

構造安全性解析への極値的なアプローチ

EXTREME VALUE APPROACH TO STRUCTURAL SAFETY ANALYSIS

馬場俊介*・中川建治**・成岡昌夫***

By Shunsuke BABA, Kenji NAKAGAWA and Masao NARUOKA

1. 序

構造物の材料強度と構造物に作用する荷重の双方に、変分法に基づく厳密極値の平均値という概念を導入することにより、構造物の安全性を解析する手法を提案する。

Freudenthal にはじまった構造物の信頼性解析では、材料強度と荷重の双方の確率密度を仮定して、破壊確率を計算している。その結果、確率密度を仮定することが、解析そのものの信頼度をさげる第一の原因になっている。それは、かつて Jorgenson¹⁾ や Ang²⁾ が指摘したように、確率密度の仮定の仕方ひとつで、破壊確率の値が対数的な尺度で変化するからである。測定値として得られるたかだか 20~100 個の標本をもとに、たとえば、正規分布と仮定するか、あるいは、gamma 分布と仮定するかという問題は、誰でも判断に迷うところであろう。実際の確率密度は正規分布、gamma 分布の一方あるいは双方の合成として表わされるかもしれないし、まったくの別の分布かもしれない。いずれにしても、既知の確率分布をあてはめることは、合理性に欠けるばかりでなく、場合によっては破壊確率の過小評価に直結する。数量的に把握できないこのあいまいさは、経験主義的な従来の許容応力設計法などに代わるものとして創始された信頼性設計の弱点となっており、この点に改良の余地が残されている。Ang ら³⁾ は拡張信頼性という考え方により、確率分布の違いによる破壊確率の変動という問題を解決しようとしたが、本質的な解決には至らなかった。著者らは、確率分布を仮定する代わりに、最終的な破壊確率を最も大きくするような分布を変分法を用いて誘導し、最悪の状態を想定した信頼性解析というもの

を提案する。

本論文の考え方は、変分原理に基づく厳密極値の平均値という概念を発展させたものである。この概念は、Gumbel, Plackett らが、変分法の統計的推定への応用ということで、かつて取り上げたことがあるが^{4)~6)}、それ以後工学的な分野ではほとんど顧みられなかった。その理由としては、次のことが考えられる。

① 非現実的なまでに過大な推定値を与える。

② 極大、極小値の推定だけでは、データ処理以外の応用性に乏しい。

事実、Gumbel は厳密極値という考え方をたどるのをやめて、第1、第2、第3漸近という極値分布の体系づけへと興味を移していった。水文統計の分野でよく使われている Gumbel 法、岩井法、小河原法などは、すべて後者の極値分布に端を発するものである。このように否定的要因はあったが、著者らは、厳密極値という考え方に大きな魅力を感じた。それは、以下に示す特徴を生かすことにより、最も危険な状態を対象とした構造物の安全性の解析が実現できるのではないかと考えたからである。

③ 確率分布の仮定を必要としない(平均値、分散などの拘束条件を満たすあらゆる分布族の中で、極大値を最も大きくする分布、あるいは、極小値を最も小さくする分布を、変分原理を用いて誘導する)。

この目標にそって、まず、過大な極値を与えるという技法上の問題点を、拘束条件数の増加ということで改善し⁷⁾、さらに本論文では、材料強度と荷重の極値を結びつけることにより、構造物の安全性の解析への応用の可能性を示す。

極値的なアプローチをすることにより、「ある値を設計値として設定すると、その値以上の値が生起する確率は最悪の場合でもある値を越えることはない」という一種の保証を得ることができる。この設計概念は、入手できる測定値を有効に利用し、かつ、測定値から予想され

* 正会員 工博 名古屋大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工博 岐阜大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

る最悪の状態を設計の対象としているという点で、従来の信頼性解析より優れていると思われる。厳密極値という概念は、破壊確率の推定だけではなく、材料強度あるいは荷重の極値を単独で推定するのにも、もちろん利用できる。これは特に、水文統計などでうんぬんされる100年値、200年値を推定する際に、従来のGumbel法などに代わるものとしての利用が期待できよう。

極値の推定に伴う計算のわずらわしさを軽減するために簡易推定法を提案し、特性値を用いて図上で精度よく極値を推定するためのグラフを与える。さらに、特性値に含まれる誤差(測定値から計算した標本特性値と、測定値の属する母集団の真の特性値との値が、一致しないことによる誤差)の評価法についても触れる。

例として、材料強度に関する6種類の測定値の極小値と、荷重に関する10種類の測定値の極大値を求める。設計への応用例として、ワレントラス橋の上、下弦材の必要断面積を計算する。

2. 極値推定法

厳密極値という概念に基づく極値の推定方法を個条書きにして示す。

① 測定値(大きさ n)から平均値、分散を始めとする特性値を計算する。

② すべての特性値を満足する母集団族というものを想定する。

③ これらの母集団から、新たに大きさ $N(>n)$ の標本を多数個抽出する。

④ おのおのの抽出における最大値だけを集めたものの平均値(平均最大値)を定義する。

⑤ 母集団族の中で最も大きい平均最大値をもつ母集団を選ぶ(変分原理に基づく)。

⑥ この母集団の確率分布が、求めようとする分布、すなわち、測定値と同じ特性値を有し、かつ、平均最大値を極大化するような分布となっている。

⑦ この確率分布を使って計算した平均最大値は、平均最大値の極大値であり、測定値から推定できる最も大きい値(厳密極値)となっている。

厳密極値では、測定値から求めた特性値を拘束条件として、測定値の分布関数を誘導する。この特性値を選ぶにあたっては、次のような条件を考慮する。

① 過去に得られた測定値をそのまま使って計算できること。計算は簡単であることが必要で、平均値や分散の計算同様に誰にでも容易に実行できるものでなくてはならない。

② 測定値の特徴を的確に伝えるものであること。

③ 計算実行時に、極値の推定が不可能になったり、

推定にむらを生ずるといような不安定性がないこと。

測定値を特徴づける既往の特性値としては、平均値、分散、最大値、最小値、部分平均値、ひずみ、とがりなどがある。このうち、平均値と分散は最も普遍的な統計量であり、測定値を正規化するにあたっても必要となる上に、特性値としての条件①~③をすべて満足する。したがって、この2つの特性値は、いかなる場合にも無条件で特性値として用いる。最大値、最小値、部分平均値の3つは、極値推定法につきものの過大な極値の推定を防止するには効果的であるが⁷⁾、極値の推定が不可能になったり(虚数となる)、特性値のわずかの差が推定に過敏に影響したりなど不安定性が強く⁸⁾、特性値としての条件③に反する。ひずみととがりは、特性値としての条件④に反する(付録1参照)。本論文では、ひずみやとがりに相当する特性を有し、かつ、数式的取り扱いのより容易な特性値を、既往の統計量に拘泥しないで定義する。測定値を x 、測定値から計算した平均値と分散とをそれぞれ \bar{x} 、 s_x^2 とする。 x の正規化量を X とする。すなわち、 $X=(x-\bar{x})/s_x$ とおく。さらに、測定値の属する母集団の確率密度を $f(X)$ 、累積密度を $F(X)$ とする。普通は $f(X)$ 、 $F(X)$ を X の関数として取り扱うが、ここでは、分布形そのものが未知であるところから、 X を F の関数として取り扱い、 $X(F)$ という表示を用いる。

平均値と分散を $X(F)$ で表示すると、次のようになる。

$$\int_0^1 X dF = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\int_0^1 X^2 dF = 1 \dots \dots \dots (2)$$

同様に、ひずみととがりは、次のようになる。

$$\int_0^1 X^3 dF = \beta_3$$

$$\int_0^1 X^4 dF = \beta_4$$

ところが、付録1に説明したようにひずみととがりは不適切な特性値であるから、似たような表現として、次のような特性値を考える。

$$\int_0^1 X(F-0.5)^2 dF = \beta_3'$$

$$\int_0^1 X(F-0.5)^3 dF = \beta_4'$$

ひずみととがりは、それぞれ、確率変数の実現値 X に、その実現値の X^2 、 X^3 を重みとして付加して平均をとったものと考えることができるから、 X^2 の代わりに $(F-0.5)^2$ を、 X^3 の代わりに $(F-0.5)^3$ を重みとして用いても両者の特性はそれほど変わらないことが期待できる。さらに、 $(F-0.5)$ 、 $(F-0.5)^4$ という重みをもつ特性値も想定する。これら4種類の特性値では、重みが F

の4次式として表わされるから、取り扱いやすさを考慮して、より一般的で、かつ、まったく同等な、次のような特性値 $A \sim D$ を設定する (付録1 参照).

$$\int_0^1 XF dF = A \dots\dots\dots (3)$$

$$\int_0^1 XF^2 dF = B \dots\dots\dots (4)$$

$$\int_0^1 XF^3 dF = C \dots\dots\dots (5)$$

$$\int_0^1 XF^4 dF = D \dots\dots\dots (6)$$

本論文では、式 (3)~(5) の $A \sim C$ を特性値として直接に用いる. 式 (6) の D は、確率分布関数の逆関数である $X(F)$ が $0 \leq F \leq 1$ 区間で単調増加関数とならなくてはならないという条件を満足させるために、ダミー特性値として用いる.

