

流砂運動のモデル化とそれに基づく 流砂量の算定法について*

A PROBABILISTIC MODEL OF PARTICLE MOTION FOR DETERMINING
THE TOTAL LOAD OF BED MATERIALS

吉川 秀夫**・石川 忠晴***

By Hideo KIKKAWA and Tadaharu ISHIKAWA

1. 序 論

流砂は運動様式の違いに基づき掃流砂と浮遊砂に大別される。もちろん、この分類は厳密なものではなく、実際には掃流砂的な運動状態から浮遊砂的な運動状態まで連続的に分布している。しかし、粒子の運動状態を一般的に記述するのが困難であるため、この二つの典型的な状態についてのみ考えるのである。このように分けることの妥当性を論ずるのは難しいが、複雑な現象を解明するための一つの有効な手段といえるであろう。

さて、運動状態をこのように分けて取り扱う以上は、連続的に変化する状態を二つに区分するための定義が理論の中で明確になさねばならない。さもないと、中間的な状態を二重に計算したり、まったく計算に入れなかったりする恐れがある。ところで、従来の理論は掃流砂と浮遊砂の運動を記述する際にこれらをまったく別々に取り扱っており、互いの関係については考慮していない。したがって、個々の解析が正しいとしても、その結果をたし合わせたものが全流砂量に対応するかという問題が残るように思われる。この点について具体的に述べる。多くの掃流砂関数は理論上の未定係数を含み、これらは実測結果から定められている。しかし流砂量がきわめて少ない場合を除いては、純粹に掃流砂のみの実験を行うことは困難であると思われる。たとえば、Einstein¹⁾のいう河床から粒径の二倍の層の中をすべての粒子が運動している状態は、流砂の運動が多少活発になった場合には、もはやあり得ないであろう。したがって、実験的に定められた係数を含む掃流砂関数は、浮遊に近い状態も含めて表わしていると考えられる。一方、浮遊砂の濃

度分布式としては Rouse 分布がよく用いられる。この分布形は河床付近で濃度が急増する。これは河床上での拡散係数を零とするためである。拡散係数が零というのは粒子が上下に揺れないということだから、極限において掃流に似た状態を表わしていることになる。したがって、この分布形を河床の近傍まで延長して浮遊砂量を求めると、掃流に近い状態も含まれるのではないかと思われる。このように掃流砂、浮遊砂の従来の取り扱いはいずれも中間的な状態をある程度表現しているのだが、ではそれぞれの分担がどうなっているのかということになると判然としない。Einstein の理論¹⁾を例にとれば、このことは浮遊砂濃度の境界値を決める際に具体的な問題として表われる。すなわち、掃流層厚を粒径の二倍にするか四倍にするかというのは、結果をそのまま左右する重大な問題なのである。

さて、掃流砂と浮遊砂を同時に取り扱えば、その理論の中のそれぞれの定義に従って分担をあらかじめ決めることになるから、上述の難点は解消するものと考えられる。本研究は掃流砂と浮遊砂とをひとつの運動モデルの中で取り扱い、流砂運動を統一的に説明しようとするものである。

本論文での方法は次のようなものである。運動する粒子の系全体を力学的に取り扱うのは困難であるので、まずは粒子の運動を模擬する確率的数学モデルを考える。このモデルは本質的には前報²⁾で提案したものと同じである。前報においては「粒子が底を突き抜けない」という条件を定式化したしたが、本論文では、これを流砂運動に適用し、掃流層、浮遊層を一体化したひとつの系として表わすモデルとする。さらに、モデル中に表われる空間、時間および量的尺度を表わすパラメーターを力学的知見を用いて決定し、実現象との対応を明確にする。最後に、このモデルを幅の広い開水路流に適用し、全流砂量の算定式を導く。なお、本論文では掃流形式と浮遊形式の輸送が共存する大流砂量の場合を特に対象として取

* 本論文の理論の一部は第 20 回水理講演会論文集に掲載されている。

** 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

*** 学生会員 工修 東京工業大学大学院

り扱う。

ところで、流砂の運動を確率的数学モデルで表わした研究は、すでに数多くある。それらは二つに大別される。ひとつは、step-length と rest-time を確率変数とし、流下方向の粒子の移動を扱うもので、掃流砂を対象としている。この種の研究は Einstein によって始められ、最近では Hung³⁾ らが数学的に詳細に論じている。いまひとつは、粒子の鉛直移動量を確率変数とし、浮遊砂濃度分布に結びつけようとするもので、Yalin⁴⁾ らの研究があげられる。本理論の確率モデルは粒子の鉛直方向移動を取り扱っており、その意味では後者の範ちゅうに入る。しかし、大きな特長として、浮遊状態だけでなく掃流状態もその一部に含めており、この点においてまったく異なっている。

2. 流砂の運動の確率的モデル

比較的軽い粒子を遅い流れの中に投入し運動状態を観察すると、図-1 に示すような運動をしていることがわかる。この運動は二つの大きな特徴を持っている。ひとつは、運動が多分に確率的であるということである。ここにいう確率的というのは、個々の粒子の運動経路をわれわれが持っている情報と知見だけからでは予測できないという意味である。いまひとつの特徴は、粒子が河床より下に落ちないということである。当然のことだが、

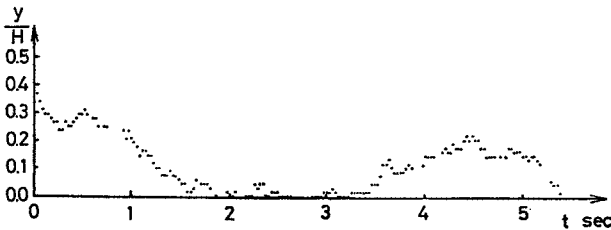


図-1

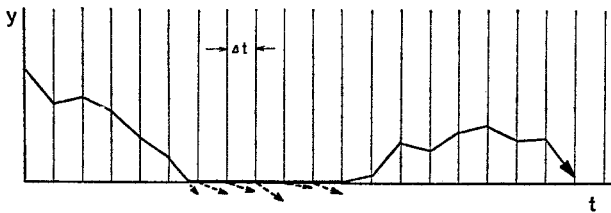


図-2

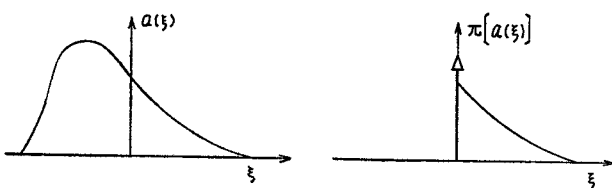


図-3 作用子 π[] の説明図

水より重い粒子群が定常な濃度分布を形成し得るのはこのためである。この二つの特徴を持つ運動を次のようにモデル化する (図-2)。

① 粒子は時間ステップ Δt ごとに確率的に上昇または沈降する。

② 粒子が河床に到達した場合は、上昇する条件が与えられるまで河床に留まる。

① の Δt の物理的意味は曖昧であるが、粒子運動のラグランジュ的タイムスケールに相当する。この値の定め方については後で考察する。② の河床に留まるといふ意味は、河床に静止することではなく、河床上を滑ったり小跳躍しながら流下する状態、掃流状態を意味するものである。もちろん、現実には掃流層はある厚さを持っているのであるが、このモデルではそれをひとつの状態とみなし、ゼロレベルに置くことによって表わす。すなわち、本モデルでは $y=0$ で掃流層を $y>0$ で浮遊層を表わすことになる。また、このモデルでは河床に静止する状態を考えていない。その理由は、定常状態ではある割合の粒子が静止したとしても同量の粒子が静止状態から運動状態に移ることが期待されるので、個々の粒子に着目しない限りは運動状態のみを考えればよいことになるからである。

