

【ノート】

波形底面上の半無限領域の写像関数

THE CONFORMAL MAPPING OF THE SEMI-INFINITE REGION OVER A WAVY BOUNDARY

沢本正樹*
By Masaki SAWAMOTO

1. はじめに

波や流れによって砂質底面に生じた砂漣近くの流体運動の解析には、しばしば次の写像関数を用いられる^{1)~6)}。

$$\zeta = z - ia e^{ikz} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $k=2\pi/l$ で、 l は砂漣の波長、 a はおおざっぱに言えば砂漣の振幅である。これにより、 z 面での波形底面上の半無限領域は、 ζ 面での水平底面上の半無限領域に写像される。この写像関数がよく用いられる理由は、 ζ 面での解析結果に、式(1)を代入することにより、解を変数 z で直接的に表現できるという便利さにあるものと思われる。

式(1)の写像は、線形安定理論が対象とするような微小振幅の砂漣に対しては、振幅 a の正弦的な底面を表わしうる。しかし、より大きな波形勾配に対しては、実際に観察される底面形とは異なり、峰がなだらかで、谷が切れこんだ形の底面を表わすことになる。さらに、実際に確認されている上限の波形勾配の値に対しては、写像それ自体が不可能になるという欠点がある。それゆえ、底面形状のより精度よい写像を重視しなければならない場合には別の写像関数をさがさなければならない。

本小論では、波形の底面上の半無限領域を水平底面上の半無限領域へ写像する関数についてより一般的に考察し、さらに、式(1)の写像関数を含め、三つの写像関数の例を取り上げ、それにより変換される底面形状、およびその適用限界について調べた結果を報告する。

2. 基本的な考え方

いま、考える波形底面は、峰の前後で対称のものだけに限る*。すると、物理平面 z 面から、変換後の平面 ζ 面への写像は、図-1で、 z 面の $x=0 \sim l/2, y=y_0(x)$

$\sim \infty$ の領域を、 ζ 面の $\xi=0 \sim l/2, \eta=0 \sim \infty$ の領域に対応づけることと同じである。ここに、 $y_0(x)$ は底面の高さを表わす。この関係を直接求めることは、名人芸に類することであるので、ここでは z_1 面、 ζ_1 面(図-1参照)の、二つの補助平面を介して系統的に考えていく。すなわち、 z 面の $x=0 \sim l/2, y=-\infty \sim +\infty$ の帯状領域、 ζ 面の $\xi=0 \sim l/2, \eta=-\infty \sim +\infty$ の帯状領域をそれぞれ、 z_1 面、 ζ_1 面の単位円内に写像し、さらに、 z_1 面の領域 $A_1B_1C_1A_1$ を ζ_1 面の領域 $\alpha_1\beta_1\gamma_1\alpha_1$ に対応づける関係を求めるという方法をとる。

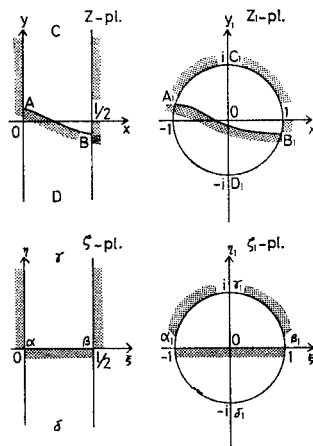


図-1 各面の関係および記号

z 面から z_1 面への写像、ないしは、 ζ 面から ζ_1 面への写像はよく知られている。ここでは後の説明にも関連するので、一応その導き方を示しておく。この関係を求めるには、 z 面でなにか適当な仮想的流れを想定し、それに対応する z_1 面での流れをさがし、両者を等しくおけばよい。たとえば、 z 面でCからDに向う一様流を想定すると、それは、

