

柔ケーブル材の接線剛性方程式について

TANGENT STIFFNESS EQUATION OF FLEXIBLE CABLE AND SOME CONSIDERATIONS

後 藤 茂 夫*
By Shigeo GOTO

1. ま え が き

吊橋や斜張橋など、柔ケーブル部材を有する構造物を解析する場合、一般にケーブル部材は、引張り力のみを受ける直線部材として取り扱われるのが普通である。

しかし、架設途上における斜張橋やキャットウォーク・ストームケーブル構造など、場合によっては、サグの影響が無視できず、柔ケーブルとしての特性の考慮が必要となることがある。このようなとき、直線材として計算する場合には、必然的にケーブルに中間節点を設け、自重を格点荷重へ置換し、折れ線状の多部材として解析することにより精度を保つことができるが、節点数の増加により剛性マトリックスのサイズが拡大されることになる²⁾。また、サグの小さい単一ケーブル材を直線材で置換する場合には、その非抗圧性により、軸方向力の正負を判定し、無効材の発生に対処する必要が生じる³⁾。

柔ケーブルのサグがある程度小さい場合には、放物線形状として解析することも考えられるが⁴⁾、弛緩した状態を含めての大変形解析には適当ではない。

通常の構造用ロープ材を対象とする場合、その弾性伸びによる長さ方向の分布自重の変化はきわめて小さく、したがって、途中で外力が作用しない重力場下の単一ケーブルは、一様な自重を有するカタナリー形状のケーブルと考えてさしつかえない。

このような柔ケーブル材を含む構造物の接線剛性法⁵⁾による大変形解析では、柔ケーブルに関する接線剛性係数は、極端に弛緩した状態から直線軸力部材に無限に近づく極限状態まで十分に適用できるものでなければならない。本文で誘導された柔ケーブル部材の接線剛性方程式は、この点で十分な配慮がなされており、サグが極小となる極限状態でも桁落ちによる精度の低下はなく^{注)}、

直線材としての接線剛性方程式と完全に一致する。

本解析法の一つの特徴は、柔ケーブルの自重を荷重として取り扱わず、ケーブルの属性の一つと考えたことである。すなわち、柔ケーブルの材料としての基本的な属性は、弾性係数 E 、断面積 A 、無応力長 l_0 、無応力時の単位長自重 w_0 となる。

したがって、柔ケーブルといえども重力場においては以上の属性と両端の位置が与えられれば、その形状は、つねに一意的に定まることとなり、両端の節点の微小変位に対する材端力の増分を接線剛性方程式として導くことができる。

接線剛性法による大変形解析においては、各反復段階における、正確な接線剛性マトリックスと不平衡力の算出精度が収束性と解の最終精度に大きな影響を与える。

本文の柔ケーブル材の接線剛性係数は、曲げ剛性がないことおよび長さに沿った自重強度はつねに一様である(ただし、総重量は一定であるので、全体伸びによる自重強度の増減は考慮する)という仮定に立脚した厳密なものであり、後の計算例でも明らかなように、きわめてすぐれた収束性を与えるものである。

また、この接線剛性係数より座標変換した弦方向の接線剛性係数を示して直線軸力部材との比較と考察を行ったが、サグの小さい場合、その近似式から Ernst¹⁾ の修正弾性係数の式を導くことができる。

なお、本文で明らかなように、カタナリーケーブルとしての特性を左右する無次元パラメーター ψ の決定は、先行状態の算出あるいは不平衡力の算出の際のきわめて重要な過程となる。これは、その状態の自重を w 、両端の水平距離を x 、張力の水平成分を H とすると、

$$\psi = wx/2H$$

となるものであるが、5. において、いくつかの状態からの ψ の算出法に言及し、実際のプログラム作成の際

注) 文献 5) に示された接線剛性係数は、直線に近い状態での桁落ちによる精度の劣化が懸念される。

の参考に供することにした。

2. 柔ケーブル部材の基本的性質

ここで取り扱う柔ケーブル部材は、断面一定で、その長さに沿って等分布する自重を有する曲げ剛性のないロープ材であり、重力場において両端を固定された任意の状態の柔ケーブルの分布自重は、ケーブル全重量をその全長で割った商であると見なし得るものとする。

このようなフリーハンギングの柔ケーブルは、カタナリー形状をなすことはよく知られており、図-1の左上端を原点にとり、水平右方向を u 、鉛直下方向を v 軸にとれば、

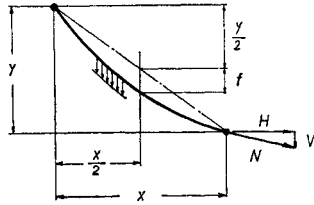


図-1

$$v = \frac{lch\psi + ysh\psi - lch(\psi - cu) - ysh(\psi - cu)}{2sh\psi} \dots\dots\dots(1)$$

のように表わされる。

ここで、

l : ケーブルの全長

x : 両固定点間の水平距離 (水平支間)

y : 両固定点間の垂直距離 (垂直支間)

$$c = \frac{w}{H} \dots\dots\dots(2)$$

$$\psi = \frac{cx}{2} = \frac{wx}{2H} \dots\dots\dots(3)$$

w : ケーブルの単位長当りの自重

H : ケーブル張力の水平成分

である。なお、本文では、各双曲線関数 \sinh , \cosh , \tanh , \coth , を sh , ch , th , cth のように略記することにする。