一方、大きさ N の標本の平均最大値 \bar{Y}_N を $X(F)$ を用いて表わすと、次のようになる.

$$\bar{Y}_N = \int_0^1 NXFN^{N-1} dF \dots\dots\dots (7)$$

したがって、未知関数 $X(F)$ は、式 (1)~(6) を拘束条件として、式 (7) の \bar{Y}_N を極大化するという変分問題を解くことにより誘導される. さらに、そのときの $X(F)$ を式 (7) に代入することにより、平均最大値の極大値 \bar{Y}_N^E が求められる.

3. 6 つの条件つき極値分布

Lagrange の未定乗数 $\lambda_1 \sim \lambda_6$ を導入して、汎関数 J を

$$J = NXFN^{N-1} - \lambda_1 X - \lambda_2 X^2 - \lambda_3 XF - \lambda_4 XF^2 - \lambda_5 XF^3 - \lambda_6 XF^4$$

とおき、この J を X に関して極大化する状態をつくるために、第一変分をとって $\partial J / \partial X = 0$ とおくと、未知関数 $X(F)$ は、

$$X(F) = (1/2 \lambda_2) (NF^{N-1} - \lambda_1 - \lambda_3 F - \lambda_4 F^2 - \lambda_5 F^3 - \lambda_6 F^4) \dots\dots\dots (8)$$

となる. 未定乗数 $\lambda_1, \lambda_3 \sim \lambda_6$ を決定するには、式 (8) を拘束条件式 (1), (3)~(6) に代入して、 λ_2 を未知数のまま残した形で、 λ に関する連立方程式を次のようにたてる.

$$[M]\{\lambda\} = \{C\} - 2\lambda_2\{E\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ & & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ & & \text{sym.} & 1/7 & 1/8 \\ & & & & 1/9 \end{bmatrix}$$

$$\{\lambda\}^T = \{\lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6\}$$

$$\{C\}^T = \{1 \ N/(N+1) \ N/(N+2) \ N/(N+3) \ N/(N+4)\}$$

$$\{E\}^T = \{0 \ A \ B \ C \ D\}$$

である. これを $\{\lambda\}$ について解くと、

$$\{\lambda\} = [M]^{-1}\{C\} - 2\lambda_2[M]^{-1}\{E\} \dots\dots\dots (10)$$

となる. 式 (8), (10) を拘束条件式 (2) に代入すると、 λ_2 が次のように求められる.

$$1/2 \lambda_2 = (1 - \{E\}^T [M]^{-1} \{E\})^{1/2} / (N^2 / (2N - 1) - \{C\}^T [M]^{-1} \{C\})^{1/2} \dots\dots\dots (11)$$

平均最大値の極値 \bar{Y}_N^E は、式 (8) を式 (7) に代入し、式 (10), (11) を用いることにより、次のように得られる.

$$\bar{Y}_N^E = (1 - \{E\}^T [M]^{-1} \{E\})^{1/2} (N^2 / (2N - 1) - \{C\}^T [M]^{-1} \{C\})^{1/2} + \{C\}^T [M]^{-1} \{E\} \dots\dots\dots (12)$$

N, A, B, C, D が与えられると、式 (12) より \bar{Y}_N^E が決定できる. ここで、 $A \sim C$ は測定値から求められる量であり、 N は極値の推定にあたってあらかじめ設定する量である. 特性値 D は、「 $X(F)$ が $0 \leq F \leq 1$ で単調増加関数になる」という条件から自動的に決まる⁹⁾.

単調増加の条件を設定せずに解を求めると、多くの場合に、 $X(F)$ が単調増加関数でなくなる. これは変分問題の解としては支障ない厳密な解ではあるが、 $X(F)$ の逆関数は累積密度 $F(X)$ でなければならないという点で不合理となる. すなわち、不合理な $X(F)$ より求まる \bar{Y}_N^E は、過大な極値となっている. しかし、過大ということは、安全側の推定を意味しており、この過大な極値 \bar{Y}_N^E を安全性の目安にすること自体は (少々不経済とはいへ) さしつかえない.

4. 平均最小値の極小値

3. までの記述は、すべて、 N 個中の平均最大値の極大値を求めることを目的としており、たとえば、荷重の最大限界値として用いる. これに対して、材料強度の最小限界値などを求めるには、 N 個中の平均最小値の極小値を求めることが必要となる. この場合には、式 (7) の代わりに N 個中の平均最小値を表わす式を新たに定義して、 \bar{Y}_N^E の推定式を誘導しなおしてもよいが、式 (8)~(12) をそのまま流用する方が便利である. そのためには、特性値 $A \sim C$ を計算するにあたって、測定値を反転する. すなわち、小さい方から順に並べられた測定値 $X_i (X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n)$ の正負を逆転して、新しく順序統計量 $X'_i = -X_{n-i+1} (X'_1 \leq X'_2 \leq \dots \leq X'_n)$ をつくり、 X'_i を X_i の代わりに用いて特性値 $A \sim C$ を計算する. 式 (8)~(12) はそのまま使う. ただ、 \bar{Y}_N^E は

負でなければならないから、式 (12) で得られた \bar{Y}_N^E の正負を逆転する。

5. 破壊確率の極大化との関連性

\bar{Y}_N の代わりに、次のような新しい量 \bar{Y}_p を定義する。

$$\bar{Y}_p = \int_0^1 X\phi(F) dF \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{aligned} \phi(F) &= 0 \quad (0 \leq F < 1-p), \\ \phi(F) &= 1/p \quad (1-p \leq F \leq 1) \end{aligned}$$

\bar{Y}_p を用いる場合の未知関数 $X(F)$ は、次のように表わされる。

$$X(F) = (1/2 \lambda_2) \{ \phi(F) - \lambda_1 - \lambda_3 F - \lambda_4 F^2 - \lambda_5 F^3 - \lambda_6 F^4 \} \dots\dots\dots (14)$$

$X(F)$ は Fig. 1 (a) に示すように、パルス $\phi(F)$ と、たかだか 4 次の滑らかな関数との合成として表わされる。合成後のパルス部分 ($1-p \leq F \leq 1$ における式 (14) の形状) は、 $F \sim F^4$ の項が付加されるため、完全に平らではないが、滑らかな単調増加関数となっており、その確率密度 $f(X) = 1/(dX/dF)$ は、Fig. 1 (b) のようになる。

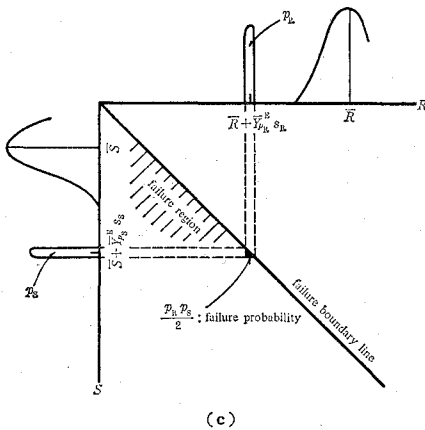
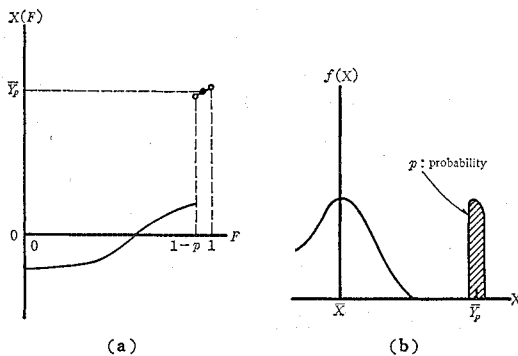