さらに、数学的取り扱いを容易にするために、次のような条件のもとで議論を進める。

③ 粒子の移動の確率的性質は空間に依存しない。

開水路では乱れの性質が鉛直方向に変化するののでこの条件は厳密には成立しない。しかし、断面平均的な量を用いれば全体をある程度表わすことができるであろう。なお、この条件が結果に及ぼす影響については、6. の考察の項で検討する。また、この結果河床上での条件がどのようになるかについても、6. で具体的に検討する。

さて、①~③ の条件に基づき粒子の運動を次のようにあらわすことができる。第 n ステップの前後の粒子の高さを y_n, y_{n+1} 、移動距離を η_n とすると次式が成立する。

$$y_{n+1} = \max(y_n + \eta_n, 0) \dots\dots\dots(1)$$

y_n の確率密度関数を $h_n(y)$ 、 η の確率密度関数を $g(\eta)$ とすると次の関係が成り立つ。

$$h_{n+1}(y) = \pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_n(y-\eta) g(\eta) d\eta \right] \dots\dots(2)$$

$\pi[]$ は密度関数の負の部分に零に掃き寄せる作用子で、任意の密度関数 $a(\xi)$ に対して次式が成り立つ。

$$\pi[a(\xi)] \equiv \begin{cases} \delta(\xi) \int_{-\infty}^0 a(\xi) d\xi + a(\xi) & (\xi \geq 0) \\ 0 & (\xi < 0) \end{cases} \dots\dots\dots(3)$$

$t \rightarrow \infty$ で定常確率密度が存在するとすれば、これを $h(y)$ と書くと式 (2) は次式となる。

$$h(y) = \pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(y-\eta) g(\eta) d\eta \right] \dots\dots\dots (4)$$

この式は粒子のワンステップの移動量の確率密度 $g(\eta)$ に対して、粒子の存在確率密度 $h(y)$ が満たすべき関係を表わしている。

さて、 $g(\eta)$ にどのような分布形を仮定するのが適切かということはいくつかよくわからないし、任意の $g(\eta)$ について式 (4) を解くこともできない。そこでまず特定の $g(\eta)$ についての $h(y)$ の解に関してその性質を検討する。

著者らはすでに 図-4 に示す $g(\eta)$ についての一般解を示し、次式で表わされるラプラス分布の場合について具体的に計算を行っている²⁾。

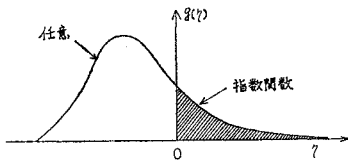


図-4

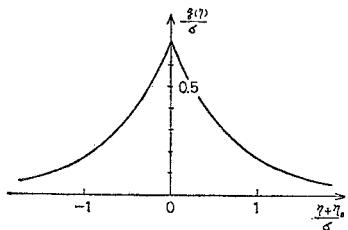


図-5 ラプラス分布

$$g(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left(-\sqrt{2} \frac{\eta+\eta_0}{\sigma}\right) & (\eta \geq -\eta_0) \\ \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left(\sqrt{2} \frac{\eta+\eta_0}{\sigma}\right) & (\eta < -\eta_0) \end{cases} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $-\eta_0$ は η の平均値、 σ は標準偏差である。これに対する $h(y)$ の解は次式で与えられる。

$$h(y) = (1-\omega)\delta(y) + \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \omega(1-\omega) \cdot \exp\left\{-\sqrt{2}(1-\omega)\frac{y}{\sigma}\right\} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 ω は次式の根である。

$$\omega(2-\omega) = \exp\left\{-\sqrt{2}(1-\omega)\frac{\eta_0}{\sigma}\right\} \dots\dots\dots (7)$$

式 (6) は二つの部分から成っており、前述したように右辺第一項のデルタ関数が掃流状態に、第二項の指数関数が浮遊状態に対応する。

ここでは、さらに式 (8) で示される $g(\eta)$ についての $h(y)$ の解を示し、 $g(\eta)$ の形が変化することによって $h(y)$ がどの程度影響を受けるかを調べることにす

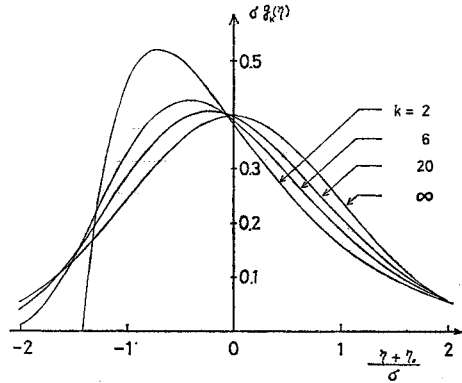


図-6 式 (8) の分布形

る。

$$g(\eta) = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} \left(\eta + \frac{1}{\lambda}\right)^{k-1} \cdot \exp\left\{-\mu k \left(\eta + \frac{1}{\lambda}\right)\right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 k は任意の自然数、 λ と μ は次のように表わされる。

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{k}\sigma}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{k}\sigma + \eta_0} \dots\dots\dots (9)$$

式 (8) は k を変えることによって種々の分布形を表わすことができる。 $k=1$ の場合は指数分布、 $k=2$ の場合は χ 二乗分布、 $k \rightarrow \infty$ とすると Gauss 分布となる。これを 図-6 に示す。

式 (8) を式 (4) に代入して $h(y)$ について解くと次のようになる³⁾。

$$h(y) = \left(1 + \sum_{i=1}^k C_i\right) \delta(y) + \sum_{i=1}^k C_i \mu r_i \exp(\mu r_i y) \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 r_i は次式の根のうち負の実数部を持つもの (k 個ある) であり、

$$\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = \exp\left(\frac{\mu}{\lambda} r\right) \dots\dots\dots (11)$$

C_i は次の k 元一次連立方程式の解である。

$$1 + \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{\left(1 + \frac{r_i}{k}\right)^r} = 0 \quad (r=1, 2, \dots, k) \dots\dots\dots (12)$$

式 (6) と式 (10) を 図-7 で比較する。この図から $g(\eta)$ の平均値と標準偏差が同じであれば $h(y)$ はあまり変化しないことがわかる。 $g(\eta)$ は、後述するように、鉛直方向の乱れ速度の確率密度分布に結びつけられるが、これがあまり変わった形の分布 (たとえば、ピークが二つあるような) をしていることはない。

よって以後の取り扱いにおいては $h(y)$ として式 (6) の表示を用いることにする。

次に濃度分布を求める。掃流状態にある粒子の単位面積あたりの個数を N_b とすると、単位体積あたりに浮遊する粒子個数は次のようになる。

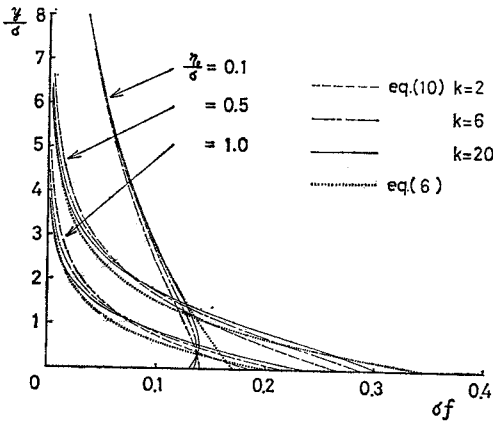


図-7 式(6)と式(10)の比較

$$N(y) = N_b \left[\delta(y) + \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \omega \exp \left\{ -\sqrt{2} (1-\omega) \frac{y}{\sigma} \right\} \right] \dots\dots\dots (13)$$

粒子を球形とすると体積濃度は次式で表わされる。

$$C(y) = \frac{\pi}{6} d^3 N_b \left[\delta(y) + \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \omega \exp \left\{ -\sqrt{2} (1-\omega) \frac{y}{\sigma} \right\} \right] \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 d は粒子の直径である。

