

弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析

NUMERICAL ANALYSIS OF MULTI-DIMENSIONAL CONSOLIDATION ACCOMPANIED WITH ELASTO-PLASTIC CONSTITUTIVE EQUATION

赤井 浩一*・田村 武**

By Koichi AKAI and Takeshi TAMURA

1. 序

粘土地盤上に盛土構造物などの外荷重が作用したとき、地盤内にいかなる変形が生じ、また、その構造物が安定かどうかを検討するには、現場の状態に則した境界条件のもとで変形・応力解析を行わなければならない。この種の問題に対しては、従来より数多くの研究がなされてきたが、いまだ確立された手法が得られていない。

周知のように、Terzaghi は一次元圧密による沈下をはじめ理論的に扱ったが、それによると沈下の機構は熱伝導型の方程式に支配され、比較的容易な境界条件のもとではその厳密解を得ることができる。しかし、実際の問題として、沈下が一次元圧密によると仮定できることはきわめて少なく、多次元圧密への理論の拡張がいくつか行われた。すなわち、Barron¹⁾ がサンドドレーンの解析に熱伝導型のまま用いているのをはじめ、Rendulic²⁾ もそれに類似した式を提案している。また、赤井と足立³⁾ も同様の式に、圧密中、内部的に発生する水頭変化による項を加えたものを誘導した。そして、Davis と Poulos⁴⁾ は平均全応力の変化を無視した熱伝導型の方程式でも十分な精度で近似解を得ることを述べている。それらに対して、Biot⁵⁾ はまったく別の立場から多次元圧密の基礎理論を展開した。すなわち、他のほとんどが土要素の連続条件から過剰間隙水圧を未知数にもつ支配方程式を導いているのに対し、Biot は変位をも未知数にもつ土要素のつり合い式を中心にして、これに連続の式を連立させながら支配方程式を組み立てた。これは理論的にまったく完全であり、圧密の機構を十分説明しているが、支配方程式が未知数として過剰間隙水圧と変位の両者を含む連立偏微分方程式となるため、数学的取り扱いを非常に難しいものとしている。しかし、この理論に

立って、McNamee と Gibson⁶⁾ あるいは Schiffman と Chen⁷⁾ が半無限地盤上の盛土の沈下問題を、Cryer⁸⁾ が球の圧密問題を解いているほか、山口と村上⁹⁾ は部分載荷をうける有限厚さの粘土層の変形問題を解いた。また、大槇¹⁰⁾ は粘弾性モデルを用いて円柱供試体の解を得ており、さらに吉国^{11), 12)} は Biot の理論に圧密ポテンシャルなる量を導入し、多次元圧密の理論面に二、三の寄与を果した。同様な観点から、Sills¹³⁾ も Terzaghi と Biot の理論を比較検討している。

しかし、実際の現地で遭遇するような一般的な境界条件や非線形特性をもつ地盤材料の問題に対しては数値解法によらざるを得ない。ここ数年発達してきた有限要素法を中心とする計算手法は複雑な条件下における Biot の圧密方程式の解析を可能にし、多次元的な圧密変形をする地盤の挙動の解明に大きな進歩を与えた。当初問題となったのは、圧密問題の初期値となるべき載荷直後の非排水状態における過剰間隙水圧の分布の算定である。非排水状態における飽和土の変形挙動に対して、Herrmann の導いた非圧縮性弾性体、または非圧縮に近い弾性体の基礎方程式を用いて算定する方法¹⁴⁾ もあるが、Christian¹⁵⁾ は弾性的構造骨格の体積ひずみを零におくという方法でこの非排水問題を解いた。この方法によると、連続条件を加味することで、載荷後時間的に進行する圧密解析への適用も可能となる¹⁶⁾。ほかに Sandhu と Wilson¹⁷⁾ や横尾¹⁸⁾ らはたたみこみ積分 (convolution integral) より変分法を用いて定式化を行い、圧密解析の手法を提案した。

圧密計算の過程で圧密中における応力状態の推移、すなわち、応力径路を追跡して解析する方法がある。この応力径路法¹⁹⁾は、あらかじめ推定した応力径路を実験室内の供試体に再現し、その径路に沿った応力-ひずみ関係を用いて沈下量の算定を行うなど変形解析にも有用であるが、応力径路を解明すること自体が地盤内破壊域の発生とその拡大など、構造物を支える地盤の安定解析に

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部交通土木工学科

** 正会員 工修 京都大学助手 工学部交通土木工学科

として欠くことのできないものである。この方法については、たとえば、赤井²⁰⁾が有効応力径路とコンプライアンスの概念を結びつけ、即時沈下と圧密沈下の割合などについて議論している。

一方、応力一ひずみ関係式の確立をめざす一連の研究が大いに発展を遂げ、従来多く用いられてきた弾性モデルよりも、さらに現象をよく説明できる関係式が提案された。時間効果こそ無視しているが Roscoe らの理論^{21), 22)}は、その最初の統一理論として位置づけられている。それは降伏条件および後続降伏条件を一つの曲面から定義するもので、比較的単純な式に粘土の特性が明快に記述されている。さらに最近では、クリープや応力緩和など時間効果を含む粘塑性モデルに対する構成式も、足立²³⁾や関口²⁴⁾によって提案されている。

上に述べたような圧密理論および応力一ひずみ理論は従来より別個に発展してきたきらいがあり、現在のところ両者を結びつけた変形解析はほとんどない。もちろん、実際現地においては、地盤の不均質性や境界条件の複雑さなど未知要素が多くあって、実測データと一致するような解析手法を得ることはきわめて困難であろうが、本研究は、特にダイレイタンシーなど土質材料に固有な特性が飽和粘性土地盤の圧密挙動に及ぼす影響を重視して、Biot の圧密方程式と Roscoe らの構成関係式を組み合わせた有限要素法による新しい一解析手法を提案するものである。

2. 応力一ひずみ関係

この研究で用いる 応力一ひずみ関係は、Roscoe らのいわゆる cambridge original theory (あるいはそれと本質的に等価な太田の dilatancy theory) を基礎にしている。この理論の中心は、

$$e - e_0 + \lambda \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'} + (1 + e_0) \mu \frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'} = 0 \quad \dots\dots (1)$$

なる状態曲面を導くことにある。ここに、 e, σ_m' および τ_{oct} はそれぞれ 間隙比、平均有効主応力 および 正八面体せん断応力であり、 λ, μ は圧密特性およびダイレイタンシー特性を表わす材料定数、 e_0, σ_{m0}' は付加的な積分定数である。式 (1) からわかるように、状態曲面は応力比 τ_{oct}/σ_m' の値に対応する無数の正規圧密曲線からできており、特に 等方圧密曲線や K_0 -圧密曲線を含んでいる。換言すれば、塑性状態にある飽和土の間隙比が応力径路とは無関係に、応力状態に対して一意的に定まることを意味している。一方、正規圧密状態から除荷されて過圧密状態になった飽和土の状態曲面は、

$$e - e_0 + \kappa \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'} = 0 \quad \dots\dots (2)$$

