

# 圧延 H 型鋼ばりの横だおれ座屈公式

## DESIGN FORMULA FOR LATERAL TORSIONAL BUCKLING OF ROLLED I AND H STEEL BEAMS

青 島 泰 之\*  
By Yasuyuki AOSHIMA

### 1. 序 論

最近のはりの弾塑性横だおれ座屈の研究はめざましく残留応力, 初期変位, 荷重偏心を考慮した現実のはりにより近い解析が可能になっている。しかしながら, ある一本の特定なはりの挙動は高い精度で求められるものの, 断面形状と横だおれ座屈強度の一般関係を明らかにする研究は必ずしも多くな<sup>1)~5)</sup>, 最も簡単な I, H 断面ばりについてすらそれらの一般関係が明らかにされていないのが現状である<sup>6)</sup>。それらの一般関係を明らかにして有効な設計公式を提案することが, 弾塑性横だおれ座屈の研究で重要な課題の一つであろう。

柱の座屈の場合, 細長比をパラメーターに選ぶことにより弾性域, 弾塑性域を問わず座屈式が簡略に表現できる。しかるに, 横だおれ座屈の場合はサンプナンの純ねじり剛性とそりねじり剛性の二つの異なった剛性が存在するために話が簡単に進まない。一般にプレートガーダーのように桁高の高いはりではそりねじり剛性が重要となり<sup>7)</sup>, 細長いはりではサンプナンの純ねじり剛性が優勢となる<sup>8)</sup>。日常使用される H 型鋼ばりはこの中間に位置し, かつ弾塑性挙動を示すのでパラメーターの選定には困難さが伴う。本論文の目的は圧延 H 型鋼ばりの横だおれ座屈強度を, あるパラメーターを選ぶことにより一本の座屈式で表現できることを示し, 設計公式を提案することにある。

### 2. パラメーターの選定

単純支持<sup>注1)</sup>され, 等モーメントを受ける I, H 断面

ばりの横だおれ座屈モーメント (固有値) は<sup>9)~11)</sup>,

$$M^0_{crit} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{I_y}{I_x}} EI_y GJ \left( 1 + \frac{\pi^2 EI_w}{GJL^2} \right)} \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。座屈前の変位の影響を無視した理論では式 (1) 中の係数

$$\frac{1}{1 - \frac{I_y}{I_x}} \dots\dots\dots (2)$$

を 1 で置き換えた形になっている<sup>11)</sup>。

$$M_{crit} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GJ \left( 1 + \frac{\pi^2 EI_w}{GJL^2} \right)} \dots\dots\dots (3)$$

#### (1) Galambos の考え方

Galambos<sup>11)</sup> は式 (3) を無次元の形に直し,

$$\frac{M_{crit}}{M_p} = \frac{5.56 \sqrt{D_T}}{\epsilon_y \cdot L/r_y} \sqrt{1 + \frac{5.78}{D_T (L/r_y)^2}} \dots\dots\dots (4)$$

ここに,

- $M_p$ : 全塑性モーメント
- $\epsilon_y$ : 降伏ひずみ
- $D_T = J/Ah^2$
- $J$ : サンプナンのねじり定数
- $A$ : 断面積
- $h$ : 断面高さ

はりの長さに関係しない  $\epsilon_y$ ,  $D_T$  を知れば, 横だおれ座屈モーメントは弱軸まわりの細長比  $L/r_y$  で評価できることを示した。  $D_T$  はサンプナンねじり項,  $L/r_y$  はそりねじり項に関係するものである。 Galambos の考え方は単に片方のパラメーターを固定させたに過ぎず, この二つの連成作用を包括するような形での考察ではない。パラメーターを  $L/r_y$  に選んで座屈曲線を表示すると断面によって座屈曲線が変わる。これは設計という立場から見ると使いにくい形であろう。

\* 正会員 工博 日本鋼管 (株) 海洋技術室 (前 ローザンヌ工科大学鋼構造研究室助手)

注 1) 両端でそりが拘束されていない, 横方向にヒンジ支持されているものをいう。

(2) DIN や AISC の考え方

DIN の Blatt 1 は圧縮フランジとウェブの 1/5 部分に関して弱軸まわりの断面二次半径  $\bar{r}$  を計算し、 $L/\bar{r}$  の細長比を持つ柱の座屈式で検算するよう勧めていた。プレートガーダー型のはりではよい近似を与えるが、圧延 H 型鋼ばかりでは横だおれ座屈抵抗を過少評価することになり経済的でない。AISC<sup>23)</sup> では一步進んで、細長いはりの場合の de Vries<sup>8)</sup> の発見した公式と併用するようにしている。すなわち、 $L/\bar{r}$  と  $Lh/bt$  のおのおの座屈値を計算し、その大きい方を探るよう勧めている。しかし、この考え方も断面によって座屈曲線が変わるという欠点を持つ。

(3) Nethercot の考え方

Nethercot<sup>12),13)</sup> はサンプナンのねじり剛性、そりねじり剛性の比に注目し、

$$R^2 = \frac{L^2 GJ}{EI_o} \dots\dots\dots (5)$$

なるパラメーターを使えば弾性域での横だおれ座屈が種々の荷重、境界条件に対し、断面形状によらない関数  $\alpha(R)$  を使うと、

$$M_{crit} = \alpha(R) \frac{1}{L} \sqrt{EI_y GJ \left(1 + \frac{\pi^2}{R^2}\right)} \dots\dots\dots (6)$$

