

Newmark の β 法における位相遅れ補正の一方法A METHOD FOR PHASE CORRECTION OF NEWMARK'S β -METHOD水田 洋 司*・西山 研 一**・平 井 一 男***
By Yoji MIZUTA, Ken-ichi NISHIYAMA and Itio HIRAI

1. はじめに

動的応答を求める解析手法には、2階の常微分方程式を初期値問題として解いていく方法が多く用いられているようである¹⁾。これは、時間領域を有限の刻み時間間隔 h で分割し、初期条件により逐次応答を求めようとするものである。計算法は、直接解析解を近似する方法、数値積分法(逐次積分法)の2つに大別することができる。前者には、Argyris²⁾、滝沢^{3),4)}らの方法があるが、いずれも対象とするマトリックスの次数が2倍となり、また複雑な計算が必要となる。後者には、一般に知られている線形加速度法^{1),5)}、Runge-Kutta 法⁶⁾、Newmark の β 法^{7),8)}、Wilson の θ 法^{9),10)}があるが、いずれの手法もある仮定のもとに近似的に解いているため、解析的に誤差が生じる。たとえば、線形加速度法は、刻み時間間隔の間で加速度を線形変化と仮定しているため、実際の外力変化とは異なる3次曲線の外力が作用している系を解いていることに等しい。しかも、誤差外力(=加速度を線形変化と仮定したために作用する外力と実際の外力との差)が仕事をするために生ずる誤差エネルギーが各ステップごとに蓄えられ、あるいは放出される。これらの誤差外力、誤差エネルギーは、解析手法中に本質的に存在する誤差であり、応答の安定性、位相遅れに関係する。また、誤差外力、誤差エネルギーは、刻み時間間隔 h の関数で表わされる。 h を大きくすると、誤差外力、誤差エネルギーが大となるため、線形加速度法、Runge-Kutta 法、Newmark の β 法 ($\beta \neq 1/4$) は不安定となり、Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) は位相遅れを、Wilson の θ 法は減衰、位相遅れを伴う。これらのトラブルは、 h を小さくすることにより除くことができるが、経済上

の面から許容できる h の大きさは、制限される。

本論文では、あらかじめ、その系の最小固有値を求め、これをもとにして解が安定でかつ位相遅れが小となる解析方法を提案する。まず1自由度系について、速度と変形の漸化式を一つ前の時間点における加速度、速度、変形に未知のパラメーターをかけた形で表わす。この漸化式を差分方程式に変換し、安定の条件、位相遅れの条件によりパラメーターを決め、漸化式が h によって定まるパラメーター e を含む形で表わされることを示す。また、この漸化式が、Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) を特殊な場合 ($e=1$) として含み、その他の場合 ($e \neq 1$) は位相遅れがないことを示す。次に1自由度系で成立するこの漸化式を多自由度系に適用する場合の問題点について論じ、多自由度系においても Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) より位相遅れが小さいことを示す。

逐次積分法の最大の利点は、多自由度系の応答をなんの準備もなしに直接積分により求めることができる点にあると考えられる。しかし、 h の取り方に問題がある。本法は、系の最小固有値をあらかじめ求めておくことを必要とするが、刻み時間間隔を長くとっても、安定で位相遅れが小さいという点から、逐次積分法の一つの利点を満足させ得ると考えられる。

2. 解析法

動的応答解析は、いずれの解析手法においても、次式で表わされる多質点系の運動方程式を解くことに帰着する。

$$M\ddot{W} + C\dot{W} + KW = F(t) \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 M は質量マトリックス、 C は減衰マトリックス、 K は剛性マトリックス、 \ddot{W} は加速度ベクトル、 \dot{W} は速度ベクトル、 W は変形ベクトル、 $F(t)$ は外力ベクトルを表わす。 M, C, K は、線形系の場合には定数マトリックスであり、以下では線形系として取り扱う。い

* 正会員 工修 八代工業高等専門学校講師 土木建築工学科

** 正会員 工修 三井造船(株)

*** 正会員 工博 熊本大学教授 工学部土木工学科

ま、式(1)を逐次積分法により解くことを考え、 $(n-1)$ 時間点での応答は既知とする。 n 時間点の速度と変形が $(n-1)$ 時間点の応答を用いて次式のように表わされるものと仮定する。