なる τ_{oct} に無関係な鉛直面 (これを膨潤壁という) と

なる。したがって、 $(e, \sigma_m', \tau_{oct})$ -空間での式 (1), (2) の表わす曲面の交線を $(\sigma_m' - \tau_{oct})$ -面に射影した曲線が降伏条件となり、次式でその降伏関数が与えられる。

$$f = \frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'} + \frac{\lambda - \kappa}{(1 + e_0) \mu} \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{my}'} = 0 \quad \dots\dots (3)$$

ここに、 κ は膨潤特性を表わす材料定数、 σ_{my}' は等方圧密曲線と膨潤壁との交点における平均有効主応力の値である。状態曲面上で各降伏曲線の最大の τ_{oct} をもつ点を連ねた曲線は限界状態曲線とよばれ、次式で表現される破壊条件である。

$$\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'} = \frac{\lambda - \kappa}{(1 + e_0) \mu} \quad \dots\dots (4)$$

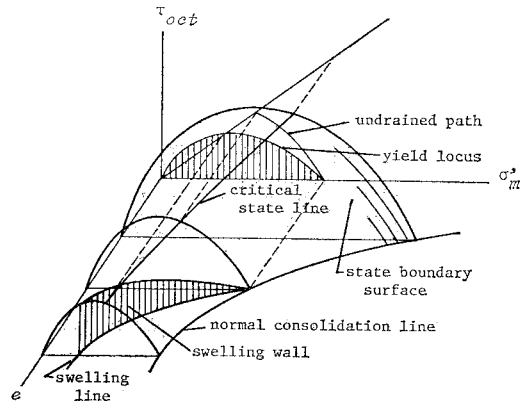


図-1 状態曲面

ある正規圧密状態から出発して、非排水条件のもとでせん断を行うと、 e の一定な面で状態曲面を切った曲線上をたどる。これが非排水径路であり、無数の降伏曲線を横切ることになる。図-1には状態曲面 (state boundary surface)、正規圧密曲線 (normal consolidation line)、膨潤曲線 (swelling line)、膨潤壁 (swelling wall)、降伏曲線 (yield locus)、限界状態曲線 (critical state line) および非排水径路 (undrained path) などを模式的に示す。

降伏関数とそれに続く後続降伏関数より応力一ひずみ関係を導くのであるが、その前に膨潤特性とポアソン比 ν とから、非線形 Lamé 定数 $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ を、

$$\tilde{\lambda} = \frac{1 + e}{\kappa} \sigma_m' - \frac{2}{3} \tilde{\mu} \quad \dots\dots (5)$$

$$\tilde{\mu} = \frac{3(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)} \frac{1 + e}{\kappa} \sigma_m' \quad \dots\dots (6)$$

のように定めておく。なお以下の数式では通常の総和規約が適用されているとする。

さて、有効応力 σ_{ij}' と硬化パラメータ P を含む降伏関数

$$f(\sigma_{ij}', P) = 0 \quad \dots\dots (7)$$

の全微分をとって、

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} d\sigma_{ij}' + \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_{ij}^P} d\varepsilon_{ij}^P = 0 \dots (8)$$

を得るが、これは $d\sigma_{ij}'$ なる応力増分により $d\varepsilon_{ij}^P$ なる塑性ひずみを生じたとき、加工硬化が起こって応力状態が後続の降伏曲面に達することを意味している。そして、弾性マトリックス D_{ijkl}^E による応力増分と弾性ひずみ増分の関係式

$$d\sigma_{ij}' = D_{ijkl}^E d\varepsilon_{kl}' \dots \dots \dots (9)$$

および associated flow rule と normality rule に従う塑性ひずみベクトルの方向を決める式

$$d\varepsilon_{ij}^P = A \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} \dots \dots \dots (10)$$

を式 (8) に代入して、その比例定数 A が、

$$A = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} D_{ijkl}^E \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}'}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} D_{ijkl}^E \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}'} - \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_{ij}^P} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'}} \dots \dots (11)$$

と定まり、最終的にこれらの理論に基づく応力-ひずみ関係

$$d\sigma_{ij}' = D_{ijkl}^{EP} d\varepsilon_{kl}' \dots \dots \dots (12)$$

が次のように導かれる²⁵⁾。

$$D_{ijkl}^{EP} = D_{ijkl}^E \frac{D_{ijmn}^E \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}'}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}'}, D_{pqkl}^E}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}'} D_{mnpq}^E \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}'} - \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_{mn}^P} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}'}} \dots \dots \dots (13)$$

上記の手順を実際の飽和土の変形解析に適用するには、式 (13) に降伏関数 (3) と弾性マトリックス D_{ijkl}^E に対応する式 (5), (6) を代入すればよい。この場合の硬化パラメータとして σ_{my}' を選んでよい。二次元平面ひずみ条件での応力-ひずみ関係は具体的に次のとおりである。

$$\begin{pmatrix} d\sigma_{xx}' \\ d\sigma_{yy}' \\ d\sigma_{zz}' \\ d\sigma_{xy}' \\ d\sigma_{yz}' \\ d\sigma_{zx}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} & \tilde{\lambda} & 0 \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} & 0 \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mu} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_{xx}' \\ d\varepsilon_{yy}' \\ d\varepsilon_{xy}' \end{pmatrix} - \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A^2 & AB & 2\tilde{\mu} f_{12} A \\ AB & B^2 & 2\tilde{\mu} f_{12} B \\ AC & BC & 2\tilde{\mu} f_{12} C \\ 2\tilde{\mu} f_{12} A & 2\tilde{\mu} f_{12} B & 4\tilde{\mu}^2 f_{12}^2 \\ 2\tilde{\mu} f_{23} A & 2\tilde{\mu} f_{23} B & 4\tilde{\mu}^2 f_{12} f_{23} \\ 2\tilde{\mu} f_{13} A & 2\tilde{\mu} f_{13} B & 4\tilde{\mu}^2 f_{12} f_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_{xx}' \\ d\varepsilon_{yy}' \\ d\varepsilon_{xy}' \end{pmatrix} \dots \dots \dots (14)$$