の形に近似できることを示し、種々の荷重、境界条件での  $\alpha(R)$  の近似式を提案した。しかし、弾塑性域においてもパラメーター  $R$  の選定が妥当であるか疑問が残る。これは、Nethercot 自身が指摘しているように、パラメーター  $R$  では塑性域の伸びを代表することができないことによる。実際、 $R$  の小さいところでは弾塑性挙動を示し、式(6)の修正が必要となる。ところが  $R$  で塑性域の伸びを代表できないために、式の修正をパラメーター  $R$  で表現できないという欠点を持つ。

(4) Djalaly の考え方

Djalaly<sup>3)</sup> は、与えられたはりの弾性横だおれ座屈解  $M_{crit}$  を求め、弾塑性域への拡張には、

$$\frac{M_u}{M_e} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+m \left(\frac{\alpha M_e}{M_{crit}}\right)^n}} \dots\dots\dots (7)$$

なる式で横だおれ座屈モーメント  $M_u$  を算定することを提案した。ここに  $M_e$  は弾性モーメント、 $n, m$  は荷重、境界条件による定数である。式(7)は短いはりでは  $M_u$  が全塑性モーメント  $M_p$  に、長いはりでは弾性解  $M_{crit}$  に漸近する式である。中間の長さのはりの横だおれ強度は  $n, m$  による。ただし、文献 3) には、 $n, m$  の理論的根拠は明確にされていない。Djalaly の提案の欠点は、まず弾性解を数値的に求めねばならない点と、

式(7)に  $n$  乗、 $n$  乗根が入っていて計算が必ずしも簡単でない点である。

(5) Kitipornchai, Trahair の考え方

Kitipornchai, Trahair<sup>4)</sup> も、まず与えられたはりの弾性横だおれ座屈解  $M_{crit}$  を数値的に求め、これと実際の横だおれ座屈モーメント  $M_u$  を結ぶ関係として Fig. 1 を提案した。この考え方のすぐれた点は、 $M_e/M_{crit}$  をパラメーターに選ぶことにより弾性域でのすべてのはりの横だおれ座屈が一本の

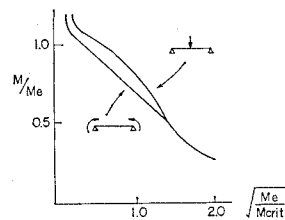


Fig. 1 Proposed Curves by Ref. 4

曲線で厳密に表現される点と、横荷重のある場合その荷重高さによらない座屈曲線が得られた点である<sup>4)</sup>。この考え方の欠点も、まず弾性解を数値的に求めなければならない点であろう。

(6) 標準細長比の考え方

Young<sup>14)</sup> は、

$$\lambda_{LT} = \frac{\sigma_y}{1430} \frac{L}{r_y} \sqrt{4 \sqrt{\frac{3.75 \left(\frac{b}{t}\right)^2}{\left(\frac{L}{r_y}\right)^2 + 3.75 \left(\frac{b}{t}\right)^2 \left(1.1 + \frac{1}{60} \frac{b}{t}\right)}}} \dots\dots\dots (8)$$

なる横だおれ細長比を提案し、これをパラメーターに選んで横だおれ座屈曲線を整理すれば、降伏応力、断面形状からくる影響をほとんどなくすることができるとした。実際に Nethercot<sup>15)</sup> は 17 種類の荷重について  $\lambda_{LT}$  で座屈曲線を求めた。 $\lambda_{LT}$  の選定は前項(1)~(5)よりは一步進んでいるように思われる。一方、Kasemset, Nishino, Lee<sup>16)</sup> は同じ思想から、式(1)の  $M^0_{crit}$  が弾性モーメント  $M_e$  になるような部材長を標準にした標準細長比、

$$\lambda^2 = \frac{L}{\pi} \frac{M_e}{\sqrt{E \frac{I_x I_y}{I_x - I_y} GJ \left(1 + \frac{\pi^2 EI_o}{GJL^2}\right)}} \dots\dots\dots (9)$$

を定義し、たて軸に  $M_u/M_p$ 、横軸に  $\lambda$  を選べば降伏応力、断面形状を一般化できることを示した。4つの断面について計算を行い、それを実証している。ただし、残留応力の影響は考えていない。Lindner<sup>5)</sup> はほとんど同時期に、やはり残留応力を持たない断面について、弾性横だおれ座屈モーメントが  $M_e$  になる部材長  $L_e$  と実際の部材長  $L$  の比、

$$\lambda = \frac{L}{L_e} \dots\dots\dots (10)$$

をパラメーターに選んだ。等曲げの場合には、式(2)の座屈前の変位の影響による修正項を除けば、Kasemset, Nishino, Lee らの  $\lambda$  と同じである。Lindner の研究は、標準細長比を等曲げ以外の種々の荷重についても拡張できることを示した点で注目に値する。Lindner の考え方の欠点は荷重、境界条件が異なると、そのたびに  $L_e$  を求めなければならない、一般にその計算はめんどうであるという点であろう。

筆者の知る限りでは、パラメーター  $\lambda$  にはじめて注目したのは Massey<sup>17)</sup> である。Massey は 24 の模型実験の結果を整理する際  $L/L_e$  を横軸に選ぶと弾性域のみならず弾塑性域でもばらつきを少なくすることができることを示した。Nethercot<sup>2)</sup> は理論計算結果を  $L/L_e$  で整理することにより、横だおれ座屈値に及ぼす種々の要因についての考察を行った。

