗係数と水理条件の一覧

($\epsilon = \Delta\rho/\rho_1$, cgs 単位)

Reporter: Tamai (1964) (Experiment)							
Run	h_1	U_1	$v \cdot 10^2$	$\epsilon \cdot 10^2$	$Re \cdot 10^{-2}$	F_d	$f_d \cdot 10^2$
1	6.55	4.84	1.25	1.05	25.6	0.589	2.34
2	7.00	4.53	1.25	1.05	25.6	0.534	2.02
3	7.36	4.31	1.25	1.05	25.6	0.495	1.74
4	7.67	4.13	1.25	1.05	25.6	0.466	2.41
5	6.68	4.60	1.28	1.00	24.2	0.569	2.28
6	7.03	4.37	1.28	1.00	24.2	0.527	1.33
7	7.29	4.21	1.28	1.00	24.2	0.498	1.43
8	7.57	4.06	1.28	1.00	24.2	0.471	1.21
9	8.26	3.72	1.28	1.00	24.2	0.413	2.93
10	6.63	4.33	1.28	1.00	22.6	0.538	2.08
11	6.98	4.11	1.28	1.00	22.6	0.498	2.18
12	7.28	3.95	1.28	1.00	22.6	0.467	1.50
13	7.51	3.82	1.28	1.00	22.6	0.446	1.10
14	7.81	3.67	1.28	1.00	22.6	0.420	0.830
15	6.61	4.19	1.28	1.00	21.8	0.521	1.83
16	6.87	4.03	1.28	1.00	21.8	0.491	1.60
17	7.18	3.86	1.28	1.00	21.8	0.460	2.46
18	7.48	3.70	1.28	1.00	21.8	0.433	1.27
19	7.74	3.58	1.28	1.00	21.8	0.411	1.29
20	6.57	4.06	1.28	1.00	21.0	0.507	0.850
21	6.76	3.95	1.28	1.00	21.0	0.486	1.77
22	7.10	3.76	1.28	1.00	21.0	0.451	3.00
23	7.46	3.58	1.28	1.00	21.0	0.419	1.81
24	7.68	3.48	1.28	1.00	21.0	0.401	0.777
25	5.89	4.37	1.25	1.05	20.7	0.561	3.83
26	6.29	4.09	1.25	1.05	20.7	0.508	1.36
27	6.43	4.00	1.25	1.05	20.7	0.492	0.634
28	6.71	3.83	1.25	1.05	20.7	0.461	3.33
29	7.06	3.64	1.25	1.05	20.7	0.428	1.34
30	7.33	3.51	1.25	1.05	20.7	0.404	1.64
31	7.71	3.33	1.25	1.05	20.7	0.374	0.951
32	4.67	5.57	1.31	1.15	19.9	0.767	1.18
33	5.07	5.13	1.31	1.15	19.9	0.678	1.32
34	5.32	4.89	1.31	1.15	19.9	0.631	0.730
35	5.52	4.71	1.31	1.15	19.9	0.598	1.13
36	5.73	4.54	1.31	1.15	19.9	0.565	0.978
37	5.97	4.36	1.31	1.15	19.9	0.532	1.50
38	6.28	4.14	1.31	1.15	19.9	0.492	1.57
39	6.65	3.91	1.31	1.15	19.9	0.452	1.45
40	4.89	4.93	1.31	1.15	18.4	0.665	1.64
41	5.11	4.72	1.31	1.15	18.4	0.622	0.365
42	5.30	4.55	1.31	1.15	18.4	0.588	1.82
43	5.46	4.35	1.31	1.15	18.4	0.550	1.05
44	5.76	4.19	1.31	1.15	18.4	0.520	1.61
45	5.97	4.04	1.31	1.15	18.4	0.493	1.07
46	6.18	3.90	1.31	1.15	18.4	0.468	1.42
47	6.44	3.75	1.31	1.15	18.4	0.440	1.25
48	4.90	4.63	1.31	1.15	17.3	0.623	1.68
49	5.16	4.40	1.31	1.15	17.3	0.578	1.36
50	5.33	4.26	1.31	1.15	17.3	0.550	0.967
51	5.50	4.13	1.31	1.15	17.3	0.525	1.36
52	5.66	4.01	1.31	1.15	17.3	0.502	1.01
53	5.84	3.89	1.31	1.15	17.3	0.480	1.47
54	6.01	3.78	1.31	1.15	17.3	0.459	0.892
55	6.21	3.66	1.31	1.15	17.3	0.437	1.40
56	4.93	4.44	1.31	1.15	16.7	0.596	1.01
57	5.08	4.31	1.31	1.15	16.7	0.570	0.951
58	5.27	4.16	1.31	1.15	16.7	0.540	1.68
59	5.50	3.98	1.31	1.15	16.7	0.506	1.88
60	5.67	3.87	1.31	1.15	16.7	0.484	0.710
61	5.81	3.77	1.31	1.15	16.7	0.466	1.43
62	6.00	3.65	1.31	1.15	16.7	0.444	1.32
63	6.17	3.55	1.31	1.15	16.7	0.426	0.945
64	6.70	3.27	1.31	1.15	16.7	0.377	3.00
65	4.86	4.12	1.31	1.05	16.1	0.566	2.74
66	5.10	3.92	1.31	1.05	16.1	0.526	1.02
67	5.28	3.79	1.31	1.05	16.1	0.500	2.07
68	5.47	3.66	1.31	1.05	16.1	0.474	1.50
69	5.66	3.54	1.31	1.05	16.1	0.451	1.98
70	5.86	3.41	1.31	1.05	16.1	0.427	1.84
71	6.08	3.29	1.31	1.05	16.1	0.405	1.91
72	6.31	3.17	1.31	1.05	16.1	0.383	1.53
73	4.88	4.16	1.31	1.15	15.5	0.563	0.454
74	5.00	4.06	1.31	1.15	15.5	0.542	0.722
75	5.09	3.99	1.31	1.15	15.5	0.527	1.39
76	5.24	3.88	1.31	1.15	15.5	0.505	1.10
77	5.36	3.79	1.31	1.15	15.5	0.487	1.02
78	5.50	3.69	1.31	1.15	15.5	0.470	1.24
79	5.64	3.60	1.31	1.15	15.5	0.451	1.09
80	5.83	3.48	1.31	1.15	15.5	0.485	1.24