3. モデルのパラメーターと水理量との関係

モデルのパラメーターと水理量の対応をつけるためには、粒子と水との相対運動を取り扱わねばならない。しかし、これを厳密に取り扱うことはそれ自体大変な問題であり、また、前節のモデルはかなり単純化されたものであるので、ここでは簡単に次のようにおく。

$$\eta_0 = (v' - w_0) \Delta t \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 v' は粒子を取り囲む水塊の鉛直方向の速度、 w_0 は静水中の粒子の沈降速度である。すなわち、粒子はそれを含む水塊に対して w_0 の速度で相対的に沈降すると仮定する。これより η_0 と σ は次のように表わされる。

$$\eta_0 = w_0 \Delta t, \quad \sigma = \sqrt{v'^2} \Delta t \dots\dots\dots (16)$$

したがって、式(7)は次式となる。

$$\omega(2-\omega) = \exp \left\{ -\sqrt{2} (1-\omega) \frac{w_0}{\sqrt{v'^2}} \right\} \dots\dots (17)$$

次に N_b を求める。 N_b は単位面積あたりの掃流状態にある粒子個数であるので、これを得るには河床表層に静止する粒子と掃流状態にある粒子とを含む系の力学的平衡状態をなんらかの形で定式化すればよい。しかし、実際には河床付近の粒子に働く力はきわめて複雑であるので厳密に行うことは到底無理であるから、洞察に基づいたある程度大胆な取り扱いをせざるを得ない。ところで、すでに提案されているいくつかの掃流砂関数の誘導

過程において、それぞれの研究者の洞察に基づいた興味深い方法がとられている。たとえば、佐藤・吉川・芦田⁹⁾は、「河床面に働く上向き有効揚圧力」と「掃流層に働く重力」の及ぼす力積が平衡しているとしている。また、芦田・道上⁷⁾は、全せん断力から粒子の衝突によって生じるせん断力を差し引いた「流体自身のせん断力」がほぼ「限界掃流力」に等しいとして平衡状態を定式化している。どのような方法がより適切であるか判断するのは難しいが、ここでは佐藤・吉川・芦田の方法と同様の考え方で議論を進めることにする。

平衡状態においては掃流層内の粒子に加わる力積と河床表層の粒子に加わる有効上向き力の力積がつり合っていないと見なければならない。掃流層内の粒子に加わる力は圧力の合力、粘性力および重力であり、河床表層の粒子に加わる上向き力は揚力および周囲の粒子の及ぼす反力の鉛直方向成分である。このうち重力と揚力が卓越してはほぼつり合っているとしてこれを等置した式が、佐藤・吉川・芦田公式の誘導の基礎式となっている。圧力の合力を無視するのは粒子が河床を離れると揚力が急激に減少するからであり、また、粘性力を無視するのは、粒子が比較的短時間に上下するために時間平均的にはほぼ打ち消されると思われるからである。表層の粒子に周囲の粒子が及ぼす反力の上向き成分は、粒子が孤立して平均河床面から突き出ている場合は必ずしも無視できないが、掃流力がある程度大きくて河床面がならされている状態を考えれば無視し得ると思われる。

単位時間に単位面積上の掃流層に働く重力による力積は粒子を球径とすれば、

$$\frac{\pi}{6} (\rho_s - \rho) g d^3 \cdot N_b$$

と書ける。ここに、 ρ_s は粒子の密度、 ρ は水の密度、 g は重力加速度である。一方、単位面積の河床上の粒子に働く揚力の合力を揚圧力とよび p と書けば、単位時間に単位面積の河床上の粒子に働く揚力のもたらす有効な力積は次のように書ける。

$$r \int_{p_c}^{\infty} p f_p(p) dp$$

ここに、 p_c は限界揚圧力、 $f(p)$ は揚圧力の確率密度分布である。 r は佐藤らが導入している「揚圧力が効果的に働く面積の比率」で、河床面の粒子の凹凸の効果を表わす概念的なパラメーターである。河床面の粒子が完全に一様に配列されている場合は 1、一般には 1 より小さい値を取ると考えられる。 r が結果に与える効果については後で検討する。以上より次式を得る。

$$\frac{\pi}{6} (\rho_s - \rho) g d^3 N_b = r \int_{p_c}^{\infty} p f_p(p) dp \dots\dots\dots (18)$$

Einstein & El-Samni⁹⁾ は水路床上に置かれた半球の頂部と底部の圧力差を測定し、この圧力差の傾度分布が

Gauss 関数で近似できるとしている。また、Chepil²⁰⁾ は風洞で同様の実験を行い、この圧力差の標準偏差と平均値の比はほぼ 0.5 (正確には 0.49) であると結論している。半球の頂部と底部の圧力差は揚圧力そのものではないが、揚圧力の頻度分布もこれと相似であると考えてよいであろう。そこで次式を仮定する。

$$f_p(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\bar{p}} \exp\left\{-2\left(\frac{p}{\bar{p}} - 1\right)^2\right\} \dots\dots (19)$$

ここに、 \bar{p} は揚圧力の平均値である。Chepil¹⁹⁾ は風洞中に置かれた種々の径の半球について平均圧力分布を測定し、平均揚力と平均抗力の比を求めている。それによれば、この比は 0.88 である。「抗力が有効に働く面積の率」が前述の「揚力が有効に働く面積の率」にほぼ等しいと考えられるので、平均揚力は次のように書ける。

$$\bar{p} = \frac{0.88}{r} \rho u_*^2 \dots\dots (20)$$

また、限界揚圧力は、粒子重量と揚力とを等置することにより次式で表わされる。

$$p_c = \frac{2}{3} (\rho_s - \rho) g d \dots\dots (21)$$

式 (19)~(21) を式 (18) に代入し積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} N_b d^2 &= f(\tau_*) \\ &= 1.68 \tau_* \left[\Phi\left(\frac{1.52 r}{\tau_*} - 2\right) + 0.199 \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1.52 r}{\tau_*} - 2\right)^2\right\} \right] \dots\dots (22) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \tau_* &= \frac{u_*^2}{(\rho_s/\rho - 1) g d} \\ \Phi(x) &= \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \end{aligned}$$

式 (22) の関係を 図-8 に示す。パラメーター r は「揚圧力が有効に働く面積の率」である。 r の値の違い

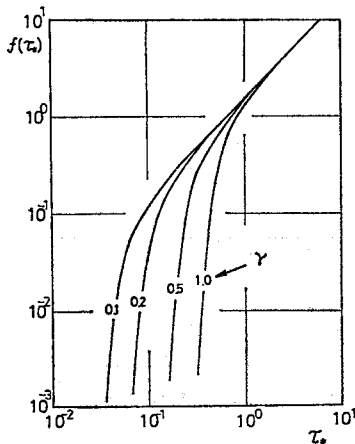


図-8

が $f(\tau_*)$ に与える効果は、 τ_* が小さい場合に大きく、また、 τ_* が 1.0 を越えると無視しうることがわかる。前述したように河床が一様にならされていれば r は 1.0 であるが、凹凸が大きくなるにつれ小さい値をとるものと考えられる。しかし、どの程度の値が妥当であるかは明らかではないし、また、必ずしも定数であるという保証もない。ところで、本論文では流砂のうち浮遊砂の占める割合が無視し得ない場合を取り扱っている。したがって、おもに τ_* がかなり大きい場合が対象となるので r による効果はそれほど大きくないことが期待される。そこで、ここではひとまず $r=1$ とおく。このことによって当然理論の適用範囲が制約を受けるが、それについては 6. で考察する。

次に dt を定める。著者らはすでに発表した論文²⁾ の中で本モデルと拡散方程式の関係を明らかにしている。その要点を以下に再記する。

一度舞い上がった砂粒子がなかなか沈降しない場合には式 (1) はほとんどの場合、次式となる。

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \eta_n \\ \text{これから近似的に、} \\ \xi_{mn} &= y_n - y_m \approx \sum_{i=m}^{n-1} \eta_i \dots\dots (24) \end{aligned}$$