本研究ではパラメーター  $L/L_e$  を支持し、その有用性を示す。

### 3. 基本横だおれ座屈公式の提案

まず、最も基本的な場合—両端で単純支持され等曲げを受ける—について、 $L/L_e$  のパラメーターの選定が有用であることを示し、一本の座屈式を提案する。

式(1)において  $M^0_{crit}$  のかわりに  $M_e$  とおいて  $L$  について解き直すと、

$$L_e = r \cdot \pi \sqrt{\frac{EI_y}{M_e} \left[ \frac{GJ}{2M_e} + \sqrt{\left(\frac{GJ}{2M_e}\right)^2 + \frac{I_\omega}{r^2 I_y}} \right]} \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここに、 $r$  は座屈前の変位の影響を補正する係数である。

$$r = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{I_y}{I_x}}} \quad \dots\dots\dots(12)$$

$I_x \gg I_y$  のような I 断面では  $r=1$  であるが H 断面では  $r > 1$  となる。

$L_e$  は断面と降伏応力が与えられれば計算できる。一般に庄延鋼は規格化されているので、それらについてはあらかじめ各断面に対する  $L_e$  を求めておいて表にしておけば設計の際いちいち計算する手間は省けるであろう。Table 1 はヨーロッパ断面についての  $L_e$  である。横だおれ座屈値の整理には、たて軸に  $M_u/M_p$ 、横軸に  $L/L_e$  を選ぶ。

$M_u$  は以下に示す筆者の電算プログラムによった。筆者ら<sup>18)</sup> は二軸曲げを受ける部材の弾塑性挙動を解析する電算プログラムを開発したが、それを横だおれ座屈の解析に拡張使用した。従来よく行われている弾塑性横だおれ座屈値の算定方法は、Tangent modulus の手法を使って座屈現象を固有値問題に置き換え、弾性解を修正す

Table 1 Critical Length  $L_e$  of European Profiles

Profil H	$L_e$ (cm)		Profil I	$L_e$ (cm)	
	$\sigma_y=2.4$ t/cm <sup>2</sup>	$\sigma_y=3.6$ t/cm <sup>2</sup>		$\sigma_y=2.4$ t/cm <sup>2</sup>	$\sigma_y=3.6$ t/cm <sup>2</sup>
HEA 100	763.93	517.50	IPE 80	231.83	161.27
HEA 120	766.34	526.12	IPE 100	238.70	169.50
HEA 140	815.26	565.22	IPE 120	258.88	186.98
HEA 160	853.58	598.03	IPE 140	281.15	204.57
HEA 180	906.17	641.16	IPE 160	297.29	218.90
HEA 200	949.99	678.25	IPE 180	323.49	239.66
HEA 220	1048.35	748.69	IPE 200	339.83	253.89
HEA 240	1128.68	807.48	IPE 220	372.03	278.74
HEA 260	1168.39	842.84	IPE 240	395.69	298.61
HEA 280	1228.73	891.12	IPE 270	430.11	326.93
HEA 300	1307.57	948.84	IPE 300	467.61	357.59
HEA 320	1311.38	948.45	IPE 330	488.12	374.74
HEA 340	1283.25	929.85	IPE 360	521.25	399.82
HEA 360	1263.16	916.50	IPE 400	535.95	413.33
HEA 400	1205.99	880.47	IPE 450	556.67	430.80
HEA 450	1159.38	851.43	IPE 500	580.40	449.81
HEA 500	1128.55	832.40	IPE 550	599.65	465.79
HEA 550	1073.27	799.23	IPE 600	631.06	489.59
HEA 600	1031.68	774.26			
HEA 650	999.70	755.00			
HEA 700	951.62	723.58			
HEA 800	910.82	700.36			
HEA 900	882.27	682.31			
HEA 1000	848.73	661.30			

る方法である。本研究は二軸曲げのプログラムを使用することにより、初期変位、荷重偏心のあるはりの解析を可能にした。すなわち、横だおれ不安定現象を二軸曲げの特殊問題とする考え方である<sup>5),16)</sup>。

解析に用いるはりのモデルは次のごとくである。

① 材料は完全弾塑性体でひずみもどりを考えない。

② フランジに降伏応力の 30%、ウェブに 18% の圧縮応力を持つコサイン型の残留応力を考える (Fig. 2)。Nethercot<sup>2)</sup> は彼の有限要素法による解を Dibley<sup>19)</sup> の実験と比較し、フランジの最大圧縮応力  $\sigma_{rc}$  を  $\sigma_{rc}/\sigma_y = 0.1$  として数値計算をすると実験値の平均に座屈式が横たわり、 $\sigma_{rc}/\sigma_y = 0.3$  とすると下限に横たわることを示した。本研究の目的が設計式の提案に向けられていることから、安全側の仮定である  $\sigma_{rc}/\sigma_y = 0.3$  を選んだ。文献 20) は種々のヨーロッパ断面の残留応力を測定し、 $\sigma_{rc}/\sigma_y = 0.3$  とすれば十分安全であるとした。一般に、はりに使用される断面は柱の場合と違い肉厚はそれほど厚くないのでこれ以上の残留応力が生じていることはまれであろう。

③ 横方向に部材長の 1/1000 の変位を部材中央に生ずるサイン関数の初期変位を考えた。この値はヨーロッパの CEA-CM<sup>21)</sup> の提案に沿ったもので、現実的に十分あり