Fig. 1 Relationship between Extermum \bar{Y}_p^E and Maximization of Failure Probability

材料強度については $p=p_R$ に相当する $\bar{Y}_{p_R}^E$ の極小値 $\bar{Y}_{p_R}^E$ を計算し、荷重については $p=p_S$ に相当する $\bar{Y}_{p_S}^E$ の極大値 $\bar{Y}_{p_S}^E$ を計算する。ここに、下添字 R と S は、それぞれ、材料強度と荷重に関する量であることを示す。これらは正規化量であり、材料強度の平均値と分散 (\bar{R}, s_R^2)、荷重の平均値と分散 (\bar{S}, s_S^2) を用いて元の量に戻すと、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} R_{\min}(p_R) &= \bar{R} + s_R \bar{Y}_{p_R}^E \\ S_{\max}(p_S) &= \bar{S} + s_S \bar{Y}_{p_S}^E \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $R_{\min}(p_R) = S_{\max}(p_S)$ という状態を仮想的に図示したのが、Fig. 1 (c) である。破壊確率は

$$\int_{R < S} f_R(R) f_S(S) dS dR$$

で定義されるから、Fig. 1 (c) より、 $R_{\min}(p_R) = S_{\max}(p_S)$ の場合の破壊確率 (斜線部分の体積) が、近似的に $P_f = p_R p_S / 2$ と与えられる。

$R_{\min}(p_R)$ と $S_{\max}(p_S)$ は、下側確率 p_R あるいは上側確率 p_S に相当するパルス部分 (Fig. 1 (b) 参照) を、平均値よりできる限り遠方へ離れたときの極値である。したがって、 $R_{\min}(p_R) = S_{\max}(p_S)$ とした場合の破壊確率 $P_f = p_R p_S / 2$ は、 $P_f = p_R p_S / 2$ に相当する全事象の中で、 \bar{R} と \bar{S} との差をできる限り大きくしたときの極値となっている。すなわち、 R_{\min}, S_{\max} を設計の基準値として用いるならば、その設計による破壊確率は $p_R p_S / 2$ 以下である (最悪の場合でも $p_R p_S / 2$ を越えることはない)。換言すれば、 $\bar{Y}_{p_R}^E$ や $\bar{Y}_{p_S}^E$ を使うことは、破壊確率 P_f を極大化することと同義である。

- p_R, p_S の選び方として、次の 2 つを考える。
- ① $p_R = p_S = p$ と仮定する。
 - ② $P_f = p_R p_S / 2 = \text{const.}$ を満たす p_R と p_S の組み合わせのうち、最も安全側の設計値を与えるものを選ぶ。

① は材料強度と荷重とを同一の信頼性水準で設計することが望ましいという観点から、第一近似として導入した仮定で、数式的な取り扱いが容易である。② は最も安全側の設計を与えるけれども、解析的な取り扱いが困難である。ここでは、①と②の折衷案として、次の方法を採用する。

③ まず、 $p_R = p_S = p$ として設計し、その結果に割増し係数を掛けて補正する。

割増し係数は、 $P_f = p_R p_S / 2$ として設計するときと、 $P_f = p^2 / 2$ として設計するときとの比の最大値を、材料強度と荷重の変動係数 δ_R, δ_S の各組み合わせについて計算したもので (付録 2 参照)、例として $p = 1/50$ ($P_f = 1/2500$) の場合の割増し係数を Fig. 2 に示す。

次に、 \bar{Y}_N と \bar{Y}_p の相違について触れる。式 (14) を拘束条件式 (1), (3)~(6) に代入して、 λ に関する連

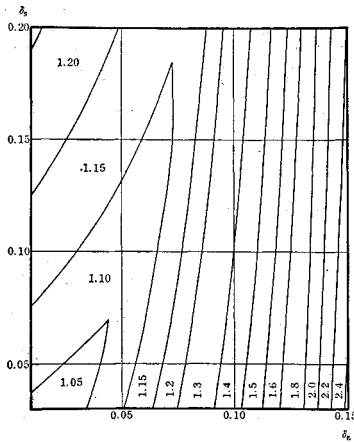


Fig. 2 Extra Coefficient of Cross-Sectional Area Caused by Assuming $p = p_R = p_S$ (in Case of $N=2/p=100$).

立方程式をたてると、次のようになる。

$$[M]\{\lambda\} = \{C\} - 2\lambda_2\{E\} \dots\dots\dots(9')$$

ここに、

$$\{C\}^T = \{1 \quad \{1 - (1-p)^2\}/2p \quad \{1 - (1-p)^3\}/3p \quad \{1 - (1-p)^4\}/4p \quad \{1 - (1-p)^5\}/5p\}$$

である。 \bar{Y}_N を使った式 (9) と \bar{Y}_p を使った式 (9') とを比較すると、相違は $\{C\}$ の項のみである。ここで、 $p=2/N$ とおくと、

$$\{C\} - \{C'\} = \{0(1/N^2)\}$$

となり、 $N > 10$ では、これらの誤差は結果にほとんど影響を与えない。さらに、 \bar{Y}_p^E は、

$$\bar{Y}_p^E = (1 - \{E\}^T [M]^{-1} \{E\})^{1/2} \cdot (1/p - \{C'\} [M]^{-1} \{C'\})^{1/2} + \{C'\} [M]^{-1} \{E\} \dots\dots\dots(12')$$

となるが、式 (12) で $N^2/(2N-1) \approx N/2 = 1/p$ であることから、 \bar{Y}_N^E と \bar{Y}_p^E の誤差は、

$$\bar{Y}_N^E - \bar{Y}_p^E = 0(1/N^2)$$

となって、ほとんど無視できる。

破壊確率の推定には p に関する \bar{Y}_p^E を、測定値からの極値の単独推定には N に関する \bar{Y}_N^E を、というように場合により使い分けるのはめんどろであり、 \bar{Y}_N^E と \bar{Y}_p^E も近似的に等しいから、今後は双方の場合に \bar{Y}_N^E を用いることに統一する。

6. 特性値 $A \sim C$ の平均値と下限値

測定値として得られる n 個の順序統計量 $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n$ より式 (3)~(5) の $A \sim C$ を推定するには、次のように $A \sim C$ の平均値 $\bar{A} \sim \bar{C}$ を使う。すなわち、式 (3) で定義される特性値 A は、

$$A = (1/n) \sum X_i F_i$$

のように離散表示できるから、 A の平均値 \bar{A} は、

$$\bar{A} = (1/n) \sum X_i \bar{F}_i = (1/n) \sum X_i \bar{F}_i$$

となる。ここで、 X_i の最尤推定値は X_i であるから、

$$\bar{A} = (1/n) \sum X_i \bar{F}_i \dots\dots\dots(16)$$

としてもよい。同様に、 \bar{B} と \bar{C} についても、次のように表わされる。

$$\bar{B} = (1/n) \sum X_i \bar{F}_i^2, \quad \bar{C} = (1/n) \sum X_i \bar{F}_i^3 \dots\dots(17)$$

小さい方から i 番目の値 X_i に相当する $F_i = F(X_i)$ の確率密度 $g(F_i)$ は、

$$g(F_i) = \{n!/(n-i)!(i-1)!\} F_i^{i-1} (1-F_i)^{n-i}$$

である⁹⁾。式 (16)、(17) 中の $\bar{F}_i \sim \bar{F}_i^3$ は、 $g(F_i)$ を用いて次のように表わされる。

$$\bar{F}_i = \int_0^1 g(F_i) F_i dF_i = i/(n+1)$$

$$\bar{F}_i^2 = i(i+1)/(n+1)(n+2)$$

$$\bar{F}_i^3 = i(i+1)(i+2)/(n+1)(n+2)(n+3)$$

したがって、 $\bar{A} \sim \bar{C}$ は次のように定式化できる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= \{1/n(n+1)\} \sum i X_i \\ \bar{B} &= \{1/n(n+1)(n+2)\} \sum i(i+1) X_i \\ \bar{C} &= \{1/n(n+1)(n+2)(n+3)\} \sum i(i+1)(i+2) X_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