ここでは z 方向に平面拘束があるとしている。また、式中の記号は以下のとおりである。

$$f_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'}$$

$$D = \tilde{\lambda} f_{kk} + 2\tilde{\mu} f_{kl} f_{kl} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{my}'} \frac{\partial \sigma_{my}'}{\partial \varepsilon_{kl}^P} f_{kl}$$

$$\frac{\partial \sigma_{my}'}{\partial \varepsilon_{kl}^P} = \frac{1+e}{\lambda-x} \sigma_{my}' \delta_{kl}$$

$$A = \tilde{\lambda} f_{kk} + 2\tilde{\mu} f_{11}$$

$$B = \tilde{\lambda} f_{kk} + 2\tilde{\mu} f_{22}$$

$$C = \tilde{\lambda} f_{kk} + 2\tilde{\mu} f_{33}$$

ここで δ_{kl} は Kronecker の記号である。

特に破壊状態を意味する critical state において式 (14) は次の式 (15) なる形となるが、これは von Mises の降伏条件を用いた完全弾塑性体の場合と一致している。また、一般的な応力状態では、この時点でも不安定現象を起こさないが、軸対称応力状態のような特殊な条件下では、式 (15) による応力-ひずみ関係の意味は失われる。

$$\begin{pmatrix} d\sigma_{xx}' \\ d\sigma_{yy}' \\ d\sigma_{zz}' \\ d\sigma_{xy}' \\ d\sigma_{yz}' \\ d\sigma_{zx}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} & \tilde{\lambda} & 0 \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} & 0 \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mu} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_{xx}' \\ d\varepsilon_{yy}' \\ d\varepsilon_{xy}' \end{pmatrix} - \frac{2\tilde{\mu}}{3\tau_{oc}^2} \begin{pmatrix} s_x s_x & s_x s_y & s_x \tau_{xy} \\ s_y s_x & s_y s_y & s_y \tau_{xy} \\ s_z s_x & s_z s_y & s_z \tau_{xy} \\ \sigma_{xy} s_x & \sigma_{xy} s_y & \sigma_{xy} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} s_x & \sigma_{yz} s_y & \sigma_{yz} \sigma_{xy} \\ \sigma_{zx} s_x & \sigma_{zx} s_y & \sigma_{zx} \sigma_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_{xx}' \\ d\varepsilon_{yy}' \\ d\varepsilon_{xy}' \end{pmatrix} \dots \dots \dots (15)$$

ここに、 s_x, s_y および s_z は、それぞれ σ_x, σ_y および σ_z の偏差成分を表す。なお、ここで記した応力-ひずみ関係式 (14) は、硬化パラメータの選び方を除いて Zienkiewicz と Naylor²⁶⁾ が導いたものと本質的に同様なものである。

3. 圧密の数値計算法

(1) Biot の圧密方程式

ここで述べる圧密とは、次の Biot の方程式に従う現象として定義する。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_e}{\partial x_i} = 0 \dots \dots \dots (16)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{k}{r_w} \rho^2 u_e \dots \dots \dots (17)$$

ここに、 u_e, θ, k および r_w はそれぞれ過剰間隙水圧、体積ひずみ、透水係数および間隙水の単位体積重量である。式 (16) は微小な土要素のつりあい条件を意味し、式 (17) は要素の体積変化と排水量の関係を示す連続条件である。式 (16) において物体力を考慮に入れるのが

一般的であるが、以下の解析では自重による圧密が終了した時点の変形を基準としていること、および間隙水圧についても静水圧との差、つまり過剰間隙水圧を未知数としていることより、物体力は現われてこない。

さて、式 (16) と (17) はここで考える圧密を支配する方程式であるが、土質材料の特性などは式中に規定されていない。以下の説明を容易にするため、この節では材料は線形等弾性体であり次式が成立するものとしておく。

$$\sigma_{ij}' = \tilde{\lambda}\theta\delta_{ij} + 2\tilde{\mu}\varepsilon_{ij} \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ は Lamé の定数、 ε_{ij} はひずみテンソルである。したがって、この場合のつり合い式は変位 u_i と過剰間隙水圧 u_e で表現され、

$$\tilde{\mu}\nabla^2 u_i + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \frac{\partial u_e}{\partial x_i} = 0 \dots\dots\dots(19)$$

なる Navier の式を得る。

圧密を解釈する方法として、未知数、支配方程式とも 1 つにすることが考えられる。たとえば、式 (17), (19) を用いて、 θ あるいは u_e のみの方程式を誘導すると、

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{k(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})}{r_w} \nabla^2 \theta \dots\dots\dots(20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 u_e) = \frac{k(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})}{r_w} \nabla^2 (\nabla^2 u_e) \dots\dots\dots(21)$$

のように表現される。式 (20) をみると、体積ひずみ θ は Terzaghi の一次元圧密と同じ熱伝導型の方程式に支配されることになり、みかけの上で多次元圧密と一次元圧密が同じような機構をもっているようにみえる。また、式 (21) は、過剰間隙水圧 u_e に Laplacian ∇^2 を作用した量が熱伝導型の方程式に従うことを意味している。あるいは過剰間隙水圧が熱伝導型の方程式に従わないために発生する量

$$\psi = \frac{\partial u_e}{\partial t} - \frac{k(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})}{r_w} \nabla^2 u_e \dots\dots\dots(22)$$

が各時刻にわたって、

$$\nabla^2 \psi = 0 \dots\dots\dots(23)$$

を満たすということもできる。しかし、上記の解釈を表わす式 (20), (21) あるいは式 (23) は、圧密をそれらだけで支配するような、いわゆる圧密の支配方程式と考えるには無理がある。確かにそれらの未知数 θ , u_e あるいは ψ がわかれば、ほかのすべての量は既知となるが、それらはいずれも単独の未知数として境界値問題を設定するに十分な境界条件が与えられない。つまり、圧密を支配するのは式 (16) (あるいは (19)) と式 (17) の両式か、またはそれらと等価なものであり、多次元圧密を単独の式で表現することは一般に困難であるといわねばならない。

もとにもどって Biot の式 (16), (17) を考察する。個々の方程式の意味はすでに述べたとおりであるが、圧

密機構をこれらの式から説明すると次のようになる。

飽和粘土は粘土粒子のなす構造骨格とその内部を満たす間隙水の混合体であるが、間隙水の存在はそれ自体、構造骨格に固有な応力—ひずみ関係になんら影響を及ぼさない。換言すれば、そこには有効応力の原理が仮定されている。このことは、間隙水の役割を力学的な応力としての意味から、体積変化の拘束という幾何学的条件に変換しうることを認めている。すなわち、本来、飽和粘土が構造骨格の応力—ひずみ関係に従って変形しようとするのに対し、間隙水の存在は体積変化を拘束する。そのとき体積変化を阻止するための拘束力として過剰間隙水圧が発生するが、この拘束力まで考慮に入れたつりあい条件が式 (16) であるといえる。

以上のことは、変分法の立場からも明確に説明することができる。まず、過剰間隙水圧が存在しない場合は、通常の弾性体に帰着し、次の全ポテンシャルエネルギー $\pi[u_i]$ の停留条件として、つりあい式が解釈される²⁶⁾。

$$\pi[u_i] = \int_V W(u_i) dV - \int_{S_o} \bar{T}_i u_i dS \dots\dots\dots(24)$$