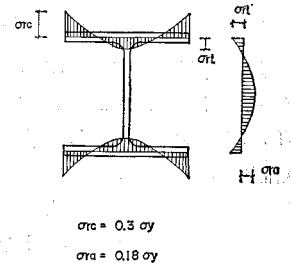


Fig. 2 Cosine Type Residual Stresses

得る量である。

④ 計算にあたっては、 $E=2100 \text{ t/cm}^2$ ,  $G=800 \text{ t/cm}^2$  とし、サンプナンのねじり定数は<sup>22)</sup>、

$$J=1.3 \frac{1}{3} \sum b^3 t \dots\dots\dots (13)$$

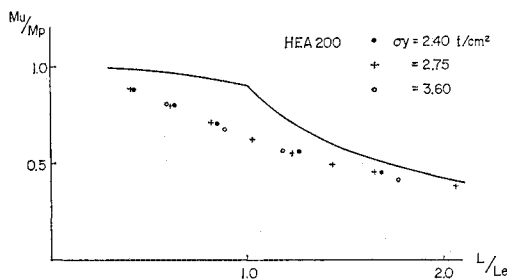
の評価式を用い、降伏した要素では  $G=0$  とした。

解析プログラムは、荷重を与えてそれによって引き起される変位を求めている。荷重を徐々に増加させ、微少な荷重増加に対し大きな変位増加が生ずる荷重をもって横倒れ座屈モーメント  $M_u$  と定義した。

まず代表的なヨーロッパ H 断面として HEA 200 を選び、降伏応力  $\sigma_y=2.4 \text{ t/cm}^2$ ,  $2.75 \text{ t/cm}^2$ ,  $3.6 \text{ t/cm}^2$  について与えられた部材長  $L$  で横だおれ座屈モーメント  $M_u$  を解析プログラムによって解いた。HEA 200 におけるそれぞれの降伏応力に対応する  $M_p$ ,  $L_e$  を **Table 2** に示した。求められた横だおれ座屈モーメント  $M_u$  を  $M_u/M_p$  としてたて軸に、部材長  $L$  を  $L/L_e$  として横軸にプロットすると **Fig. 3** になる。**Fig. 3** には、残留応力、初期不整のない理想ばりの座屈曲線も参考として実線で示した。**Fig. 3** より、 $M_u/M_p-L/L_e$  のプロットを用いれば、弾性、弾塑性域を問わず、また残留応力、初期変位のある場合においても降伏応力による影響が除去されることが示された。

**Table 2**  $M_p$  and  $L_e$

HEA 200		
$\sigma_y \text{ (t/cm}^2\text{)}$	$M_p \text{ (t}\cdot\text{m)}$	$L_e \text{ (m)}$
2.40	10.32	9.50
2.75	11.83	8.46
3.60	15.48	6.78



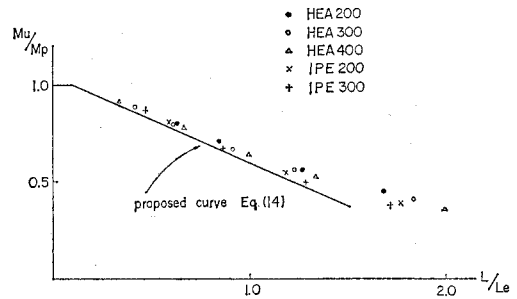
**Fig. 3** Ultimate Moment for Different Yield Stresses

次に、降伏応力を  $\sigma_y=2.4 \text{ t/cm}^2$  に固定し、5つの異なる断面 (HEA 200, HEA 300, HEA 400, IPE 200, IPE 300) について同様の計算とプロットを行った。各断面の  $\sigma_y=2.4 \text{ t/cm}^2$  に対応する  $M_p$ ,  $L_e$  を **Table 3** に示した。プロットの結果を **Fig. 4** に示した。ここでも  $M_u/M_p-L/L_e$  のプロットを用いれば、断面形状による影響も除去されることが示された。

以上の結果より、 $M_u/M_p-L/L_e$  のプロットを用いれ

**Table 3**  $M_p$  and  $L_e$

$\sigma_y=2.4 \text{ t/cm}^2$		
Profil	$M_p \text{ (t}\cdot\text{m)}$	$L_e \text{ (m)}$
HEA 200	10.32	9.50
HEA 300	33.22	13.08
HEA 400	61.44	12.06
IPE 200	5.28	3.40
IPE 300	15.07	4.68



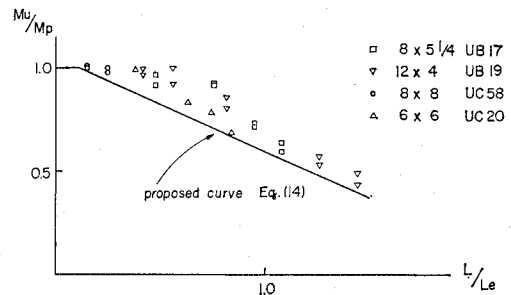
**Fig. 4** Ultimate Moment for Different Profiles

ば、降伏応力、断面形状による影響を除くことができ、すべての両端単純支持された等曲げを受けるはりの横だおれ座屈強度が一本の座屈曲線で近似評価できるという結論を得た。横だおれ座屈公式としては、**Fig. 4** にある解析解より低い値を与える直線を引いた。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_u}{M_p} &= 1.0 - \frac{4}{9} \left( \frac{L}{L_e} - 0.1 \right) & 0.1 \leq \frac{L}{L_e} \leq 1.5 \text{ 注 2)} \\ \frac{M_u}{M_p} &= 1.0 & 0.1 > \frac{L}{L_e} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

式 (14) と Dibley<sup>18)</sup> の実験結果と比較したものが **Fig. 5** である。式 (14) で横だおれ座屈強度を評価すれば、安全側でかつよい近似で強度が計算できることが実証された。

式 (14) は最も基本的な場合—両端で単純支持され等曲げを受ける—にのみ有効である。境界条件、荷重形式が異なる場合には修正が必要となる。**4.** では拘束ばりの場合への式 (14) の拡張を論じ、**5.** では異なる荷重