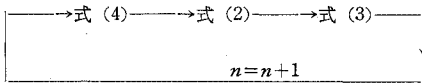
$$\dot{W}_n = \dot{W}_{n-1} + h(a\ddot{W}_{n-1} + b\dot{W}_{n-1}) \dots\dots\dots(2)$$

$$W_n = W_{n-1} + eh\dot{W}_{n-1} + h^2(c\ddot{W}_{n-1} + d\dot{W}_{n-1}) \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 h は刻み時間間隔であり、 $a \sim e$ の各パラメータは各量の n 時間点への寄与量を表わすものである。式(2)、(3)には、未知量 \dot{W}_n が含まれるが、これは、式(1)~(3)の連立方程式として求めることができる。すなわち、

$$\begin{aligned} \dot{W}_n &= (M + bhC + dh^2K)^{-1} \{F(t) \\ &\quad - K(W_{n-1} + eh\dot{W}_{n-1} + ch^2\ddot{W}_{n-1}) \\ &\quad - C(\dot{W}_{n-1} + ah\ddot{W}_{n-1})\} \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

$a \sim e$ の各パラメータを解の安定性と位相遅れの関係より定めることができれば、次に示すような手順で応答を求めることができる。



(1) 1自由度系におけるパラメーター

多自由度系の運動方程式は、モード解析を行うことにより1自由度系の運動方程式に置換することができる。それゆえ、1自由度系の運動方程式を逐次積分法で解く場合の解の安定性とパラメーターの関係は、多自由度系においても成立するものと思われる。また、位相遅れについても、同様のことが成立すると考えてよい。したがって、ここでは、1質点系非減衰自由振動について、解の安定性、位相遅れとパラメーターの関係を論ずる。式の誘導、展開については、文献7)、8)を参考にしている。

図-1(a)に示す1自由度ばね質点系の運動方程式は、 $\ddot{w} + \omega^2 w = 0 \dots\dots\dots(5)$

と表わせる。ここに、 $\omega = \sqrt{K/M}$ 、 K はばね定数、 M は質量、 \ddot{w} は加速度、 w は変形を表わす。次に、式(2)、(3)、(5)を用いて、差分方程式を作る。式(3)より、

$$w_{n+1} = w_n + eh\dot{w}_n + h^2(c\ddot{w}_n + d\dot{w}_{n+1}) \dots\dots(6)$$

式(6)から式(3)を引くと、

$$\begin{aligned} w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1} &= eh(\dot{w}_n - \dot{w}_{n-1}) \\ &\quad + ch^2(\ddot{w}_n - \ddot{w}_{n-1}) + dh^2(\dot{w}_{n+1} - \dot{w}_n) \dots(7) \end{aligned}$$

式(2)より、

$$\dot{w}_n - \dot{w}_{n-1} = h(a\ddot{w}_{n-1} + b\dot{w}_n) \dots\dots\dots(8)$$

式(5)より、

$$\ddot{w}_n = -\omega^2 w_n \dots\dots\dots(9)$$

式(8)、(9)を式(7)に代入し、整理すると差分方程式式(10)を得る。

$$\begin{aligned} w_{n+1} - (2 - \alpha^2)w_n + w_{n-1} - \frac{\omega^2 h^2 (ae - c - d)}{1 + d\omega^2 h^2} \\ \cdot (w_n - w_{n-1}) = 0 \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

$$\alpha^2 = \frac{e(a+b)\omega^2 h^2}{1 + d\omega^2 h^2} \dots\dots\dots(11)$$

式(10)の第4項は速度項を表わしており、減衰の存在を意味する。式(5)は減衰項を含まないから、式(10)中の第4項は零でなければならない。これより、

$$ae = c + d \dots\dots\dots(12)$$

したがって、差分方程式式(10)は、次のように表わされる。

$$w_{n+1} - (2 - \alpha^2)w_n + w_{n-1} = 0 \dots\dots\dots(13)$$

式(13)は、 $\alpha^2 < 4$ のとき安定な解をもつから、

$$\frac{e(a+b)\omega^2 h^2}{1 + d\omega^2 h^2} < 4 \dots\dots\dots(14)$$

上式に、周期 $T (= 2\pi/\omega)$ を代入し、 h/T について整理する。

$$\frac{h}{T} < \frac{1}{\pi \sqrt{e(a+b) - 4d}} \dots\dots\dots(15)$$

ここで、 h/T (刻み時間間隔/周期)に無関係に式(15)が成立するためには、次の式を満足すればよい。

$$d = e(a+b)/4 \dots\dots\dots(16)$$

差分方程式式(13)の解は、 $\alpha^2 < 4$ のとき、

$$\alpha = 2 \sin(\varphi/2) \dots\dots\dots(17)$$

と置くと、次式のように求められる。

$$w = w_0 \cos(\varphi t/h) + B \sin(\varphi t/h) \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 w_0 は初期変位、 B は速度の意味をもつ。また、式(5)の厳密解は、

$$w = w_0 \cos \omega t + \left(\frac{\dot{w}_0}{\omega}\right) \sin \omega t \dots\dots\dots(19)$$