* 峰の前後で対称ではない底面形に対する本方法の拡張も別になら困難を伴うものではない。ここでは、混乱を避けるために、簡単な前後対称のもののみについて説明する。

* 正会員 工博 東京工業大学助手 土木工学科

$$f = c_1 iz + c_2$$

で表わされる。ここに、 f は $f = \phi + i\psi$ (ϕ : 速度ポテンシャル, ψ : 流関数) で表わされる複素速度ポテンシャルである。これに対応する z_1 面での流れは、 C_1 に吹き出し、 D_1 に吸い込みのある流れであるから、

$$f = \log \frac{z_1 - i}{z_1 + i}$$

と表わされる。これら二つの表現を等しくおき、 $z=0$ が $z_1 = -1$, $z = 1/2$ が $z_1 = 1$ に対応していることを用いて、定数 c_1, c_2 を決定すると、結局、

$$e^{ikz} = -i \frac{z_1 - i}{z_1 + i} \dots\dots\dots (2)$$

が得られる。くと ζ_1 の関係もまったく同様にして、

$$e^{ik\zeta} = -i \frac{\zeta_1 - i}{\zeta_1 + i} \dots\dots\dots (3)$$

のように求まる。

次に、 z_1 面と ζ_1 面との写像関係を求める。それには、 z_1 面と ζ_1 面で適当な流れを想定し、両者を等しくおけばよい。このとき、想定する流れは、① z_1 面、 ζ_1 面いずれでも単位円の周を流線とし、② 領域 $A_1 B_1 C_1 A_1$ 内の特異性が、領域 $\alpha_1 \beta_1 r_1 \alpha_1$ 内の特異性と 1 対 1 で対応していなければならない。この条件を満たす流れは無限に存在するが、ここでは、その中の特別なものだけを考えてみる。すなわち、 z_1, ζ_1 面に対応のはっきりしている点 C_1, r_1 にのみ共通の特異性をもち、対象領域外の特異点も D_1 または δ_1 に限られる流れを考える。

単位円の周を流線とし、特異点が $\pm i$ に限られる流れの中で、流体力学、等角写像の教科書などによくみられるものには、次の三つがある（ここでは便宜的に z_1 で表現する（図-2））。

(i) 先に示した、 C_1 に吹き出しがあり、 D_1 に吸い込みのある流れ。

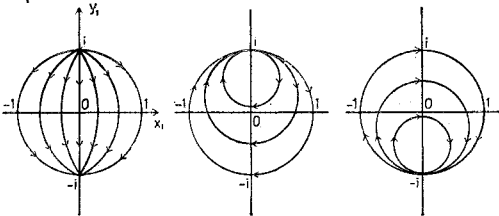
$$f = \log \frac{z_1 - i}{z_1 + i} \dots\dots\dots (4)$$

(ii) C_1 を中心とし、 x_1 方向を向いた二重吹き出し。

$$f = i \frac{z_1 + i}{z_1 - i} \dots\dots\dots (5)$$

(iii) D_1 を中心とし、 x_1 方向を向いた二重吹き出し。

Z₁-pl.



(i) $f = \log \frac{z_1 - i}{z_1 + i}$ (ii) $f = i \frac{z_1 + i}{z_1 - i}$ (iii) $f = i \frac{z_1 - i}{z_1 + i}$

図-2 単位円の周を流線とする基本的流れ

$$f = i \frac{z_1 - i}{z_1 + i} \dots\dots\dots (6)$$

さて、式 (5), (6) は単位円の周を流線としている流れであるが、その流関数の値を求めてみると円周上でゼロとなっていることがわかる。すなわち、

$$i \frac{z_1 + i}{z_1 - i}, i \frac{z_1 - i}{z_1 + i}$$

は単位円の周上で実数値をとる。このことから、上記三つの流れのほかに、変数 X が実のとき実の値をとる解析関数 $g(X)$ を考えると、

(iv)

$$f = g\left(i \frac{z_1 + i}{z_1 - i}\right), g\left(i \frac{z_1 - i}{z_1 + i}\right) \dots\dots\dots (7)$$

で表わされる流れも、単位円の周を流線としていることがわかる。これは、式 (5), (6) を含めたより一般的な形といえることができる。

式 (7) の表現の中で、 X の正整数乗の形をしたものは重要な意味がある。これらは、式 (2) の写像により、

$$\left(i \frac{z_1 + i}{z_1 - i}\right)^n = e^{-inkz}, \left(i \frac{z_1 - i}{z_1 + i}\right)^n = (-1)^n e^{inkz}$$