$A \sim C$ の推定値として平均値 $\bar{A} \sim \bar{C}$ を用いることを提案したが、そのほかにも、中心値、モード、メディアンなどを推定値として使うことも考えられる。 F_i の中心値 \hat{F}_i 、モード \tilde{F}_i 、メディアン \bar{F}_i は、次のように表わされる⁹⁾。

$$\hat{F}_i = (i-0.5)/n, \quad \tilde{F}_i = (i-1)/(n-1) \quad (i \neq 1, n)$$

$$\bar{F}_i \approx (i-0.3)/(n+0.4)$$

このうち、 \tilde{F}_i は $i=1, n$ に対して定義できないから不適当である。また、 F_i^2 と F_i^3 については、

$$\hat{F}_i^2 = (\hat{F}_i)^2, \quad \hat{F}_i^3 = (\hat{F}_i)^3,$$

$$\bar{F}_i^2 = (\bar{F}_i)^2, \quad \bar{F}_i^3 = (\bar{F}_i)^3$$

の関係がある。これらの平均値、中心値、メディアンを使って $A \sim C$ を計算すると、平均値を使う場合が最も小さい推定値を与える。ここで、 \bar{Y}_N^E の計算においては、 $A \sim C$ が小さいほど \bar{Y}_N^E は大きくなる傾向があるから、安全側の推定という意味からは、 \bar{Y}_N^E の大きい場合、すなわち、 $A \sim C$ を最も小さく推定する平均値 $\bar{A} \sim \bar{C}$ を用いることが望ましい。

測定値が母集団から任意抽出された一組の標本である以上、測定値の特性値 $\bar{A} \sim \bar{C}$ と、母集団特性値 $A \sim C$ とは一般に一致しない。この偏差を解析的に評価することは困難であり、ここでは、 $\bar{A} \sim \bar{C}$ の下限値 $\bar{A}_L \sim \bar{C}_L$ を近似的に推定する方法を示すにとどめる。測定値の個々の値 X_i に、 ΔX_i の大きさの誤差があるとすると、本当の i 番目の値は $X_i + \Delta X_i$ である。このとき、真の $X(X_{\text{real}}$ とおく) の平均値と分散は、

$$\begin{aligned} \overline{X_{\text{real}}} &= (1/n) \sum (X_i + \Delta X_i) = \overline{X} + \overline{\Delta X} \\ s_{X_{\text{real}}}^2 &= \{1/(n-1)\} \sum (X_i + \Delta X_i)^2 - (\overline{X_{\text{real}}})^2 \\ &= s_X^2 + s_{\Delta X}^2 + 2 \text{Cov}(X, \Delta X) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\overline{A} \sim \overline{C}$ を計算する場合の X_i を、 $\overline{X_{\text{real}}}$ と $s_{X_{\text{real}}}$ とを用いて再正規化する必要がある。

$\overline{X_{\text{real}}}$ と $s_{X_{\text{real}}}$ は、 $\overline{X}=0, s_X^2=1$ だから、

$$\overline{X_{\text{real}}} = \overline{\Delta X}, s_{X_{\text{real}}}^2 = 1 + s_{\Delta X}^2 + 2 \text{Cov}(X, \Delta X)$$

となる。さらに、 ΔX_i が正負ほぼ均等に発生している ($\overline{X_{\text{real}}} = \overline{X}$) と仮定すると、近似的に

$$\overline{\Delta X} = \text{Cov}(X, \Delta X) \approx 0$$

となるから、 $\overline{X_{\text{real}}}$ と $s_{X_{\text{real}}}$ とは、次のような簡単な形で表現できる。

$$\overline{X_{\text{real}}} = 0, s_{X_{\text{real}}}^2 = 1 + s_{\Delta X}^2 \dots\dots\dots(19)$$

X_i の再正規化値 $X_{i,\text{real}}$ は、式 (19) から次のように求められる。

$$X_{i,\text{real}} = (X_i - \overline{X_{\text{real}}}) / s_{X_{\text{real}}} = X_i / (1 + s_{\Delta X}^2)^{1/2} \dots\dots\dots(20)$$

$\overline{A}_L \sim \overline{C}_L$ は、式 (16), (17) 中の X_i に、式 (20) の $X_{i,\text{real}}$ を代入することにより与えられる。

式 (20) 中の $s_{\Delta X}^2$ は、次のように近似的に求める。 ΔX_i を直接に知ることはできないから、代わりに ΔF_i を求めておいて ΔX_i を推定する。 ΔF_i の絶対値を F_i の標準偏差 s_{F_i} で代用する。すなわち、

$$|\Delta F_i| = s_{F_i}$$

とおく。 s_{F_i} は、 \overline{F}_i と同じようにして、次のように求められる。

$$\begin{aligned} s_{F_i} &= \left\{ \int_0^1 g(F_i) F_i^2 dF_i - (\overline{F}_i)^2 \right\}^{1/2} \\ &= \{i(n-i+1)/(n+1)^2(n+2)\}^{1/2} \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

ここで、Fig. 3 のような (X-F) 曲線を考えると、 X_i に相当する F_i が s_{F_i} の偏差で変動するときの上下限は、図中 a, b で表わされる。ほかの $X_{i-1}, X_{i+1} \sim X_n$ についても同様に上下限を求めて補間すると、Fig.

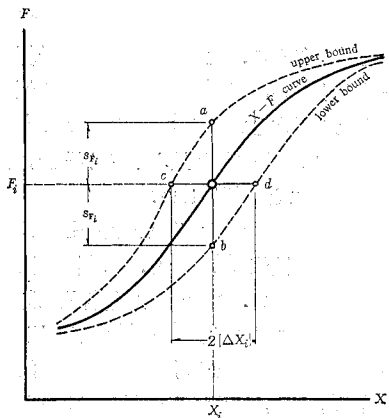


Fig. 3 Approximate Calculation of Deviation of X_i by Using the X-F Curve.

3 のような banana 曲線を得る。 $|\Delta F_i|$ に相当する X_i の偏差 $|\Delta X_i|$ は、Fig. 3 の $cd/2$ で表わされる。 $s_{\Delta X}^2$ は、この偏差 $|\Delta X_i|$ の分散を計算することにより、

$$s_{\Delta X}^2 = \{1/(n-1)\} \sum |\Delta X_i|^2 \dots\dots\dots(22)$$

のように推定できる。

7. 設計基準

5. で示したように、 \overline{Y}_N^E は破壊確率 $P_f = 2/N^2$ に相当する極値を近似的に表わす。そして、材料強度と荷重の双方について \overline{Y}_N^E を計算すると、破壊確率 $P_f = 2/N^2$ に相当する設計が可能となる。すなわち、材料強度に関しては、下側確率が p となる $\overline{Y}_N^E (= Y_R)$ を求め、荷重に関しては、上側確率が p となる $\overline{Y}_N^E (= Y_S)$ を求める。この Y_R と Y_S を用いて

$$A_S(\overline{R} + s_R Y_R) \geq \overline{S} + s_S Y_S \dots\dots\dots(23)$$

となるように部材の必要パラメーター (たとえば、引張部材なら A_S は部材断面積に相当する) を決めると、この「設計」によって部材に思わぬ破壊が生ずる可能性は、最悪の場合でも $P_f = 2/N^2$ を越えることはない。これは、設計に対する一つの有力な判断基準と思われる。なぜなら、限られた測定値を十分に活用しつつ、測定値の母集団の分布形状を仮定することなく、最も破壊確率の大きくなる状態を対象として設計を行うからである。

構造寿命 T は、構造物の計画段階からすでに決まっている。一方、構造物の設計破壊確率 P_f は、 \overline{Y}_N^E により定義されている。したがって、構造物の破壊と寿命とを結びつけて P_f に具体的な意味を持たせるには、 T と P_f とを結びつけることが必要となる。そこで、構造物の破壊を、次のように考える。

- ① 寿命 T を平均寿命と考える。すなわち、期間 $2T$ のうち、時期は問わずとにかく 1 回だけ破壊するという事象を想定すると、破壊に至るまでの平均的期間は T となる。
- ② 期間 $2T$ を q 個の区間に等分する ($2T/q = 4T$)。
- ③ 材料強度 R は未知量であるが、期間 $2T$ を通じて一定とする。
- ④ 荷重の測定値は時間的に連続して得られているから、 $4T$ 間隔に区切って、各区間における最大値だけを集めたものを、荷重 S として用いる。
- ⑤ 構造物が破壊するか否かは、 R と S の大小で判定する ($R < S$ なら破壊する)。
- ⑥ $R < S$ となる事象は、期間 $2T$ を通じて (q 回の試行のうち) 1 回だけ生ずるから、設計破壊確率は、 $P_f = 1/q = 4T/2T$ と与えられる。

