

積分方程式法による空洞周辺の三次元応力解析

APPLICATION OF INTEGRAL EQUATION METHOD TO THE DETERMINATION OF THREE DIMENSIONAL STRESSES AROUND A CAVITY

丹羽 義次*・小林 昭一**・福井 卓雄***
By Yoshiji NIWA, Shoichi KOBAYASHI and Takuo FUKUI

1. はじめに

弾性体内の空洞周辺の応力状態の解析は、応力集中の問題として、応用上最も重要であり、古くから数多くの理論的ならびに実験的研究が行われてきた。しかしながら、三次元問題に関しては、単純な形状の空洞に関する若干の解析解が求められているのみであり¹⁾、実験的もしくは数値的な方法によっても満足すべき近似解を得ることは非常に困難であった。

最近になって、新しい解析手法として、線形境界値問題を積分方程式に帰着して解く方法が注目されるようになり、種々の問題について広範囲にわたって適用できる希望がもたれるようになった。この方法では、境界上でのみ未知量を選べばよいので、有限要素法や差分法等のように考えている領域内部でも未知量を取らなければならない方法に比べて、未知数が激減し数値的な取り扱いが著しく容易になる利点がある。とくに、空洞問題のような外部境界値問題に対してはより有効に適用できることが期待されている。

積分方程式法による三次元弾性問題の解析例としては、クラックの問題を Somigliana の公式を用いた Cruse^{2),3)} および Deák⁴⁾ の解析、素解としてすでに境界条件の一部を満足するものを用いた岡村ら⁵⁾ の解析および Lachat & Watson⁶⁾ による原子炉の压力容器の解析を数えるのみである。

本論文は、任意形状の空洞周辺の応力状態を積分方程式法により解析することを意図したものであり、上述の解析例などは異なった方法、すなわち境界上に分布した密度による一重層ポテンシャルを用いて積分方程式を導いた。この方法は境界値が変位または応力のみで与えら

れる問題に対しては一般的であり、また数値的な取り扱いが比較的容易という利点がある。2. では論文のまとまりを良くするために、まず弾性論の境界値問題を積分方程式に帰着させる手順について略述した。三次元問題を有効に数値解析するためには、解くべき未知数の数をできるだけ少なくし、かつ少数の未知数でも十分な精度が得られるように、解析方法を工夫する必要がある。3. では、対称面を有する問題に対する積分方程式の定式化について検討した。このような配慮は、未知数の数を減少させるために有効である。4. では、このようにして定式化された特異積分方程式の数値解析法について検討し、一手法として、境界上の未知数を適当な補間関数で近似する方法を提案し、定式化を行った。5. では具体的な適用例として、端をもつ円柱形空洞周辺の応力解析を行い、その結果を検討した。

2. 弾性学の境界値問題と積分方程式

弾性学の境界値問題の積分方程式への定式化に関しては、すでに文献 7) に述べてあるが、本文だけで理解できるように、要点を以下に略述する。

(1) 静弾性学の境界値問題

対象とする弾性体は均質、等方かつ線形であるとする。記述を簡明にするために、直交テンソルおよびベクトルの表記法を用い、繰り返される添字については総和規約を適用するものとする。さらに、偏微分作用素を L, S などと記し、とくに作用する変数を明記する必要がある場合には右肩に添字として付けて L^x のように書くことにする。

弾性体が物体力 b のもとにつり合い状態にあるとき、任意点 x の変位 u は次式 (Navier の式) を満足する。

$$L_{ij}u_j \equiv \mu \left(u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} \right) = -b_i \dots (1)$$

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学科

ここに、 μ はせん断弾性定数、 ν は Poisson 比である。また、 $u_{ij} \equiv \partial u_i / \partial x_j$ である。このとき、点 x での応力 τ は次のように与えられる。

$$\tau_{ij} \equiv S_{ijk} u_k \equiv \mu \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} u_{k,k} \delta_{ij} + u_{i,j} + u_{j,i} \right) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

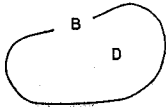


Fig. 1 Internal domain D, external domain E and their boundary B.