**Fig. 5** Comparison with Dibley's Experimental Results (Ref. 18)

注 2) 通常の圧延 H 型鋼は  $L/L_e \leq 1.5$  で使用される。

の場合への拡張を論ずる。

#### 4. 拘束ばりの場合への拡張

境界条件は、横方向変位に関するもの、ねじりに関するものが複雑に関係する。等曲げを受けるはりの種々の境界条件下での横だおれ座屈モーメントの弾性解は<sup>23)</sup>,

$$M^0_{crit} = \frac{\pi}{K_y L} r \sqrt{EI_y GJ \left[ 1 + \frac{\pi^2 EI_w}{GJ (K_z L)^2} \right]} \dots\dots\dots (15)$$

で与えられ、9つの境界条件について  $K_y, K_z$  が近似的に計算されている<sup>24)</sup>。  $K_y, K_z$  は横だおれの有効部材長を示す係数で、両端で単純支持されている場合には  $K_y = K_z = 1$  となり式 (15) は式 (1) と一致する。式 (11) を求めたのとまったく同じ要領で、  $M^0_{crit} = M_e$  となる部材長  $L_e$  を求めると、

$$L_e = \frac{\pi}{K_y} r \cdot \sqrt{\frac{EI_y}{M_e} \left[ \frac{GJ}{2M_e} + \sqrt{\left( \frac{GJ}{2M_e} \right)^2 + \left( \frac{K_y}{K_z} \right)^2 \frac{I_w}{r^2 I_y}} \right]} \dots\dots\dots (16)$$

を得る。  $K_y = K_z = 1$  の場合は明らかに式 (16) は式 (11) となる。

いま、拘束ばり—横方向に固定、そり拘束—を考えると、Vlasov<sup>24)</sup> の近似計算によれば、

$$K_y = K_z = 0.492$$

である。これを式 (16) に代入すると、

$$L_e = \frac{1}{0.492} r \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{EI_y}{M_e} \left[ \frac{GJ}{2M_e} + \sqrt{\left( \frac{GJ}{2M_e} \right)^2 + \frac{I_w}{r^2 I_y}} \right]} \dots\dots\dots (17)$$

を得る。いま単純支持の場合の  $L_e$  を  $L_e^s$  と書き、拘束支持の場合の  $L_e$  を  $L_e^f$  と書くと、式 (11)、式 (17) より、

$$L_e^f = \frac{1}{0.492} L_e^s \dots\dots\dots (18)$$

の関係がある。式 (18) は Vlasov の結果による近似計算であるが、厳密計算では、

$$L_e^f = \frac{1}{0.5} L_e^s \dots\dots\dots (19)$$

である。この意味するところは、拘束ばりの場合にはパラメーターとして  $L/L_e$  をとるかわりに  $(0.5L)/L_e$  とすれば、式 (14) がそのまま使えるのではないかということである。

両端で拘束条件のもとで2つの断面 HEA 200, IPE 200 (いずれも  $\sigma_y = 2.4 \text{ t/cm}^2$ ) について横だおれ座屈モーメント  $M_u$  を計算した。Fig. 6 には結果を  $L/L_e$  で

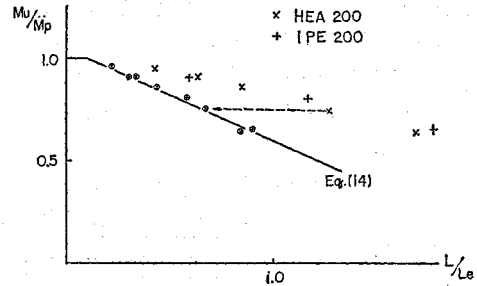


Fig. 6 Ultimate Moment of Restrained Beams

プロットした値を ×, +印で示し、  $(0.5L)/L_e$  でプロットしたものを ⊗, ⊕印で示した。後者のプロットがほぼ式 (14) 上に乗るとい期待された結果を得た。

#### 5. 異なる荷重の場合への拡張

Salvadori<sup>25)</sup> は I 型ばりに不等モーメントが作用した場合の座屈荷重を次の形で求めた。

$$M_{crit} = \frac{C\pi}{KL} \sqrt{EI_y GJ \left[ 1 + \frac{\pi^2 EI_w}{GJ (KL)^2} \right]} \dots\dots (20)$$

$K$  は式 (15) の  $K_y, K_z$

と同種のものである。

Salvadori によると係数

$C$  は部材長  $L$  や境界条件によってほとんど影響

を受けずモーメント勾配

$\beta$  (Fig. 7) にのみよることが報告されていて、近似式

として次のものが与えられている<sup>26)</sup>。

$$C = 1.75 - 1.05\beta + 0.3\beta^2 \leq 2.3 \dots\dots\dots (21)$$

しかしながら、Salvadori の結果は弾性横だおれ座屈にのみ有効で、弾塑性域では式 (21) から  $C$  を求めそれを式 (20) に代入して求めた  $M_{crit}$  を修正しなければならない。本論文では Salvadori の係数  $C$  は  $L$  や境界条件の影響を受けずモーメント勾配  $\beta$  のみによるという考え方を採用するだけで、係数  $C$  の評価式としては別個のものを提案する。弾塑性域での係数  $C$  は次のようにして算定を行った。