Run	h ₁	U ₁	v·10 ²	ε·10 ²	Re·10 ⁻²	F _d	f _i ·10 ²
81	6.06	3.35	1.31	1.15	15.5	0.405	1.23
82	6.34	3.03	1.28	1.00	15.1	0.385	2.78
83	6.54	2.94	1.28	1.00	15.1	0.367	3.23
84	6.76	2.84	1.28	1.00	15.1	0.349	2.99
85	6.94	2.77	1.28	1.00	15.1	0.336	1.94
86	7.08	2.71	1.28	1.00	15.1	0.326	1.55
87	7.24	2.65	1.28	1.00	15.1	0.315	1.41
88	6.39	2.82	1.28	1.00	14.2	0.356	2.07
89	6.60	2.73	1.28	1.00	14.2	0.339	5.16
90	6.78	2.65	1.28	1.00	14.2	0.326	0.990
91	6.89	2.61	1.28	1.00	14.2	0.318	2.20
92	7.04	2.56	1.28	1.00	14.2	0.308	1.90
93	7.20	2.50	1.28	1.00	14.2	0.298	1.74
94	4.68	3.42	1.22	0.95	13.2	0.519	2.64
95	4.91	3.26	1.22	0.95	13.2	0.482	2.21
96	5.13	3.12	1.22	0.95	13.2	0.452	2.74
97	5.33	3.00	1.22	0.95	13.2	0.426	2.24
98	5.50	2.91	1.22	0.95	13.2	0.407	1.99
99	5.64	2.84	1.22	0.95	13.2	0.391	1.43
100	5.81	2.75	1.22	0.95	13.2	0.374	2.39
101	6.05	2.65	1.22	0.95	13.2	0.355	2.32
102	6.60	2.43	1.22	0.95	13.2	0.310	0.439
103	4.46	3.10	1.25	0.95	11.1	0.481	3.86
104	4.69	2.95	1.25	0.95	11.1	0.446	2.10
105	4.84	2.85	1.25	0.95	11.1	0.425	2.21
106	4.98	2.77	1.25	0.95	11.1	0.407	2.11
107	5.16	2.68	1.25	0.95	11.1	0.386	3.23
108	5.33	2.59	1.25	0.95	11.1	0.368	1.97
109	5.49	2.52	1.25	0.95	11.1	0.352	2.71
110	5.63	2.45	1.25	0.95	11.1	0.339	1.28
111	5.80	2.38	1.25	0.95	11.1	0.324	2.52
112	4.30	2.77	1.28	0.95	9.34	0.436	4.67
113	4.57	2.61	1.28	0.95	9.34	0.399	4.66
114	4.77	2.49	1.28	0.95	9.34	0.374	3.22
115	4.95	2.40	1.28	0.95	9.34	0.354	4.21
116	5.08	2.34	1.28	0.95	9.34	0.341	1.25
117	5.23	2.28	1.28	0.95	9.34	0.326	4.91
118	5.38	2.21	1.28	0.95	9.34	0.313	1.16
119	5.49	2.17	1.28	0.95	9.34	0.303	2.78
120	5.67	2.10	1.28	0.95	9.34	0.289	2.94
121	5.90	2.02	1.28	0.95	9.34	0.272	3.09
122	3.90	2.05	1.28	0.90	6.30	0.350	5.71
123	4.09	1.96	1.28	0.90	6.30	0.326	7.80
124	4.29	1.86	1.28	0.90	6.30	0.303	5.70
125	4.46	1.80	1.28	0.90	6.30	0.286	6.37
126	4.64	1.73	1.28	0.90	6.30	0.270	7.42
127	4.80	1.67	1.28	0.90	6.30	0.256	5.51
128	4.92	1.63	1.28	0.90	6.30	0.247	3.39
129	5.02	1.60	1.28	0.90	6.30	0.240	3.87
130	5.10	1.57	1.28	0.90	6.30	0.234	1.58
131	5.19	1.54	1.28	0.90	6.30	0.228	3.51
132	5.33	1.50	1.28	0.90	6.30	0.219	3.22