したがって、 dt よりもずっと長い観測時間 τ での粒子の移動量 ξ の確率密度は、中心極限定理より次式で近似される。

$$g(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau/dt}} \exp\left\{-\frac{\xi + \tau/dt\eta_0}{2\sigma^2\tau/dt}\right\} \dots (25)$$

ただし、粒子の存在確率密度と式 (25) とは次の関係にある注1)。

$$h(y, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \tau) h(y - \xi, t) d\xi \dots\dots (26)$$

式 (25) を式 (26) に代入し、多少の演算の後に次式を得る。

$$\frac{\partial h(y, t)}{\partial t} = w_0 \frac{\partial h(y, t)}{\partial y} + \frac{\overline{v'^2} dt}{2} \frac{\partial^2 h(y, t)}{\partial y^2} \dots\dots (27)$$

ただし、途中で式 (16) の関係を用いている。式 (27) は拡散方程式であり、拡散係数は次のように表わされる。

$$\epsilon_s = \frac{\overline{v'^2} dt}{2} \dots\dots (28)$$

ところで、二次元等流における渦動粘性係数の平均値は次式で示される¹⁰⁾。

$$\epsilon_m = \frac{\kappa}{6} u_* H \dots\dots (29)$$

ここに、 κ はカルマン定数、 H は二次元開水路流であれば水深に、二平板間の流れであれば板間隔の 1/2 にあ

注 1) Yalin⁹⁾ は式 (25), (26) の関係を使って浮遊砂濃度分布を数値計算している。

たる。一般に拡散係数は渦動粘性係数の 1.2 倍程度であることが知られている。そこで次のようにおく。

$$\epsilon_s = 1.2 \epsilon_m \dots\dots\dots (30)$$

式 (29)~(31) から dt が得られる。

$$dt = \frac{2}{5} \kappa \frac{u_* H}{v'^2} \dots\dots\dots (31)$$

4. 幅の広い開水路の全流砂量

水深に比べて幅が十分大きい二次元的な開水路流についての流砂量式を導く。このような流れでは乱れの構造が相似であると考えられる。次元的な考察から $\sqrt{v'^2}/u_*$ の断面平均値は、水理条件によらずほぼ一定値をとると予想される。いくつかの実測データ^{11)~14)}に基づいてこの値を 0.8 とする。ゆえに、 dt は次のようになる。

$$dt = 0.625 \kappa \frac{H}{u_*} \dots\dots\dots (32)$$

式 (32), (16) を用いて式 (14) を変形すると次式を得る。

$$C(\zeta) = \frac{d}{H} f(\tau_*) [\alpha \exp(-\beta\zeta) + \theta\delta(\zeta)] \dots (33)$$

ここに、

$$\zeta = y/H, \alpha = \frac{1.48}{\kappa} \omega, \beta = \frac{2.83}{\kappa} (1-\omega), \theta = 0.524$$

次に流速分布を定める。濃度分布を求める際には鉛直方向に乱れが一様としているので、ここでも同様にして取り扱う。渦動粘性係数を一定値とすると流速分布は次式で与えられる。

$$u = \frac{u_*^2 H}{\epsilon_m} \left(\zeta - \frac{\zeta^2}{2} + C_0 \right) \dots\dots\dots (34)$$

平均流速は、

$$\bar{u} = \int_0^1 u d\zeta = \frac{u_*^2 H}{\epsilon_m} \left(\frac{1}{3} + C_0 \right) \dots\dots\dots (35)$$

式 (34) と式 (35) から C_0 を消去し、 ϵ_m に断面平均値 $\kappa/6 \cdot u_* H$ を代入すると次式を得る。

$$\frac{u}{\bar{u}} = a \left(\zeta - \frac{\zeta^2}{2} \right) + b \dots\dots\dots (36)$$

ただし、

$$a = \frac{6}{\kappa} \frac{u_*}{\bar{u}}, b = 1 - \frac{2}{\kappa} \frac{u_*}{\bar{u}}$$

単位幅あたりの流砂量は次の積分から得られる。

$$q_T = \int_0^H u \cdot C dy \dots\dots\dots (37)$$

したがって、平均濃度は、

$$\begin{aligned} \bar{C}_T &= \frac{q_T}{\bar{u}H} = \int_0^1 \frac{u}{\bar{u}} \cdot C d\zeta \\ &= \frac{d}{H} f(\tau_*) \left[a\alpha \left\{ \frac{\beta-1}{\beta^3} + \frac{-\beta^2+\beta+1}{2\beta^3} \exp(-\beta) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{ab}{\beta} \{1 - \exp(-\beta)\} + b\theta \right] \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

無次元流砂量は、

$$\begin{aligned} q_* &= \frac{q_T}{u_* d} \\ &= \frac{\bar{u}}{u_*} f(\tau_*) \left[a\alpha \left\{ \frac{\beta-1}{\beta^3} + \frac{-\beta^2+\beta+1}{2\beta^3} \exp(-\beta) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{ab}{\beta} \{1 - \exp(-\beta)\} + b\theta \right] \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

となる。

5. 水路実験データとの比較

本節では理論の妥当性を検討するために実験データと理論結果との比較を行う。本理論では掃流、浮遊の区別を数学モデル中の粒子の運動状態で定義しており、採砂器によって定義される測定上の掃流、浮遊の区別とは必ずしも一致しない。そこで、流砂量の比較は全流砂量についてのみ行う。また、理論が内部の状態を正しく表わしているかどうかをチェックするために、浮遊砂濃度分布についても比較検討した。

また、従来の全流砂量算定法の中で最も理論的であると認められている Einstein 理論を用いて計算された結果も示し、本理論の結果と比較する。

(1) 浮遊粒子濃度分布

理論では乱れ強度が鉛直方向に一様であるとしているので、それに近い状態をつくる目的で、以下のような条件で実験を行った。

長さ 8 m、幅 5.26 cm の木製水路の側壁に平均粒径 2 mm 程度の砂を貼り、さらに水路幅に比べて水深を大きくした。プラスチックの粒子 (表-1) を水路床に一樣な厚さに敷き、水を循環して浮遊させ、下流端から 1 m 離して設けられた長さ 1 m の観測窓から写真を撮り、粒子個数を数えることにより濃度を算定した。なお、濃度は変動するので各 Run について 4~6 枚撮影した。また、撮影と併行して、小型プロペラ流速計注2) を使って水深方向に 4 か所、平均流速と乱れ強

表-1 粒子の特性

d_{50}	1.077 mm
$\sqrt{d_{90}/d_{10}}$	1.18
w_0	1.82 cm/s
$\rho_s/\rho-1$	0.0815

表-2 水 理 量

	Run 1	Run 2
水 深 (cm)	7.84	8.06
平均流速 (cm/s)	25.3	21.8
乱れ強度 (cm/s)	1.00	0.963
水面勾配	4.36×10^{-3}	2.95×10^{-3}
摩擦速度 (cm/s)	2.90	2.39

注 2) 清水中で Hot Film 流速計の出力と比較したところ、本実験での流速の範囲では、小型プロペラ流速計は Hot Film 流速計に比べて乱れ強度を 1 割から 2 割小さめに与える。