と表わされ、 \dot{w}_0 は初期速度である。式(18)、(19)は類似しているが、初速度に対する振幅と周期について誤差が生じる。まず、初速度に対する振幅誤差は、初期条件が $t=0$ で $w_0=0$ の場合として求められる。式(18)、(19)は、それぞれ、次のようになる。

$$w = B \sin(\varphi t/h) \dots\dots\dots(20)$$

$$w = (\dot{w}_0/\omega) \sin \omega t \dots\dots\dots(21)$$

式(3)で、 $n=1$ 、 $w_0=0$ 、 $\theta = \omega h$ とおけば、

$$\begin{aligned} eh\dot{w}_0 &= w_1 + d\theta^2 w_1 \\ &= (1 + d\theta^2) \cdot w_1 \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

となる。差分解式(20)で、 $t=h$ とおいて w_1 を求め、上式に代入して B を求める。

$$B = \frac{eh\dot{w}_0}{2(1 + d\theta^2) \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2)} \dots\dots\dots(23)$$

式(17)を式(23)に代入すると、

$$B = \frac{2eh\dot{w}_0}{(1 + d\theta^2)\alpha\sqrt{4 - \alpha^2}} \dots\dots\dots(24)$$

となる。また、上式に式 (11) を代入し、差分解と厳密解の振幅比を求める。

$$\frac{B}{w_0/\omega} = \frac{e}{A} \left\{ 1 + \left(d - \frac{A^2}{4} \right) \theta^2 \right\}^{-1/2} \dots\dots\dots (25)$$

ここに、

$$A^2 = e(a+b) \dots\dots\dots (26)$$

式 (25) に式 (16) を代入すると次式となる。

$$\frac{B}{w_0/\omega} = \sqrt{\frac{e}{a+b}} \dots\dots\dots (27)$$

したがって、初速度に対する応答振幅誤差を零とするためには、式 (27) で右辺=1 とおけばよい。

$$e = a + b \dots\dots\dots (28)$$

差分方程式の解の周期を T_s 、厳密解の周期を T とすると、

$$\frac{T_s}{T} = \frac{2\pi h/\varphi}{2\pi/\omega} = \theta/\varphi \dots\dots\dots (29)$$

式 (17)、(28) より

$$\varphi = 2 \sin^{-1} \left(\frac{e\theta}{2\sqrt{1+d\theta^2}} \right) \dots\dots\dots (30)$$

となる。したがって、式 (29) は次式のようになる。

$$\frac{T_s}{T} = \theta \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\frac{e\theta}{2\sqrt{1+d\theta^2}} \right) \right\}^{-1} \dots\dots\dots (31)$$

周期誤差を零とするためには、式 (31) で $T_s/T=1$ とし、係数 d, e を定めればよい。

$$\theta \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\frac{e\theta}{2\sqrt{1+d\theta^2}} \right) \right\}^{-1} = 1 \dots\dots\dots (32)$$

以上のことより、パラメーターに対する条件を整理する。

- (i) 実際には存在しない減衰を消去するための条件

$$ae = c + d \dots\dots\dots (12)$$

- (ii) 安定限界を無限大とするための条件

$$d = e(a+b)/4 \dots\dots\dots (16)$$

- (iii) 初速度に対する応答振幅の誤差を零にする条件

$$e = a + b \dots\dots\dots (28)$$

- (iv) 刻み時間間隔 h に対し、周期の誤差を零にする条件

$$\theta \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\frac{e\theta}{2\sqrt{1+d\theta^2}} \right) \right\}^{-1} = 1 \dots\dots\dots (32)$$

したがって、各パラメーターは次のように表わされる。

$$e = \left\{ \frac{\pi h}{T} \sqrt{\left(\sin^2 \pi \frac{h}{T} \right)^{-1} - 1} \right\}^{-1} \dots\dots\dots (33)$$

$$d = e^2/4 \dots\dots\dots (34)$$

$$a + b = e \dots\dots\dots (35)$$

$$c = ae - e^2/4 \dots\dots\dots (36)$$

また、

$$\frac{T_s}{T} = \theta \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\frac{e\theta}{2\sqrt{1+\frac{e^2\theta^2}{4}}} \right) \right\}^{-1} \dots\dots\dots (37)$$

式 (35) の条件を満足していれば、 a, b の値は任意

に決定できる。ここでは、Newmark の $\beta=1/4$ 法と比較のために $a=b$ とおく*。この時の各パラメーターの関係を示すと、

$$a = b = e/2 \dots\dots\dots (38)$$

$$c = d = e^2/4 \dots\dots\dots (39)$$

となる。これらの値は、刻み時間間隔 h が定めれば、式 (33) より e を定めて、決定できる。式 (38)、(39) の関係を式 (2)、(3) に代入して整理すると、次式のように表わされる。

$$\dot{w}_n = \dot{w}_{n-1} + \frac{eh}{2} (\ddot{w}_{n-1} + \ddot{w}_n) \dots\dots\dots (40)$$

$$w_n = w_{n-1} + eh\dot{w}_{n-1} + \frac{(eh)^2}{4} (\ddot{w}_{n-1} + \ddot{w}_n) \dots\dots\dots (41)$$