ここに、 $W(u_i)$ は単位体積あたりのひずみエネルギーで、

$$W(u_i) = \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \theta^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \dots\dots\dots(25)$$

と表わされ、また、 \bar{T}_i は応力境界 S_o 上での既知応力である。

一方、いま考えているような飽和土では、既知関数 $h(x_i)$ による体積ひずみの拘束条件

$$\theta = h(x_i) \dots\dots\dots(26)$$

を満たさねばならないので、全ポテンシャルエネルギー $\pi[u_i]$ は、Lagrange の未定乗数 $w(x_i)$ を用いて次のように修正される。

$$\pi^*[u_i, w] = \pi[u_i] + \int_V w(x_i) (\theta - h(x_i)) dV \dots\dots\dots(27)$$

ここで、 $\pi^*[u_i, w]$ の第一変分をとれば、停留条件の一部として、

$$\tilde{\mu}\nabla^2 u_i + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \dots\dots\dots(28)$$

を得る。これを式 (19) と比較すれば、拘束条件にかかる Lagrange 乗数 w がとりも直さず過剰間隙水圧に対応していることがわかる。このように変分法の立場からも、圧密現象における過剰間隙水圧を含んだつり合い式 (19) の意味が理解される。

つり合い式 (16) (あるいは式 (19)) に対して連続条件式 (17) のもつ意味は、上述の考え方からみると体積ひずみの拘束条件が時間とともにどのように推移していくかを決定する式であることがわかる。つまり、つり合い条件と体積ひずみの拘束条件より、非排水条件下の間

題として変位と過剰間隙水圧が求まるが、このとき連続条件は、この過剰間隙水圧の分布から微小時間後の体積ひずみの分布を決定し、新たな非排水条件下の問題を設定する。いいかえるなら圧密問題とは連続条件式により決定される一連の非排水条件下の問題と考えられ、このことを用いて以下の数値計算法の手順が組み立てられる。

(2) 連続条件式の差分近似

任意の境界条件のもとで Biot の方程式の閉じた形の解を得ることはきわめて困難であり、さらに非線形な応力-ひずみ関係を採用する場合、当然数値解析によらざるを得ない。

まず、体積ひずみの時間的推移を表現する連続条件式 (17) の近似手法にはいくつかの方法が考えられる。Christian と Boehmer¹⁶⁾ は、

$$\frac{\theta|_{t+\Delta t} - \theta|_t}{\Delta t} = -\frac{k}{r_w} p^2 u_e|_t \dots\dots\dots(29)$$

のように前進差分をとり、時刻 t における既知量 $\theta|_t$, $u_e|_t$ から Δt 時間後の未知量 $\theta|_{t+\Delta t}$ を算定し、 $h(x_i) = \theta|_{t+\Delta t}$ なる制約条件のもとでつりあい式 (16) を解いた。この手順を繰り返すことにより、圧密全期間中でのすべての量が得られる。差分の取り方が不安定であることや、時間的推移を連続条件のみに依存させていることが現象を的確にとらえていないとの批判もあるが、この方法は圧密の機構を明確に表現しているといえよう。

次に考えられる方法は、式 (17) をより安定な差分で近似しようとするもので、代表的なものとして以下の二通りがあげられる。

$$\frac{\theta|_{t+\Delta t} - \theta|_t}{\Delta t} = -\frac{k}{r_w} p^2 \left\{ \frac{u_e|_{t+\Delta t} + u_e|_t}{2} \right\} \dots\dots(30)$$

$$\frac{\theta|_{t+\Delta t} - \theta|_t}{\Delta t} = -\frac{k}{r_w} p^2 u_e|_{t+\Delta t} \dots\dots\dots(31)$$

時間について前者は中間差分、後者は後退差分であるが、両者とも式 (29) のように陽な形で $\theta|_{t+\Delta t}$ を表わすことができず、つり合い条件式 (16) と連立させなければならない。式 (30) の近似法は時刻 $t + \frac{\Delta t}{2}$ における式 (17) の差分として最も妥当な表現であり、Sandhu と Wilson¹⁷⁾ はたたみこみ積分による定式化の結果として、これと同じものを提案している。しかし、ここでは、近似はやや粗いものの、安定な差分として最も簡単な式 (31) の方法を用いることにする。

(3) 有限要素法への適用

上述したことから、応力-ひずみ関係が仮定されたならば、容易に有限要素法による圧密解析の定式化が可能となる。ただし、次の事項については十分考慮せねばな

らない。すなわち、変位は各節点のものをとるのは通常のとおりであるが、過剰間隙水圧を同じく節点に対応させるか、あるいは要素に対応させるか、二通りの方法がある。過剰間隙水圧の計算の精度には前者が望ましく、Sandhu と Wilson をはじめ多くの研究ではこの手法をとっている。しかし、Biot の方程式のもつ意味を考えると、すでに述べたように、過剰間隙水圧が体積ひずみの拘束力として定義されることから、むしろこれを要素全体に対応させるのがより自然ともいえる。よってここでは Christian と Boehmer と同様にこの方法を用いた。

剛性マトリックスを導くため、以下の定義をしておく。

$$u = A\bar{u} \dots\dots\dots(32)$$

$$e = B\bar{u} \dots\dots\dots(33)$$

$$\theta = C^T \bar{u} \dots\dots\dots(34)$$

ここに、 A は節点変位ベクトル \bar{u} から要素内変位 u への変換マトリックス、 B は A を微分して導かれる要素内ひずみベクトル e への変換マトリックス、 C^T は B より導かれる要素の体積ひずみへの変換ベクトルで、記号 T は転置を意味する。問題を平面ひずみ条件に限定し、一般の応力-ひずみマトリックス D が既知であるとき、要素 e の全ポテンシャルエネルギー式 (27) は、

$$\bar{\pi}^*[\bar{u}, \bar{u}_e] = \int_e \left[\frac{1}{2} \epsilon^T D \epsilon + \bar{u}_e (\theta - h) \right] dS - \bar{F} \bar{u} \dots\dots\dots(35)$$

と近似されるが、節点変位 \bar{u} と要素内過剰間隙水圧 \bar{u}_e に対する停留条件を満たすことより、

$$\begin{bmatrix} F \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & L \\ L^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{u}_e \end{bmatrix} \dots\dots\dots(36)$$