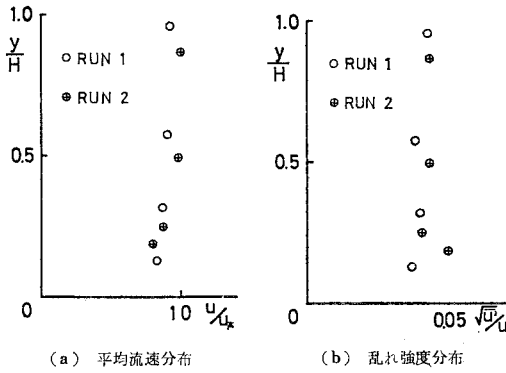


図-9

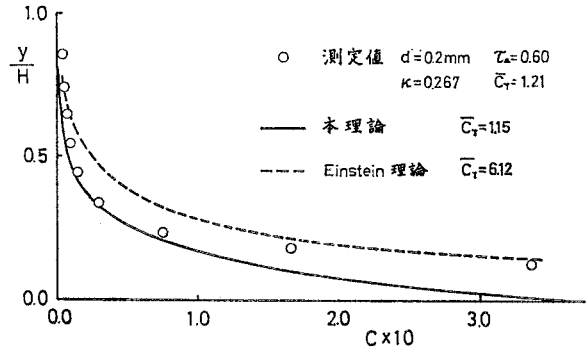
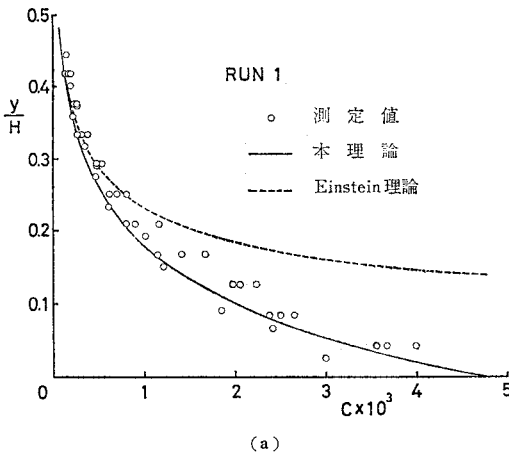
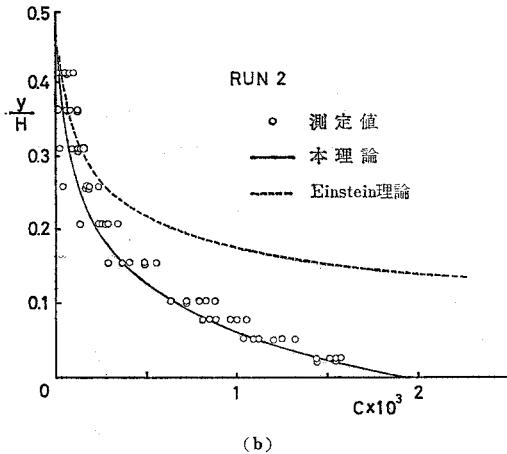


図-11 福岡らのデータとの比較



(a)



(b)

図-10

度を測定した。撮影と流速測定が終了した後、ポイントゲージで水面勾配を測定した。用いた粒子の特性を表-1に、各 Run の水理量を表-2 に示す。

平均流速と乱れ強度の分布を図-9 に示す。平均流速、乱れ強度とも鉛直方向にかなり一様となっている。

測定された濃度分布と式 (14) とを図-10 に比較する。ただし、鉛直方向の乱れ強度の測定ができなかった

ので、測定された流下方向の乱れ強度の平均値を用いて計算を行った。また、水路幅が水深に比べて狭いので、式 (31) の H として水路幅の $1/2$ を用い、 κ は 0.4 ^{注3)} とした。

理論値と測定値はかなりよく一致しているといえる。拡散理論では濃度分布形しか得られないが、本理論では濃度の値そのものを決定することができる。したがって、図中の理論曲線は濃度の基準値を合わせるような操作をしておらず、すべて理論から得られたものである。

本実験はかなり特殊な条件について行われている。また、粒子が浮遊しているため乱れの測定法が制約されており、精度もあまりよくない。したがって、実験そのものは完全とはいえないが、しかし、本理論の妥当性をある程度裏づけていると考えられる。

図中には比較のために Einstein の理論曲線も示してある。おそらく Einstein は本実験のような特殊な条件まで考慮に入れて理論を立ててはいないので、その意味ではここに比較するのは適当ではないかもしれない。しかし、理論上は特に制約条件が示されておらず、モデルの内部構造が普偏性を有しておれば適用しうるものである。しかし、結果的には、図に見るようにかなり過大に算定することとなる。これは Einstein の有効掃流力および河床濃度の算定法がある範囲でのみ成立することを示している。

次に水深に比べて幅の大きな水路での濃度分布形について検討する。図-11 は福岡ら²⁰⁾の実験結果と本理論式 (式 (33)) とを比較したものである。図中には比較のために Einstein の理論曲線 (点線) を示してある。

理論では乱れの性質を一様としているが、このような一般的な状態では乱れの性質は鉛直方向に変化する。こ

注 3) 本実験のように幅の狭い水路では κ は横断方向の速度分布形と関連づけられるはずであるが、これについては測定していない。なお、ここで用いている粒子は比重が 1.08 程度であるので、 κ の変化が同濃度の中立浮遊子の場合とほぼ同じと考えれば、Eltai & Ippen の実験結果から $\kappa=0.4$ としてよいと思われる。

のために、前述した特別な実験に比べると、理論値と測定値のずれは大きい。しかし、濃度の境界値について仮定をおいたり実験的な補正をすることなしに、濃度の絶対値を予測していることを考えれば、まずは満足すべき結果である。また、河床付近で理論値と測定値の差が特に大きくなる。河床付近の高濃度の部分には掃流に近い状態の粒子が多く含まれると考えられるが、本理論では、これをデルタ関数(式(34)第二項)で表わしている。平均濃度(\bar{C}_T)の理論値と測定値がよく一致していることから、底面付近の誤差分はデルタ関数の部分にちょうど対応していることがわかる。

一方、Einsteinの理論曲線も比較的良好に合っているように見えるが、平均濃度の値はかなり大きめに算定されている。すなわち、測定点より河床に近い領域では過大になっているのである。これは基準濃度を与える位置(粒径の2倍)が河床に近すぎることを示していると思われる。

以上の結果から、本理論によって得られた濃度分布式は妥当なものであると考えられる。

(2) 平均濃度と全流砂量

1956年から61年にかけて米国のGeological Surveyで流砂量に関する大規模な実験が行われた。その結果¹⁵⁾を用いて理論を検討する。

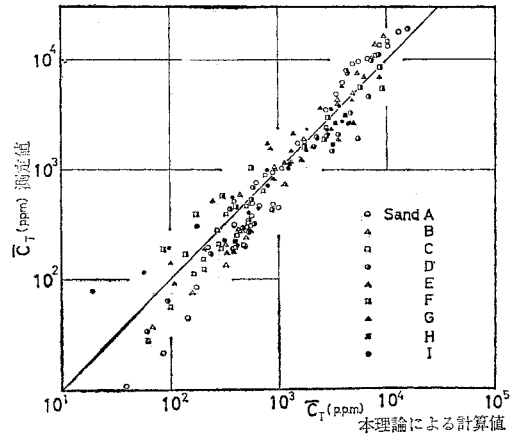
実験は二つの水路で行われ、ひとつは幅8 feet、深さ2 feet、長さ150 feet、いまひとつは幅2 feet、深さ2.5 feet、長さ60 feetで、ともに可変勾配の環流式水路である。

測定は339ケース行われているが、そのうち、wash loadの効果を調べるための特別なケースと流砂量の少ないケースを除いた167ケースについて比較を行う注4)。

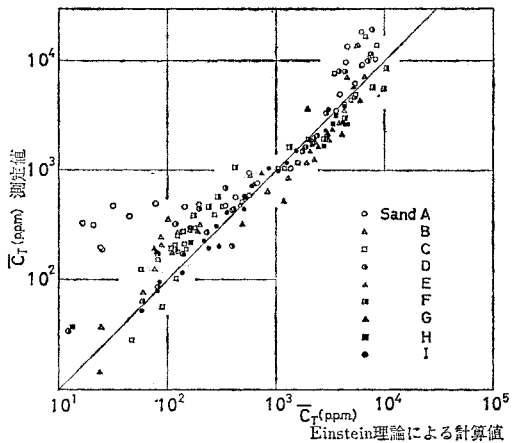
使用された砂の特性と用いたデータの水量の範囲を表-3に示す。

図-12は平均体積濃度について比較を行ったものである注4)。図-12(a)は砂粒子の種類によって記号を変えてあり、白抜き記号は小さい粒子を黒塗りの記号は大きな粒子を表わしている。低濃度の部分で多少分離しているが、全体的には、粒径にかかわらず、理論値と測定値はよく一致しているといえる。比較のためにEinstein理論¹⁾で計算した結果を図-12(b)に示す。Einsteinの理論は大きな粒子についてはよく一致するが、細かい粒子については系統的な誤差が見られ、粒径による分離が本理論よりも大きい。