となる。このことは、 z と ζ の写像関数を Fourier 級数型の表示で表わしうることを意味している。

以上より、 z_1 面と ζ_1 面の関係は式 (4) の型の流れと、式 (7) の型の流れを組み合わせて、一般的に、

$$\begin{aligned} \log \frac{z_1 - i}{z_1 + i} + g_0\left(i \frac{z_1 + i}{z_1 - i}\right) + g_1\left(i \frac{z_1 - i}{z_1 + i}\right) \\ = \log \frac{\zeta_1 - i}{\zeta_1 + i} + g_0\left(i \frac{\zeta_1 + i}{\zeta_1 - i}\right) + g_2\left(i \frac{\zeta_1 - i}{\zeta_1 + i}\right) \end{aligned} \dots\dots\dots (8)$$

で表わされる。ここに、 $g_0(X), g_1(X), g_2(X)$ は、変数 X が実のとき、実の値をとる解析関数である。式 (8) で $g_0(X)$ は、 C_1, r_1 にあい対応する特異性をもつ流れをあらわし、 $g_1(X), g_2(X)$ は、それぞれ、 D_1, δ_1 に特異性をもつ流れを表わしている。式 (8) は、 z と ζ の関係に書き直すと、

$$\begin{aligned} ikz + g_0(e^{-ikz}) + g_1(-e^{ikz}) \\ = ik\zeta + g_0(e^{-ik\zeta}) + g_2(-e^{ik\zeta}) \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

となる。具体的にこの形の写像関数を作るときには、 $g_2(X)$ として、 ζ_1 面での流れが上下対称となるようなものを選んでおくと、 ζ_1 面での底面 $\alpha_1 \beta_1$ が $\phi=0$ の曲線と一致し、各面での対応を調べる際に便利である。

3. 写像関数の例

例-1: まず、式 (1) の写像関数について調べる。これは、式 (8), (9) で、

$$g_0(X) = g_2(X) = 0, g_1(X) = -akX$$

とおいたものに相当する。 z_1 面、 ζ_1 面での対応をみる

と z_1 面では,

$$f = \log \frac{z_1 - i}{z_1 + i} - ak \frac{z_1 - i}{|z_1 + i|}$$

であるから、 C_1 に吹き出し、 D_1 に吸い込みと二重吹き出しのある流れを想定し、 ζ_1 面では,

$$f = \log \frac{\zeta_1 - i}{\zeta_1 + i}$$

であるから、 r_1 に吹き出し δ_1 に吸い込みのある流れを想定していることになる (図-3)。

ζ_1 面の直線 $\alpha_1\beta_1$ 上では $\phi=0$ であるから、 z_1 面の $\phi=0$ が A_1B_1 に対応する。 z_1 面には 図-3 (a) に示すように、二本の $\phi=0$ の曲線が存在するが、曲線 I が底面 A_1B_1 に対応していることは明らかである。

式 (1) の ak の値を変化させたときの z 面での底面形状を 図-4 に示す。1. でも述べたように、底面形は峰でなければ谷が深くなっており、実際に実験室で観察される波による砂漣の形状とは趣きが異なっている。

式 (1) の写像で ak の値を少しでも大きくしていくと、 Z_1 面での $\phi=0$ の曲線 I, II はしだいに近づき、ある限界で接触する (図-3 (b))。さらに ak を大きくすると、曲線 I, II は一本になる (図-3 (c))。こうなると、もはや式 (1) で z 面と ζ 面を対応づけることはできなくなる。この限界は、 $\phi=0$ の曲線が円周上で滲み点に一致するという条件から厳密に求めることができる。具体的には、多少の演算の後、