いま、三次元 Euclid 空間内において閉じた曲面 B を考え、曲面 B は連続であり、必要なだけ滑らかであるとする。曲面 B に包まれる領域を D 、 D の補領域を E とする。

物体力のないとき、静弾性学の境界値問題は次のように定義される。

a) 内部境界値問題

$$\left. \begin{aligned} L_{ij}^x u_j(x) &= 0 & x \in D \\ \text{(i)} \quad u_i(x) &= f_i(x) & x \in B \\ \text{(ii)} \quad t_i(x) &= \overset{n}{T}_{ij}^x u_j(x) = g_i(x) & x \in B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

b) 外部境界値問題

$$\left. \begin{aligned} L_{ij}^x u_j(x) &= 0 & x \in E \\ \text{(i)} \quad u_i(x) &= f_i(x) & x \in B \\ \text{(ii)} \quad t_i(x) &= \overset{n}{T}_{ij}^x u_j(x) = g_i(x) & x \in B \\ u_i(x) &\rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、応力ベクトル t は

$$t_i \equiv \overset{n}{T}_{ij} u_j \equiv n_j \tau_{ij} = \mu \left\{ \frac{2\nu}{1-2\nu} u_{k,k} n_i + n_j (u_{i,j} + u_{j,i}) \right\} \dots (5)$$

である。 n は境界 B における単位法線ベクトルで、それぞれ考えている領域について外向きを取ることにする。また、変位、応力ベクトルの境界の値はそれぞれ考えている領域内部の値を境界へ近づけたときの極限值として定義するものとする。

a), b) ともに境界条件が (i) で与えられるときには第一種の問題、(ii) で与えられるときには第二種の問題と呼ばれる。また、境界 B のある部分で条件 (i) が与えられ、残りの部分で条件 (ii) が与えられる問題も考えられ混合境界値問題と呼ばれる。

Somigliana によれば、領域 D について式 (3) を満足する変位 u は境界上の変位および応力ベクトルによって次のように表わされる。

$$F(x) u_i(x) = \int_B \{ G_i^{(j)}(x; y) \overset{n}{T}_{jk} u_k(y) - G_{1i}^{(k)}(x; y) u_k(y) \} dS_y \dots\dots (6)$$

ここに、曲面 B が滑らかなとき

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x \in D \\ 1/2 & x \in B \\ 0 & x \in E, x \in \bar{B} \end{cases}$$

である。積分を y について行うことを明示するために要素 dS に添字 y を付けた。

式 (6) に現われる積分核 $G(x; y)$ は一般に基本特異解または Green テンソルと呼ばれており、作用素 L について次の方程式の解となるものである。

$$\left. \begin{aligned} L_{ij}^x G_j^{(k)}(x; y) &= -\delta(x-y) \delta_i^k, \quad x, y \in E^3 \\ G_i^{(k)}(x; y) &\rightarrow 0 \quad (|x-y| \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $\delta(x)$ は三次元の Dirac のデルタ関数である。また、式 (6) の $G_{1i}^{(k)}(x; y)$ は次のように定義される第二基本特異解である。

$$G_{1i}^{(k)}(x; y) \equiv \overset{n}{T}_{kj}^y G_j^{(i)}(y; x)$$

静弾性学の場合には、式 (7) の解 (Kelvin 解) は次のように与えられる。

$$G_i^{(k)}(x; y) = \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_k} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $r = \sqrt{(x_i - y_i)(x_i - y_i)}$ である。