また、ケーブル全長 l 、弦の midpoint からのサグ f に関して、

$$\frac{l^2}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{sh^2\psi}{\psi^2} \dots\dots\dots(4)$$

$$f = \frac{ch\psi - 1}{2sh\psi} l = \frac{l}{2} th \frac{\psi}{2} \dots\dots\dots(5)$$

$$sh\psi = \frac{4fl}{l^2 - 4f^2}, \quad ch\psi = \frac{l^2 + 4f^2}{l^2 - 4f^2} \dots\dots\dots(6)$$

$$\psi = \ln \frac{l+2f}{l-2f} \dots\dots\dots(7)$$

などの関係がある⁹⁾。図-1 右下端の反力に関しては、水平、垂直反力を H, V , H と V との合力すなわち、ケーブル端の張力を N とすれば、

$$H = \frac{wx}{2\psi} \dots\dots\dots(8)$$

$$V = \frac{w}{2}(y \operatorname{cth}\psi - l) \dots\dots\dots(9)$$

$$N = \frac{w}{2}(l \operatorname{cth}\psi - y) \dots\dots\dots(10)$$

のように表わすことができる。

また、ケーブルの弾性伸び量を Δl_e とすれば、ケーブル張力を T 、ケーブル無応力長を l_0 として、

$$\Delta l_e = \int_0^{l_0} \frac{T}{EA} dl = \frac{H}{EA} \frac{l_0}{l} \int_0^x \left\{ 1 + \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right\} du \dots\dots\dots(11)$$

$$\therefore \Delta l_e = \frac{Hx}{2EA} \frac{l_0}{l} \left(1 + \frac{l^2 + y^2}{x^2} \psi \operatorname{cth}\psi \right) \dots\dots\dots(12)$$

となる。ここで、 EA はケーブルの伸び剛性である。

3. 柔ケーブル部材の接線剛性方程式

図-2 において、左上端を固定し、右下端の微小変位 δx , δy による材端力の微小増分 δH , δV を表わす柔ケーブルの接線剛性方程式を求める。

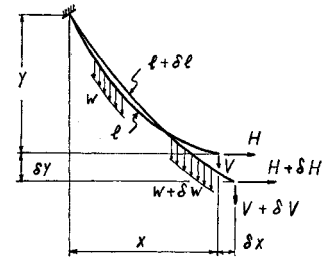


図-2

ケーブルの全重量を W とすれば、

$$W = wl = \frac{2\psi lH}{x} \dots\dots\dots(13)$$

となり、これはつねに一定となるので、

$$\frac{\delta H}{H} = \frac{\delta x}{x} - \frac{\delta l}{l} - \frac{\delta \psi}{\psi} \dots\dots\dots(14)$$

$\delta \psi$ は、式 (4) の微分より、

$$a = \frac{sh\psi}{\psi ch\psi - sh\psi} \dots\dots\dots(15)$$

とにおいて、

$$\frac{\delta \psi}{\psi} = a \left(\frac{l^2}{l^2 - y^2} \frac{\delta l}{l} - \frac{\delta x}{x} - \frac{y^2}{l^2 - y^2} \frac{\delta y}{y} \right) \dots\dots\dots(16)$$

となるので、これを式 (14) に代入すれば、

$$b = \psi \operatorname{cth}\psi \dots\dots\dots(17)$$

として、次式が得られる。

$$\delta H = \frac{abH}{x} \delta x + \frac{ayH}{l^2 - y^2} \delta y - \frac{H}{l} \left(\frac{al^2}{l^2 - y^2} + 1 \right) \delta l \dots\dots\dots(18)$$

なお、 a, b は、

$$a(b-1) = 1 \dots\dots\dots(19)$$

を満足する。次に、式 (9) を微分して δV を求めれば

$$\delta V = \frac{ayH}{l^2 - y^2} \delta x + \frac{H}{x} \left\{ a \left(\frac{xy}{l^2 - y^2} \right)^2 + b \right\} \delta y$$

$$-\frac{Hy}{lx} \left\{ a \left(\frac{xl}{l^2-y^2} \right)^2 + b \right\} \delta l \dots\dots\dots(20)$$

となる。また、 δl は、式 (12) を微分して、

$$\begin{aligned} \delta l_e = \delta l - \delta l_t &= \frac{Hl_0}{EAl} \delta x + \frac{Hl_0}{EAl} \frac{y}{x} b \delta y \\ &\quad - \frac{Hl_0}{EAl} \left(\frac{y^2}{x^2} b + 1 \right) x \frac{\delta l}{l} \\ &\quad - \frac{Hxl_0}{EAl} \frac{l^2}{l^2-y^2} \frac{\delta \psi}{\psi} \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left[\frac{EAl}{Hl_0} + \frac{x}{l} \left\{ \left(\frac{l^2}{l^2-y^2} \right)^2 a + \frac{y^2}{x^2} b + 1 \right\} \right] \delta l \\ = \left(a \frac{l^2}{l^2-y^2} + 1 \right) \delta x + \frac{y}{x} \left\{ \left(\frac{xl}{l^2-y^2} \right)^2 a + b \right\} \delta y \\ + \frac{EAl}{Hl_0} \delta l_t \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 δl_t は、微小温度上昇によるケーブルの自由伸び量を表わす。したがって、式 (18), (20), (22) より、

$$\begin{aligned} \delta H &= \frac{\left(Fb \frac{l}{x} + \frac{H}{l} \frac{y^2}{x^2} B \right) \delta x + \left(F \frac{ly}{l^2-y^2} \right. \\ &\quad \left. \frac{Fl}{Ha} + \frac{x}{l} \left\{ \left(\frac{l^2}{l^2-y^2} \right)^2 + \frac{y^2}{x^2} \frac{b}{a} + \frac{1}{a} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{H}{l} \frac{y}{x} B \right) \delta y - F \left(\frac{y^2}{l^2-y^2} + b \right) \delta l_t \dots\dots\dots(23) \\ \delta V &= \frac{\left(F \frac{ly}{l^2-y^2} - \frac{H}{l} \frac{y}{x} B \right) \delta x + \left\{ \left(F \frac{l}{x} + \frac{H}{l} \right) B \right. \\ &\quad \left. \frac{Fl}{Ha} + \frac{x}{l} \left\{ \left(\frac{l^2}{l^2-y^2} \right)^2 + \frac{y^2}{x^2} \frac{b}{a} + \frac{1}{a} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{Fl}{x} b \right\} \delta y - F \frac{y}{x} \left\{ \left(\frac{xl}{l^2-y^2} \right)^2 + \frac{b}{a} \right\} \delta l_t \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