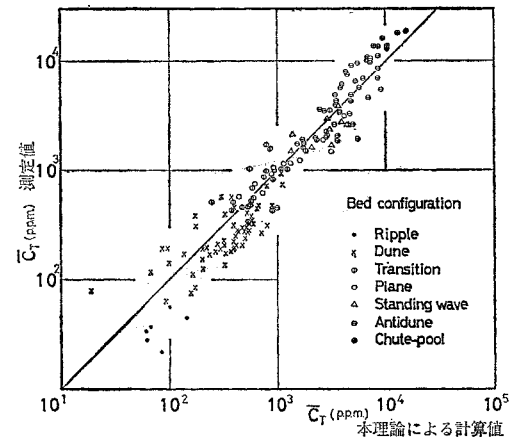
図-12(c)は図-12(a)と同じデータを河床形態に



(a) 本理論



(b) Einstein理論



(c) 河床形態により分類
図-12 平均濃度

よって分類したものである。本理論はもともと平坦河床

注4) 河床構成粒子を3つに区分し(代表粒径 d_{10} , d_{30} , d_{84}), それぞれについて流砂量を計算し, たし合わせた。κの値は文献15)には与えられていないので, 0.4として計算した。なお, κの値の変化は濃度分布形には大きく影響するが, 断面積分された式(38)では, 結果にほとんど影響を及ぼさない。

表-3

	平均粒径 (mm)	標準偏差	データ数	F_r	τ_*	$I \times 10^3$	q (l/cm)	H (cm)	水路幅 (cm)
A	0.19	1.30	26	0.23~1.10	0.43~6.02	0.43~9.50	18.0~79.2	15.6~33.2	244
B	0.27	1.56	16	0.30~1.17	0.42~4.17	0.65~10.2	23.9~77.5	14.0~34.5	244
C	0.28	1.67	30	0.30~1.33	0.41~3.79	0.63~10.1	25.5~78.0	12.2~32.6	244
D	0.32	1.57	26	0.32~1.29	0.36~6.05	1.10~16.2	22.1~96.8	16.8~22.6	61
E	0.33	1.25	12	0.29~1.45	0.24~3.31	0.88~11.4	15.9~85.7	14.9~15.9	61
F	0.33	2.07	12	0.46~1.55	0.27~2.79	0.97~9.80	24.0~91.7	14.6~16.2	61
G	0.45	1.60	15	0.28~1.70	0.45~1.26	1.14~10.1	11.2~76.7	5.80~29.3	244
H	0.47	1.54	6	0.34~1.30	0.18~1.59	0.72~7.90	25.5~76.0	12.5~27.8	244
I	0.93	1.54	24	0.35~1.63	0.24~1.11	1.12~12.8	24.5~80.5	13.1~33.9	244

について立てたものである。これをそのまま河床波のある場合に適用するのはやや強引ではある。しかし、結果的には、平坦河床の場合に比べてばらつきが多少大きいものの、それほど誤差は認められない。なお、本理論では河床形態のいかんにかかわらず全掃流力を使って計算している。この点については次章で考察する。

図-13 は同じデータを無次元流砂量 (q_*) と無次元掃流力 (τ_*) について整理したものである (図中の記号は図-12 (c) と同じく河床形態で区別してある)。ただし、式 (39) は次に示すように3つの変数を含んでいるので、それぞれの砂粒子ごとに三種の \bar{u}/u_* について理論曲線を引いてある。

$$q_* = f_{nc} \left(\tau_*, \frac{\bar{u}}{u_*}, \frac{\tau \omega_0^2}{(\rho_s/\rho - 1)gd} \right) \dots\dots\dots (39')$$

また、各砂粒子ごとの実験における lower regime と upper regime の \bar{u}/u_* の平均値を図中に示してある。

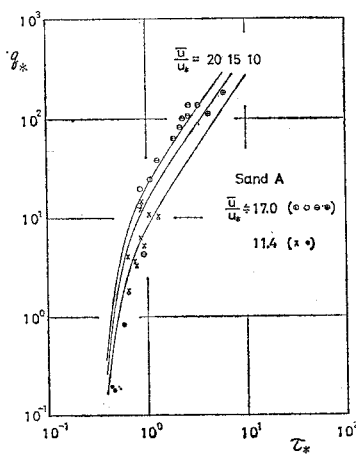
regime が異なると別の曲線に遷移することがわかる。遷移のしかた、および対応する \bar{u}/u_* の値は、粒径によって異なっている。細かい砂 (Sand A) では遷移が明瞭であるが、粗くなるにつれ遷移点に対応する無次元掃流力が小さくなり、かつ regime による差が小さくなる。また、この図からはわかりにくい、 \bar{u}/u_* の値が同じでも曲線の位置は粒径によって異なっている。したがって、粒径の異なる砂についてのデータを普通行われるように単に $q_* \sim \tau_*$ 面にプロットすると、带状に広がってしまうことになる。

図-13 から、粒径の違いおよび抵抗係数の違いによる流砂量の変化を本理論がある程度正しく見積っていることがわかる。また、従来あまり検討されていない $\tau_* > 1$ の範囲

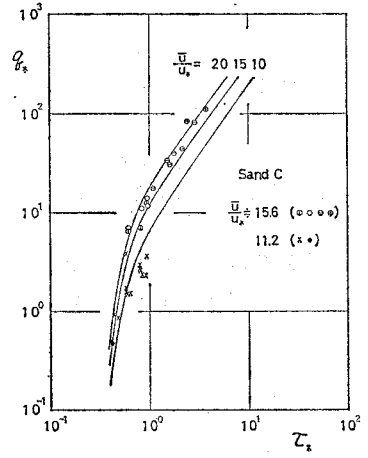
についてもよく算定しうることがわかる。

6. 考 察

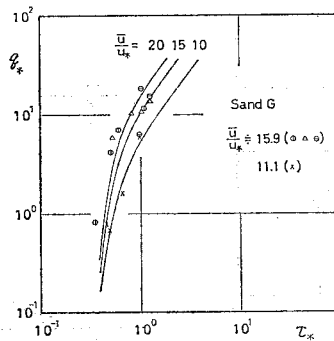
本理論の特徴は掃流と浮遊を一括して取り扱っていることである。しかし、粒子の運動を一般的に記述しているのではなく、あくまでも掃流、浮遊という二つの運動状態のみを考えて、これを幾何学的な確率モデルで結びつけている。したがって、次のような問題点は依然として残っている。



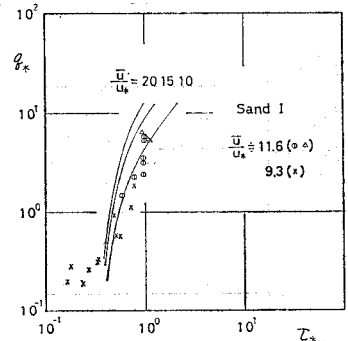
(a)



(b)



(c)



(d)