が導かれる。ここに、 F は境界応力 \bar{T}_i を集中力で近似した等価節点力ベクトルであり、上式で定義される。また、 K は通常の変位マトリックス、 L^T は節点変位を要素の体積変化 V に変換するベクトルであって、それぞれ次のように定義される。

$$K = \int_e B^T D B dS \dots\dots\dots(37)$$

$$L = \int_e C dS \dots\dots\dots(38)$$

$$V = \int_e h dS \dots\dots\dots(39)$$

ただし、積分は要素 e の占める面積全体にわたって行う。

図-2 を参照しながら連続条件式 (31) を考えると、

$$V|_{t+\Delta t} = V|_t - \{ \alpha \bar{u}_e - \sum \alpha_i \bar{u}_{ei} \} \dots\dots\dots(40)$$

が得られる。ここに、 s_i を要素 i までの中心間の距離、 b_i を排水面の幅として係数 α, α_i はそれぞれ次のとおり定義される。

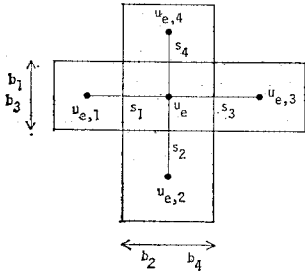


図-2 間隙水の消散モデル

$$\alpha = \frac{k \Delta t}{\gamma_w} \sum \frac{b_i}{s_i} \dots \dots \dots (41)$$

$$\alpha_i = \frac{k \Delta t}{\gamma_w} \frac{b_i}{s_i} \dots \dots \dots (42)$$

したがって、式 (36) を変形して、

$$\begin{bmatrix} F|_{t+\Delta t} \\ V|_t \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{K}{L^T} & \frac{L}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{u}_e \end{bmatrix} \Big|_{t+\Delta t} - \sum \alpha_i u_{ei} |_{t+\Delta t} \dots \dots \dots (43)$$

が時刻 $t + \Delta t$ で成立する。これが圧密計算のための拡大された要素剛性マトリックスである。

特に非線形問題を増分的に解くには、式 (43) をさらに修正して、次の関係を用いる。

$$\begin{bmatrix} \Delta F + L \bar{u}_e |_t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{L^T} & \frac{L}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{u} \\ \bar{u}_e |_{t+\Delta t} \end{bmatrix} - \sum \alpha_i u_{ei} |_{t+\Delta t} \dots \dots \dots (44)$$

ここに、 ΔF と $\Delta \bar{u}$ はそれぞれ Δt 時間内における節点力および節点変位の増分である。

4. 数値計算と結果の考察

図-3 に示すように、半幅 48 m、深さ 24 m の飽和粘土地盤からなる長方形領域に、半幅 9 m、最大荷重強度 5 t/m^2 の台形状盛土が瞬時に行われることを想定して、変形・応力解析を試みた。境界条件としては領域の左右端、下端とも滑らかで剛とし、間隙水圧の消散は領域の上端のみでなされるものとする。領域を図のように 35 個の長方形からなる要素に分割し、各要素の剛性マトリックスは長方形を二通りに分割してできる三角形要素のその平均として求めた。用いた材料定数は次のと

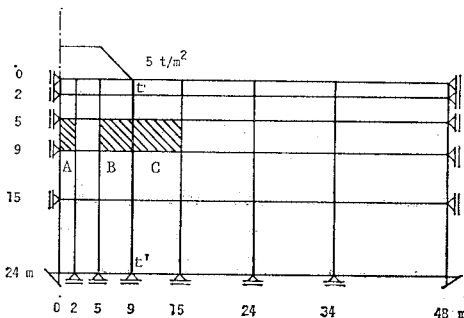


図-3 解析領域と要素分割

おりである。

- 粘土層の単位体積重量 $\gamma = 1.62 \text{ t/m}^3$
- 透水係数 $k = 10^{-6} \text{ cm/sec}$
- 圧密指数 $\lambda = 0.25$
- 膨潤指数 $\kappa = 0.03$
- 粘土の構造骨格のポアソン比 $\nu = 1/3$
- 静止土圧係数 $1/2$
- 積分定数 $e_0 = 1.59, \sigma_{m0}' = 10 \text{ t/m}^2$

また、盛土期間是非排水条件のまま 10 段階に、圧密期間は 43 段階にそれぞれ分割して増分法を用いた。多次元解析を行う

準備として、一次元圧密の計算により、時間間隔の取り方など計算法について精度を確かめたものが図-4で

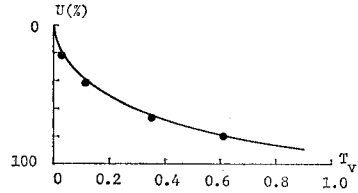


図-4 一次元圧密による圧密度の比較

ある。数値計算の結果は、圧密開始直後において解析曲線よりも圧密度にして 2~3% 速く圧密が進行しているが、時間とともにその誤差はほとんど無視しうるまで小さくなっている。

以下、ダイレイタンスー係数 μ および先行上載荷重（あるいは過圧密比）などの変形挙動に対する影響をみるため、次の 3 つの場合について比較検討を行った。

- Case 1 : $\mu = 0.12$, 先行上載荷重 1 t/m^2
- Case 2 : $\mu = 0.04$, 先行上載荷重 1 t/m^2
- Case 3 : $\mu = 0.12$, 先行上載荷重 6 t/m^2

ただし、先行上載荷重とは領域の上端全面に載荷し完全に圧密したあと除荷して膨潤させたことを意味する。これらを相互に比較すれば、圧縮とダイレイタンスーによる大きい塑性変形を呈する Case 1 と比べ、Case 2 はダイレイタンスーの影響の小さい場合であり、また、Case 3 は荷重強度 (5 t/m^2) より大きな全面上載荷重で過圧密された場合であるといえる。

図-5 は、図-3 に記された地盤内の代表的な 3 要素の応力径路を (σ_m', τ_{oct}) 一面で表わしたものである。ここに、実線は有効応力、破線は全応力に対応しているが、非排水時(載荷時)の全応力径路はほぼ直線状であったので省略されている。図中、点 A は K_0 線上で過圧密状態にある初期応力点、点 J は非排水条件のもとの盛土載荷の完了点、点 B は圧密の終了点、および点 P は弾性状態(過圧密状態)から弾塑性状態(正規圧密状態)への移行点をそれぞれ意味しており、それらにつけられた添字 1~3 は、それぞれ Case 1~3 に対応している。