⑦ たとえば、 $T=50$ 年、 $4T=1$ 週間とすると、設計破壊確率は、 $P_f=(1 \text{ 週間})/(2 \times 50 \text{ 年}) \approx 2 \times 10^{-4}$ となる。この場合、荷重 S は、1 週間 ($4T$) に 1 度の最大値だけを集めたものから成っている (付録 3 参照)。

\bar{Y}_N^E を推定するにあたって必要な N は、次のように決定できる。

① 設計に应用する場合、 $P_f=p^2/2=2/N^2$ であるから、 $N=(2/P_f)^{1/2}$ と与えられる。

② 雨量や流量の 100 年値の推定などに应用する場合、 N はそのまま 100 年という意味をもつ。

8. 種々の測定値への応用例

土木工学の分野に関連した種々の測定値について、特性値を計算して、 \bar{Y}_N^E を求めてみよう。ここで使用する測定値を以下に示す。

① 鋼材引張強度¹⁰⁾：日本鋼構造協会により、1968 年に行われた実験のうち、SM 41 B 鋼の降伏点強度と引張強度、SM 50 B 鋼の降伏点強度と引張強度の 4 つを、計算の対象とする。

② 鋼材座屈強度¹¹⁾：名古屋大学工学部において、1972 年に行われた実験のうち、細長比 100 の溶接 H 型 SS 41 鋼柱 (幾何学的中心柱) の座屈強度を、計算の対象とする。

③ セメントモルタルの圧縮強度¹²⁾：日本セメント技術協会により、1964 年に行われた実験のうち、均一調整された普通ポルトランドセメントの 28 日目における圧縮強度を、計算の対象とする。

④ トラス弦材の軸方向力¹³⁾：日本道路公団により、1968 年に名神高速道路天王山トンネル付近でほぼ 31 週間にわたって連続計測された軸重計記録をもとに、計算機によりシミュレート発生させた自動車荷重列を、ワレントラス橋 (Fig. 4 参照) にかけたときの上、下弦材に発生する軸方向力を、計算の対象とする。軸方向力は、1 週間に 1 度の最大値だけを集めたものを使用する。

⑤ 雨量¹⁴⁾：木曾川水系の付知と王滝の 2 つの地点で、それぞれ 1899~1969 年と 1923~1969 年にわたって測定された年最大の日雨量 (mm) を、計算の対象とする。

⑥ 流量¹⁵⁾：木曾川水系の犬山と淀川水系の加茂の 2 つの地点で、1956~1973 年にわたって測定された年最大流量 (m^3/sec) を、計算の対象とする。

⑦ 風速^{16), 17)}：名古屋地方気象台で、1923~1974 年にわたって測定された年最大の平均風速 (m/sec)、および、1972 年に至る 28~33 年間にわたって沖縄全県と那覇で測定された年最大の平均風速と瞬間風速とを、計算

の対象とする。

以上、7 種類、16 の例について、平均値 \bar{x} 、標準偏差 s_x 、変動係数 δ_x 、および、特性値 $\bar{A} \sim \bar{C}$ を計算したものを Table 1 に示す。 $N=100$ の場合に \bar{Y}_N^E を計算して、Table 1 に併記する。

測定例 ①~⑦ について、 $\bar{A} \sim \bar{C}$ の下限値 $\bar{A}_L \sim \bar{C}_L$ を計算して、Table 2 に示す。さらに、設計の対象となる測定値 ①, ②, ④ については、 $(N - \bar{Y}_N^E)$ の関係を、Fig. 5 に示す。一方、極値の単独推定の対象となる測定値 ⑤~⑦ については、 $N=100, 200$ の場合に \bar{Y}_N^E を計算して、従来使われてきた Gumbel 法による推定値と比較する (Table 3)。

Gumbel 法による雨量 (付知) の 100 年推定値は 258.4 (mm) であるが、71 個の測定値中の最大値 255.7

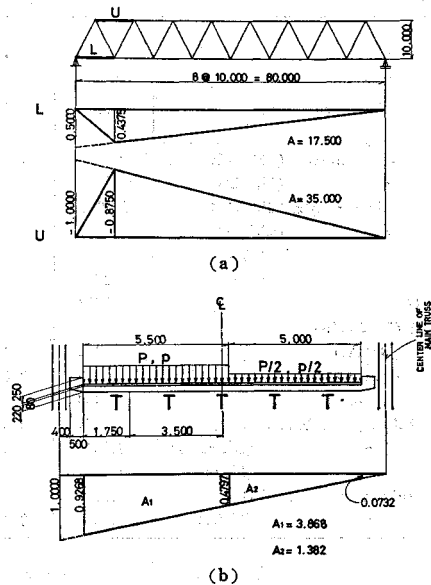


Fig. 4 Truss Bridge and its Influence Lines

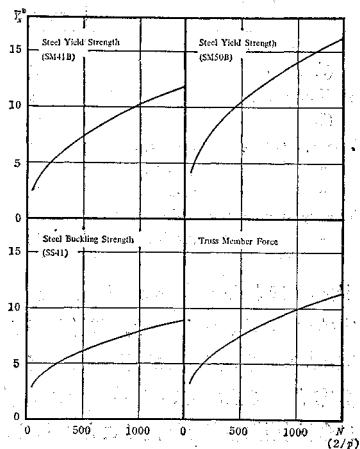


Fig. 5 The $N - \bar{Y}_N^E$ Curves for Various Sorts of the Measured Data.

Table 1 Extremums \bar{Y}_N^E for Various Sorts of the Measured Data by Using Three Characteristics A, B and C .

Measured Data	unit	n	\bar{x}	s_x	δ_x	\bar{A}	\bar{B}	\bar{C}	\bar{Y}_N^E ($N=100$)
Steel Yield Strength (SM 41 B)	t/cm ²	21	2.752	0.119	0.043	0.2577	0.2467	0.2142	-3.52
" (SM 50 B)	"	48	3.637	0.207	0.057	0.2238	0.2426	0.2343	-5.59
Steel Tensile Strength (SM 41 B)	"	21	4.321	0.143	0.033	0.2573	0.2704	0.2502	-4.25
" (SM 50 B)	"	48	5.377	0.057	0.011	0.2565	0.2571	0.2361	-4.47
Steel Buckling Strength (SS 41)	"	48	1.251	0.156	0.124	0.2758	0.2829	0.2608	-3.64
Cement Compressive Strength	"	56	0.3905	0.0109	0.028	0.2746	0.2823	0.2611	-3.71
Truss Member Force (Lower Chord)	t	31	14.44	1.95	0.135	0.2663	0.2736	0.2528	4.19
" (Upper Chord)	"	31	28.88	3.91	0.135	0.2663	0.2736	0.2528	4.19
Rainfall (Tsukechi)	mm	71	121.1	40.3	0.333	0.2615	0.2815	0.2688	4.16
" (Ootaki)	"	47	117.6	33.3	0.284	0.2702	0.2797	0.2603	3.97
Discharge (Inuyama)	m ³ /sec	18	4 386	1 516	0.346	0.2599	0.2643	0.2424	4.42
" (Kamo)	"	18	1 027	711	0.692	0.2463	0.2640	0.2497	4.89
Wind Velocity per 10 min (Nagoya)	m/sec	52	18.6	4.8	0.257	0.2378	0.2664	0.2612	4.86
" (Okinawa)	"	33	40.4	8.2	0.202	0.2678	0.2702	0.2473	4.05
" (Naha)	"	33	32.9	8.5	0.257	0.2735	0.2759	0.2506	3.68
Wind Velocity per second (Okinawa)	"	30	57.0	11.8	0.207	0.2656	0.2706	0.2497	4.19
" (Naha)	"	28	46.8	12.7	0.272	0.2698	0.2715	0.2465	3.89

Table 2 Graphical Estimation Method of Extremum \bar{Y}_N^E .

