

【ノート】

多次元確率過程のシミュレーション理論の
物理的意味について

PHYSICAL INTERPRETATION OF SIMULATION METHOD OF
MULTI-DIMENSIONAL RANDOM PROCESSES

星 谷 勝*
By Masaru HOSHIYA

1. 要 旨

筆者は先に土木学会論文報告集第 253 号で多次元非常確率過程の相互スペクトルを提案し、それを満足する多次元非常確率過程のシミュレーション法を導き、地震動解析への応用について論じた¹⁾。その後、理論の基礎となった数学モデルを検討した結果、その物理的意味を明らかにすることができたので、定常過程の場合もあわせて整理し、ここに報告する。理論を整理するに際し、本論は C.J. Dodds と J.D. Robson²⁾ および J.S. Bendat^{3),4)} の周波数領域における多入出力系理論の最近の成果から多くの示唆を得てまとめたものである。

なお、本論で明確にされた多次元確率過程の理論構成は地震波動特性や地盤の伝達関数の解明などの基礎となりうるものである。

2. 定常確率過程の検討

非常確率過程 $x_i(t) : i=1, 2, \dots, m$ の場合には、時間 t を中心としたウィンドウ関数を用いて $x_i(t)$ を取り出すことにより区間擬定常確率過程を作り出すことができるという前提でシミュレーション理論を開発したものである¹⁾。その意味から、初めに定常過程のシミュレーション理論の物理的意味を検討し、その結果を踏まえて非常過程へ拡張して解釈することにする。

シミュレーション法は次のようにまとめられる。

相互相関関数を

$$R_{ij}(\tau) = E[x_i(t+\tau)x_j(t)] : i \leq j \dots\dots(1)$$

で定義し、相互スペクトルを

$$S_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau : \\ i \leq j, -\infty < \omega < \infty \\ \dots\dots(2)$$

で与えるとき、 $R_{ij}(\tau)$ または $S_{ij}(\omega)$ を満足する多次元定常確率過程（平均値 0）は次式を用いてシミュレートできる。

$$x_i(t) = \sum_{p=1}^i \sum_{k=1}^N |H_{ip}(\omega_k)| \cos \\ \times \{\omega_k t + \theta_{ip}(\omega_k) + \varphi_{pk}\} : i=1, 2, \dots, m \\ \dots\dots(3)$$

ただし、右辺の $|H_{ip}(\omega)|$, $\theta_{ip}(\omega)$ は次式のように $S_{ij}(\omega)$ を分解して与えられるものとする。

$$S_{ij}(\omega) = \frac{1}{4\Delta\omega} \sum_{p=1}^i H_{ip}(\omega) H_{jp}^*(\omega) : i \leq j \\ \dots\dots(4)$$

$$H_{ip}(\omega) = |H_{ip}(\omega)| e^{i\theta_{ip}(\omega)} \dots\dots(5)$$

ω_k と $\Delta\omega$ は $S_{ij}(\omega)$ が有意パワーを有する正の ω 領域で上限値および下限値をそれぞれ ω_U , ω_L として、 $\omega_k = \omega_L + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta\omega$, $\Delta\omega = (\omega_U - \omega_L)/N$ で与えられるものとする。 N は十分大なる正整数。 φ_{pk} は 0 から 2π の範囲で一様乱数とし、 φ_{pk} と φ_{ql} は $p \neq q, k \neq l$ のとき互いに独立とする。以上は多次元定常確率過程のシミュレーション法の概要であり、これを用いた応用例^{5),6)}もあるが、本論では相互相関関数を式 (1) 右辺のように i 番目プロセス ($i \leq j$) に時間差 τ を与えるものとして定義し、非常過程の相互スペクトルの定義¹⁾ と対応できるようにした。一般には $R_{ij}(\tau) = E[x_i(t)x_j(t+\tau)]$ と定義される場合⁵⁾ が多いが、そのときには式 (4) の複素共やく (* 印) の位置が入れかわり $S_{ij}(\omega) = \frac{1}{4\Delta\omega} \times \sum_{p=1}^i H_{ip}^*(\omega) H_{jp}(\omega)$ となる。

さて、式 (3) の物理的意味を考えるために次のように分解してみる。

$$a_p(t) = \sum_{k=1}^N \cos(\omega_k t + \varphi_{pk}) \dots\dots(6)$$

$$x_{ip}(t) = \sum_{k=1}^N |H_{ip}(\omega_k)| \cos\{\omega_k t + \theta_{ip}(\omega_k) + \varphi_{pk}\} \\ \dots\dots(7)$$