$$ak = \frac{1}{e} \dots\dots\dots (10)$$

が得られる。これを用いて最大波高 h_{max} を求め (いまの場合、 a は厳密な振幅を表わしていないので $h_{max} \neq$

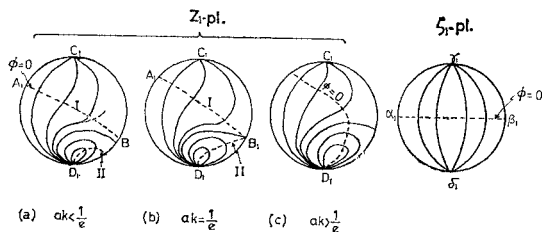


図-3 例-1. z_1, ζ_1 面の流れ

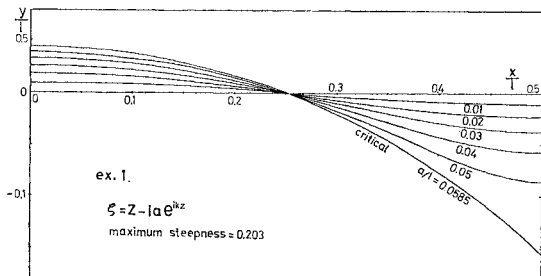


図-4 例-1. 底面形状

$2 a_{max}$), 最大波形勾配を求めると、
 $h_{max}/l = 0.203$ となる。

実際に波で生じた砂漣の最大波形勾配は 0.23 に達することが報告されている⁷⁾。このことと上述の適用限界との関係、および前述の底面形状のことを考えると、式 (1) の写像関数は、十分に発達した砂漣に対しては、あまり適当ではないと思われる。

例-2: 次に、 z_1 面の C_1 に吹き出し、 D_1 に吸い込みをおき、 ζ_1 面の r_1 に吹き出し、 δ_1 に吸い込みと二重吹き出しをおいた場合を考えてみよう。すなわち、式 (8), (9) で、

$$g_0(X) = g_1(X) = 0, g_2(X) = akX$$

とした場合である。この場合、 ζ_1 面での流れは上下対称とならないので、底面に相当する曲線は $\phi=0$ では表わされず、 z_1 面、 ζ_1 面を対応づけることは、やや煩雑な仕事になる。しかし、 z と ζ の関係は、

$$z = \zeta + iae^{ik\zeta} \dots\dots\dots (11)$$

と、比較的簡単な形になる。

この写像関数で変換される底面形は 図-5 に示される。例-1 の場合と逆に、峰で急勾配で、谷でなだらかな形となっており、図-4 に示したものと比べるとだいぶ実際の砂漣の形に近いものを表わしている。

式 (11) の適用限界は、例-1 の場合と同様の考察を行うことにより、

$$ak = 1 \dots\dots\dots (12)$$

という値が得られる。いまの場合、 a は厳密に波形の振幅と一致しており、これより最大波形勾配は、

$$h_{max}/l = 2 a_{max}/l = \frac{1}{\pi} = 0.318$$

となる。この値は、前述の波による砂漣の最大波形勾配 0.23 よりも大きく、式 (11) の写像が、発達した砂漣に対しても適用しうることを示している。

例-3: 例-1, 2 で示したものは、いずれも峰と谷とが非対称となる写像関数である。ここでは、峰と谷とが対称となる写像関数の最も簡単なものを求めてみよう。

z 面で峰と谷が対称となるようにするには、 z_1 面では原点に関して点対称、 ζ_1 面では、上下対称となる流れを想定して、両者を対応づければよい。そのような流れの最も単純なものは、式 (8), (9) で、

$$g_0(X) = \frac{a}{2} X$$

$$g_1(X) = -\frac{a}{2} X$$

$$g_2(X) = \frac{a}{2} X$$

とおいた流れであろう。この z_1, ζ_1 面での流れは 図-6 に示すとおりである。写像関数は、式 (9) より、

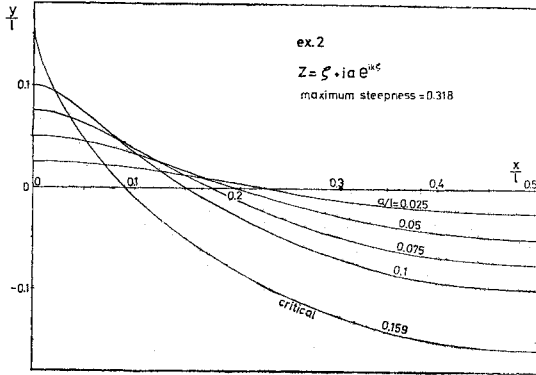


図-5 例-2. 底面形状

$$z - i \frac{a}{2} (e^{ikz} + e^{-ikz}) = \zeta + i \frac{a}{2} (e^{ik\zeta} - e^{-ik\zeta}) \dots\dots\dots (13)$$