図-13

① 流砂の運動は掃流、浮遊という二つの運動形式で表わし得るか。② 本理論での掃流、浮遊の分け方と、それぞれに適用した力学的関係とは矛盾がないか。これらそのものを検証することは難しいと思われるので、得られた結果の実測との比較において検討するほかはない。ところで、実測された流砂量を掃流砂量と浮遊砂量に分割してそれぞれを理論と比較するのは困難である。なぜならば、これらの区別は運動メカニズムにおいてなされているのであり、それぞれの空間的傾分を指定することは本来無理だからである。したがって、全流砂量についてしか比較することができない。そこで、上記の問題点を次のようにして間接的に調べた。もし掃流、浮遊の分割のしかたや、それぞれについての力学的関係の適用のしかたがまずいとすれば、掃流砂と浮遊砂の比率が異なるにつれて全流砂量の見積りに系統的な誤差が生じるはずである。図-14 は横軸に計算上の浮遊砂量と掃流砂量の比をとり、これに対して全流砂量の計算値がなんらかの傾向を持つかどうかを調べたものである。図中の記号は図-12(c)と同じく河床形態で分類してある。なお、河床形態が Ripple, Dune, Chute-Pool の場合には、いわゆる有効掃流力についての問題も関係してくると思われるので、図には Plane, Antidune, Standing Wave の場合のデータのみをプロットしてある。浮遊砂量の多い場合にやや少なめに見積もる傾向にあるが、全体的には浮遊砂量と掃流砂量の比が変わってもたいした変化は見られないようである。このことから上記の問題はほぼ解決されているのではないと思われる。

開水路流では乱れの性質が鉛直方向に変化するが、本理論では取り扱いを容易にするためにこれを不変としている。このことによって結果がどの程度影響を受けるかを調べる。図-15 は Vanoni の測定データ(文献 16)から引用と本理論から得られる濃度分布形(式(34))とを比較したものである。計算では Vanoni が与えている $Z(w_0/ku_*)$ の値を用いている。この図から底付近

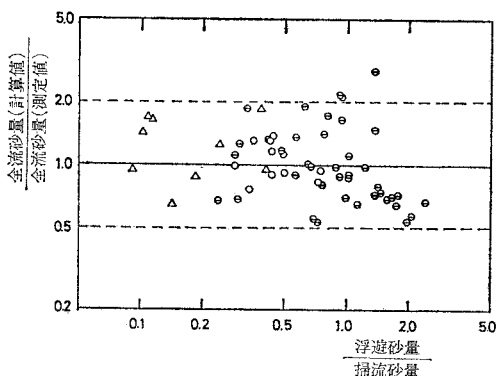
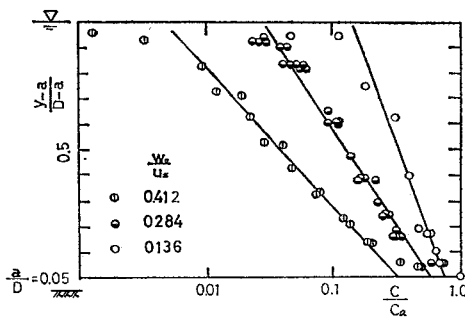


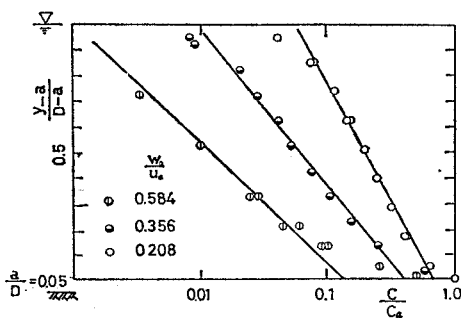
図-14

を除けば乱れを一定としても十分であることがわかる。なお、底付近の高濃度の部分には掃流状態に近い運動をしている粒子が多量に含まれていると考えられ、本理論では、これをデルタ関数で表わしている(図には示していない)。図-16 は式(36)の速度分布形と対数分布則とを比較したものであるが、この二つの関数はほぼ同じ値をとることがわかる。以上の結果から、乱れの性質の鉛直方向変化を考慮しなくても、現実の状態をかなりの程度表わすことができると考えられる。

次に、本理論での河床上の条件、すなわち掃流層と浮遊層の接続部での条件が、具体的にはどのようなことになっているかについて検討する。モデル化の段階で「粒子の移動の確率的性質は空間に依存しない」とし、さらに粒子の運動と水塊の運動を結びつける際に「粒子は水



(a)



(b)

図-15 濃度分布形の比較

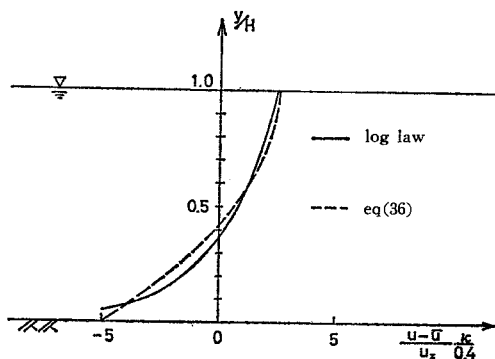


図-16 流速分布形の比較

塊に対して静水中の沈降速度 w_0 に等しい相対速度で沈降する」と仮定したが、河床での条件はこれから必然的に決まっている。これらの仮定に従えば、水塊の上昇速度が沈降速度を上回ったときに粒子は浮遊状態に移行しその量と上から落下する量とがバランスすることになる。したがって、基本的図式は Lane-Kalinske の方法と類似している。しかしながら、次の二点において異なっている。ひとつは、河床に静止する状態から浮遊状態に移行するのではなく、掃流状態から浮遊状態に移行することとしていることである。河床上に高濃度の掃流層が形成される場合にはこの方が妥当であると思われるし、河床に静止する粒子の上昇が周囲の水塊の上昇速度と沈降速度の関係で決まるとは考えにくいからである。いまひとつ異なる点は沈降量の表わし方にある。Lane-Kalinske の方法では $C_B w_0$ と表わされている。この表わし方は条件によっては適当ではないように思われる。理由は以下のとおりである。水塊の上昇速度 v' が粒子の沈降速度 w_0 を上回ったときに粒子が浮遊状態に移行し、河床近傍の水平面を上向きに通過するとすれば、同じ面を粒子が下向きに通過するのは v' が w_0 より小さいときである。したがって、 v' の確率密度を $f(v')$ とすれば、単位時間あたりの沈降量の期待値は次式で表わされる。

$$\int_{-\infty}^{w_0} C_B(w_0 - v') f(v') dv'$$

$w_0 \gg \sqrt{v'^2}$ であれば、この量を $C_B w_0$ と近似することができる。しかし、浮遊砂量が多い場合は一般に w_0 と $\sqrt{v'^2}$ は同じオーダーであり、この場合には上述の近似は適当でないように思われる。本理論では異なる濃度の部分から異なる速度で落下する量をすべて計算しているので、この点については正しく取り扱われている。

本理論では、河床形態によらず全掃流力を用いて流砂量を算定している。その結果(図-12(c))、Dune と Ripple で多少多めに算定するものの、従来の掃流砂関数で問題にされているほどの誤差は生じなかった。この点について検討する。流砂量は(運動状態にある砂量) × (輸送速度) と表わされるが、河床波の抵抗係数の増大に伴い、どちらの量も変化する。著者らの理解するところによれば、有効掃流力(この算定法にはいろいろあるが)を用いて整理すると、結果的に流砂量の減少をおもに前者の減少として説明することになると思われる。なぜならば、多くの理論では輸送速度が摩擦速度の一乗に比例するのに対し、運動状態にある砂量はその二乗(実際には限界掃流力を差し引いてあるからさらに高次数に相当するが)に比例するとされているからである。ところで、本理論では輸送速度の変化のみが考慮されている。すなわち、抵抗が増えると流砂が集中している河床近傍の流速が減少するが、本理論では結果的にこの効

果を取り込んでいる。このため、抵抗係数が増大すると輸送速度の摩擦速度に対する比が減少し、同じ掃流力が働いていても流砂量は少なくなる。もちろん、河床波上の流れを解析したわけではなく、平坦河床での理論の結果をそのまま延長しているだけなので厳密性は欠くが、図-13 で見る限りにおいては、regime の違いによる $q_* \sim \tau_*$ 曲線の不連続性のある程度説明しているように思われる。