Measured Data	\bar{A}	\bar{B}	\bar{C}	\bar{Y}_N^E	lower bound of A	lower bound of B	lower bound of C	upper bound of \bar{Y}_N^E
Steel Yield Strength (SM 41 B)	0.2577	0.2467	0.2142	-3.60	0.2423	0.2320	0.2014	-5.03
" (SM 50 B)	0.2238	0.2426	0.2343	-5.60	0.1810	0.1962	0.2343	—
Steel Tensile Strength (SM 41 B)	0.2573	0.2704	0.2502	-4.37	0.2378	0.2499	0.2312	-5.25
" (SM 50 B)	0.2565	0.2571	0.2361	-4.47	0.2294	0.2300	0.2537	-5.48
Steel Buckling Strength (SS 41)	0.2758	0.2829	0.2608	-3.64	0.2682	0.2752	0.2537	-4.08
Cement Compressive Strength	0.2746	0.2823	0.2611	-3.71	0.2681	0.2756	0.2549	-4.09
Truss Member Force	0.2663	0.2736	0.2528	4.19	0.2536	0.2605	0.2408	4.73
Rainfall (Tsukechi)	0.2615	0.2815	0.2688	4.19	0.2533	0.2726	0.2604	4.63
" (Ootaki)	0.2702	0.2797	0.2603	3.97	0.2599	0.2690	0.2503	4.48
Discharge (Inuyama)	0.2599	0.2643	0.2424	4.43	0.2434	0.2475	0.2269	5.09
" (Kamo)	0.2463	0.2640	0.2497	4.90	0.2177	0.2334	0.2208	—
Wind Velocity per 10 min (Nagoya)	0.2378	0.2664	0.2612	4.86	0.2264	0.2536	0.2486	5.34
" (Okinawa)	0.2678	0.2702	0.2473	4.05	0.2537	0.2560	0.2343	4.73
" (Naha)	0.2735	0.2759	0.2506	3.70	0.2637	0.2659	0.2415	4.31
Wind Velocity per second (Okinawa)	0.2656	0.2706	0.2497	4.19	0.2510	0.2557	0.2360	4.84
" (Naha)	0.2698	0.2715	0.2465	3.90	0.2579	0.2595	0.2356	4.57

Table 3 Comparison between Proposed Procedure and Gumbel's Method.

Measured Data	Data		Proposed Procedure		Gumbel's Method	
	n (year)	maximum	100 years	200 years	100 years	200 years
Rainfall (Tsukechi)	71	255.7	288.6	326.1	258.4	282.0
" (Ootaki)	47	213.4	250.0	282.3	234.5	254.6
Discharge (Inuyama)	18	7 064	11 087	13 179	10 281	11 286
" (Kamo)	18	2 926	4 504	5 577	3 792	4 263
Wind Velocity per 10 min (Nagoya)	52	36.5	41.8	47.5	35.2	38.0
" (Okinawa)	33	60.8	73.4	82.7	69.9	75.0
" (Naha)	33	49.5	64.0	72.8	63.5	68.7
Wind Velocity per second (Okinawa)	30	85.3	106.5	120.2	100.2	107.6
" (Naha)	28	73.6	96.2	110.7	93.6	101.6

(mm) と比べてほとんど差がないし、風速(名古屋)の100年推定値の35.2(m/sec)は、52個の測定値中の最大値36.5(m/sec)を明らかに下回っている。これは、2重指数分布をあてはめている Gumbel の方法が場合によっては危険側推定値を与えることもある、ということを示している。一方、本論文で提案する \bar{Y}_N^E は、**Table 3** を見る限りでは、過大評価の傾向があるとは

いえ、危険側の見積りを与えることはない。

9. 設計計算例

平均寿命 T を50年とする。荷重 S は、 $\Delta T=(1$ 週間)に1度の最大値を集めたものだから、7. の適用例に挙げたように、設計破壊確率は $P_f \approx 2 \times 10^{-4}$ となる。

すなわち、 N は、

$$N = (2/P_f)^{1/2} \approx 100$$

となる。

設計計算例として、Fig. 4 (a) に示すワレントラスの上、下弦材（太線で表示してある）の必要断面積を求める。トラス橋は一方通行2車線とし、床版横断面をFig. 4 (b) に示す。

8. の測定例のうち、SM 41 B 鋼の降伏点強度、SS 41 鋼の座屈強度、トラス弦材の軸方向力の3つを使用する。Fig. 5 より、 $N=100$ に対してこれら3つの場合の \bar{Y}_N^E を読むと（あるいは、Table 1 の \bar{Y}_N^E を直接に用いると）、次のようになる（かっこ内の数値は上限値 $\bar{Y}_{N,U}^E$ —Table 2 より）。

$$\text{降伏点強度: } Y_R = -3.52 (-5.03)$$

$$\text{座屈強度: } Y_R = -3.64 (-4.08)$$

$$\text{軸方向力: } Y_S = 4.19 (4.73)$$

これらは正規化された量であり、元の量に戻すと、次のようになる。

$$\text{降伏点強度: } \bar{R} + s_R Y_R = 2.333(2.153) \text{ (t/cm}^2\text{)}$$

$$\text{軸方向力 (L): } \bar{S} + s_S Y_S = 22.61(23.66) \text{ (t)} \quad (t)$$

$$\text{座屈強度: } \bar{R} + s_R Y_R = 0.683(0.614) \text{ (t/cm}^2\text{)}$$

$$\text{軸方向力 (U): } \bar{S} + s_S Y_S = 45.22(47.33) \text{ (t)} \quad (t)$$

したがって、必要断面積 A_S は、次のようになる。

$$\text{下弦材: } A_S = 22.61/2.333 = 10(11) \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{上弦材: } A_S = 45.22/0.683 = 67(78) \text{ (cm}^2\text{)}$$

さらに、 $p_R = p_S = p$ と仮定したことによる誤差を考慮して、割増し係数を掛けて修正すると（Fig. 2 より、下弦材に対して1.15、上弦材に対して1.6という割増し係数を得る）、次のようになる。

$$\text{下弦材: } A_S = 10 \times 1.15 = 12(13) \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{上弦材: } A_S = 67 \times 1.6 = 108(125) \text{ (cm}^2\text{)}$$

一方、従来の許容応力設計（一等橋）を用いて同じ部材の必要断面積を求める。線荷重、等分布荷重は、Fig. 4 (b) より、それぞれ、 $5 \times 4.559 = 22.80$ (t)、 $0.35 \times 4.559 = 1.596$ (t/m) となり、Fig. 4 (a) より、下弦材に対する活荷重 $22.80 \times 0.4375 + 1.596 \times 17.5 = 37.9$ (t) を得る（上弦材に対する活荷重は、2倍の75.8 (t)）。SM 41 B 鋼の引張りに対する許容応力度は 1.400 (t/cm²)、細長比100のSS 41 鋼の圧縮に対する許容応力度は $1.300 - 0.00006 \times 100^2 = 0.700$ (t/cm²) である。したがって、 A_S は次のように与えられる。

$$\text{下弦材: } A_S = 37.9/1.400 = 28 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{上弦材: } A_S = 75.8/0.700 = 109 \text{ (cm}^2\text{)}$$

この例では、示方書の許容応力設計法の活荷重に対する絶対安全率（絶対に安全であるという状態に対して、さらに何倍の安全率が見込まれているかの基準） r_{abs} が、

$$\text{下弦材: } r_{abs} = 28/12 = 2.3(2.1)$$

$$\text{上弦材: } r_{abs} = 109/108 = 1.0(0.87)$$

程度である。極値 \bar{Y}_N^E の上限値 $\bar{Y}_{N,U}^E$ を用いた設計（かっこの中の数値）では、示方書との比較で安全率が0.87（上弦材）にもなっている。実用目的からは、 $\bar{Y}_{N,U}^E$ ではなく \bar{Y}_N^E をそのまま用いることにより、十分安全な設計が期待できよう。

厳密極値という概念では、えてして非現実的な推定結果を与えるものであるが、この設計計算例で見る限りでは、おおよそ妥当な結果が得られている。これだけで、この考え方が全面的に信頼できるというつもりはないが、こういう考え方（つまり、最も危険な状態を想定した設計）をよりいっそう発展させていってもいいのではないか、という目安にはなると思われる。

10. 特性値 $\bar{A} \sim \bar{C}$ を用いた極値 \bar{Y}_N^E の簡易推定法

$\bar{A} \sim \bar{C}$ が測定値から簡単に計算できても、 \bar{Y}_N^E はコンピュータを使って計算する必要があり、実用上非常に不便である。そこで、実用上十分な精度で、かつ、危険側とはならないように \bar{Y}_N^E を推定する簡易推定法を提案する。これは、特性値 $\bar{A} \sim \bar{C}$ に関する3枚1組の図から \bar{Y}_N^E を推定するもので、3枚の図とは、 (\bar{A}, \bar{B}) と Y_{max} の関係、 (\bar{B}, \bar{C}) と Y_{max} の関係、 (\bar{C}, \bar{A}) と Y_{max} の関係を表わしている。 $\bar{A} \sim \bar{C}$ を使って3枚の図より3通りの Y_{max} を図上で求めて、3つの Y_{max} の中の最小値を \bar{Y}_N^E とする。