各場合の非排水径路の理論曲線を細線で記している

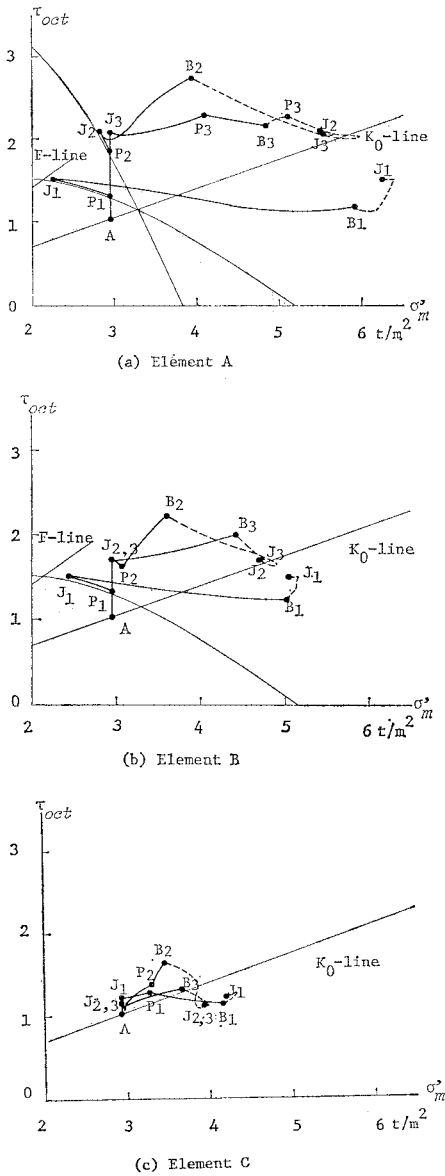


図-5 応力径路

が、図からわかるように、 τ_{oct} 軸と平行な径路をたどる弾性範囲も含めて、すべての非排水有効応力径路はほぼ完全に理論曲線と一致している。両者のこの重なりは、構成関係に対する数値計算の良好な精度を意味している。圧密中の応力径路については各要素とも次のような特徴をもつ。Case 1 は σ_m' 軸と平行に近い小さなこう配で最も多く σ_m' を増加させる一方、Case 2 はそのこう配が大きく σ_m' の増加も少ない。そして、応力径路のほとんどが過圧密状態にある Case 3 は両者の間に位置している。これらのことは定性的に次のように説明される。過圧密状態にある Case 3 の応力径路を基準とすると、圧縮に塑性成分を含む Case 2 ではより多くの体

積変化を生じる。それが平面ひずみを拘束する方向の垂直応力を減少させる結果、 τ_{oct} が増加し、かつ全応力 σ_m が減少する。次に Case 1 では、Case 2 と比較してかなり大きなダイレイタンスーの効果があり、それが圧縮をせん断変形に変換するため、 τ_{oct} の増加と σ_m の減少が妨げられている。すなわち、圧縮による塑性成分とダイレイタンスーによる塑性成分が競合しあって、Case 1 と Case 3 の圧密中における応力径路が、みかけの上で同じようなこう配をもつと考えられる。同図には、式 (4) で表わされる破壊線 (F-線) を記しているが (ただし、Case 2 に対する破壊線はこう配が大きくて図の外にある)、これへの接近で各要素の破壊に対する安定性を論じるとき、次のようなことがわかる。すなわち、圧密期間中はすべての要素で σ_m' が増加するため、一般に応力点は破壊線から遠ざかるうとする。Case 2 では、この期間に一部で応力比 τ_{oct}/σ_m' をわずかに増大させているが、破壊に至るほどのものではない。したがって、圧密期間中に地盤内で破壊域が発生する危険は少ないと考えてよい。つまり、盛土のような土上載荷重が加わる場合、破壊に関して最も危険とされる状態は非排水条件のもとでの載荷期間にある。この期間中の応力径路は、正規圧密状態では非排水径路に沿って、過圧密状態では τ_{oct} 軸と平行にそれぞれ破壊線に近づこうとする。これらの挙動を詳しく調べるため図-6 に非排水条件のもとで載荷重を単調に増加し続けたとき発生、拡大していく塑性域 (斜線部) および破壊域 (塗りつぶした部分) を示した。この図からわかるように、ダイレイタンスーの効果が大きく、先行上載荷重の小さい Case 1 で塑性域、破壊域の拡大が最も早い。そして、ダイレイタンスーの効果の小さい Case 2 では、先行上載荷重の大きい Case 3 と比較して、塑性域の発達は早い、その後の破壊域の拡大は遅くなっている。これらの領域の発生とその拡大がダイレイタンスーや先行上載

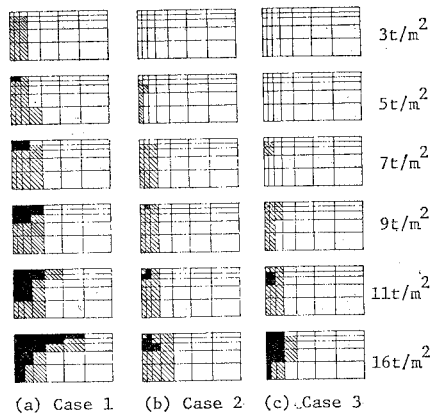


図-6 非排水条件における塑性域・破壊域の発達

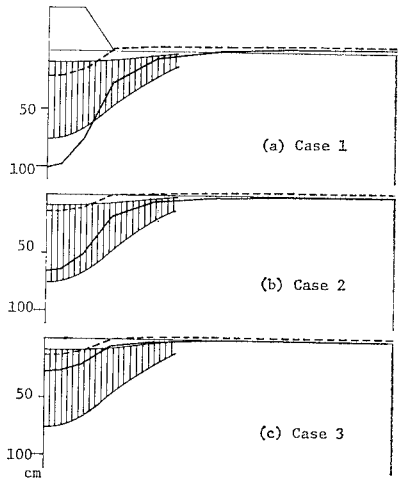


図-7 地表面における沈下曲線

荷重に大きく依存することは、安定解析を行う際、十分留意しなければならない。

図-5 に記した載荷完了点から圧密終了点までの全応力の径路（破線）をみれば、圧密の進行とともに全応力状態は明らかに変化していることがわかる。なかでも圧密開始直後に生じる全応力 σ_m の増加には注目すべきである。この現象は、圧縮量の最も大きい Case 2 において顕著であり、発生する時期、位置からして多次元圧密に固有な Mandel-Cryer 効果と考えられる。

図-7 には、地表面（地盤領域の上端）における沈下曲線が、載荷完了時を破線で、圧密終了時を実線でそれぞれ示されている。載荷完了時において Case 2, 3 の沈下量がほぼ同じであるのに比べ、Case 1 のそれは少し大きい。これは、図-5 に示した応力径路を比較すればわかるように、Case 1 ではこの時点での塑性変形が卓越していることに起因する。しかし、体積ひずみが零という強い幾何学的な制約のある非排水条件下では、各 Case の変形挙動にそれほど大きな違いはないといえる。

一方、最終沈下量については、全期間のほとんどを過圧密状態のまま沈下した Case 3 が最も小さく、Case 2 よりも強いダイレイタンスーの効果をもつ Case 1 は、せん断による沈下が重複して最も大きい沈下量を呈している。そして、全沈下量に占める即時せん断沈下量の割合は Case 1 で最も少なく（約 1/5）、Case 3 で最も多い（約 1/2）。