なお、式 (6) は外部領域 E についても変位 u が無限遠で零となることを仮定すれば同様に成立する。

(2) ポテンシャルと積分方程式

式 (6) の右辺は、(3) を満足する。変位 $u(x)$ は二種類の境界上での積分の和で表わされることを示している。ポテンシャル論にならって、第一項、第二項の積分をそれぞれ一重層 および二重層 ポテンシャルと呼ぶことにし、次のように表わそう。

$$u_i^1(x) = \int_B G_i^{(k)}(x; y) \varphi_k(y) dS_y \dots\dots (9)$$

$$u_i^2(x) = \int_B G_{1i}^{(k)}(x; y) \varphi_k(y) dS_y \dots\dots (10)$$

いま一般に、滑らかな有向曲面 S を考え、その外向き単位法線ベクトルを n とする。この曲面 S 上に分布し、Lipschitz 条件を満足する密度 $\varphi(y)$ による層ポテンシャルは点 x が曲面 S を横切るとき次の性質を持つ。

$$\begin{aligned} (u_i^1)_S &= (u_i^1)_- = (u_i^1)_+ \\ \text{(i)} \quad (\overset{n}{T}_{ij} u_j^1)_S &= (\overset{n}{T}_{ij} u_j^1)_- - \frac{1}{2} \varphi_i \\ &= (\overset{n}{T}_{ij} u_j^1)_+ + \frac{1}{2} \varphi_i \dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_i^2)_S &= (u_i^2)_- + \frac{1}{2} \varphi_i = (u_i^2)_+ - \frac{1}{2} \varphi_i \\ \text{(ii)} \quad (\overset{n}{T}_{ij} u_j^2)_S &= (\overset{n}{T}_{ij} u_j^2)_- = (\overset{n}{T}_{ij} u_j^2)_+ \dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここに、添字 S は曲面 S 上の値を、 $-$ および $+$ は曲面の内側および外側からの極限值を表わす。これらの式から理解されるように、一重層ポテンシャルについて、変位はいたるところで連続であるが、応力ベクトルは曲面 S を横切るときにちょうど密度の大きさだけ不連続になっている。一方、二重層ポテンシャルについては、変位は曲面 S 上で密度の大きさだけ不連続になっているが、応力ベクトルは連続である。すなわち物理的には、一重層ポテンシャルは無限弾性体中の曲面 S 上に分布した物体力 $\mathbf{b}=\boldsymbol{\varphi}$ による変位場を表わし、二重層ポテンシャルは曲面 S 上に分布した変位のくいちがい (Somigliana dislocation と呼ばれている) $\mathbf{du}=\boldsymbol{\varphi}$ による変位場を表わしている。

さて、上で述べた層ポテンシャルの性質を考慮すれば、一重層、二重層のポテンシャルまたは式 (6) を使って境界値問題 (3), (4) を積分方程式に帰着することができる。それにはいくつかの方法が考えられるが、以下では一重層ポテンシャルで変位を表わす方法について略述する。

境界 B 上に分布する密度 $\boldsymbol{\varphi}$ による一重層ポテンシャルで表わした変位 (9) は式 (3) および (4) を満足する。このとき、応力は次のように表わされる。

$$\tau_{ij}(x) = \tau_{ij}^{(0)} + \int_B S_{ijm} G_m^{(k)}(x; y) \varphi_k(y) dS_y, \quad \dots\dots\dots(13)$$

ここに、 $\boldsymbol{\tau}^{(0)}$ は無限遠に作用する一様応力であり、対応する変位は零であるとする。また内部問題を扱うときには $\boldsymbol{\tau}^{(0)} = \mathbf{0}$ とする。

式 (3) または (4) の境界条件 (i), (ii) は式 (11) より

$$(i) \quad f_i(x) = \int_B G_i^{(k)}(x; y) \varphi_k(y) dS_y, \quad x \in B \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$(ii) \quad g_i(x) = \tau_{ij}^{(0)} n_j + \frac{1}{2} \varphi_i(x) + \int_B T_{ij} G_j^{(k)}(x; y) \varphi_k(y) dS_y, \quad x \in B \quad \dots\dots\dots(15)$$