Run	h ₁	U ₁	v	e·10 ²	Re·10 ⁻³	F _d	f _i ·10 ³
36	7.09	6.95	0.924	5.61	5.33	0.346	3.69
37	7.04	8.31	0.905	5.67	6.46	0.404	3.63
38	7.12	9.13	0.922	5.67	7.05	0.453	2.90
39	7.23	9.75	0.914	5.64	7.71	0.481	3.36
40	7.32	10.45	0.900	5.32	8.50	0.528	4.05
41	7.12	4.62	0.945	7.55	3.48	0.211	2.80
42	6.88	7.50	0.937	7.55	5.51	0.326	3.11
43	6.88	9.88	0.925	7.40	7.35	0.434	3.48
44	7.21	10.60	0.927	7.68	8.25	0.446	3.66
45	7.27	12.47	0.911	7.60	9.95	0.525	3.92
46	7.37	13.71	0.887	6.86	11.39	0.605	6.69

Reporter: Suga-Takahashi (1971) (Experiment)

Run	h ₁	U ₁	v	e·10 ²	Re·10 ⁻³	F _d	f _i ·10 ³
1	12.75	5.23	/	0.60	6.67	0.605	7.40
2	13.30	5.01	/	0.60	6.67	0.568	6.92
3	13.75	4.85	/	0.60	6.67	0.541	5.94
4	14.10	4.73	/	0.60	6.67	0.521	4.68
5	14.40	4.63	/	0.60	6.67	0.505	4.82
6	14.75	4.52	/	0.60	6.67	0.487	6.62
7	15.15	4.40	/	0.60	6.67	0.468	7.60
8	15.70	4.25	/	0.60	6.67	0.443	11.2
9	16.40	4.07	/	0.60	6.67	0.415	12.5
10	17.25	3.87	/	0.60	6.67	0.385	14.3
11	14.59	9.14	/	0.60	13.3	0.989	0.760
12	16.54	8.06	/	0.60	13.3	0.820	4.88
13	17.49	7.62	/	0.60	13.3	0.754	3.80
14	18.54	7.19	/	0.60	13.3	0.691	7.48
15	21.35	6.25	/	0.60	13.3	0.559	7.50
16	21.85	6.10	/	0.60	13.3	0.540	6.58
17	22.35	5.97	/	0.60	13.3	0.522	6.48
18	22.80	5.85	/	0.60	13.3	0.507	5.90
19	23.20	5.75	/	0.60	13.3	0.494	5.98
20	23.65	5.64	/	0.60	13.3	0.480	6.72
21	24.15	5.52	/	0.60	13.3	0.465	7.08
22	24.65	5.41	/	0.60	13.3	0.451	7.36
23	25.20	5.29	/	0.60	13.3	0.436	7.84
24	25.80	5.17	/	0.60	13.3	0.421	7.82
25	26.40	5.05	/	0.60	13.3	0.406	7.90
26	27.10	4.92	/	0.60	13.3	0.391	8.56
27	28.00	4.76	/	0.60	13.3	0.373	10.9
28	23.20	8.62	/	0.60	20.0	0.740	6.36
29	23.75	8.42	/	0.60	20.0	0.715	4.16
30	24.20	8.26	/	0.60	20.0	0.694	3.28
31	24.60	8.13	/	0.60	20.0	0.678	2.88
32	25.00	8.00	/	0.60	20.0	0.662	3.18
33	25.55	7.83	/	0.60	20.0	0.640	3.56
34	26.20	7.63	/	0.60	20.0	0.617	4.20
35	27.20	7.35	/	0.60	20.0	0.583	4.66
36	11.34	5.88	/	1.0	6.67	0.560	6.6
37	12.09	5.51	/	1.0	6.67	0.509	6.8
38	12.74	5.23	/	1.0	6.67	0.470	6.4
39	13.34	5.00	/	1.0	6.67	0.439	6.2
40	13.79	4.83	/	1.0	6.67	0.418	4.6
41	14.24	4.68	/	1.0	6.67	0.399	6.0
42	14.79	4.51	/	1.0	6.67	0.377	7.0
43	15.39	4.33	/	1.0	6.67	0.355	7.2
44	16.14	4.13	/	1.0	6.67	0.330	7.8
45	14.37	9.28	/	1.0	13.3	0.785	4.12
46	14.97	8.91	/	1.0	13.3	0.739	4.92
47	15.57	8.56	/	1.0	13.3	0.696	4.60
48	16.07	8.30	/	1.0	13.3	0.664	5.82
49	15.67	8.00	/	1.0	13.3	0.629	5.90
50	15.27	7.72	/	1.0	13.3	0.597	9.47
51	13.10	7.63	/	1.0	10.0	0.694	6.44
52	13.80	7.25	/	1.0	10.0	0.626	6.40
53	14.45	6.92	/	1.0	10.0	0.585	6.02
54	14.95	6.69	/	1.0	10.0	0.555	5.84
55	15.40	6.49	/	1.0	10.0	0.531	5.44
56	15.90	6.29	/	1.0	10.0	0.505	6.18
57	16.40	6.10	/	1.0	10.0	0.484	6.16
58	16.95	5.90	/	1.0	10.0	0.460	7.18
59	17.55	5.70	/	1.0	10.0	0.437	6.66
60	19.54	8.53	/	1.0	16.7	0.620	2.94
61	20.19	8.26	/	1.0	16.7	0.590	4.16
62	20.94	7.96	/	1.0	16.7	0.559	5.14
63	21.74	7.68	/	1.0	16.7	0.528	5.46
64	22.54	7.39	/	1.0	16.7	0.500	5.68
65	23.34	7.14	/	1.0	16.7	0.474	6.14
66	24.24	6.88	/	1.0	16.7	0.448	6.78
67	25.24	6.60	/	1.0	16.7	0.422	7.06
68	26.34	6.33	/	1.0	16.7	0.396	6.98
69	22.00	9.09	/	1.0	20.0	0.622	4.10
70	22.50	8.89	/	1.0	20.0	0.602	4.70

Reporter: Lofquist (1960) (Experiment)