また、同図には、半無限地盤の弾性理論解²⁷⁾から得られる粘土層の中央高さの垂直応力の増分を、公式

$$\rho_e = H \frac{de}{1+e_0} \dots \dots \dots (45)$$

に代入して求めた最終沈下曲線が示されている。ただし、完全な正規圧密状態あるいは完全な過圧密状態のまま沈下する場合をそれぞれ上限、下限とする範囲（縦線

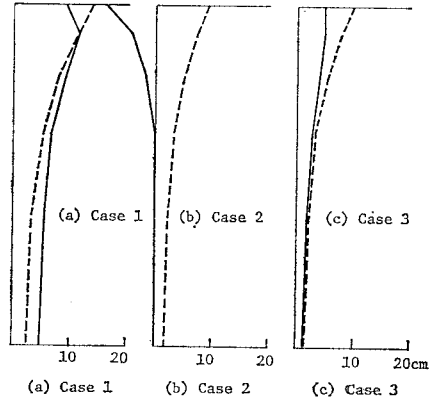


図-8 のり先を通る鉛直断面における側方変位

部）で記している。ここに、 H は粘土層の厚さ（24 m）、 de は間隙比の変化量である。過圧密比を考慮しながら比較すると、載荷前に 1 t/m^2 の先行上載荷重に対応する過圧密状態であった Case 2 では、上の公式にかなり近い沈下が生じているのに対し、同じ過圧密状態であった Case 1 では、ダイレイタンスーに起因する過大な沈下がみられる。また、 6 t/m^2 の先行上載荷重に対応する過圧密状態であった Case 3 でも良好な近似を示している。よって境界条件や材料特性が異なるとはいえ、ダイレイタンスーの効果のあまり大きくない場合は、この簡便法でも十分な沈下予測ができるものと思われる。

図-8 に、のり先を通る鉛直断面 $t-t'$ （図-3 参照）の側方変位曲線を示す。破線で表わされた載荷完了時のものは図-7 の沈下曲線と同様な傾向をもつが、実線で表わされた圧密終了時のものには次のような特徴がある。弾性的挙動の支配的な Case 3 では、圧密に伴う側方変位のもどりが少しみられるだけであるのに対し、塑性的な圧縮量を多く含む Case 2 では初期の位置よりもまだ中央へ寄るほど大きなもどり量を呈している。しかし、ダイレイタンスーの効果の大きい Case 1 では、圧密期間中ほとんどもどりをみせていない。

これらのことをより詳しく考察するために、荷重付近における変位の大きい部分を拡大して、各節点の変位径路を示したのが図-9 である。これより、上に述べた地盤の変形挙動がよくわかる。すなわち、載荷完了点を表わす最初の点までは、各場合ともほぼ直線的に非排水変形を起こすが、圧密の進行に伴い Case 2, 3 で沈下とともに側方変位のもどりがあがる。特に Case 2 ではダイレイタンスーの効果は少なく、等方的な弾塑性材料に近い。このことと載荷時ではほとんど弾性状態であったのが、圧密開始後、塑性状態になることより Case 3 の数倍大きい水平変位のもどりを見せて、最終的に最初の位置よりも中央へ寄ってしまう。つまり、図-8 における

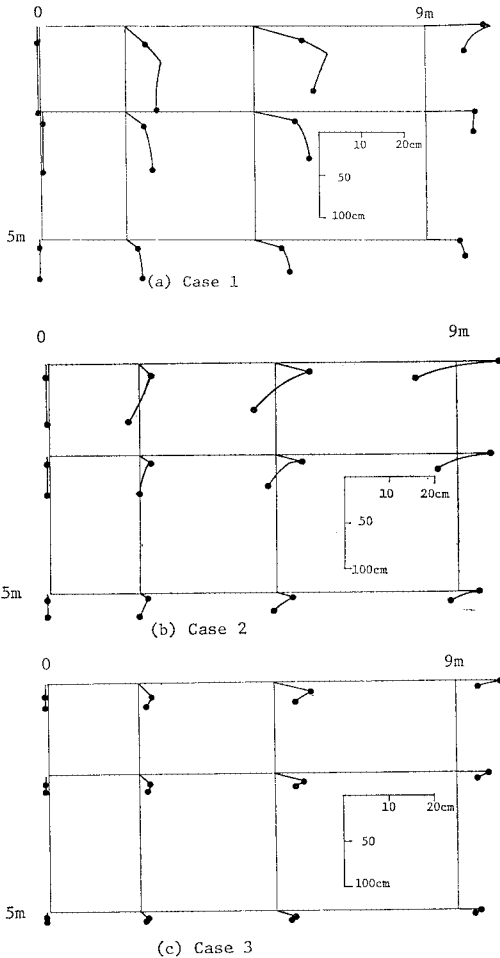


図-9 荷重付近における節点の変位径路

Case 2 の大きなもどり量は、圧密時のみかけの弾性定数が非排水時のそれより小さいことに起因しているといえる。一方、Case 1 では水平変位のもどりを妨げようとするダイレイタンスーの作用がみられる。

図-10 は盛土中央の地表面での即時沈下量を除外した圧密による沈下量の時間的推移を示したものである。沈下度の進行は Case 3 が最も速く、Case 1 が最も遅い。また、中央高さにおける体積弾性係数より換算した

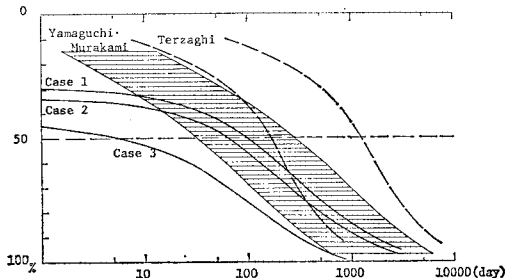


図-10 圧密沈下度

圧密係数 c_v (正規圧密状態: $1.06 \times 10^{-2} \text{cm}^2/\text{sec}$, 過圧密状態: $9.13 \times 10^{-2} \text{cm}^2/\text{sec}$) を対応させて、山口と村上の解析解(層厚と荷重の半幅の比=0.25 として)より読みとった沈下度の範囲(横線部)が同時に記されている。これらと比較して圧密初期の10日後で数値解はやや大きな沈下度を示すが、約100日以後は両者でかなりの一致がみられる。Terzaghi の一次元圧密の解より求めた同様の沈下度曲線(破線)の範囲も記されているが、山口らが述べているように層厚と荷重幅の比率が沈下度に大きな影響を与えるため、その解による沈下度は数値解のものより大幅に遅くなっている。

5. 結 論

飽和粘土よりなる地盤上に盛土などの上載荷重が作用した場合に地盤が示す変形挙動を明らかにする目的で、弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析の新しい手法を提案した。この研究では、特にダイレイタンスーなど土質材料に固有な特性が地盤に及ぼす影響を重視して、Biot の圧密方程式と Roscoe らの構成関係式を組み合わせた有限要素法による解析を行い、次のような結果を得た。