* 正会員 Ph.D. 武蔵工業大学助教授 工学部土木工学科

$$x_i(t) = \sum_{p=1}^i x_{ip}(t) \dots \dots \dots (8)$$

式(6)は $-\omega_U \leq \omega \leq -\omega_L$ および $\omega_L \leq \omega \leq \omega_U$ の範囲でパワースペクトル $S_{a_{pp}}(\omega)$ が一定 $(= \frac{1}{4 \Delta \omega})$ の有帯域ホワイトノイズである。式(7)はフィルター $H_{ip}(\omega)$ に式(6)の $a_p(t)$ を入力させたときの定常出力となっている。式(8)は式(7)の定常出力を $p=1$ から i まで加算したものである。したがって、式(6)~(8)の関係を示せば図-1のようになる。

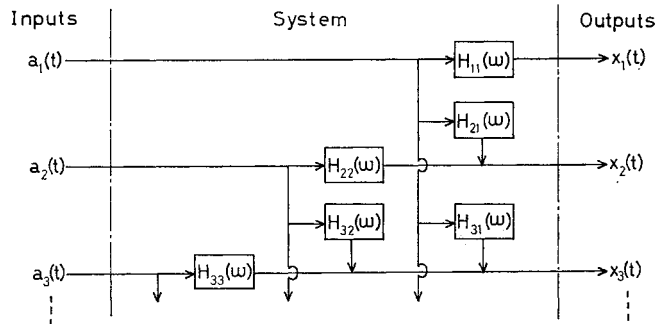


図-1

図-1 から多次元定常確率過程 $x_i(t)$ のシミュレーション理論に対しては次のような物理的意味および解釈がなされる。

- (1) 互いに独立な有帯域ホワイトノイズ $a_p(t)$ をシステム $H_{ip}(\omega)$ に入力して互いに相関を有する定常出力 $x_i(t)$ を抽出したもの。
- (2) 別の表現をすれば、 $x_{i-1}(t)$ と共有するエネルギーをもつ確率過程にそれとは独立の新たなエネルギー

$|H_{ii}(\omega)|^2 \frac{1}{4 \Delta \omega}$ をもつ確率過程を加えることにより $x_i(t)$ を作り出したもの。したがって、 $x_1(t)$ 以降は $i=2$ から m まで次々に独立なエネルギーをもつ確率過程を加えてやることによって m 次元確率過程のシミュレーションが可能となる。このことは式(4)または図-1を参照して定常出力 $x_i(t)$ のパワースペクトルを次のように分解してみると明らかである。

たとえば、 $x_1(t)$ に対して、

$$S_{11}(\omega) = \frac{1}{4 \Delta \omega} \sum_{p=1}^1 |H_{1p}(\omega)|^2 S_{a_{11}}(\omega) \dots \dots \dots (9)$$

$x_2(t)$ に対して、

$$\begin{aligned} S_{22}(\omega) &= \frac{1}{4 \Delta \omega} \sum_{p=1}^2 |H_{2p}(\omega)|^2 S_{a_{pp}}(\omega) \\ &= \frac{\{H_{11}(\omega)H_{21}^*(\omega)S_{a_{11}}(\omega)\} \{H_{11}^*(\omega)H_{21}(\omega)S_{a_{11}}(\omega)\}}{\{|H_{11}(\omega)|^2 S_{a_{11}}(\omega)\} S_{22}(\omega)} S_{22}(\omega) + S_{22,1}(\omega) \\ &= \frac{S_{12}(\omega)S_{12}^*(\omega)}{S_{11}(\omega)S_{22}(\omega)} S_{22}(\omega) + S_{22,1}(\omega) = r_{12}^2(\omega) S_{22}(\omega) + S_{22,1}(\omega) \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