ここに、

$$e = \left\{ \frac{\pi h}{T} \sqrt{\left(\sin^2 \pi \frac{h}{T} \right)^{-1} - 1} \right\}^{-1} \dots\dots\dots (33)$$

刻み時間間隔 h が定めれば、1個の e が式 (33) より定まる。それゆえ、 h の値により式 (40)、(41) 中の時間係数 e は異なる。係数 e は、刻み時間間隔の調整係数とも考えることができる。また、式 (40)、(41) よりわかるように、 $e=1$ の場合には Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) と一致する。1自由度系の場合には、 $T=$ 系の固有周期とおいて、式 (33) より e を定め、式 (40)、(41) を用いて計算すれば、刻み時間間隔に無関係に安定で、振幅誤差、位相遅れのない応答を得ることができる。式 (33) で求められる e の値は、 $h/T = (2m-1)/2$ (ただし、 $m=1, 2, 3, \dots$) のとき無限大となるが、応答を求める場合には、応答の形状を知るうえから、 $h/T > 1/5$ となることは一般にありえず、 e の値が無限大となる心配はない。

以上の解析では減衰項を無視している。減衰項を考慮した場合、各パラメーター間には式 (33)~(39) に表わされるような簡単な関係は容易に得られないようである。式 (40)、(41) の関係を減衰のある系に用いた場合、位相の補正が適当に行えるかどうかは、式 (4) では容易に判定できない。これについては、今後いくつかの数値計算例により検討を加えることが必要であろう。

(2) 多自由度系への適用

本法が Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) と異なる点は、係数 e を用いて、位相遅れの調整ができることである。(33)、(40)、(41) の各式を多自由度系の構造物に適用する場合に問題となるのは、周期 T の取り方である。1自由度系では、 $T=$ 系の固有周期、として e を定めれば、振幅誤差、位相遅れのない応答を得ることができる。しかし、多自由度系では、 T としていろいろの値

* $a=b=1/2$ の場合には、Newmark の $\beta=1/4$ 法の式と一致する。式 (40)、(41) 参照。

が考えられ、それに対応して e の値が異なるため、 T 値によって応答が違ってくる。ここでは、 $T = T_{\max}$ (T_{\max} =系の最大固有周期)とした場合について考える。1自由度系の場合と同様に、多自由度系においても、 $T = T_{\max}$ として計算すれば、最低次 (=1次)の振動成分に対する位相遅れを完全に消去することができる。また、2次以上の高次振動成分に対しても、Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) と比較して、位相遅れが小さいならば、利用価値はあると思われる。表-1 には、 e 値に対するおのおのの刻み時間間隔における T_s/T の値を示している。この表の値は、式 (33), (37) より計算することができる。 $e=1.0$ の時の値は、Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) の位相比であり、 $e > 1.0$ の場合が本法である。たとえば、刻み時間間隔 h を系の最大固有周期 T_{\max} の $1/20$ 、すなわち、 $h/T_{\max}=0.05$ とした場合、式 (33) より求められる e の値は 1.008307 である。いいかえれば、 $e=1.008307$ とおけば、 $h/T_{\max}=0.05$ では $T_s/T=1.0$ (位相遅れがない) ということになる。また、この場合、2次以上の成分に対する h/T の値は 0.05 以上が対応する。なぜなら、 h は一定で $T_n < T_1$ (ただし、 $n=2, 3, \dots$) である。本法の有利性を Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) と比較して、表-1 より説明する。たとえば、 $h/T=0.05$ の時、 $\beta=1/4$ においては、1次振動成分 ($T=T_{\max}$ と考えて) に対して $T_s/T=1.00817$ であるが、 $e=1.008307$ では $T_s/T=1.00000$ (位相遅れがない) となる。また、 $h/T > 0.05$ すなわち、2次以上の高次振動成分に対しても、 $e=1.0$ ($\beta=1/4$) の場合より $e=1.008307$ (本法) の場合が、 T_s/T の値が小さい (位相遅れが小さい)。表-1 において、 $1.00 \leq e \leq 1.156328$ としたのは、刻み時間間隔を大きくとるとしても、 $1/10 \leq h/T_{\max} \leq 1/20$ は必要と思われるためである。以上のことより、 T =系の最大固有周期、として e を計算し、式 (40), (41) を用いて応答を求める手法は、Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) を直接使用するよりも、誤差が小となることが理解できよ