となる。写像される底面形状を 図-7 に示す。式 (13) の適用限界も、例-1, 2 の場合と同様の考察から多少の演算の後に、

$$ak = \frac{1}{\sinh y/l} = 0.66278 \dots\dots\dots (14)$$

として得られる。ここに、 y/l は、 $(y/l) \tanh(y/l) = 1$

の解で、 $y/l = 1.1997$ である。これを用いて最大波形勾配を求めると (いまの場合、 a は厳密に振幅を表わしてはいない)、

$$h_{\max}/l = 0.3819 \quad \text{となる。}$$

4. おわりに

波形底面上の半無限領域を水平底面上の半無限領域に写像する関数の一般形を導き、さらに、その中の三つの具体例を取り上げ、写像される底面の形状、および、その適用限界を示した。説明には、二つの補助平面 z_1, ζ_1 面の単位円内の領域を介して行った。このような方法は、特異点が明確におさえられるという利点をもっている。

三つの例の中では、例-2 (図-5) に示したものが、実験室などで観察される波による砂漣に近い形状をしている。峰と谷とが対称な底面形に対するものとしては、例-3 に示したものが最も単純なものであろう。人工的な波形底面、たとえばコルゲート板上の流れなどを解析するときには、これが利用できるだろう。

本小論で示した一般形は、波形底面のすべての変換を表わしうるわけではなく、著者の気のついた一部の変換を表わしているにすぎない。しかし、ここに示した一般

形でも非常に広範囲の変換を表わしており、しかも、実際には、例に示した程度の単純な形のものが多いから、より包括的な一般形を探すことは、それほど益のあることとは思われない。

著者は、現在、砂漣上の波動境界層について解析をすすめている。ここに示したものは、その途上で必要に迫られて行った変換形のチェックを発展させ、一般的な考察を加えまとめたものである。同種の研究を行おうとする研究者にとって、本小論が多少とも資料になり得れば幸せである。

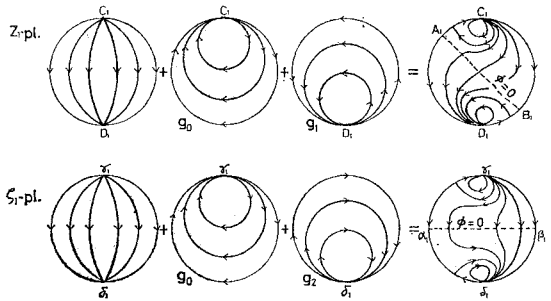


図-6 例-3. z_1, ζ_1 面の流れ

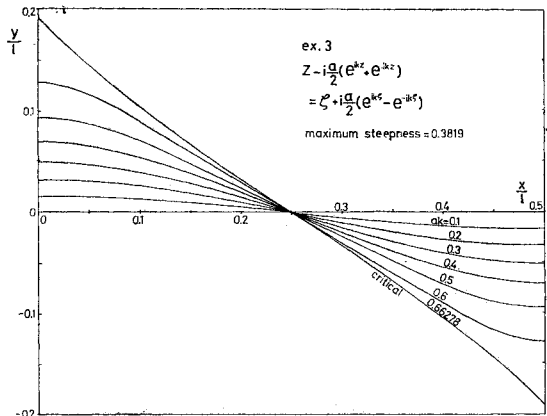


図-7 例-3. 底面形状

参考文献

- 1) 宇多高明・日野幹雄：土木学会論文報告集, 237, 1975.
- 2) 日野幹雄・藤崎治男：22回海岸工学論文集, 1975.
- 3) Benjamin, T.B.: Jour. of Fluid Mech., Vol. 6, 1959.
- 4) Lyne, W.H.: Jour. of Fluid Mech., Vol. 50, 1971.
- 5) Sleath, J.F.A.: ASCE, WW 2, 1974.
- 6) Sleath, J.F.A.: Jour. of Hydraulic Research, Vol. 14, 1976.
- 7) Homma, M. and K. Horikawa: Proc. 8th Conf. Coastal Engineering, 1963.

(1977. 8. 22・受付)