Run	h ₁	U ₁	v·10 ²	ε·10 ²	Re·10 ⁻³	F _d	f _i ·10 ³
3	7.13	3.54	0.952	1.18	2.65	0.375	10.7
4	7.02	4.83	0.956	1.11	3.55	0.538	7.44
6	7.27	5.41	0.928	1.07	4.24	0.618	11.3
7	6.47	1.55	0.928	1.19	1.08	0.180	8.95
8	7.10	2.38	0.904	1.19	1.87	0.204	4.58
9	7.19	3.42	0.900	1.20	2.73	0.371	4.67
10	7.21	4.59	0.902	1.17	3.67	0.504	7.20
11	7.47	4.96	0.889	1.13	4.17	0.545	7.12
12	6.92	2.52	0.842	2.08	2.07	0.211	6.77
13	6.84	3.86	0.835	2.09	3.16	0.326	3.90
14	6.93	4.98	0.828	2.08	4.17	0.408	4.99
15	7.22	5.70	0.849	2.10	4.85	0.466	7.31
16	7.25	6.72	0.844	2.04	5.77	0.555	5.47
17	6.92	2.49	0.870	3.00	1.98	0.173	5.77
18	7.13	4.64	0.855	3.02	3.87	0.316	5.58
19	6.96	6.20	0.872	2.89	4.95	0.438	4.29
20	7.11	6.94	0.864	2.92	5.71	0.483	4.58
21	7.27	7.71	0.860	2.88	6.52	0.535	6.01
22	7.37	8.27	0.856	2.86	7.12	0.570	6.75
23	6.90	2.51	0.875	3.92	1.98	0.153	6.35
24	6.90	5.04	0.857	3.97	4.06	0.305	5.92
25	7.10	7.05	0.849				