表-1 刻み時間間隔と位相遅れ

Time Mesh		T_s/T				
h/T	e	1.000000	1.001318	1.008307	1.034252	1.156328
0.01	1.00033	0.99901	0.99210	0.96723	0.86519	
0.02	1.00132	1.00000	0.99309	0.96824	0.86633	
0.05	1.00817	1.00687	1.00000	0.97533	0.87424	
0.10	1.03207	1.03080	1.02409	1.00000	0.90160	
0.20	1.12003	1.11885	1.11263	1.09033	1.00000	
0.25	1.17968	1.17855	1.17260	1.15128	1.06522	
0.50	1.56472	1.56379	1.55891	1.54146	1.47143	
1.00	2.48814	2.48739	2.48346	2.46937	2.41258	
1.50	3.46069	3.46001	3.45645	3.44366	3.39193	
2.00	4.44681	4.44617	4.44279	4.43069	4.38153	
5.00	10.42187	10.42125	10.41822	10.40728	10.36284	
10.00	20.41360	20.41319	20.41020	20.39967	20.35686	

う。

3. 数値計算

逐次積分法を用いて応答計算を行う場合、刻み時間間隔の選定基準の1つとして外力の近似度がある。刻み時間間隔を大きくとると、外力の近似ができないために実際の応答とはかなり違った応答となる。本法は解析手法に含まれる誤差をいくらかでも少なくすることを目的としているため、外力近似による応答誤差が生じないように、数値計算例で用いる外力は、1自由度系はステップ外力、多自由度系はステップ外力、余弦波外力とした。また、本法と比較のために用いている解析法は、厳密解 (微分解、モード解析)、線形加速度法、Newmark の β 法 ($\beta=1/4$)、Wilson の θ 法 ($\theta=1.5$) である。

(1) 1自由度系の応答計算

図-1 (a) に示す1自由度系に、図-1 (b) の $F=1.0$ kg なるステップ外力が時間 $t=0$ より作用した時の応答を、図-2 に示す。ただし、 $M=1.0$ kg \cdot sec 2 /cm, $K=1.0$ kg/cm としている。図-2 に示すように、刻み時間間隔 h/T が小さい時は各種法とも比較的良好に一致するが (図-2 (a)), 刻み時間

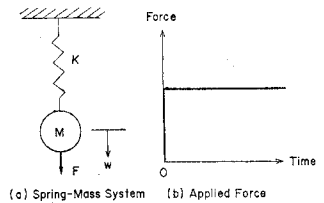


図-1 1自由度ばね-質点系

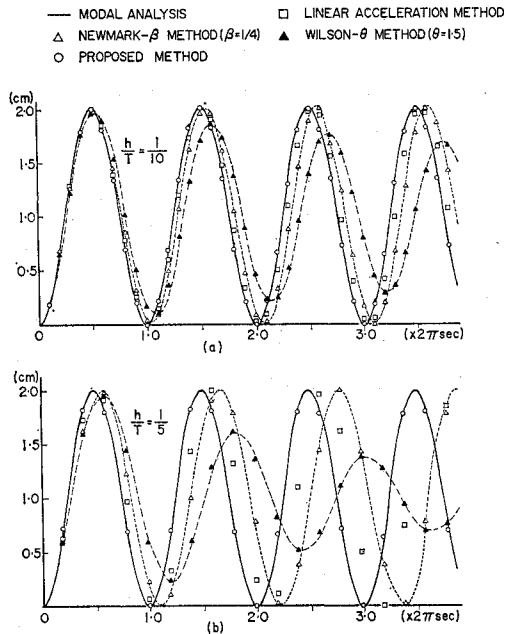


図-2 1自由度系の変位応答

間隔が大きくなると、線形加速度法、Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) は位相遅れを生じ、Wilson の θ 法 ($\theta=1.5$) は減衰、位相遅れを伴っている (図-2 (b)). それに対して本法は、刻み時間間隔に無関係にモード解析 (Modal Analysis) と一致していることがわかる。

(2) 多自由度系の応答計算

多自由度系に本法を適用した時の有意性を確かめるために、次の2種類の構造物について計算を行った。

a) 最大固有振動数 (f_{max}) と最小固有振動数 (f_{min}) の比が大きい構造物……単純ばり

b) f_{max} と f_{min} の比が小さい構造物……トラス
ステップ外力については、上記の2種類のモデルを対象としている。周期外力については、比較的近接した固有振動数をもつトラス (表-2, 3 参照) について数値計算を行った。

a) 単純ばり

図-3 に示す等断面単純ばりの中央点にステップ外力を作用させた場合の非減衰応答を求める。運動方程式を次式で表わす。

$$\alpha M' \ddot{W} + K' W = \beta F' \quad \dots\dots\dots (42)$$

ここに、 $\alpha = \rho AL^4/EIG$, $\beta = PL^3/EI$, ρ : 単位長さあたりの質量, A : 断面積, L : スパン長, E : 弾性係数, I : 断面2次モーメント, $G=980 \text{ cm}^2/\text{sec}^2$, P : 荷重, M' : 無次元化された質量マトリックス, K' : 無次元化された剛性マトリックス, F' : 無次元化された外力ベクトル, である。図-3 に示す例題では、要素分割は20でモーメント項を消去し、各質点の質量は皆等しく置いている。この時の M' , F' は、次のようなマトリックス, ベクトルとなっている。