$x_3(t)$ に対して、

$$\begin{aligned} S_{33}(\omega) &= \frac{1}{4 \Delta \omega} \sum_{p=1}^3 |H_{3p}(\omega)|^2 S_{a_{pp}}(\omega) \\ &= \frac{\{H_{11}(\omega)H_{31}^*(\omega)S_{a_{11}}(\omega)\} \{H_{11}^*(\omega)H_{31}(\omega)S_{a_{11}}(\omega)\} S_{33}(\omega)}{\{|H_{11}(\omega)H_{11}^*(\omega)S_{a_{11}}(\omega)\} S_{33}(\omega)} \\ &\quad + \frac{\{H_{22}(\omega)H_{32}^*(\omega)S_{a_{22}}(\omega)\} \{H_{22}^*(\omega)H_{32}(\omega)S_{a_{22}}(\omega)\} S_{33,1}(\omega)}{\{|H_{22}(\omega)H_{22}^*(\omega)S_{a_{22}}(\omega)\} S_{33,1}(\omega)} + |H_{33}(\omega)|^2 S_{a_{33}}(\omega) \\ &= \frac{S_{13}(\omega)S_{13}^*(\omega)}{S_{11}(\omega)S_{33}(\omega)} S_{33}(\omega) + \frac{S_{23,1}(\omega)S_{23,1}^*(\omega)}{S_{22,1}(\omega)S_{33,1}(\omega)} S_{33,1}(\omega) + S_{33,12}(\omega) \\ &= r_{31}^2(\omega) S_{33}(\omega) + r_{23,1}^2(\omega) S_{33,1}(\omega) + S_{33,12}(\omega) \dots \dots \dots (11) \\ &= r_{13}^2(\omega) S_{33}(\omega) + S_{33,1}(\omega) \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

ここで、 $r_{ij}^2(\omega)$ はコヒーレンス関数である。式(10)は $x_1(t)$ と $x_2(t)$ に共通なエネルギー $r_{12}^2(\omega) S_{22}(\omega)$ に対して独立な新たなエネルギー $S_{22,1}(\omega)$ を加えたものである。 $S_{22,1}(\omega)$ は $x_2(t)$ のうちで $x_1(t)$ と完全相関する部分を除去した残りの成分 $x_{2,1}(t)$ のパワースペクトルを意味し残差パワースペクトルと称するものである²⁾。式(11)は $x_1(t)$ または $x_2(t)$ に対して共通な $x_3(t)$ のエネルギー(第1,2項)に対して独立な新たなエネルギー $S_{33,12}(\omega)$ を加えたものである。あるいは式

(12) から $x_1(t)$ と $x_3(t)$ に共通なエネルギー $r_{13}^2(\omega) S_{33}(\omega)$ に対して $x_1(t)$ のエネルギーと独立な新たなエネルギー $S_{33,1}(\omega)$ を加えたものといえる。なお、 $S_{33,12}(\omega)$ は $x_1(t)$ および $x_2(t)$ の影響を除去した $x_3(t)$ の残差パワースペクトルである。

(3) 伝達関数 $H_{ip}(\omega)$ とフーリエ変換で結ばれる単位応答関数を $h_{ip}(t); t \geq 0$ とすれば、

$$x_i(t) = \sum_{p=1}^i \int_{-\infty}^{\infty} h_{ip}(t-\xi) a_p(\xi) d\xi :$$

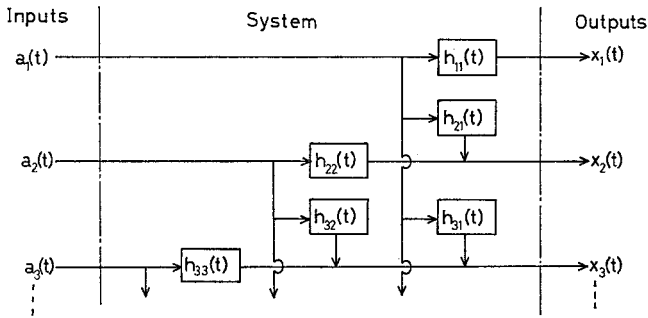


図-2

$$i=1, 2, \dots, m \dots\dots(13)$$

は相互スペクトルが式(4)の関係为满足し、式(3)のシミュレーション理論式と等価であることがわかる。

ただし、

$$\left. \begin{aligned} H_{ip}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{ip}(t) e^{-i\omega t} dt \\ h_{ip}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{ip}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

したがって、式(13)によるシミュレーション理論は図-2の流れ図で容易に理解することができる。

3. 非定常確率過程の検討

非定常の場合には相互スペクトル为满足する多次元過程は次に示すシミュレーションモデル式(16)を用いて作成する¹⁾。

$$\begin{aligned} \text{相互スペクトル: } S_{ij}(\omega, t; W) &= E \left[\frac{1}{2\pi} A_i A_j^* \right] \\ &: i \leq j, -\infty < \omega < \infty \dots\dots(15) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} A_i &= \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u) x_i(u) e^{-i\omega u} du \\ x_i(t) &= \sum_{p=1}^i \sum_{k=1}^N |H_{ip}(\omega_k, t)| \cos\{\omega_k t + \theta_{ip}(\omega_k, t) \\ &\quad + \varphi_{pk}\} : i=1, 2, \dots, m \dots\dots(16) \end{aligned}$$