のように、柔ケーブル部材としての接線剛性方程式が得られることになる。なお、ここで、

$$F = \frac{EA}{l_0} \dots\dots\dots(25)$$

$$B = \left(\frac{xy}{l^2-y^2} \right)^2 + b^2 \dots\dots\dots(26)$$

である。式 (18), (20), (22) よりの接線剛性方程式の定式化には、種々の変換方法が考えられるが、ここでの式 (23), (24) は柔ケーブル材の両端が完全に鉛直線上にある場合を除いて、サグの大きい、きわめて弛緩した状態から、直線軸力部材と等価な挙動を示すような極度の緊張状態まで、有効数字の桁落ちによる精度の劣化を生じることなく使用できるものである。

いま、直線軸力部材となる極限状態を考えると、 $\psi = wx/2H$ において、自重 w が 0 となるものとすれば、

$$\psi \rightarrow 0, \quad \frac{1}{a} \rightarrow 0, \quad b \rightarrow 1, \quad B \rightarrow \frac{l^2}{x^2}$$

となるので、式 (23), (24) は、

$$\delta H = \left(F \frac{x^2}{l^2} + \frac{H}{x} \frac{y^2}{l^2} \right) \delta x$$

$$+ \left(F - \frac{H}{x} \right) \frac{xy}{l^2} \delta y - F \frac{x}{l} \delta l_t \dots\dots\dots(27)$$

$$\begin{aligned} \delta V &= \left(F - \frac{H}{x} \right) \frac{xy}{l^2} \delta x \\ &\quad + \left(F \frac{y^2}{l^2} + \frac{H}{x} \frac{x^2}{l^2} \right) \delta y - F \frac{y}{l} \delta l_t \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

となるが、これは、軸方向力を受ける直線材の有限変位理論における接線剛性方程式にほかならない。

4. 柔ケーブル部材の弦方向接線剛性係数

柔ケーブル部材は、長さに対しサグが小さくなれば、急激に直線軸力部材の挙動に近づき、また、サグが大きくなり、弛緩した場合には、EA にほとんど無関係に、その形状変化のみで外力に抵抗する。

ここでは、その弦長変化と弦方向材端力の微小増分との関係を求め、柔ケーブルのサグによる接線剛性係数の低下の状態を明らかにするとともに若干の考察を加えることにする。

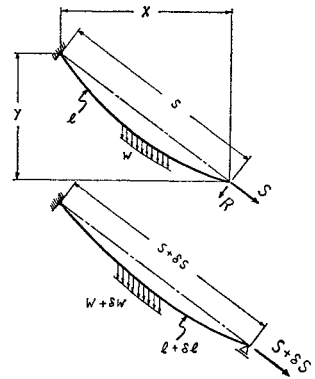


図-3

いま、温度変化がない場合を考えて、式 (23), (24) を

$$\begin{bmatrix} \delta H \\ \delta V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_H & k \\ k & k_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \dots\dots\dots(29)$$

のように表わせば、図-3 の材端力 S, R の微小増分 $\delta S, \delta R$ は、

$$\begin{bmatrix} \delta S \\ \delta R \end{bmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_H & k \\ k & k_V \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta s \\ \delta r \end{bmatrix} \dots\dots\dots(30)$$

のように表わすことができる。ここで、 δs は弦方向の、 δr は弦と直角方向の微小変位である。したがって、図-3 の δS と δs との関係は

$$\delta S = K \delta s \dots\dots\dots(31)$$

のように表わせば、

$$K = \frac{x^2 k_H + 2xyk + y^2 k_V}{x^2 + y^2} \dots\dots\dots(32)$$

であり、式 (23), (24) の剛性係数を代入し整理すれば、

$$K = \frac{Fl^2 H}{x^2 + y^2} \left\{ \left(\frac{l^2}{l^2 - y^2} \right)^2 + \frac{by^2}{ax^2} + \frac{1}{a} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

が得られる。サグが l に比べ無限小の場合には、式 (33)

は、軸力部材としての伸び刚度 F に等しくなり、この場合を

$$K_0 = F \dots\dots\dots(34)$$

とおく。また、サグが大きくなれば、式 (33) は、 EA に無関係な $F \rightarrow \infty$ とした挙動に近づく。このときの K を K_c とおけば、

$$K_c = \frac{Hax}{x^2 + y^2} \left\{ \left(\frac{l^2}{l^2 - y^2} \right)^2 + \frac{b}{a} \frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{a} \right\} \dots(35)$$

となる。したがって、弦方向接線剛性係数 K を両極限の状態 K_0, K_c で表わせば、

$$K = \frac{K_0 K_c}{K_0 + \frac{x^2 + y^2}{l^2} K_c} \dots\dots\dots(36)$$

となる。ここで、両極限状態との比を

$$k_0 = \frac{K}{K_0} \dots\dots\dots(37)$$

$$k_c = \frac{K}{K_c} \dots\dots\dots(38)$$

とおけば、 k_0, k_c は、 $1 > k_0 > 0, 0 < k_c < 1$ の変化領域を持つことになる。 k_0 は、直線材に対しての近似度を表わすパラメーターであり、

$$\delta S = \frac{E^* A}{l_0} \delta s \dots\dots\dots(39)$$

とおいたとき、

$$E^* = k_0 E \dots\dots\dots(40)$$

となり、換算弾性係数比を表わすことにもなる。

また、 k_c は、ケーブルの弾性伸びを無視した柔ケーブルとしての挙動との近似度を表わすパラメーターであり、 ψ が大きくなれば 1 に近づく。

いま、ケーブルの比重を ρ とし、 $l_0 \equiv l$ とおけば、

$$\nu \equiv \frac{K_c}{K_0} = \frac{\rho l}{2 E \psi} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \left\{ \left(\frac{l^2}{l^2 - y^2} \right)^2 a + b \frac{y^2}{x^2} + 1 \right\} \dots\dots\dots(41)$$

$$k_0 = \frac{\nu}{1 + \frac{x^2 + y^2}{l^2} \nu} \dots\dots\dots(42)$$

$$k_c = \frac{1}{1 + \frac{x^2 + y^2}{l^2} \nu} \dots\dots\dots(43)$$

となる。ここで、最も簡単で比較的精度のよい k_0, k_c の近似式は、

$$k_0^* = \frac{\nu^*}{1 + \nu^*}, \quad k_c^* = \frac{1}{1 + \nu^*} \dots\dots\dots(44)$$

$$\nu^* = \frac{3 \rho l (1 + r^2)}{2 E \psi^3}, \quad r = \frac{y}{x} \dots\dots\dots(45)$$