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$F' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (44)$$

α の値は、図-3 の単純ばりを Bernoulli-Euler ばりと考えた時の最小固有振動数が 1 Hz になるように決めた。また、 β の値は、スパン中央に荷重が作用した時の中

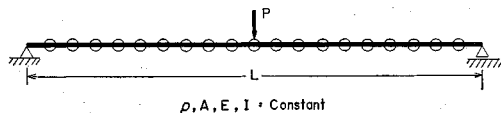


図-3 単純ばり

表-2 単純ばりの固有振動数 (単位: Hz)

次数	固有振動数	次数	固有振動数
1	1.0183	11	119.5759
2	4.0044	12	141.3274
3	9.0022	13	164.1743
4	15.9996	14	187.5821
5	24.9932	15	210.7800
6	35.9767	16	232.7234
7	48.9350	17	252.1034
8	63.8422	18	267.4509
9	80.6497	19	277.3586
10	99.2742		

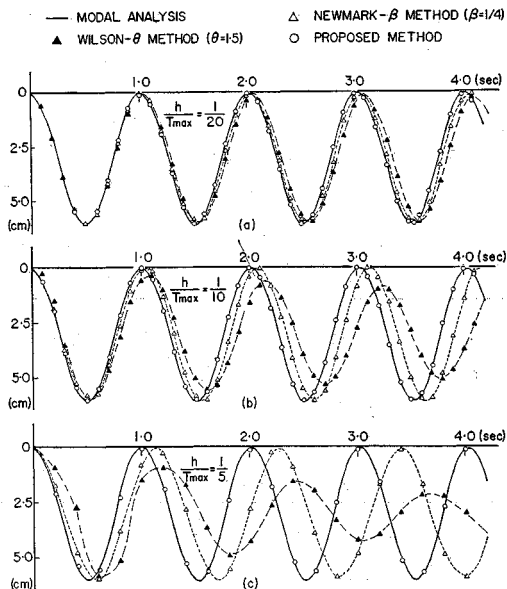


図-4 単純ばりのたわみ応答

央点の静的たわみ ($PL^3/48EI$) が 3 cm になるように決定した。この系の固有振動数を表-2 に示している。これより、最大固有振動数 $f_{max} \approx 277 \text{ Hz}$, 最小固有振動数 $f_{min} \approx 1 \text{ Hz}$ で $f_{max}/f_{min} \approx 277$ である。図-4 には荷重載荷点のたわみ応答を示している。なお、図-4 の (a) は $h/T_{max}=1/20$, (b) は $h/T_{max}=1/10$, (c) は $h/T_{max}=1/5$ である。

b) トラス

図-5 に示すトラス橋の節点 3, 節点 7 に下向きに

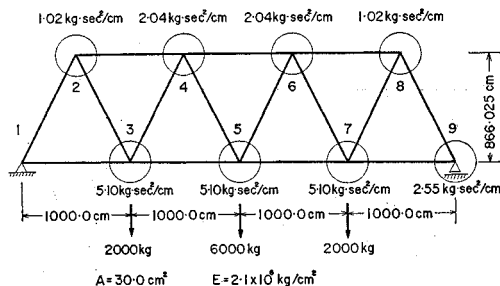


図-5 トラス橋

2t, 節点5に下向きに6tのステップ外力と余弦波外力が, それぞれ作用したときの非減衰応答を求める. 表-3には, 系の固有振動数を記している. $f_{\max} \approx 61$ Hz, $f_{\min} \approx 4$ Hz で $f_{\max}/f_{\min} \approx 15$ である. 図-6~8には, 節点5の下方向の変位応答を示している. また, 図-6はステップ外力が作用した場合であり, (a), (b), (c)はそれぞれ, $h/T_{\max} = 1/20$, $h/T_{\max} = 1/10$, $h/T_{\max} = 1/5$ の刻み時間である. 図-7は, 系の最小角速度(ω_{\min})と余弦波の角速度(ω)の比(ω_{\min}/ω)が5の場合で, (a), (b)はそれぞれ, $h/T_{\max} = 1/10$, $h/T_{\max} = 1/5$ である. 図-8は, $\omega_n/\omega = 10$ の場合で, (a), (b)はそれぞれ, $h/T_{\max} = 1/10$, $h/T_{\max} = 1/5$ である.