となる。式 (14) は第一種の、式 (15) は第二種の Fredholm 型積分方程式であり、これらにはともに一意の解がある。

境界条件 (i) または (ii) が与えられているとき、積分方程式 (14) または (15) によって境界上の密度 $\boldsymbol{\varphi}$ が決定され、さらに式 (9) および (13) から領域内部の変位および応力が決定される。

ここで、後の議論の便宜のために、偏微分方程式による境界値問題 (3), (4) に対応して、積分方程式による境界値問題 (9), (13)~(15) をまとめておく。

積分方程式

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \lambda \boldsymbol{\varphi}(x) + \int_B \mathbf{K}(x; y) \cdot \boldsymbol{\varphi}(y) dS_y, \quad x \in B \\ \boldsymbol{\Psi}(x) &= \int_B \mathbf{M}(x, y) \cdot \boldsymbol{\varphi}(y) dS_y, \\ &\quad x \in D \text{ または } x \in E \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

すなわち、境界上で与えられた既知関数 \mathbf{f} に対して未知関数 $\boldsymbol{\varphi}$ を方程式 (16)₁ により決定し、式 (16)₂ により領域内部での量が決められる。ただし、 $\lambda, \mathbf{K}, \mathbf{f}$ は境界条件 (i), (ii) に対応して次のように選ぶ。

- (i) $\lambda=0, \quad \mathbf{K}(x; y) = \mathbf{G}(x; y),$
 $\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(x)$
- (ii) $\lambda=1/2, \quad \mathbf{K}(x, y) = \overset{n}{T} \mathbf{G}(x; y),$
 $\mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x) - \boldsymbol{\tau}^{(0)} \cdot \mathbf{n}$

また、 $\boldsymbol{\Psi}$ は変位もしくは応力であり、それぞれの場合について次のように核 \mathbf{M} を選ぶ。

- $\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{u}$ のとき $\mathbf{M}(x, y) = \mathbf{G}(x; y)$
- $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\tau}$ のとき $\mathbf{M}(x; y) = \mathbf{S}^* \mathbf{G}(x; y)$

3. 対称問題と逆対称問題

工学上の問題では、対称性を有する領域を扱う場合が多いが、このような場合には、境界値問題を対称問題と逆対称問題との和として構成し直すことができ、このときには解くべき積分方程式の規模を縮小することができる。これにより数値解析する際の解くべき方程式の大きさを小さくし、未知数の数を減少させることができ、とくに三次元の問題を取り扱うときには有効である。ここでは、対称面を一つ有する領域について、その対称問題と逆対称問題に対する積分方程式を導く。

一つの対称面 S を有する領域 D とその境界 B が与えられているとする。

一般性を失うことなく、 $x_1 x_3$ 面が対称面 S となるように座標系を選ぶことができる。 $x_2 > 0$ の部分について添字 1 を、 $x_2 < 0$ の部分について添字 2 を付けて、 B_1, B_2 のように表わす。このとき、 B_1 の点 $x^1 = (x_i^1)$ に対して B_2 の点 $x^2 = (x_i^2)$ を

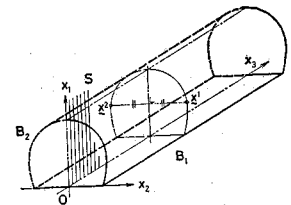


Fig. 2 Symmetric domain and the symmetry plane S .

$$x_i^2 = H_{ij} x_j^1 \quad \dots\dots\dots(17)$$

となるように決めることができる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} \|H_{ij}\| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ H_{ij} &= H_{ji}, \det |H_{ij}| = -1, H_{ij}H_{jk} = \delta_{ik} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