式(16)を式(15)に代入し時間 t 周辺で $x_i(t)$ がほぼ定常という仮定を用いれば、

$$\begin{aligned} S_{ij}(\omega, t; W) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_{ip}(\omega, t) H_{jp}^*(\omega, t) \\ &\dots\dots(17) \end{aligned}$$

を得る。したがって、式(17)と式(4)、および式(16)と式(3)の対応性から、式(16)の物理的意味は定常確率過程の場合と同様である。図-1で $H_{ip}(\omega)$ の代わりに $H_{ip}(\omega, t)$ を用いた図を参照すれば、 $x_i(t)$ は互いに独立な有帯域ホワイトノイズ $a_p(t)$ を非定常システム $H_{ip}(\omega, t)$ に入力させたときの区間擬定常出力 $x_{ip}(t)$ を $p=1$ から i まで加算したものと解釈される。

さらに、非定常伝達関数 $H_{ip}(\omega, t)$ の代わりに非定常単位応答関数 $h_{ip}(u, t)$ を用いれば、式(16)は次式と等価となる。

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{p=1}^i \int_{-\infty}^{\infty} h_{ip}(t-\xi, t) a_p(\xi) d\xi \\ &= \sum_{p=1}^i \int_{-\infty}^{\infty} h_{ip}(\xi, t) a_p(t-\xi) d\xi \\ &\dots\dots(18) \end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} H_{ip}(\omega, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{ip}(u, t) e^{-i\omega u} du \\ h_{ip}(u, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{ip}(\omega, t) e^{i\omega u} d\omega \end{aligned} \right\} \dots\dots(19)$$

4. 結 論

多次元確率過程 $x_i(t) : i=1, 2, \dots, m$ のシミュレーション理論の物理的意味を 図-1 および 2 のように分解してとらえることができた。同図におけるシステムの伝達関数 ($H_{ip}(\omega)$ または $H_{ip}(\omega, t)$) および単位応答関数 ($h_{ip}(t)$ または $h_{ip}(u, t)$) は式(4)または式(17)により、それぞれ定常のときは相互スペクトル $S_{ij}(\omega)$ 、非定常のときは $S_{ij}(\omega, t; W)$ を分解して得られるものである。したがって、式(9)~(12)の関係より $x_i(t)$ の相互スペクトルの内容に立ち入って説明しうるものである。この意味から観測値 $x_i(t)$ のスペクトル特性を検討するためには式(2)あるいは式(15)を調べるよりもシステム $H_{ip}(\omega)$ 、 $H_{ip}(\omega, t)$ または $h_{ip}(t)$ 、 $h_{ip}(u, t)$ を検討した方が $x_i(t)$ の特性をさらに的確にとらえることができるといえよう。

図-1におけるシステム $H_{ip}(\omega)$ または $H_{ip}(\omega, t)$ の推定は周波数領域におけるシステムの同定問題^{2),3)}である。

また、図-2におけるシステム $h_{ip}(t)$ または $h_{ip}(u, t)$ は時間領域におけるシステムの同定問題となる。そして最適制御理論におけるカルマンフィルタを適用した予測、同定、制御の問題に応用できるものである^{7)~10)}。

参 考 文 献

- 1) 星谷：多次元非定常確率過程の相互スペクトルとシミュレーション理論，土木学会論文報告集，No. 253, 1976年9月。
- 2) C.J.Dodds and J.D. Robson : Partial Coherence in Multivariate Random Processes, J. of Sound and Vibration, 42(2), 1975.
- 3) J.S. Bendat : Solutions for the Multiple Input/Output Problem, J. of Sound and Vibration, 44(3), 1976.
- 4) J.S. Bendat : System Identification from Multiple Input/Output Data, J. of Sound and Vibration, 49(3), 1976.
- 5) 星谷：確率論手法による振動解析，鹿島出版会，1974年8月。

- 6) Hoshiya, M. : Simulation of Mutlicorrelated Random Processes and Application to Structural Vibration Problems, Proc. of JSCE, No. 204, Aug., 1972.
 - 7) A.H. Jazwinski : Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, 1970.
 - 8) 有本 : カルマンフィルター, 産業図書, 1977年1月.
 - 9) 日野 : 水文流出系予測へのカルマン・フィルター理論の適用, 土木学会論文報告集, No. 221, 1974年1月.
 - 10) 相良 : 同定問題, 計測と制御, 第8巻, 1969年4月.
(1977.8.19・受付)
-