上記(a), (b)の数値計算例から次のことが理解できる. 線形加速度法は, 刻み時間間隔($=h/T_{\max}$)を大きくすると, 発散現象(図-6(a)参照)を示す(この

表-3 トラス橋の固有振動数 (単位: Hz)

次数	固有振動数	次数	固有振動数
1	4.0845	9	38.6019
2	7.3677	10	40.2022
3	11.8158	11	40.6607
4	17.8044	12	50.2318
5	20.5438	13	51.5795
6	26.0760	14	55.5810
7	28.5023	15	61.0464
8	31.1981		

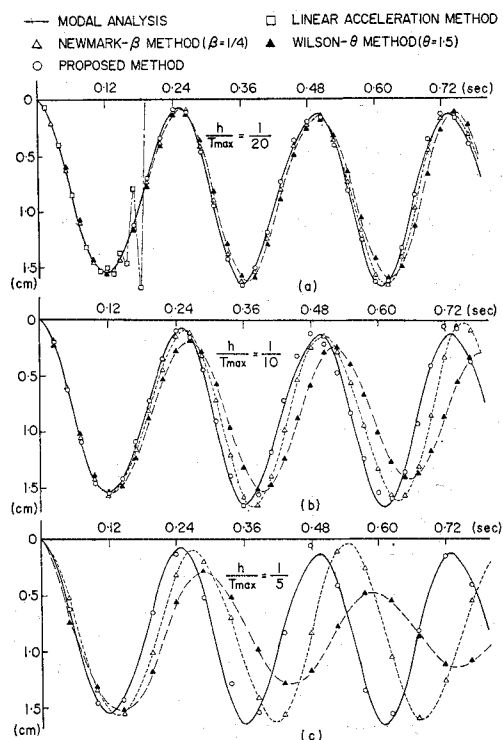


図-6 トラス橋のステップ外力による変位応答

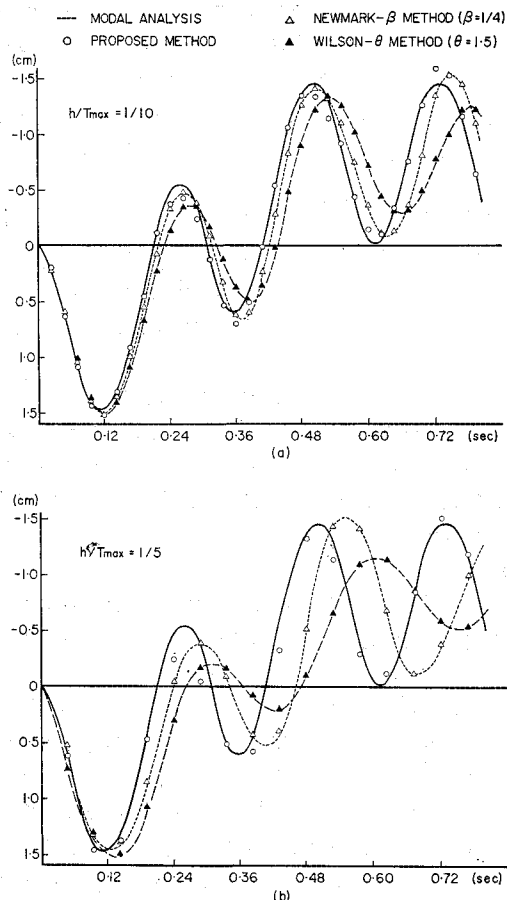


図-7 トラス橋の周期外力による変位応答 (COS 5.132 t)

ため, 図-4, 6(b), (c), 7, 8には記していない). Newmarkの β 法($\beta=1/4$)は, $h/T_{\max} = 1/20$ では位相遅れが少し表われるが, $h/T_{\max} = 1/10$ でそれが顕著になり, $h/T_{\max} = 1/5$ では厳密解に比して山と谷が逆になってしまう. Wilsonの θ 法($\theta=1.5$)は, $h/T_{\max} = 1/20$ では減衰と位相遅れが表われ, $h/T_{\max} = 1/10$ で顕著になり, $h/T_{\max} = 1/5$ では減衰効果が著しく現われ静的たわみの状態に近くなる. それに対して本法は, 刻み時間間隔 h/T_{\max} が $1/20, 1/10, 1/5$ と変化しても, 図-4, 6~8に見るように, 厳密解 (Modal Analysis) と良好な一致を示している.