Run	h_1	U_1	v	$\epsilon \cdot 10^2$	$Re \cdot 10^{-3}$	F_d	$f_1 \cdot 10^3$
71	23.10	8.66	/	1.0	20.0	0.578	5.32
72	23.70	8.44	/	1.0	20.0	0.557	5.40
73	24.30	8.23	/	1.0	20.0	0.536	5.42
74	24.95	8.02	/	1.0	20.0	0.515	5.76
75	25.65	7.80	/	1.0	20.0	0.494	5.92
76	26.35	7.59	/	1.0	20.0	0.474	5.14
77	27.20	7.35	/	1.0	20.0	0.453	5.56
78	11.59	11.50	/	3.0	13.3	0.632	4.44
79	12.24	10.89	/	3.0	13.3	0.583	4.20
80	12.84	10.38	/	3.0	13.3	0.542	4.74
81	13.44	9.92	/	3.0	13.3	0.507	5.16
82	14.09	9.46	/	3.0	13.3	0.466	6.66
83	14.74	9.05	/	3.0	13.3	0.437	6.74
84	15.49	8.61	/	3.0	13.3	0.405	6.96
85	16.19	8.24	/	3.0	13.3	0.379	6.42
86	16.94	7.87	/	3.0	13.3	0.358	6.26
87	14.20	14.09	/	3.0	20.0	0.699	3.23
88	14.70	13.61	/	3.0	20.0	0.664	3.60
89	15.20	13.16	/	3.0	20.0	0.632	3.92
90	15.70	12.74	/	3.0	20.0	0.602	4.16
91	16.15	12.38	/	3.0	20.0	0.577	3.44
92	16.55	12.09	/	3.0	20.0	0.556	3.48
93	17.00	11.71	/	3.0	20.0	0.534	4.76
94	17.60	11.36	/	3.0	20.0	0.507	5.40
95	13.05	5.10	/	1.0	6.67	0.449	23.0
96	13.45	4.95	/	1.0	6.67	0.434	20.8
97	13.80	4.83	/	1.0	6.67	0.417	18.7
98	14.10	4.76	/	1.0	6.67	0.407	17.3
99	14.70	4.63	/	1.0	6.67	0.391	18.1
100	14.95	4.54	/	1.0	6.67	0.379	16.8
101	14.95	4.45	/	1.0	6.67	0.370	15.4
102	15.20	4.39	/	1.0	6.67	0.361	15.5
103	15.45	4.31	/	1.0	6.67	0.352	17.1
104	15.75	4.23	/	1.0	6.67	0.342	20.0
105	16.10	4.14	/	1.0	6.67	0.332	21.2
106	16.45	4.05	/	1.0	6.67	0.321	21.6
107	16.85	3.95	/	1.0	6.67	0.310	23.8
108	20.70	6.44	/	1.0	13.3	0.455	8.12
109	21.00	6.35	/	1.0	13.3	0.445	5.94
110	21.20	6.29	/	1.0	13.3	0.438	4.82
111	21.40	6.23	/	1.0	13.3	0.432	4.86
112	21.60	6.17	/	1.0	13.3	0.427	5.52
113	21.85	6.10	/	1.0	13.3	0.420	6.18
114	22.10	6.03	/	1.0	13.3	0.412	6.86
115	22.40	5.95	/	1.0	13.3	0.404	7.58
116	22.70	5.87	/	1.0	13.3	0.396	7.60