のように表わすことができる。これを用いて、

$$\rho = 7.85 \text{ t/m}^3, \quad E = 2 \times 10^7 \text{ t/m}^2$$

$$r = 1 \text{ (弦が水平に対し } 45^\circ)$$

$$l = 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 \text{ m}$$

の各場合について、直線軸力部材に対する近似度が 95%、したがって、 $k_0^* = 0.95, k_c^* = 0.05$ となる ψ および f/l の値を求め、これより逆に式 (48), (49) の厳密式より k_0, k_c を計算したものが表-1 である。

すなわち、 k_0, k_c は 0.95, 0.05 にきわめて近いことがわかる。次に、 ρ, E を前記と同値とし、 $l = 160 \text{ m}, r = 0$ (弦が水平)、および $r = 1$ の場合について、

$$\psi = 4, 2, 1, 1/2, 1/4, \dots, 1/512$$

に対する k_0, k_c の近似値と厳密値の比較を表-2, 3 に示す。

以上の結果より、式 (50) の近似式は、実用上十分な精度を有していることがわかる。

また、次の図-4 は、 $r = 1$ の場合の $l = 10, 20, \dots, 1280$ に対する厳密式を用いた k_0, k_c のグラフを示したものであるが、近似式を用いても図では差が表われない。

表-1 $k_0^* = 0.95, k_c^* = 0.05$

l	ψ	f/l	k_0	k_c
10	0.008523	0.00213	0.950057	0.049954
20	0.010739	0.00268	0.950054	0.049963
40	0.013530	0.00338	0.950067	0.049961
80	0.017047	0.00426	0.950080	0.049965
160	0.021478	0.00537	0.950104	0.049968
320	0.027060	0.00676	0.950147	0.049968
640	0.034117	0.00853	0.950112	0.050072
1280	0.042955	0.01074	0.950309	0.049982

表-2 $r = 0$

$1/\psi$	k_0^*	k_0	k_c^*	k_c
0.25	0.000001	0.000010	0.999999	1.000000
0.5	0.000012	0.000030	0.999988	0.999991
1	0.000094	0.000132	0.999906	0.999905
2	0.000753	0.000828	0.999247	0.999237
4	0.005993	0.006142	0.994007	0.993984
8	0.046011	0.046297	0.953989	0.953944
16	0.278418	0.278832	0.721582	0.721530
32	0.755307	0.755564	0.244692	0.244682
64	0.961080	0.961159	0.038920	0.038919
128	0.994964	0.994984	0.005037	0.005037
256	0.999368	0.999372	0.000632	0.000633
512	0.999921	0.999921	0.000079	0.000079

表-3 $r = 1$

$1/\psi$	k_0^*	k_0	k_c^*	k_c
0.25	0.000003	0.000021	0.999997	0.999999
0.5	0.000024	0.000037	0.999976	0.999983
1	0.000188	0.000185	0.999812	0.999844
2	0.001505	0.001476	0.998495	0.998585
4	0.011914	0.011846	0.988086	0.988277
8	0.087975	0.087871	0.912025	0.912357
16	0.435566	0.435594	0.564434	0.564690
32	0.860598	0.860707	0.139402	0.139433
64	0.980154	0.980192	0.019846	0.019847
128	0.997475	0.997485	0.002525	0.002525
256	0.999684	0.999686	0.000316	0.000316
512	0.999960	0.999961	0.000040	0.000040

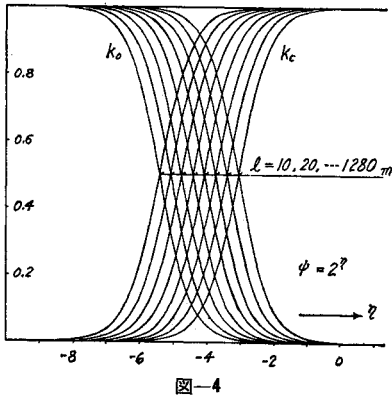


図-4

これを見ると、横軸に ψ を対数目盛にとった場合、各 l に対する k_0, k_c の曲線は相似となり、 l が等比で変化した場合には、等間隔での平行移動を示している。

すなわち、 k_0, k_c のグラフは、横軸に $\ln \psi^3$ をとった場合、近似式の性質より、

$$\mu = \frac{3(1+r^2)\rho l}{2E} \dots\dots\dots(46)$$

とおいて、次の図-5のような性状の曲線で表わし得ることがわかる。なお、 $k=0.5$ における接線の式は、

$$k = \frac{2 + \ln \mu - 3 \ln \psi}{4} \dots\dots\dots(47)$$

である。

ここで、パラメーター k_0 の近似式より Ernst¹⁾ の修正弾性係数の式が導かれることを示そう。Ernst の修正弾性係数 E_i は、

$$E_i = \frac{\sigma}{\epsilon_e + \epsilon_f} \dots\dots\dots(48)$$

と表わされる。ここで、 σ はケーブルの応力、 ϵ_e は σ による弾性ひずみ、 ϵ_f は形状変化による見かけのひずみである。これを本文の記号を用いて表わせば、

$$E_i = \frac{E}{1 + \frac{\rho^2 x^2}{12 \sigma^3} E} \dots\dots\dots(49)$$

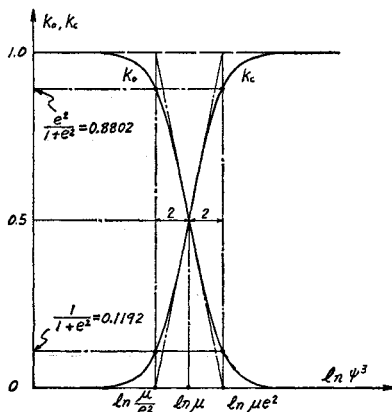


図-5

となる。この E_i は、式 (40) の E^* の近似式であると考えることができ、事実、式 (40)、(44) より、

$$E^* \doteq \frac{E}{1 + 1/\nu^*} = \frac{E}{1 + \frac{2E\psi^3}{3\rho l(1+r^2)}} \dots\dots\dots(50)$$