Fig. 7 Beams under Moment Gradient

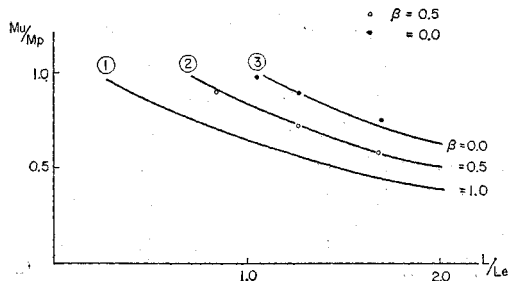


Fig. 8 Ultimate Moment of Beams under Moment Gradient

代表的な H 断面 HEA 200, 降伏応力  $\sigma_y = 2.4 \text{ t/cm}^2$  を選び, モーメント勾配  $\beta = 1.0, 0.5, 0.0, -0.5$  について横だおれ座屈モーメント  $M_u$  を計算し結果を Fig. 8 にプロットした. なお,  $\beta < 0.0$  についてはプロットをしなかった.  $L/L_e < 1.5$  を対象とするような通常の長さのはりでは,  $\beta < 0.0$  の場合は横だおれ座屈を起こさず  $M_u = M_p$  までモーメントを増加させることができたからである. 超高張力鋼を使用する時などはこの限りでないが, 通常用いられる  $\sigma_y = 3.6 \text{ t/cm}^2$  くらいまでならば  $\beta < 0.0$  の場合は横だおれ座屈を起こさないと考えてよいであろう. Fig. 8 において,  $\beta = 1.0$  の場合の計算結果を結んだものをカーブ①とし, カーブ①に係数  $C = 1.3$  を掛けてたて軸方向に引き伸ばしたものをカーブ②とする. 同じく係数  $C = 1.6$  を掛けて引き伸ばしたものをカーブ③とする. そうすると,  $\beta = 0.5$  の場合の計算結果がカーブ②に,  $\beta = 0.0$  の場合の計算結果がカーブ③に近似的に乗ることが示された. この意味するところはモーメント勾配  $\beta$  の場合の横だおれ座屈強度  $M_u$  は, 式 (14) に修正係数

$$C = 1.6 - 0.6\beta \quad (\beta \geq 0.0) \quad \dots\dots\dots (22)$$

を掛けることにより近似評価できるということである. また,  $\beta \geq 0.0$  の場合に限ってであるが, 式 (21) と式 (22) は数値的にほとんど差がないことから式 (21) の従来の評価式が弾塑性域にも拡張使用できるであろうという結論も得た.

Austin, Yegian, Tung<sup>27)</sup> は等分配荷重, スパン中央に集中荷重のかかる場合について研究を行った. Clark, Hill<sup>28)</sup> は一般的な荷重下における横だおれ座屈近似式をエネルギー法から陽の形,

$$M_{crit} = C_1 \frac{\pi^2 EI_y}{K_y K_z L^2} \cdot \left\{ \sqrt{(C_2 y^* + C_3 \beta_y)^2 + \left[ \frac{I_w GJ (K_z L)^2}{I_y \pi^2 EI_w} + 1 \right]} \pm (C_2 y^* + C_3 \beta_y) \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

に求め係数  $C_1, C_2, C_3$  を変位関数の積分の形で示した. ただ文献<sup>27)</sup> では個々の荷重の場合について係数の計算は行われておらず, その時点での研究成果<sup>25), 26)</sup>などを整理したにとどまった. 最近 Djalaly<sup>3)</sup> が個々の荷重の場合について係数  $C_1, C_2, C_3$  の計算を実行し表に示したことは注目されてよい. 本研究では二軸対称断面である I, H 断面のみを扱っているのので式 (23) の中の  $C_3$  は考えなくてよい ( $\beta_y = 0$ ). 横荷重の場合がモーメント荷重と異なる最大の差は, 荷重の作用点の高さ  $y^*$  が横だおれ座屈強度に関係してくることである. しかし, 荷重の作用点が図心に一致する場合には  $y^*$  がゼロとなるので  $C_3$  は結果に入っていない. 本論文では図心に荷重を作用させる場合のみを考えた. 作用点が図心よ

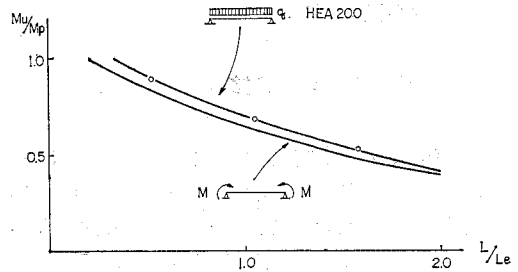


Fig. 9 Ultimate Moment of Beams under Uniform Load

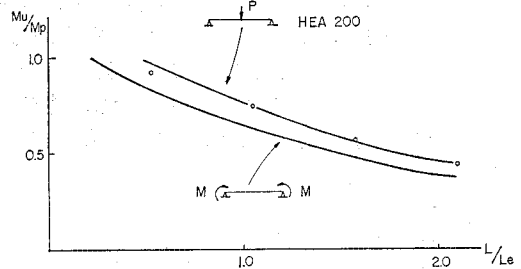


Fig. 10 Ultimate Moment of Beams under Concentrated Load

り高い場合には横だおれ座屈強度は小さくなり, 作用点が図心より低い場合には横だおれ座屈強度は大きくなる. したがって, まず図心に荷重が作用する場合の横だおれ座屈強度を求め, 作用点が異なる場合には図心に作用した場合を基準として修正を行うという考え方をするとよいであろう. 等分布荷重, 中央に集中荷重を受ける HEA 200 断面ばりについて計算を行い, 等モーメントを受ける場合との比較を Fig. 9, 10 に示した. たて軸の  $M_u$  は荷重によってはりに生ずる最大モーメントをとった. すなわち, 等分布荷重  $q$  の場合は,

$$M_u = \frac{qL^2}{8} \quad \dots\dots\dots (24)$$

集中荷重  $P$  の場合は,

$$M_u = \frac{PL}{4} \quad \dots\dots\dots (25)$$

である. Fig. 8 で係数  $C$  を求めたのとまったく同じ手順により修正係数として次の値を得た.