117	23.00	5.80	/	1.0	13.3	0.389	7.62
118	23.30	5.72	/	1.0	13.3	0.381	8.26
119	23.60	5.65	/	1.0	13.3	0.373	8.84
120	23.95	5.57	/	1.0	13.3	0.365	9.30
121	24.30	5.49	/	1.0	13.3	0.358	10.3
122	24.70	5.40	/	1.0	13.3	0.349	11.8
123	25.15	5.30	/	1.0	13.3	0.339	11.3
124	13.60	6.62	/	1.0	3.38	0.576	11.5
125	14.00	6.43	/	1.0	3.38	0.551	10.5
126	14.35	6.27	/	1.0	3.38	0.532	9.18
127	14.65	6.14	/	1.0	3.38	0.515	8.06
128	14.90	6.04	/	1.0	3.38	0.502	7.46
129	15.15	5.94	/	1.0	3.38	0.490	7.56
130	15.40	5.84	/	1.0	3.38	0.479	7.62
131	15.65	5.75	/	1.0	3.38	0.467	7.66
132	15.90	5.66	/	1.0	3.38	0.456	8.42
133	16.20	5.56	/	1.0	3.38	0.443	10.7
134	16.60	5.42	/	1.0	3.38	0.428	11.9
135	17.00	5.29	/	1.0	3.38	0.412	11.4
136	17.40	5.17	/	1.0	3.38	0.397	12.0
137	17.57	3.79	/	0.6	6.67	0.374	23.4
138	17.97	3.71	/	0.6	6.67	0.362	19.2
139	18.37	3.63	/	0.6	6.67	0.351	20.1
140	18.77	3.55	/	0.6	6.67	0.339	20.8
141	19.17	3.48	/	0.6	6.67	0.329	21.4
142	19.57	3.41	/	0.6	6.67	0.318	22.1
143	19.97	3.34	/	0.6	6.67	0.308	22.6
144	20.37	3.27	/	0.6	6.67	0.300	20.0
145	20.67	3.23	/	0.6	6.67	0.293	17.3
146	20.97	3.18	/	0.6	6.67	0.286	17.5
147	21.27	3.13	/	0.6	6.67	0.281	17.8
148	21.57	3.09	/	0.6	6.67	0.276	17.8
149	21.87	3.05	/	0.6	6.67	0.270	19.4
150	22.17	3.02	/	0.6	6.67	0.265	19.4
151	22.47	2.99	/	0.6	6.67	0.261	17.2
152	22.79	2.93	/	0.6	6.67	0.255	17.1
153	23.07	2.89	/	0.6	6.67	0.249	19.8
154	23.47	2.86	/	0.6	6.67	0.243	22.0
155	23.87	2.80	/	0.6	6.67	0.237	24.1
156	22.3	5.98	/	1.2	13.3	0.371	12.6
157	23.0	5.80	/	1.2	13.3	0.355	9.4
158	23.6	5.65	/	1.2	13.3	0.341	9.6
159	24.2	5.51	/	1.2	13.3	0.329	9.4
160	24.8	5.38	/	1.2	13.3	0.316	9.0
161	25.4	5.25	/	1.2	13.3	0.305	10.0
162	26.2	5.09	/	1.2	13.3	0.292	13.0
163	27.4	4.87	/	1.2	13.3	0.272	15.2

Reporter: Nakamura-Abe (1970) (Kuzuryu River)