である。境界の外向き法線ベクトル n は境界点の関数となるが、 x^1 点、 x^2 点での法線ベクトルの間には次の関係がある。

$$n_i(x^2) = H_{ij}n_j(x^1) \dots\dots\dots (19)$$

与えられた領域に関して、式 (16) のように問題が与えられるとき、対称問題および逆対称問題は既知関数 f に対する次の条件で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \text{対 称 問 題 : } f_i(x^2) &= H_{ij}f_j(x^1) \\ \text{逆 対 称 問 題 : } f_i(x^2) &= -H_{ij}f_j(x^1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

このとき、それぞれの問題に対応する未知関数 φ は境界条件と同じ対称性をもつ。

$$\left. \begin{aligned} \text{対 称 問 題 : } \varphi_i(x^2) &= H_{ij}\varphi_j(x^1) \\ \text{逆 対 称 問 題 : } \varphi_i(x^2) &= -H_{ij}\varphi_j(x^1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

対称問題の場合についてこれを示そう。まず、 $x^1, y^1 \in B_1, x^2, y^2 \in B_2$ について

$$x_i^2 = H_{ij}x_j^1, y_i^2 = H_{ij}y_j^1$$

であるとす。方程式 (16)₁ の核について次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} K_i^{(k)}(x^2; y^1) &= H_{ij}H_{kl}K_j^{(l)}(x^1; y^2) \\ K_i^{(k)}(x^2; y^2) &= H_{ij}H_{kl}K_j^{(l)}(x^1; y^1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

方程式 (16)₁ は点 x の境界上の位置によって次のように分けられる。

$$\begin{aligned} f_i(x^1) &= \lambda \rho_i(x^1) + \int_{B_1} K_i^{(k)}(x^1; y^1) \varphi_k(y^1) dS_y \\ &\quad + \int_{B_2} K_i^{(k)}(x^1; y^2) \varphi_k(y^2) dS_y \dots\dots\dots (23) \\ f_i(x^2) &= \lambda \varphi_i(x^2) + \int_{B_1} K_i^{(k)}(x^2; y^1) \varphi_k(y^1) dS_y \\ &\quad + \int_{B_2} K_i^{(k)}(x^2; y^2) \varphi_k(y^2) dS_y \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

既知関数 f が対称であれば、式 (18), (20), (22) より式 (24) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} H_{ij} \left\{ -f_j(x^1) + \lambda H_{jk} \varphi_k(x^2) \right. \\ \left. + \int_{B_1} K_j^{(l)}(x^1; y^2) H_{kl} \varphi_l(y^1) dS_y \right. \\ \left. + \int_{B_2} K_j^{(l)}(x^1; y^1) H_{kl} \varphi_k(y^2) dS_y \right\} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$\det |H_{ij}| \neq 0$ であるから、上式の中かっこの中は零である。したがって、

$$\begin{aligned} f_i(x^1) &= \lambda H_{ij} \varphi_j(x^2) \\ &\quad + \int_{B_1} K_i^{(k)}(x^1; y^2) H_{jk} \varphi_j(y^1) dS_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{B_2} K_i^{(k)}(x^1; y^1) H_{jk} \varphi_j(y^2) dS_y \\ &\dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

式 (23) より (25) を引いて、 B_1 と B_2 での積分がまったく同一の変数で行なえることを考慮すれば、

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \{ \varphi_i(x^1) - H_{ij} \varphi_j(x^2) \} \\ &\quad + \int_{B_1} \{ K_i^{(k)}(x^1; y^1) - H_{kl} K_i^{(l)}(x^1; y^2) \} \\ &\quad \cdot \{ \varphi_k(y^1) - H_{jk} \varphi_j(y^2) \} dS_y \end{aligned}$$