となり、サグが小さく、ケーブル張力を弦方向に一定と見なして、

$$H \doteq \sigma A \frac{x}{s} \dots\dots\dots(51)$$

$$\psi = \frac{wx}{2H} \doteq \frac{\rho s}{2\sigma} \dots\dots\dots(52)$$

および、 $1+r^2 = s^2/x^2$ を式 (50) に代入すれば、

$$E^* \doteq \frac{E}{1 + \frac{\rho^2 x^2}{12 \sigma^3} \frac{s}{l} E} \dots\dots\dots(53)$$

すなわち、さらに弦長と曲線長が近似的に等しい ($l \doteq s$) とすれば、 E_i と E^* が一致することになる。

5. パラメーター ψ の決定

本文で用いられているパラメーター ψ は、カテナリケーブルとしての特性を表わす、きわめて重要なファクターである。

柔ケーブル部材の初期状態の算出の際、また、接線剛性法の反復過程における不平衡力の算出の際など、柔ケーブルとしての既知の主要諸元より ψ を求めるという問題が生じる。以下に、そのいくつかの場合についての説明と考察を述べる。

a) ケーブル長 l と弦中央よりのサグ f が与えられている場合

前述より明らかのように、

$$\psi = 2 \operatorname{th}^{-1} \frac{2f}{l} = \ln \frac{l+2f}{l-2f} \dots\dots\dots(54)$$

を用いる。

b) ケーブル長 l と水平および垂直支間 x, y が与えられている場合

式 (4) より、

$$s^2 = x^2 + y^2 \dots\dots\dots(55)$$

$$\epsilon^2 = \frac{l^2 - s^2}{x^2} \dots\dots\dots(56)$$

とおいて、

$$\frac{\operatorname{sh}^2 \psi}{\psi^2} = 1 + \epsilon^2 \dots\dots\dots(57)$$

が得られるので、この式に Newton-Raphson 法を適用して ψ を求めることができる。 ϵ^2 が小さい場合には、

$$\psi^2 = 3\epsilon^2 \left(1 - \frac{2}{5}\epsilon^2 + \frac{41}{175}\epsilon^4 - \frac{4}{25}\epsilon^6 + \frac{3671}{30625}\epsilon^8 - \frac{186918}{1990625}\epsilon^{10} + \dots \right) \dots\dots(58)$$

を利用することができるが、適用範囲が大きく、さらに簡単な近似式としては、

$$\tau = \ln(1 + \epsilon^2) = \ln \frac{l^2 - y^2}{x^2} \dots\dots\dots (59)$$

とにおいて、

$$\psi = \sqrt{\frac{3}{10} \tau (\tau + 10)} \dots\dots\dots (60)$$

が便利である。これは原点を通る双曲線を表わす式であるが、 ψ^2 の τ に関する級数展開式、

$$\psi^2 = 3\tau + \frac{3}{10}\tau^2 + \frac{1}{350}\tau^3 - \frac{1}{1400}\tau^4 + \frac{169}{2695000}\tau^5 + \frac{463}{1051050000}\tau^6 + \dots\dots\dots (61)$$

の第3項以下を省略したものであり、 τ のすべての変化領域に対してきわめて良好な近似性を持ち、 ψ が1以下では厳密値に近く、また、 ψ が5以上に対しては、原式(61) ($\psi < \pi$ が収束限界) よりも精度はかえって高くなる。なお、 $\psi = 8$ ($\tau = 10.45482233$) 程度まで高精度で利用できるものとしては、式(61)の第6項を多少変更した

$$\psi^2 = \tau \left(3 + \frac{\tau}{10} \left(3 + \frac{\tau}{35} \left(1 - \frac{\tau}{4} \left(1 - \frac{\tau}{1925} \left(169 + \frac{73}{13} \tau \right) \right) \right) \right) \right) \dots\dots\dots (62)$$

が便利である。これは、 ψ が10を越せば式(60)より精度は悪化するが、 ψ が8以下であれば、そのまま厳密値としての使用に耐えるものである。

ψ が8, 10ということは、

$$\frac{l^2 - y^2}{x^2} = 1 + \epsilon^2 = 34711.361, 1212912.985$$

であり、ケーブルが鉛直に二重の直線状となる極限の状態では、サグ・ケーブル長比が0.5となるのに対し、それぞれ0.499665, 0.4999955となり、また、弦が水平な場合には、ケーブル長が弦の186.307, 1101.323倍にも達する状態なので、実用的な適用範囲としては十分であると考えられる。

図-6の状態のケーブルにおいて、 $l=51\sim 55, 60$ mとしたときの式(58), (60), (62)の値と真値を比較してみると表-4のようになる。

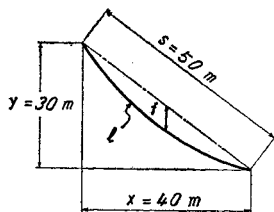


図-6

すなわち、式(62)では、誤差はまったく表われないと考えてよく、また、 $l=55$ m以上では、式(58)より(60)の方が精度はよくなる。

表-4

l	ϵ^2	f	$\psi, \psi(62)$	$\psi(58)$	$\psi(60)$
51	0.063125	5.3976	0.42984043	0.42984043	0.42983968
52	0.127500	7.6169	0.60360034	0.60360032	0.60359636
53	0.193125	9.3139	0.73423190	0.73423106	0.73422168
54	0.260000	10.7427	0.84225425	0.8422471	0.8422345
55	0.328125	12.0026	0.93569364	0.9356593	0.9356612
60	0.687500	17.0020	1.28539457	1.2813898	1.2852552