$$C = 1.08 \quad \text{等分布荷重}$$

$$C = 1.18 \quad \text{集中荷重}$$

## 6. ま と め

以上の考察より, 面倒な計算を行わずに, 残留応力, 初期変位を有する H 型鋼ばりの横だおれ座屈強度が評価できることが示された. 境界条件, 荷重条件が異なる場合についても一本の基本座屈公式を修正使用することにより, 簡単に横だおれ座屈強度が評価できることは設

計式としては便利な形であると思われる。

以下に設計式のまとめと例題を示す。

基本横だおれ座屈公式

$$\frac{M_u}{M_p} = 1.0 - \frac{4}{9}(\lambda - 0.1) \quad 0.1 \leq \lambda \leq 1.5$$

$$= 1.0 \quad 0.1 > \lambda$$

境界条件による  $\lambda$  の修正

$$\lambda = L/L_e \quad \text{両端で単純支持}$$

$$\lambda = 0.5 L/L_e \quad \text{両端で拘束支持}$$

ここに、

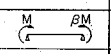
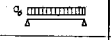
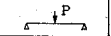
$$L_e = r \cdot \pi \sqrt{\frac{EI_y}{M_e} \left[ \frac{GJ}{2M_e} + \sqrt{\left( \frac{GJ}{2M_e} \right)^2 + \frac{I_w}{r^2 I_y}} \right]}$$

で与えられ、ヨーロッパ断面については Table 1 参照。

異なる荷重の場合への修正

Table 4 に示される係数  $C$  を使って基本横だおれ公式を修正する。

Table 4 Coefficient of Load

Type of load	Coefficient	Max. moment
	1.6 - 0.6 beta	M
	1.08	qL <sup>2</sup> /8
	1.18	PL/4

$$\frac{M_u}{M_p} = C \left[ 1.0 - \frac{4}{9}(\lambda - 0.1) \right] \leq 1.0$$

例題 1 HEA 220,  $\sigma_y = 3.6 \text{ t/cm}^2$ ,  $L = 6 \text{ m}$  の単純支持されたはりが, 両端で不等モーメントを受ける場合。

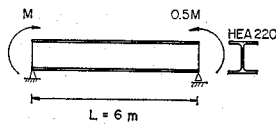


Fig. 11 Example (1)

①  $L_e$  の計算. Table 1 より,

$$L_e = 749 \text{ cm}$$

②  $\lambda$  の計算. 単純支持より,

$$\lambda = \frac{L}{L_e}$$

$$= \frac{600}{749} = 0.801$$

③  $M_u/M_p$  の計算.

$$\frac{M_u}{M_p} = 1.0 - \frac{4}{9}(0.801 - 0.1)$$

$$= 0.688$$

④ 荷重修正係数の計算.

$$\beta = 0.5$$

$$C = 1.6 - 0.6 \times 0.5$$

$$= 1.3$$

⑤ 横だおれ座屈モーメントは,

$$M_p = 2045 \text{ t} \cdot \text{cm}$$

$$\frac{M_u}{M_p} = 1.3 \times 0.688$$

$$= 0.894$$

$$M_u = 0.894 \times 2045$$

$$= 1828 \text{ t} \cdot \text{cm}$$

例題 2 IPE 200,  $\sigma_y = 2.4 \text{ t/cm}^2$ ,  $L = 5 \text{ m}$  の拘束ばりが, 中央に集中荷重を受ける場合。

①  $L_e$  の計算.

$$L_e = 340 \text{ cm}$$

②  $\lambda$  の計算. 拘束より,

$$\lambda = \frac{0.5 L}{L_e}$$

$$= \frac{0.5 \times 500}{340}$$

$$= 0.735$$

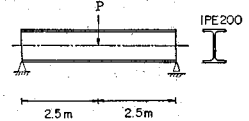


Fig. 12 Example (2)

③  $M_u/M_p$  の計算.

$$\frac{M_u}{M_p} = 1.0 - \frac{4}{9}(0.735 - 0.1)$$

$$= 0.718$$

④ 荷重修正係数.

$$C = 1.18$$

⑤ 横だおれ座屈モーメントは,

$$M_p = 528 \text{ t} \cdot \text{cm}$$

$$\frac{M_u}{M_p} = 1.18 \times 0.718$$

$$= 0.847$$

$$M_u = 0.847 \times 528$$

$$= 447 \text{ t} \cdot \text{cm}$$

⑥ 座屈荷重は,

$$P_u = \frac{4 M_u}{L}$$

$$= \frac{4 \times 447}{500}$$

$$= 3.58 \text{ t}$$

## 7. 結 論

圧延 H 型鋼ばりの弾塑性横だおれ強度のパラメトリックスタディを行った。

横だおれ座屈モーメント  $M_u$  を全塑性モーメント  $M_p$  で割った  $M_u/M_p$  と部材長  $L$  をある標準部材長  $L_e$  で割った  $L/L_e$  をパラメーターに選ぶと, 降伏応力, 断面形状に独立な横だおれ座屈曲線が得られることを示した。ここに  $L_e$  は弾性モーメント  $M_e$  が両端に等モーメントとして作用したとき単純支持された部材が横だおれを起こすような部材長である。