となり、上式は Fredholm 型の同次積分方程式である。いま問題とされている積分方程式 (16)₁ の λ および K に対しては、この方程式は零以外の解をもたないから

$$\varphi_i(x^1) - H_{ij} \varphi_j(x^2) = 0$$

すなわち、式 (21)₁ がいえた。逆対称問題の場合にも同様にして、式 (21)₂ がいえる。

式 (21) よりただちにこれらに対する積分方程式が導かれる。

対称問題：

$$\begin{aligned} f_i(x^1) &= \lambda \varphi_i(x^1) + \int_{B_1} \{ K_i^{(k)}(x^1; y^1) \\ &\quad + H_{lk} K_i^{(l)}(x^1; y^2) \} \varphi_k(y^1) dS_y \end{aligned}$$

逆対称問題：

$$\begin{aligned} f_i(x^2) &= \lambda \varphi_i(x^1) + \int_{B_1} \{ K_i^{(k)}(x^1; y^1) \\ &\quad - H_{lk} K_i^{(l)}(x^1; y^2) \} \varphi_k(y^1) dS_y \end{aligned} \dots\dots\dots (26)$$

解析例にあげたような、一様応力の作用する無限体中に空洞が存在し、空洞の表面では外力が零であるような問題では解くべき積分方程式は式 (15) において $g(x) = 0$ とおいたものとなり、このときの問題の対称性は与えられた一様応力場のみで決まる。すなわち、式 (5), (19), (20) より

$$\left. \begin{aligned} \text{対 称 問 題 : } H_{ik} H_{jl} \tau_{kl}^{(0)} &= \tau_{ij}^{(0)} \\ \text{逆 対 称 問 題 : } H_{ik} H_{jl} \tau_{kl}^{(0)} &= -\tau_{ij}^{(0)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

となる。

例として H_{ij} を上のように決めると、一様応力場 $\tau^{(0)}$ について

対称問題：

$$\|\tau_S^{(0)}\| = \begin{vmatrix} \tau_{11}^{(0)} & 0 & \tau_{13}^{(0)} \\ 0 & \tau_{22}^{(0)} & 0 \\ \tau_{13}^{(0)} & 0 & \tau_{33}^{(0)} \end{vmatrix}$$

逆対称問題：

$$\|\tau_A^{(0)}\| = \begin{vmatrix} 0 & \tau_{12}^{(0)} & 0 \\ \tau_{12}^{(0)} & 0 & \tau_{23}^{(0)} \\ 0 & \tau_{23}^{(0)} & 0 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

のように分離される。

対称性の考慮により、実際に数値解析の規模をどの程度縮小させられるかについては 5. の数値解析例において述べる。

4. 積分方程式の数値解法

前節で得られた積分方程式は、特殊な問題を除いてはそれを解析的に解くことはほとんど不可能であり、数値的に近似解を求めることが必要になる。本節では積分方程式 (16) を数値的に解くための手法について考察する。

式 (16) を数値的に解くためには、この式中の積分を何らかの方法で離散化することが必要である。この積分の近似方法としては次のようなものが考えられる。

- (i) 積分全体を近似積分でおきかえる。
- (ii) 核を近似的に表現する。
- (iii) 密度を近似的に表現する。

これらの方法を検討するにあたって問題となるのは、核が $x=y$ で特異性をもつこと、および、積分域である境界は通常閉じた曲面となっていることである。この意味で、(i) の方法では特異性の処理が難しく、また、閉じた領域上での高次近似が意味を持たないなど、十分な精度を得ることは困難であろう。

(ii) は実際の核の代わりに特異性を緩めた近似核を用いようとする方法であり、実際の境界の外側に取った仮想境界上に密度を分布させる方法もこれに含まれると考えられる^{9), 10)}。仮想境界法は定式化が容易であり、また、比較的単純な境界に対しては十分な精度も得られるが、複雑な境界に対する仮想境界の取り方に問題が残されており、とくに、複雑な境界をもつ外部領域の問題に対しては境界条件を十分に満足させることは難しいと考えられる。