表-5

ψ	τ	$\psi(62)$	$\psi(60)$	f/l	$f/l(62)$ or (60)
1	0.322878722	1.00000000	0.9999557	0.23105858	0.23105858
2	1.190440384	1.99999880	1.9991162	0.38079708	0.38079695
3	2.411517403	2.99996559	2.9965275	0.45257413	0.45257257
4	3.840445878	3.99977546	3.9932499	0.48201379	0.48200982
5	5.394739011	4.99939396	4.9915108	0.49330715	0.49330312
6	7.030174411	5.99923380	5.9931235	0.49752738	0.49752549
7	8.721883676	6.99978901	6.9907733	0.49908895	0.49908876
8	10.45482233	7.99990443	8.0097104	0.49966465	0.49966462
9	12.21925645	8.99368948	9.0250118	0.49987661	0.49987582
10	14.00853545	9.96632508	10.0447661	0.49995460	0.49995304
11	15.81791509	10.88884555	11.068680	0.49998330	0.49998440
12	17.64389234	11.71146176	12.0096436	0.49999386	0.49999442
13	19.48380692	12.35391513	13.127720	0.49999773	0.49999801
14	21.33559098	12.68881819	14.162239	0.49999917	0.49999929
15	23.19760523	12.50635488	15.199720	0.49999969	0.49999975

表-5は、 ψ が非常に大きい場合の式(60), (62)の精度を見るため、 $\psi=1\sim 15$ に対応する τ を求め、その τ を用いて式(60), (62)より逆に ψ の近似値を算出してみたものである。

これを見ると τ が14以下では式(62)、それ以上では、式(60)の方が精度がよい。誤差が大きくなる $\psi > 8$ の場合でも形状に関する相対誤差(f/l の比較)は、最大で3/1000000程度であり、これは、さらに ψ が増大すればかえって減少し、また、きわめて弛緩した状態なので反力自体に及ぼす誤差もさらに微小となるので、事実上式(60), (62)ですべての状態をカバーできるといえる。

e) サグ比 $n=f/x$ および弦の勾配 $r=y/x$ が与えられている場合

式(4), (5)より、

$$4n^2 = \left(r^2 + \frac{\text{sh}^2 \psi}{\psi^2} \right) \text{th}^2 \frac{\psi}{2} \dots\dots\dots (63)$$

が得られるので、これより ψ を求めることができる。

また、 n が小さい場合には、

$$\psi^2 = \frac{16n^2}{1+r^2} \left\{ 1 - \frac{8(1-r^2)}{3(1+r^2)^2} n^2 + \frac{16(1-r^2)(13-19r^2)}{15(1+r^2)^4} n^4 - \frac{256(341-1363r^2+1207r^4-337r^6)}{945(1+r^2)^6} n^6 + \dots \right\} \dots\dots\dots (64)$$

を利用することができる。前と同様、 $x=40$ m, $y=30$ m

表-6

f	n	$\psi(64)$	ψ	l(64)	l
0.8	0.02	0.06399388	0.06399387	50.021844	50.021848
1.6	0.04	0.12795107	0.12795085	50.087343	50.087429
2.4	0.06	0.1918349	0.1918332	50.196406	50.196844
3.2	0.08	0.2556088	0.2556017	50.348879	50.350261
4	0.10	0.3192363	0.3192148	50.5445	50.5480
8	0.20	0.633949	0.633283	52.1565	52.2079
12	0.30	0.940332	0.935503	54.7529	54.9978
16	0.40	1.238043	1.218331	58.1346	58.8734
20	0.50	1.537195	1.476064	61.9086	63.6989

とし、 $f=0.8\sim 4\sim 20$ m に対する式 (64) による近似値と真値との比較を表-6 に示す。

d) 無応力ケーブル長 l_0 、水平および垂直支間 x, y 無応力時の単位長自重 w_0 、伸び剛性 EA が与えられている場合

この場合は、接線剛性法の反復過程において、先行状態の接線剛性マトリックスを用いて得られた変位増分をもとに、修正された水平、垂直支間より新しい平衡状態を求める。すなわち、接線剛性法の不平衡力算出の際に必要なものである。この場合の ψ の算定には、

$$l = l_0 + \Delta l_e \dots\dots\dots (65)$$

$$\frac{\text{sh}^2 \psi}{\psi^2} = \frac{l^2 - y^2}{x^2} \dots\dots\dots (66)$$

$$\Delta l_e = \frac{w_0 x^2}{4 EA \psi} \frac{l_0^2}{l^2} \left(1 + \frac{l^2 + y^2}{x^2} \psi \text{cth} \psi \right) \dots\dots (67)$$

が必要である。無応力長 l_0 が弦長 s に比べて大きい場合には、一般に弾性伸び Δl_e は微小であり、 $l=l_0$ として、b) で示した方法で ψ を求め、式 (67) による Δl_e で l を補正するという手順を用いればよい。

サグが小さく、きわめて緊張した状態では、弾性伸びは ψ の大きさを左右する重要な因子となり、前記の方法での ψ の初期値は実用的でなくなる場合があり、特に弦長 s より無応力長 l_0 が小さい場合にはまったく適用できなくなる。

ここでは、 $s > l_0$ となる直線に近い状態では、厳密値として利用でき、 $s < l_0$ の場合には Newton-Raphson 法の初期値として用いるのに便利な ψ に関する近似式を求めてみることにする。式 (58)、(67) より、

$$\psi \Delta l_e \doteq \frac{w_0 l_0^2}{4 EA} \frac{x^2}{l^2} \left\{ 1 + \frac{l^2 + y^2}{x^2} \left(1 + \frac{\psi^2}{3} \right) \right\} \dots\dots (68)$$

式 (66)、または式 (4) より、

$$l^2 \doteq s^2 + \frac{x^2 \psi^2}{3} \dots\dots\dots (69)$$

$$\therefore \psi \Delta l_e \left(s^2 + \frac{x^2 \psi^2}{3} \right) = \frac{w_0 l_0^2 s^2}{2 EA} \left(1 + \frac{\psi^2}{3} \right) \dots\dots (70)$$

また、

$$\Delta l_e = l - l_0 \doteq \frac{x^2 \psi^2}{6 s} - l_0 + s \dots\dots\dots (71)$$

これより、

$$\frac{x^2}{6 s^2} (3s - 2l_0) \psi^3 - \frac{w_0 l_0^2}{6 EA} \psi^2 - (l_0 - s) \psi - \frac{w_0 l_0^2}{2 EA} = 0 \dots\dots\dots (72)$$