上の座屈曲線を使えば, 弾性解を数値的に求める手順

を踏まずに横だおれ強度が算定できることを示した。また、拘束ばりや、モーメント勾配、横荷重のある場合についても上の座屈曲線を修正使用することにより、単純な算術だけで横だおれ強度が評価できることを示した。

### 記号

- $L$ : 部材長  
 $I_x$ : 強軸まわりの断面二次モーメント  
 $I_y$ : 弱軸まわりの断面二次モーメント  
 $E$ : ヤング率  
 $G$ : セン断弾性定数  
 $J$ : サンプナンのねじり定数  
 $I_w$ : そり二次モーメント  
 $r_y$ : 弱軸まわりの断面二次半径  
 $h$ : I, H 断面の高さ  
 $b$ : I, H 断面のフランジ幅  
 $t$ : I, H 断面のフランジ厚  
 $M_u$ : 横倒れ座屈モーメント  
 $M_{crit}$ : 弾性横倒れ座屈モーメント (固有値)  
 $M_e$ : 弾性モーメント  
 $M_p$ : 全塑性モーメント  
 $L_e$ : 標準部材長  
 $\sigma_{rc}$ : フランジの最大圧縮残留応力  
 $K$ : 横だおれの有効部材長係数  
 $\beta$ : モーメント勾配  
 $C$ : 荷重修正係数  
 $\lambda$ : 標準細長比 ( $=L/L_e$ )

### 参考文献

- Galambos, T.V.: Inelastic Lateral Buckling of Beams, Proc. ASCE, Vol. 89, ST 5, October, 1963.
- Nethercot, D.A.: Factors Affecting the Buckling Stability of Partially Plastic Beams, Instn. of Civil Engrs., Proc. Part 2, Vol. 53, September, 1972.
- Djalaly, H.: Calcul de la résistance ultime au déversement, Construction Métallique, No. 1, 1974.
- Kitipornchai, S. and Trahair, N.S.: Buckling of Inelastic I Beams Under Moment Gradient, Proc. ASCE, Vol. 101, ST 5, May, 1975.
- Lindner, J.: Traglastkurven für I-Träger, die durch außermittige Querlasten beansprucht werden, Der Stahlbau 10/1974.
- 吉田 博: プレートガーダーの非弾性横だおれ座屈強度, 土木学会論文報告集, No. 220, 1973-12.
- Basler, K. and Thürlimann, B.: Strength of Plate Girders in Bending, Proc. ASCE, Vol. 87, ST 6, August, 1961.
- de Vries, K.: Strength of Beams as Determined by Lateral Buckling, Trans. ASCE, Vol. 112, 1947.
- 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵: 軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文報告集, No. 225, 1974-5.
- Vinnakota, S., Badoux, J.C. and Aoshima, Y.: Equations fondamentales du comportement des poutres-colonnes à section ouverte et parois minces, Bulletin Technique de la Suisse Romande, No. 26, décembre, 1975.
- Bleich, F.: Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, New York, 1952.
- Nethercot, D.N.: Lateral Buckling of Beams with Mixed End Conditions, The Structural Engineer, Vol. 51, No. 4, April, 1973.
- Nethercot, D.N. and Rockey, K.C.: Unified Approach to the Elastic Lateral Buckling of Beams, The Structural Engineer, Vol. 49, No. 7, July, 1971.
- Young, B.W.: Design of Steel Columns and Beams, CIRIA, Tech. Note 34, December, 1971.
- Nethercot, D.N.: Inelastic Buckling of Steel Beams under Non-Uniform Moment, The Structural Engineer, Vol. 53, No. 2, February, 1975.
- Kasemset, ch., Nishino, F. and Lee, S.L.: Inelastic Stability of Beams under Biaxial Bending, Proc. ASCE, Vol. 100, EM 5, October, 1974.
- Massey, C.: The Lateral Stability of Steel I-Beams in the Plastic Range, Civil Engineering Transaction, September, 1964.
- 青島泰之・ヴィナコタ, S.・バドゥー, J.C.: 一般的に支持された柱の弾塑性二軸曲げ, 土木学会論文報告集, No. 224, 1975-4.
- Dibley, J.E.: Lateral Buckling of I-Beams in Grade 55 Steel, Proc. Instn. Civil Engineers, Vol. 43, August, 1969.
- Daddi, I. and Mazzolani, F.M.: Détermination expérimentale des imperfections structurales des profilés en acier, Construction Métallique, No. 1, 1974.
- Beer, H. and Schulz, G.: Bases théoriques des courbes européennes de flambement, Construction Métallique, No. 3, 1970 (CEACM; Convention Européenne des Associations de la Construction Métallique).
- Kollbrunner, C.F. and Basler, K.: Torsion, application à l'étude des structures, Editions SPES Lausanne, 1970.
- Galambos, T.V.: Structural Members and Frames, NJ, Prentice-Hall, 1968 または 1963 年の AISC の Specification.
- Vlasov, V.Z.: Thin Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1961.
- Salvadori, M.G.: Lateral Buckling of Eccentrically Loaded I-Columns, Trans. ASCE, Vol. 121, 1956.
- Johnston, B.G.: The Guide to Design Criteria for Metal Compression Members, 2nd ed. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- Austin, W.J., Yegian, S. and Tung, T.P.: Lateral Buckling of Elastically End Restrained I-Beams, Trans. ASCE, Vol. 122, 1957.
- Clark, J.W. and Hill, H.N.: Lateral Buckling of Beams, Trans. ASCE, Vol. 127, Part II, 1962.

(1976.11.5・受付)