最後に本理論の適用限界について述べる。3. で N_b を導く際に河床に静止する粒子の配列の具合などを最終的にはまったく考慮しなかった($r=1$ としたこと)。しかし、掃流力が小さい場合には動きやすい位置にある粒子がおもに運動するので、この効果を取り入れなければ過少に見積もる恐れがある。図-16 は式(39)の掃流砂に相当する部分(ただし $\bar{u}/u_* = 15$ の場合)と従来提案されている掃流砂関数のいくつかとを比較したものである注5)。 $\tau_* < 0.4$ では $r=1$ の曲線は、ほかの掃流砂関数よりかなり少なめの値をとる。この図で見る限り r (揚圧力が有効に働く面積の率)は $0.1 \sim 0.5$ 程度であるが、さらに検討の必要があると思われる。

また、揚圧力の確率密度関数 $f_p(p)$ を求める際に用いた Einstein および Chepil⁹⁾,²²⁾ の実験は粗面上の流れについて行われたものである。したがって、河床が水理学的に滑面となる条件では本理論の結果を適用することはできない。

上記二つの制約について前出の文献15)のデータを用いて検討したところ、見積り誤差を2.5倍まで許容す

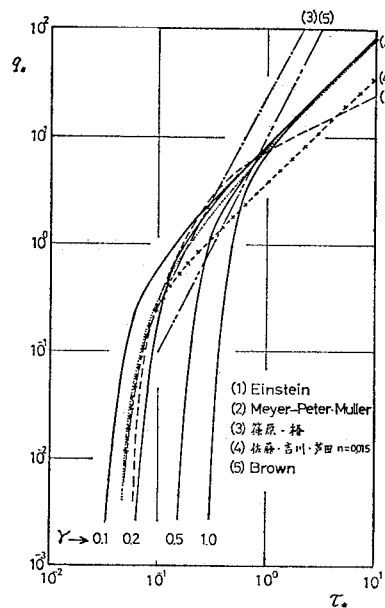


図-17

注 5) 水理公式集より

るとすれば、本理論の結果 ($r=1$ の場合) の適用範囲は次のようになった。

$$\tau_* > 0.3 \quad R_{e*} = \frac{u_* d}{\nu} > 7.5 \dots \dots \dots (40)$$

7. 結 論

砂粒子の運動全体を力学方程式に基づいて記述することはかなり難しい。そこで従来の理論はそのように取り扱える部分について個別に取り扱っている。これに対し本理論では、粒子の運動を数学的モデルを用いて大局的に把握し全体像を定め、その後各部分に力学的関係をあてはめている。その結果は次の特長を有している。

(1) 浮遊砂量が多い場合の全流砂量を比較的簡単な式で算定することができる。

(2) 文献 15) の測定データと比較した限りにおいては、河床形態の別によらず全掃流力を使って流砂量を算定してもそれほどの誤差は見られない。

(3) 文献 15) の測定データと比較した限りにおいては、従来あまり検討されていない $\tau_* > 1$ の範囲についてもよく算定し得る。また、本理論式を用いる場合には次の点に注意を要する。

(1) $\tau_* < 0.3$ および $R_{e*} < 7.5$ での流砂量を算定するには適当ではない。

(2) 本理論では掃流、浮遊の定義が数学的モデルの中でなされているので、採砂器によって定義される実測上の掃流、浮遊の区別との対応が明確でない。

本理論のモデルは平坦河床についてたてられたものであるが、本論文では、その結果を他の河床形態の場合にもそのまま用いている。このために河床波が存在する場合には平坦河床よりも計算結果のばらつきが大きい (図 12 (c))。したがって、さらに精度を向上させるには、河床波上の流れの中における粒子運動の性質の変化を考慮する必要がある、今後の課題といえる。

本論文では水理量が確定している場合の流砂量の算定法を取り扱っている。具体的には、河床構成材料の特性と流量のほかに、摩擦速度、水深または抵抗係数のいずれかひとつが与えられれば流砂量を算定することができない。しかし、移動床では河床波の生成消滅に伴い抵抗係数が複雑に変化するので、水理量を予測すること自体が難しい問題となる。したがって、現状における流砂量の推定という点から一歩進めて、河川工学の最終目標のひとつである河床変動の予測と制御の手法を確立するためには、さらに河床形態および河床波の形状特性に関する理論と結合させていかねばならない。今後の課題としたい。

参 考 文 献

- 1) Einstein, H.A. : The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows, U.S. Dept. of Agric., Soil Conserve Service, Tech. Bull., No. 1026, 1950.
- 2) 吉川秀夫・石川忠晴: 浮遊砂濃度分布のラグランジュ的取り扱いについて. 一様乱流の場合, 第 20 回水理講演会論文集, pp. 65~69, 1976.
- 3) Hung, C.S. and Shen, H.W. : Stochastic Models of Sediment Motion on Flat Bed, A.S.C.E., HY. 12, pp. 1745~1759, 1976.
- 4) Yalin, M.S. and Krishappan, B.M. : A Probabilistic Method for Determining the Distribution of Suspended Solid in Open Channels, Int. Sympto. on River Mech., Sedi. Trans. Proc., Vol. 1, pp. 603~614, 1973.
- 5) 本間鶴千代: 待ち行列の理論, 理工学社.
- 6) 佐藤清一・吉川秀夫・芦田和男: 河床砂礫の掃流運搬に関する研究 (1), 建設省土木研究所報告, 第 98 号, pp. 13~30, 1957.
- 7) 芦田和男・道上正規: 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第 206 号, pp. 59~69, 1972.
- 8) Einstein, H.A. and El-Samni, E.A. : Hydrodynamic Forces on a Rough Wall, Review of Modern Physics, Vol. 21, No. 3, pp. 520~524, 1949.
- 9) Chepil, W.S. : The Use of Evenly Spaced Hemispheres to Evaluate Aerodynamic Forces on a Soil Surface, Trans. A.G.U., Vol. 39, No. 3, pp. 397~404, 1958.
- 10) 石原藤次郎・本間 仁: 応用水理学 中 I, 丸善.
- 11) Nakagawa, H. and Nezu, I. : On a New Eddy Model in Turbulent Shear Flow, J.S.C.E., No. 231, pp. 61~70, 1974.
- 12) 中川博次・津津家久・上田 寛: 粗滑面水路の乱れ特性について (2), 第 29 回年講, pp. 390~391, 1974.
- 13) 渡辺訓甫・小松利光・古屋慶一: 開水路における乱れ特性量について, 第 29 回年講, pp. 378~379, 1974.
- 14) 板倉忠興・岸 力・中山 隆: 開水路における乱れの測定, 第 29 回年講, pp. 388~389, 1974.
- 15) Guy, H.P., Simons, D.B. and Richardson, E.V. : Summary of Alluvial Channel Data from Flume Experiments, 1956-61, Geological Survey Professional Paper, 462-I, 1966.
- 16) Graf, W.H. : Hydraulics of Sediment Transport, Mc Graw-Hill.
- 17) Barfield, B.T., Simons, E.T. and Hiler, E.A. : Prediction of Sediment Profiles in Open Channel Flows by Turbulent Diffusion Theory, W.R.R., Vol. 5, No. 1, pp. 291~299, 1969.
- 18) Kingman, J.F. : On the Algebra of Queues, J. of Applied Probability-3, pp. 285~326.
- 19) Smith, W.L. : On the Distribution of Queuing Times, Proc. Camb. Phil. Soc. 49, pp. 499~461, 1952.
- 20) Vanoni, V.A. and Brooks, N.H. : Laboratory Studies of the Roughness and Suspended Load of Alluvial Streams, Sedimentation Lab., Calif. Inst. of Tech., Pasadena, Calif., Report, No. E 68, pp. 76~86, 1975.
- 21) 前出文献 1), p. 37.
- 22) Chepil, W.S. : Equilibrium of Soil Grains at the Threshold of Movement by Wind, Proc. of Soil Science Society of American, Vol. 23, pp. 422~428, 1959.