という ψ に関する 3 次方程式が得られる。しかしながら、実際には、第 1 項の $3s - 2l_0$ を s とおき、第 2 項を省略して得られる次式を用いた方が精度的に有利なようである。

$$\psi^3 - \frac{6s(l_0 - s)}{x^2} \psi - \frac{3w_0 l_0^2 s}{EA x^2} = 0 \dots\dots\dots (73)$$

図-7 に、この式より求めた ψ を初期値として式 (65) ~ (67) による Newton-Raphson 法の流れ図を示す。

この手順に従い、図-6 のケーブルについて、 $w_0=1$ t/m、 $EA=2550000$ t とし ψ の収束誤差を 1/100000 以下とした場合の各 l_0 の値に対する計算結果を表-7 に示すことにする。なお、 $\psi(73)$ は、式 (73) の解で Newton-Raphson 法の初期値となったものである。

すなわち、 l_0 が弦長 50 m 以下の場合には、式 (73)

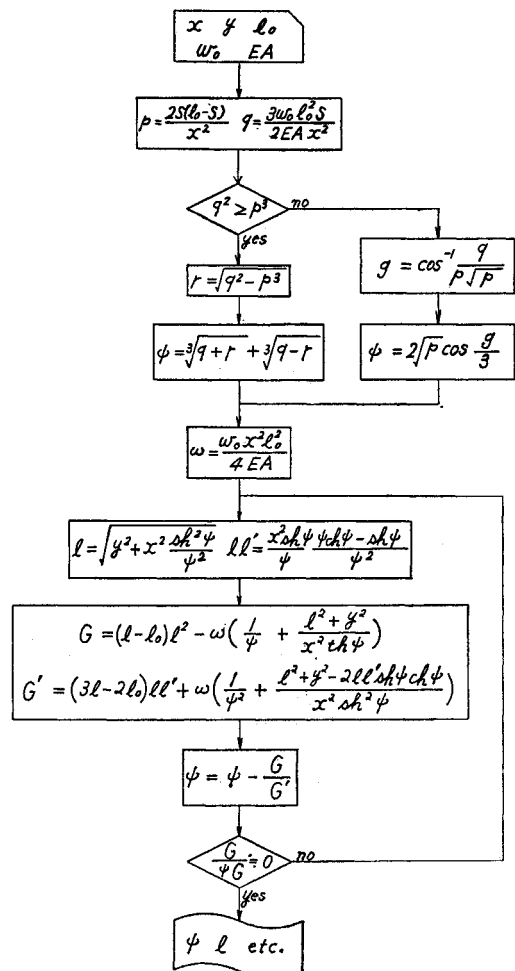


図-7

表-7

l_0	$\psi(73)$	ψ	Δl_e	H	f	回数
47	0.00014437	0.00014437	3.000000	130 212.75	0.00180	1
48	0.00022588	0.00022588	2.000000	84 999.99	0.00282	1
49	0.00047078	0.00047078	1.000001	41 632.69	0.00588	1
49.5	0.00096087	0.00096087	0.500005	20 606.25	0.01201	1
49.9	0.00487618	0.00487620	0.100127	4 093.34	0.06095	1
50	0.04513310	0.04513037	0.010864	443.06	0.56416	2
52	0.6125049	0.6037345	0.000914	33.13	7.61867	3
54	0.8660969	0.8423272	0.000731	27.74	10.74372	3
56	1.0607114	1.0187564	0.000668	19.63	13.14505	3
58	1.2247861	1.1625760	0.000644	17.20	15.18460	4
60	1.3693417	1.2854311	0.000636	15.56	17.00255	4
70	1.9365156	1.7327926	0.000696	11.54	24.4841	4
80	2.3717292	2.0409795	0.000817	9.80	30.8030	5
90	2.7386326	2.2798122	0.000970	8.77	36.6476	5
100	3.0618818	2.4760555	0.001147	8.08	42.2451	6

の解をそのまま厳密値として用いてもよく、50 m 以上の場合でも収束は良好である。もちろん、 l_0 が 51 m 以上の場合には、 $l=l_0$ として、b) の式 (62) または (60) より ψ を求め、式 (67)、(65) より l を補正するという方法を用いれば計算量は、はるかに少なくてすむことになる。

6. 簡単な計算例

自重が 1 t/m、伸び剛性が $EA=2\ 550\ 000$ t となる、図-8 のような初期状態 ($\Delta P=0$) の柔ケーブルについて、3. の式 (23)、(24) の接線剛性方程式および図-7 を用いた不平衡力算出過程を使用した接線剛性法による変形、断面力の計算を行った。

荷重は、初期状態におけるケーブル中央点に上向き、 45° 方向を正とする。

図-9 は、 $\Delta P=20, 40, 60, 80$ t としたときのケーブルの変形状態の図であり、表-8 は、初期状態からそれぞれ $\Delta P=20, 40, 60, 80$ t としたときの反復回数と不平衡力の減小の状況を示したものである。

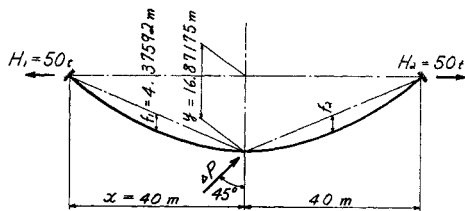


図-8

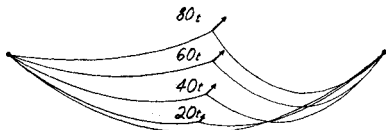


図-9

表-8

荷重 ΔP	20 t	40 t	60 t	80 t
反復回数	5	6	7	12
1	20.000000	40.000000	60.000000	80.000000
2	7.377280	20.872290	36.329287	52.625236
3	1.211568	5.071732	14.025310	81 153.165377
4	0.031152	0.420145	5.134252	544.718438
5	0.000021	0.005367	0.508689	271.793335
6	—	0.000000	0.005455	139.668351
7	—	—	0.000000	66.409641
8	—	—	—	26.293369
9	—	—	—	6.949348
10	—	—	—	0.724180
11	—	—	—	0.009356
12	—	—	—	0.000001