式 (16) の積分については、核は特異性を持つが、密度が滑らかな関数であれば積分そのものは特異性をもたない連続関数となる。そこで、密度を適当な関数で近似してやれば、核の特異性に帰因する数値解析上の困難さおよび精度の低下を避けることができる。(iii) の方法はこの考え方に基づくものである。密度に対する近似関数としては、いろいろな形のもの考えることができるが、ここでは、密度をスプライン近似する方法を提案する。すなわち、境界を適当な数に分割し、そのうえで密度を Lagrange 補完することにより、積分方程式は以下のように代数方程式で近似される。

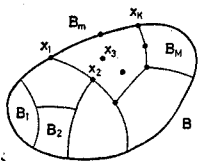


Fig. 3 Boundary finite element scheme.

境界 B を M 個の面要素 $B_m (m=1, \dots, M)$ に分割する。各面要素の上に K 個の点 $x_\alpha (\alpha=1, \dots, K)$ をとり、 B_m 上で滑らかな関数 $\phi_\alpha^{(m)}(x)$ を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \phi_\alpha^{(m)}(x_\beta) &= \delta_{\alpha\beta}, \sum_{\alpha=1}^K \phi_\alpha^{(m)}(x) = 1, x \in B_m \\ \phi_\alpha^{(m)}(x) &= 0, x \notin B_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

補間関数 $\phi_\alpha^{(m)}$ を使って、境界上の密度関数を近似的に表わそう。まず、面要素 B_m の上で

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^{(m)} &= \varphi(x_\alpha) \text{ として} \\ \varphi^{(m)}(x) &= \sum_{\alpha=1}^K \varphi_\alpha^{(m)} \phi_\alpha^{(m)}(x) \end{aligned}$$

と表わし、境界全体ではこれらの和として

$$\varphi(x) \simeq \sum_{m=1}^M \varphi^{(m)}(x) = \sum_{m=1}^M \sum_{\alpha=1}^K \varphi_\alpha^{(m)} \phi_\alpha^{(m)}(x)$$

と表わすことにする。ここで、境界上の選点全部について番号づけ ($n=1, \dots, N$) を行い、組 (m, α) との対応をつければ、

$$\varphi(x) \simeq \sum_{n=1}^N \varphi_n \phi_n(x) \dots\dots\dots (30)$$

と書くことができる。ここに、

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \varphi(x_n) \\ \phi_n &= \sum_{m \in I_n} \phi_\alpha^{(m)}(x), I_n = \{m; B_m \ni x_\alpha = x_n\} \end{aligned}$$

である。

式 (30) を用いて式 (16) を近似表現すれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\simeq \lambda \sum_{n=1}^N \varphi_n \phi_n(x) + \sum_{n=1}^N A_n(x) \cdot \varphi_n \\ \Psi(x) &\simeq \sum_{n=1}^N B_n(x) \cdot \varphi_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{m \in I_n} \int_{B_m} K(x; y) \phi_\alpha^{(m)}(y) dS_y \\ B_n(x) &= \sum_{m \in I_n} \int_{B_m} M(x; y) \phi_\alpha^{(m)}(y) dS_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

である。

式 (31) において、点 x としてとくに N 個の選点 $x_m (m=1, \dots, N)$ を選べば

$$f(x_m) = \lambda \varphi_m + \sum_{n=1}^N A_n(x_m) \cdot \varphi_n \dots\dots\dots (33)$$

となり、積分方程式 (16) は $3N$ 元の代数方程式 (33) で近似される。なお、影響係数 (32) の一例を附録に示した。

この方法では、補間関数として高次のものを使うほど近似度が高くなるが、同時に影響係数 (32) が複雑になり計算が繁雑になる。境界の複雑さをも考慮すれば、補間関数の次数を低くしてそのかわりに境界の分割を細かくするのが一般的であろう。また、この方法を基礎として、近似精度の評価法の開発⁹⁾、積分方程式と有限要素法の混用時⁹⁾における適合スーパーエレメントの開発などが可能になると考えられる。