$N=100$ 、すなわち、 $p=1/50$ の場合について、 $[(\bar{A}, \bar{B}) - Y_{max}]$ 、 $[(\bar{B}, \bar{C}) - Y_{max}]$ 、 $[(\bar{C}, \bar{A}) - Y_{max}]$ の関係を、Fig. 6 (a)~(c) に示す。Table 1 の $\bar{A} \sim \bar{C}$ に簡易推定法を適用した場合の \bar{Y}_N^E の推定値を、 $N=100$ の場合に、Table 2, 4 に示す。Table 4 によると、 \bar{Y}_N^E の推定誤差は最大でも3%以内で、実用上十分な精度となっている。

$A \sim C$ の誤差による \bar{Y}_N^E の変動は、Fig. 6 を使って推定できる。6. で定義した $\bar{A} \sim \bar{C}$ の下限値 $\bar{A}_L \sim \bar{C}_L$ を使って、 $A \sim C$ の変動域を

$$\bar{A}_L \leq A \leq 2\bar{A} - \bar{A}_L,$$

$$\bar{B}_L \leq B \leq 2\bar{B} - \bar{B}_L,$$

$$\bar{C}_L \leq C \leq 2\bar{C} - \bar{C}_L$$

と設定する。 $A \sim C$ がこの範囲内の任意の値の組合せをとると考えると、それに対応して Y_{max} の変動域も決まる。例として、 $[(\bar{C}, \bar{A}) - Y_{max}]$ の場合を取り上げよう。Fig. 6(c) に、 $C = \bar{C}_L$ 、 $C = 2\bar{C} - \bar{C}_L$ 、 $A = \bar{A}_L$ 、 $A = 2\bar{A} - \bar{A}_L$ という4つの線を記入したものを、Fig. 7 に示す。この場合の \bar{A} 、 \bar{C} 、 \bar{A}_L 、 \bar{C}_L は、SS 41 鋼の

Table 4 - Estimation Errors of Graphical Estimation Method

Measured Data	$ \bar{Y}_{N^E} $	graphical estimation of $ \bar{Y}_{N^E} $	estimation error (%)	n	upper bound of $ \bar{Y}_{N^E} $	ratio of $ \bar{Y}_{N^E} $ and its upper bound
Steel Yield Strength (SM 41 B)	3.52	3.60	2.3	21	5.03	1.40
" (SM 50 B)	5.59	5.60	0.2	48	—	—
Steel Tensile Strength (SM 41 B)	4.25	4.37	2.8	21	5.25	1.20
" (SM 50 B)	4.47	4.47	0	48	5.48	1.25
Steel Buckling Strength (SS 41)	3.64	3.64	0	48	4.08	1.12
Cement Compressive Strength	3.71	3.71	0	56	4.09	1.10
Truss Member Force	4.19	4.19	0	31	4.73	1.13
Rainfall (Tsukechi)	4.16	4.19	0.7	71	4.63	1.11
" (Ootaki)	3.97	3.97	0	47	4.48	1.13
Discharge (Inuyama)	4.42	4.43	0.2	18	5.09	1.15
" (Kamo)	4.89	4.90	0.2	18	—	—
Wind Velocity per 10 min (Nagoya)	4.86	4.86	0	52	5.34	1.10
" (Okinawa)	4505	4.05	0	33	4.73	1.17
" (Naha)	3.68	3.70	0.5	33	4.31	1.16
Wind Velocity per second (Okinawa)	4.19	4.19	0	30	4.84	1.11
" (Naha)	3.89	3.90	0.3	28	4.57	1.17

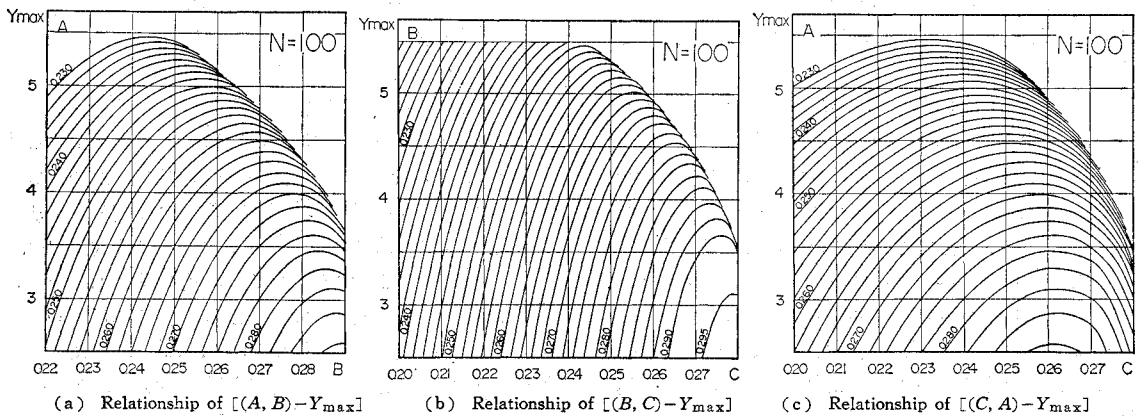


Fig. 6 Graphical Estimation Method of \bar{Y}_{N^E} for $N=100$.

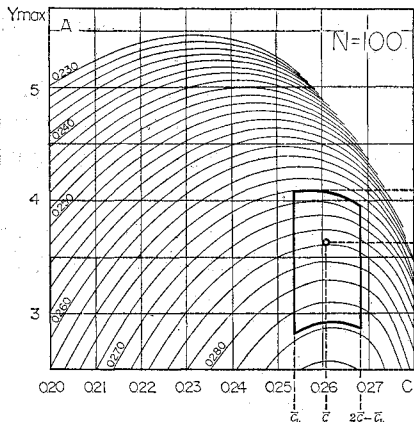


Fig. 7 Fan Shape Region of Y_{max} —Estimation of Upper Bound of \bar{Y}_{N^E} in Case of Buckling Strength of SS 41 Steel.

座屈強度の測定値を使う。 Y_{max} は Fig. 7 の領域 (4 つの線で囲まれた部分) 内のどの値でもとることができる。したがって、領域内での最大値 $Y_{max,max}=4.08$ を

上限値と考える。 Fig. 6 (a), (b) についても同様の領域を描くと、それぞれ、 $Y_{max,max}=4.09$, $Y_{max,max}=4.57$ を得る。実際の \bar{Y}_{N^E} の上限値 \bar{Y}_{N,U^E} は、これら 3 通りの $Y_{max,max}$ の中の最小値として、 $\bar{Y}_{N,U^E}=4.08$ と推定できる。なお、 Fig. 7 の黒丸は、平均値 \bar{C} , \bar{A} に対応した Y_{max} を表わしている。 Table 1 の各測定値について \bar{Y}_{N,U^E} を求めたものを Table 2, 4 に示す。

11. 結 論

変分原理に基づく厳密極値という概念を、現実の統計量に適用した場合に生ずる「過大な極値の推定」という欠点をなくすように、新しい特性値 A, B, C を設定した。さらに、破壊確率の極大化と結びつけることにより、設計への応用を可能にした。

本論文の特徴を列挙しよう。

- (1) 厳密極値という概念を統計的推定に応用する。

測定値の分布そのものを未知関数として、最も危険な状態を派生させるような分布を誘導する。

(2) 測定値を特徴づける特性値として、新しい特性値 A, B, C を設定する。

(3) 未知関数 $X(F)$ を常に単調増加関数に保つように、ダミー特性値 D を導入する。

(4) 破壊確率の極大化と結びつける。これは、「最悪の場合でも所期の破壊確率を越えることがないような設計」に通ずるものである。

(5) 特性値 $A \sim C$ の測定誤差が極値 \bar{Y}_N^E の推定に与える影響を検討している。

(6) 簡易推定法を提案して、簡単に、しかも、実用上十分な精度で \bar{Y}_N^E を推定することを可能にする。

(7) 設計だけでなく、雨量や流量の100年値などの予測において、従来の Gumbel 法などの代わりに、より安全な推定法として利用できる。

今後の課題としては、最悪位相差を考えたパワースペクトルによる地震時の構造物の動的信頼性解析への拡張を考えている。

付録 1. ひずみ、とがりと特性値 $A \sim D$

まず、ひずみ、とがりが拘束条件として不適切ということから説明しよう。3. の記述と相前後するが、もし、ひずみ、とがりを拘束条件とした上で汎関数 J を設定すると(平均値と分散も拘束条件として考慮する)、

$$J = NXFN^{-1} - \lambda_1 X - \lambda_2 X^2 - \lambda_3 X^3 - \lambda_4 X^4$$

となる。この J を X に関して極大化する状態をつくるために、 $\partial J / \partial X = 0$ をとると、

$$(NFN^{-1} - \lambda_1) - 2\lambda_2 X - 3\lambda_3 X^2 - 4\lambda_4 X^3 = 0 \dots\dots\dots(A.1)$$