(1) ここで提案した圧密の数値計算法は、一次元弾性モデルとの比較からほぼ十分な近似を示し、また、増分形として用いた応力-ひずみ関係についても、数値解と理論解による非排水径路の相互の比較から満足すべき精度で近似されている。

(2) 正規圧密状態にある飽和土では、ダイレイタンスーと圧縮の双方に含まれる塑性変形が複雑に影響している。すなわち、ダイレイタンスーの効果としては、応力径路上で τ_{oct} を小さくし、かつ全応力 σ_m の変化をも少なくしている。また、変形については、ダイレイタンスーの効果は荷重直下でのせん断変形を増し、沈下および側方流動をいずれも大きくしている。

(3) 沈下-時間曲線からみると、多次元圧密では圧密の進行が一次元圧密に比べてかなり速い。これは従来、現地の試験盛土などで観測されていた事実をよく説明している。

(4) せん断変形に基づく初期沈下量は、過圧密比の大きい地盤ほど全体に占める割合が大きく、ダイレイタンスーの効果は逆にこの割合を小さくする。また、圧縮性の大きい地盤では、いわゆる Mandel-Cryer 効果が顕著にみられる。

(5) 図-8, 9 の Case 2 でみるように、先行上載荷重や材料定数の関連によって圧密期間における負の側方変位が卓越し、最終的にもとの位置より負の水平変位を呈することがある。

(6) 塑性域や破壊域の発生と発達の様相は、地盤材のダイレイタンスー、圧密特性および過圧密比に大きく影響を受け、安定解析にはこれらは十分考慮する必要がある。

なお、数値計算にあたっては、京都大学大型計算機センター FACOM 230-75 を用いたことを付記する。

参考文献

- 1) Barron, R.A. : Consolidation of Fine-grained Soils by Drain Wells, *Trans. A.S.C.E.*, Vol. 113, pp. 811-835, 1948.
- 2) Rendulic, L. : Porenziffer und Porenwasserdruck in Tones, *Bauingenieur*, Vol. 17, pp. 559-564, 1937.
- 3) 赤井浩一・足立紀尚：有効応力よりみた飽和粘土の一次元圧密と強度特性に関する研究，土木学会論文集，第113号，pp. 11-27, 1965.
- 4) Davis, E.H. and Poulos, H.G. : Rate of Settlement of Two- and Three- dimensional Conditions, *Géotechn.*, Vol. 22, No. 1, pp. 95-114, 1972.
- 5) Biot, M.A. : General Theory of Three-dimensional Consolidation, *Journ. Appl. Phys.*, Vol. 12, pp. 155-164, 1941.
- 6) McNamee, J. and Gibson, R.E. : Plane Strain and Axially Symmetric Problems of the Consolidation of a Semi-infinite Clay Stratum, *Q. Journ. Mech. Appl. Math.*, Vol. 13, Part. 2, pp. 210-227, 1960.
- 7) Schiffman, R.L. and Chen, A. T.-F. : An Analysis of Consolidation Theories, *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 95, SM 1, Jan., pp. 285-312, 1969.
- 8) Cryer, C.W. : A Comparison of the Three-dimensional Consolidation Theories of Biot and Terzaghi, *Q. Journ. Mech. Appl. Math.*, Vol. 16, Part 4, pp. 401-412, 1963.
- 9) 山口柏樹・村上幸利：有限粘土層の多次元圧密について，土木学会論文報告集，第204号，pp. 71-82, 1972.
- 10) 大槓正紀：粘土の3次元圧密に関する一考察，京都大学防災研究所年報，第14号B，pp. 585-602, 1971.
- 11) 吉国 洋：多次元圧密理論とその軸対称問題への適用，東京工業大学学位論文，1973.
- 12) 吉国 洋・時枝 繁：帯基礎の圧密過程について，土木学会第31回年次学術講演会講演概要集，III-99, 1976.
- 13) Sills, G.C. : Some Conditions under which Biot's Equations of Consolidation Reduce to Terzaghi's Equation, *Géotechn.*, Vol. 25, No. 1, pp. 129-132, 1975.
- 14) 赤井浩一・足立紀尚・田村 武：非圧縮性およびそれに近い弾性体の変分原理とその応用について，土木学会第29回年次学術講演会講演概要集，I-22, 1974.
- 15) Christian, J.T. : Undrained Stress Distribution by Numerical Method, *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 94, SM. 6, Nov., pp. 1333-1345, 1968.
- 16) Christian, J.T. and Boehmer, J.W. : Plane Strain Consolidation by Finite Elements, *Proc. A.S.C.E.*, SM 4, July, pp. 1435-1457, 1970.
- 17) Sandhu, R.S. and Wilson, E.L. : Finite-element Analysis of Seepage in Elastic Media, *Proc. A.S.C.E.*, EM 3, June, pp. 641-652, 1969.
- 18) Yokoo, Y., Yamagata, K. and Nagaoka, H. : Finite Element Method Applied to Biot's Consolidation Theory, *Soils and Foundations*, Vol. 11, No. 1, pp. 29-46, 1971.
- 19) Lambe, T.W. and Whitman, R.V. : *Soil Mechanics*, John Wiley and Sons, 1969.
- 20) 赤井浩一：有効応力よりみた盛土基礎地盤の沈下解析，京都大学防災研究所年報，第15号B，pp. 485-498, 1972.
- 21) Roscoe, K.H. and Burland, J.B. : On the Generalized Stress-Strain Behavior of 'Wet' Clay, *Engng. Plasticity*, Cambridge Univ. Press, 1968.
- 22) Ohta, H. : Analysis of Deformation of Soils Based on the Theory of Plasticity and its Application to Settlement of Embankment, 京都大学学位論文，1971.
- 23) Adachi, T. and Okano, M. : A Constitutive Equation for Normally Consolidated Clay, *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 4, pp. 56-73, 1974.
- 24) 関口秀雄：飽和粘土の応力-ヒズミ-時間関係式とそのFE解析への適用，第11回土質工学研究発表会講演集，pp. 267-270, 1976.
- 25) Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T. : Plastic Stress-Strain Matrix and its Application of Elastic-plastic Problems by the Finite Element Method, *Int. Journ. Mech. Sci.*, Vol. 10, pp. 343-354, 1968.
- 26) Washizu, K. : *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, 1968.
- 27) 日本道路公団試験所：帯状荷重による地盤内応力影響値，1968.
- 28) Zienkiewicz, O.C. and Naylor, O.J. : The Adaptation of Critical State Soil Mechanics Theory for Use in Finite Elements, *Stress-Strain Behavior of Soils*, 1971.

(1976.12.8・受付)