Run	h_1	U_1	$v \cdot 10^2$	$\epsilon \cdot 10^2$	$Re \cdot 10^{-5}$	F_d	$f_1 \cdot 10^4$
1	120	32.5	0.869	2.06	4.49	0.660	3.94
2	130	20.7	0.861	2.06	3.13	0.404	2.46
3	135	17.5	0.842	2.06	2.81	0.335	45.0
4	175	26.2	0.841	2.06	5.45	0.441	35.0
5	177	19.0	0.841	1.96	4.00	0.326	6.16
6	180	19.1	0.842	2.06	4.08	0.317	15.5
7	272	33.4	0.964	1.96	9.42	0.462	27.2
8	185	34.0	0.928	1.96	6.78	0.570	10.8
9	170	31.8	0.907	2.06	5.96	0.543	6.78
10	182	21.8	0.892	1.57	4.45	0.412	12.8
11	225	25.6	0.907	2.06	6.35	0.380	20.8
12	134	26.3	0.960	1.96	3.67	0.519	10.3
13	148	20.3	0.963	1.96	3.12	0.381	5.10
14	135	19.0	0.950	1.77	2.70	0.393	8.44
15	135	38.8	0.960	1.96	5.46	0.762	29.2
16	185	20.2	0.960	1.96	3.89	0.339	18.6
17	188	31.9	1.063	2.15	5.64	0.507	17.8
18	66	27.5	1.098	2.19	1.65	0.731	4.96
19	124	10.5	1.105	2.18	1.18	0.204	26.8
20	131	8.9	1.105	2.15	1.06	0.170	31.4
21	130	10.4	1.075	2.23	2.35	0.364	7.04
22	125	23.0	1.075	2.26	2.67	0.437	15.6
23	82	31.5	1.140	2.27	2.27	0.738	3.06
24	90	26.5	1.145	2.26	2.08	0.594	6.00
25	110	18.2	1.147	2.24	1.75	0.371	10.9
26	105	16.2	1.147	2.16	1.48	0.344	49.8
27	120	12.5	1.143	2.01	1.31	0.257	26.2
28	125	24.9	1.140	2.25	2.73	0.474	27.8
29	150	23.8	1.137	2.25	3.14	0.414	4.92
30	156	14.0	1.135	2.05	1.92	0.250	19.7
31	195	40.5	1.188	1.96	6.65	0.662	3.22
32	205	35.5	1.179	1.97	6.17	0.564	11.7
33	253	24.2	1.188	1.97	5.15	0.346	20.4
34	324	37.2	1.510	2.30	7.98	0.435	37.8
35	254	31.2	1.425	2.21	5.56	0.420	12.0

Reporter: Suga-Takahashi (1971) (Tone River)

Run	h_1	U_1	v	ϵ	$Re \cdot 10^{-5}$	F_d	$f_1 \cdot 10^4$
1	245	17.0	/	/	4.17	0.315	10.4
2	305	23.0	/	/	7.02	0.347	6.6
3	335	24.0	/	/	8.04	0.337	6.0
4	365	22.0	/	/	8.03	0.602	1.2
5	385	24.5	/	/	9.43	0.346	3.86
6	410	16.0	/	/	6.56	0.227	8.94
7	240	52.0	/	/	12.5	0.922	0.27
8	300	53.0	/	/	15.9	0.798	0.42
9	315	56.0	/	/	17.6	0.862	0.16
10	330	39.0	/	/	12.9	0.594	0.73
11	350	31.0	/	/	10.9	0.524	0.92
12	140	39.0	/	/	5.46	0.955	0.24
13	230	45.0	/	/	10.4	0.901	0.34
14	260	34.5	/	/	8.97	0.792	0.60
15	290	37.0	/	/	10.7	0.712	1.00
16	320	40.0	/	/	12.8	0.639	1.20
17	350	34.5	/	/	12.1	0.530	1.80
18	50	58.0	/	/	2.9	0.924	0.50
19	240	49.0	/	/	11.8	0.928	0.22
20	290	49.0	/	/	14.2	0.656	1.32
21	330	43.0	/	/	14.2	0.563	1.48
22	355	38.0	/	/	13.5	0.560	1.17
23	380	41.5	/	/	15.8	0.505	1.17
24	160	11.0	/	/	1.76	0.509	8.4
25	310	11.0	/	/	3.41	0.167	38.6
26	350	5.0	/	/	1.75	0.124	62.0
27	410	6.0	/	/	2.46	0.090	68.8
28	450	6.0	/	/	2.70	0.088	56.6

Reporter: Yoshida-Yagi (Kashiwamura-Yoshida (1976)) (Teshio River)

Run	h_1	U_1	$v \cdot 10^2$	$\epsilon \cdot 10^2$	$Re \cdot 10^{-4}$	F_d	$f_1 \cdot 10^4$
1	204	23.1	1.15	2.265	40.98	0.343	8.83
2	196	10.9	1.15	2.265	18.58	0.165	64.11

Reporter: Kashiwamura-Yoshida (1976) (Teshio River)

Run	h_1	U_1	v	
-----	-------	-------	-----	--