となり、これより X を求めようとしても、式(8)のように簡単に決めることができない。式(A.1)は X に関する3次方程式であり、一般解は F の無理関数として与えられる。さらに、この関数を条件式(1),(2)、ならびに、ひずみ、とがりに関する条件式に代入して未定乗数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ を決めようとする、定積分不可能となって計算が行き詰まってしまう。

以上の経験から、拘束条件は、① X の一次関数、② $\partial J / \partial X = 0$ としたとき、 F の多項式で表わされる、の2点を満足することが必要なことが推察されよう。

次に、本論文で提案している特性値 $A \sim D$ の意味について概説しよう。本文中でも説明したように、 $A \sim D$ は $\int_0^1 X \cdot X^i dF$ と $\int_0^1 X(F-0.5)^i dF$ との類似性にヒントを得て導入した統計量であり、ひずみ、あるいはとがりとの間には本質的な同一性は存在しないと思われる。唯一の類似点は、両者がともに、平均値から離れるに従

って、 i 乗のオーダーの重みを付加しているという点であるが、それも、 $0 < F < 1$ 区間で有限な F と、 $-\infty < X < \infty$ の X とではその様相も非常に異なることが予想される。ひずみ、とがり特性値 $A \sim D$ とを結びつけることは有意義かもしれないが、實際上困難と思われる。

特性値 $A \sim D$ は、確率変数の実現値 X に $(F-0.5)^i$ という重みを加えて平均化したものと(本論文では)考えているが、同時に、次のように把握することも可能であろう。すなわち、

$$\int_0^1 XF^i dF = 1/(i+1) \cdot \int_0^1 Xd(F^3)$$

という関係を念頭に入れれば、 F^2, F^3, F^4, F^5 なる分布関数の平均値が、それぞれ、 $2A, 3B, 4C, 5D$ であることを意味する。本論文のように重みつき平均値と考えるか、あるいは、上述のように F^i なる分布関数の平均値として把握するかはまったく自由であるが、ここでは、具体的に意味のつかみやすい方として、重みつき平均値と考えることを提案している。

付録 2. 割増し係数

材料強度 R と荷重 S とを組み合わせたものとしての破壊確率 P_f は定めることができても、 P_f の構成要素である p_R と p_S は不明である。たとえば、 $p_R = p_{R1}$ として R の限界最小値 $R_{min,1}$ を求め、 $p_S = p_{S1}$ として S の限界最大値 $S_{max,1}$ を求める。同様に、 $p_R = p_{R2}$ として $R_{min,2}$ を、 $p_S = p_{S2}$ として $S_{max,2}$ を求める。ここで、

$$p_{R1} p_{S1} = p_{R2} p_{S2} = 2P_f$$

である。しかし、 S と R の限界値の比 (S_{max}/R_{min}) は、

$$S_{max,1}/R_{min,1} \neq S_{max,2}/R_{min,2}$$

のように一致しないのが一般的である。

どのような p_R と p_S の組み合わせを用いるべきかについて既定の約束がまったくないので、本論文では、比 (S_{max}/R_{min}) を最も大きくするような p_R と p_S の組み合わせを設計に用いることを提案している。

計算のたびに p_R, p_S とを変化させて (S_{max}/R_{min}) を求めるのは不便であるから、 $p_R = p_S$ として計算した比 ($S_{max}/R_{min})_{p_R=p_S}$ と、比 (S_{max}/R_{min}) の最大値 ($S_{max}/R_{min})_{max}$ との比、すなわち、

$$(S_{max}/R_{min})_{max} / (S_{max}/R_{min})_{p_R=p_S}$$

とをあらかじめ計算しておく。これが割増し係数である。このようにすれば、 $p_R = p_S$ と仮定してまず ($S_{max}/R_{min})_{p_R=p_S}$ を計算し、ついで、この値に割増し係数を掛けることにより、($S_{max}/R_{min})_{max}$ が推定できる。

割増し係数は、特性値 $A\sim C$ に対して鈍感で、主として変動係数 δ_R, δ_S に影響されるので、 δ_R と δ_S に対して図示することにした（特性値 $A\sim C$ については、割増し係数を最も大きくするような場合を選んだ）。

付録 3. データ間隔 $4T$ の選び方

破壊確率 P_f を小さくしようとする、必然的に $4T$ を小さくせざるを得ない。しかし、交通荷重の場合には、定常的なデータを得ようとする、 $4T$ の最小単位は1日となる。もし $4T=1$ 時間とすると、時間あたり交通量の大きな変動の影響を受けて、データとして不適当なものとなってしまふ。 $4T$ をさらに細かくすると、データの独立性の欠如という問題を生ずるが、 $4T \geq 1$ 日という状態では問題とする必要はなさそうである。

定常的なデータではなく、風とか波、地震などの荷重の場合、 $4T$ は1日よりもさらに大きくなり、1か月とか1年のオーダーとなる。このような場合、独立性についてうんぬんする必要はないと思うが、一方、破壊確率 P_f の値が相当に大きくなって、従来の P_f の定義に慣れた目から見ると抵抗を感じる向きもあるかもしれない。

本論文で用いている P_f は、便宜上破壊確率とよばれているが、実のところ、 $P_f=4T/2T$ で定義される量であり、 T 年間に平均1度は破壊するという状態を意味している。このことに留意するならば、破壊確率 P_f が従来の慣用値に比較してずいぶん大きいことを説明することができる。

参考文献

1) Jorgensen, J.L. : The Sensibility of Failure Pro-

- babilities to Probability Distributions, Memo. of Commit. on Factors of Safety, 1967.
- 2) Ang, A.H.S. and M. Amin : Reliability of Structures and Structural Systems, Proc. ASCE, EM 2, pp. 559~583, 94 (1968).
- 3) Ang, A.H.S. and B.R. Ellingwood : Critical Analysis of Reliability Principles Relative to Design, Proc. 1st Inter. Conf. on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engng., Hong Kong, pp. 1~15, 1971.
- 4) Plackett, R.L. : Limits of the Ratio of Mean Range to Standard Deviation, Biometrika, pp. 120~122, 34 (1947).
- 5) Gumbel, E.J. : Extreme Values of the Statistical Distributions (in French), Annales Institut Henri Poincaré, pp. 115~158, 4 (1935).
- 6) Gumbel, E.J. : Statistic of Extremes, Columbia Univ. Press, 1950.
- 7) 馬場俊介・中川建治・成岡昌夫：実験値に基づく条件付き最小値の推定法に関する基礎的研究，建築学会論文報告集，pp. 13~20, 233 (1975).
- 8) 馬場俊介・中川建治・成岡昌夫：極値推定法による構造安全性の推定，土木学会第31回年次学術講演会講演概要集第1部，I-228, pp. 389~390, 1976.
- 9) Baba, S. : On the Structural Safety Based on Extremum Theory, 名古屋大学提出学位論文，97 p., 1977.
- 10) 堀川浩甫：引張試験片の形状に関する実験報告，JSSC, pp. 52~67, 5 (1969).
- 11) 青木徹彦・福本嘔士：溶接H形鋼柱の座屈強度分布について，土木学会論文報告集，pp. 37~48, 222 (1974).
- 12) 日本セメント技術協会：セメント共同試験報告，63-SE, 1964.
- 13) 日本道路公団：名神高速道路天王山トンネル付近における軸重計記録，1968.
- 14) 建設省木曾川上流工事事務所：既往年最大雨量記録（木曾川I），1972.
- 15) 日本河川協会-建設省河川局：流量年表，1958~1975.
- 16) 建設省名四国道工事事務所：伊勢湾岸道路海洋気象調査報告集，1975.
- 17) 日本気象協会：沖縄県における異常気象調査報告，1973. (1977.2.3・受付)