4. おわりに

本論文で誘導した計算手法は, 結果的には Newmarkの β 法($\beta=1/4$)で刻み時間間隔 h にある係数を乗じて応答を求める形になっている. この係数 e は, 最大固有周期を基準として決めており, しかも, 実際には h を最大固有周期 T_{\max} 以上にとることはあり得ないか

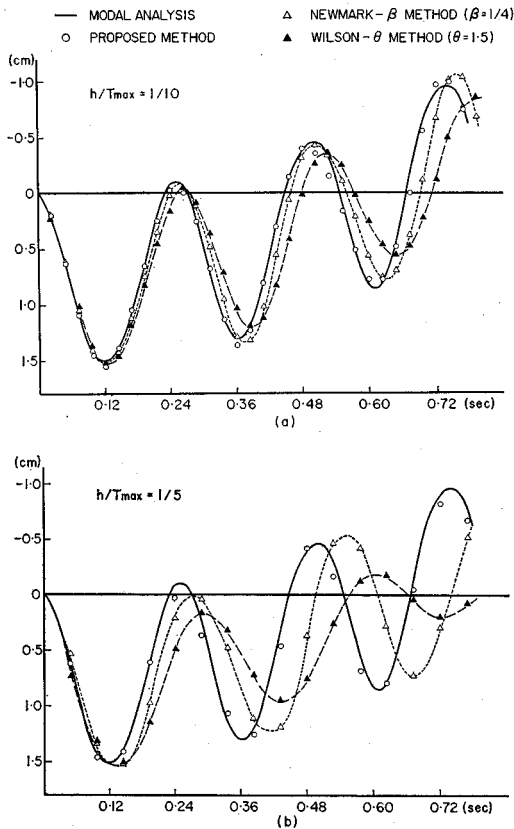


図-8 トラス橋の周期外力による変位応答
($\text{COS } 2.566 t$)

ら、常に $e > 1.0$ の値である (式 (33) 参照)。したがって、 $eh (> h)$ という実際の刻み時間間隔より長い間隔で応答を求めている。いいかえれば、応答時間を短くする方向にずらす操作を行っていることに等しい。こういう点では、Wilson の θ 法に類似している。しかし、Wilson の θ 法は、線形加速度法を母体としており、 θ を定める基準が明確でないように思われる。また、 θ の値によっては、減衰効果の出る恐れがある。それに比して、本法は、刻み時間間隔に無関係に振幅誤差が零という条件を満足しているため、常に安定である。多自由度系では、式 (33) で e を定める時の T の値として系の最大固有周期 (= 1 次固有振動数に対する周期) をとるため、1 次振動成分に対しては位相遅れを零にすることができるが、2 次以上の振動成分に対してどの程度の効果があるかについて検討が必要である。このため、最大固有周期と最小固有周期の比の大きい構造物 ($T_{\max}/T_{\min} \approx 277$) と小さい構造物 ($T_{\max}/T_{\min} \approx 15$) の 2 種

類、すなわち、応答に及ぼす高次成分の影響が小さいものと大きいものとの 2 種類について数値計算を行った。その結果、図-4、6~8 に見るように、本法の有効性はどちらにおいても同程度のものであったが、これについては、今後さらにいくつかの数値計算例について検討を加える必要がある。以上のことより、本解析法は、与系の最大固有周期を前もって求めておく必要はあるが、Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) で生じる位相遅れを補正する一法として利用できることが理解できよう。線形あるいは非線形性の弱い計算において、刻み時間間隔を選定する場合には、外力の近似度と高次振動数との関係から選ばれるが、本法を用いれば後者の制限を緩和できる効果はある程度期待できよう。

参考文献

- 1) E.L. Wilson and R.W. Clough: Dynamic Response by step-by-step Matrix Analysis, Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering, Lisbon-Portugal, October, 1962.
- 2) J.H. Argyris, P.C. Dunne and T. Angelopoulos: Dynamic Response by Large Step Integration, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 2, pp. 185~203, 1973.
- 3) 滝沢春男: 構造物の振動解析 I, II, 東京大学建築学科修士論文, 1971.
- 4) 塩尻弘雄・中村秀治: 構造解析における動的応答解析の一方法について, 土木学会論文報告集, 第 246 号, pp. 21~33, 1976 年 2 月.
- 5) R.W. Clough: Analysis of Structural Vibration and Dynamic Response, Japan-U.S. Seminar on Matrix Method of Structural Analysis and Design, Tokyo-Japan, August, 1969.
- 6) 戸川隼人: マトリックスの数値計算, オーム社, pp. 256~289, 1971.
- 7) N.M. Newmark: A Method of Computation for Structural Dynamics, Proc. of A.S.C.E., Vol. EM 3, pp. 67~74, 1959.
- 8) 河島佑男: 動的応答解析, コンピューターによる構造工学講座 II-4-A, 培風館, pp. 46~58, 1972.
- 9) E.L. Wilson, I. Farhwomand and K.J. Bathe: Non-linear Dynamics of Complex Structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, pp. 241~252, 1973.
- 10) K.J. Bathe and E.L. Wilson: Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Method, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, pp. 283~291, 1973.
- 11) R.E. Nickell: On the Stability of Approximation Operators in Problems of Structural Dynamics, Int. Jour. Solids and Structures, Vol. 7, pp. 301~319, 1971.

(1977.3.16・受付)