すなわち、荷重増分として初期状態にいきなり 80 t をケーブルをゆるめる方向へ載荷した場合でも、いったん収束が始まれば、不平衡力は急速に 0 に近づく。

このことは、不平衡力の算出と接線剛性係数がいずれも仮定に忠実な厳密値として考えられていることが大きく寄与しているもので、接線剛性係数が近似的な場合、あるいは不平衡力の精度と理論的なくい違いを有している場合など、ある程度の精度までは解が収束しても、それ以上は解が真値の近傍で振動して収束が悪化する場合があります。

図-10 は、計算結果による載荷点の変位 Δx 、 Δy 、載荷点の左右のケーブルのサグ Δf_1 、 Δf_2 の変化を図示し

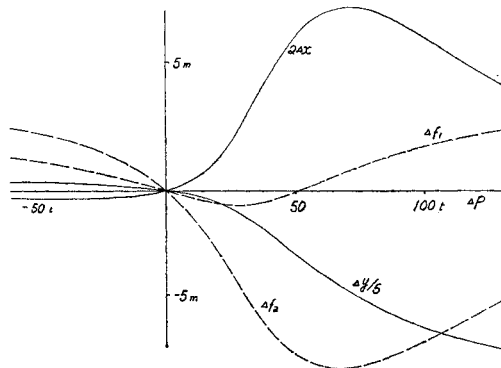


図-10

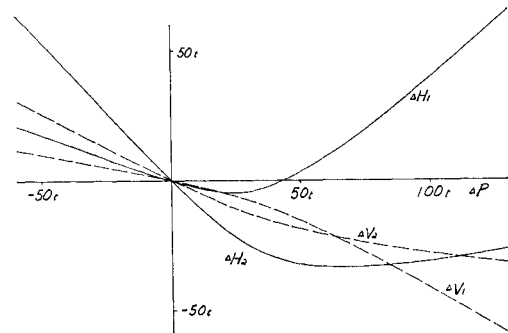


図-11

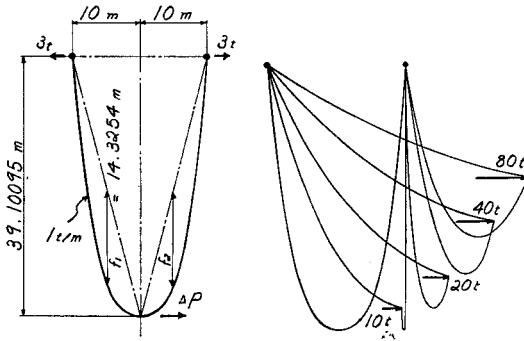


図-12

図-13

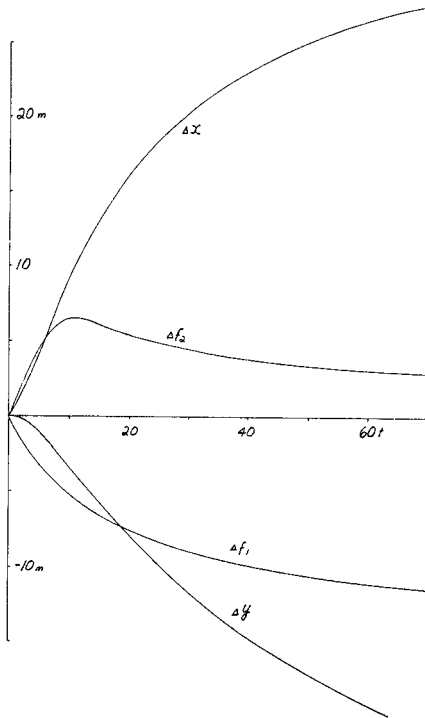


図-14

たもので、また、図-11は、同じく載荷点左右の水平力、垂直力の増分の変化を図示したものである。

次に、図-12のような初期状態のケーブルの中央点に水平荷重が作用したときの挙動を計算してみた。

水平荷重を $\Delta P=10, 20, 40, 80 \text{ t}$ としたときのケーブルの変形状態を図-13に示す。

この場合、 ΔP が 10 t と 12 t の間で載荷点が右支点を通る鉛直線上を通過することになるが、解は4回の反復回数で完全に収束し、演算上の支障はまったく生じなかった。なお、 ψ 、不平衡力の合力に関する相対許容誤差（不平衡力に対しては最大ケーブル張力に対する）は、前計算例とも $1/1\,000\,000$ としている。

また、図-14は、載荷点の変位とサグの変化の状態を図示したものである。

7. 結 言

本文は、弾性伸びの不均一性に起因する長さ方向の自重分布の変化を無視し得る曲げ剛性のない柔ケーブル部材の厳密な接線剛性方程式を明示し、また、弦方向接線剛性係数に関して直線材との比較考察、さらに柔ケーブルとしての特性を決定する無次元パラメーター ψ の種々の算出法に言及し、最後に接線剛性法により簡単な柔ケーブル構造の数値計算を示し、ここで誘導された接線剛性係数が、弛緩した状態から極度の緊張状態までの大変形挙動解析に十分に適用できることを実証したものである。

この接線剛性係数を用いることにより、柔ケーブルを含む構造物の大変形解析は、そのサグの大小にかかわらず柔ケーブル特性を忠実に考慮した値が良好な収束性のもとに得られることになる。

参 考 文 献

- 1) Ernst, H.J.: Der E-Modul von Seilen unter Berücksichtigung des Durchhanges, Bauingenieur, Heft 2, 1965.
- 2) 後藤・大西・大槻・新村: 非線形有限変形法 (大変形法) によるトラスの大変形解析とその応用プログラム, 土木学会論文報告集, No. 194, 1971.
- 3) 後藤, 羽根・田中: 接線剛性法による骨組構造物の大変形解析, 土木学会論文報告集, No. 238, 1975.
- 4) 前田・林・前田: サグを考慮したケーブル部材の計算式, 土木学会論文報告集, No. 257, 1977.
- 5) 後藤茂夫: 柔ケーブル部材を有する構造物の解析, 橋梁, Vol. 13, No. 2, 1977.

(1977.6.13・受付)