なお、ここに示した方法とは別に、近似関数として平

板のたわみ関数を用いることも考えられており¹⁰⁾、境界が単純な場合には比較的良好な結果も得られている¹¹⁾。しかしながら、このような方法を一般の複雑な境界に適用するのは困難であろう。

5. 数値解析例

三次元弾性境界値問題への適用例として、一様応力を受ける無限弾性体内に円柱状の空洞があるときの孔端付近の応力状態を解析した。このような問題は掘進中のトンネル切羽付近、またはポアホールなどの円孔底付近の一つのモデルと考えられ、工学上応用の広い問題の一つである。

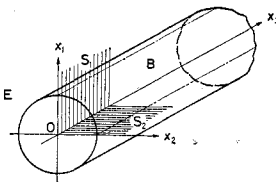


Fig. 4 Circular cavity with an end surface.

Fig. 4 のように座標系をとり、 x_1x_3 面を S_1 、 x_2x_3 面を S_2 とすれば、与えられた領域 E は面 S_1 、 S_2 について対称である。3. の結果より、これ以上の x_3 軸を含む対称面

を考えても無意味であるので、結局面 S_1 、 S_2 で区切られた全体の 4 分の 1 について解析する。このとき、応力状態は次の三種類の外部応力について求めれば十分であり、他の状態はそれらの適当な組み合わせにより得られる。

- (1) $\tau_{11}=\sigma_0, \tau_{22}=\tau_{33}=\tau_{12}=\tau_{13}=\tau_{23}=0$
- (2) $\tau_{33}=\sigma_0, \tau_{11}=\tau_{22}=\tau_{12}=\tau_{13}=\tau_{23}=0$
- (3) $\tau_{13}=\tau_0, \tau_{11}=\tau_{22}=\tau_{33}=\tau_{12}=\tau_{23}=0$

式 (27) より、(1) および (2) では面 S_1 、 S_2 について対称、(3) は S_1 について対称、 S_2 について逆対称な問題となっている。とくに、(2) は軸対称問題とも考えられるが、問題を統一して取り扱うためにここでは軸対称性を考慮した取り扱いはしていない。

離散化にあたって、境界 B は Fig. 5 のように平面四辺形の集まりとして近似した。さらに密度 φ は各平面四辺形の上で一定値をとるとした。また各面要素での代表点は各四辺形の面積中心としている。分割が十分に細かいか、または、平面四辺形の上で密度 φ

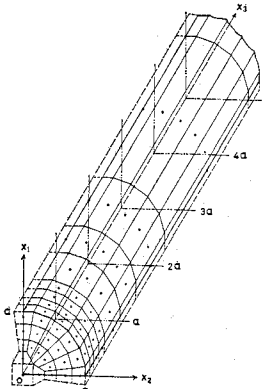


Fig. 5 Boundary subdivision.

の変化が小さいと考えられるときには、この程度の近似でも実用上十分な精度が得られると期待される。この意味で端面から離れた所の分割には x_3 軸方向に長い四辺形を採用した。端面から最も離れた所の要素は本来ならば x_3 軸方向に無限大の長さを有すべきであるが、ここでは、円孔の半径 a に対して $5a$ の長さで打ち切っている。以上の仮定のもとに式 (33)、(31)₂ に対応する式として

$$-\tau^{(0)} \cdot n(x_m) = \frac{1}{2} \varphi_m + \sum_{n=1}^N A_n(x_m) \cdot \varphi_n \dots (34)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= \sum_{n=1}^N B_n(x) \cdot \varphi_n \\ \tau(x) &= \tau^{(0)} + \sum_{n=1}^N C_n(x) \cdot \varphi_n \end{aligned} \right\} \dots (35)$$

を得る。

ここに

$$\left. \begin{aligned} A_n(x) &= \int_{B_n} T^x G(x, y) dS_y \\ B_n(x) &= \int_{B_n} G(x; y) dS_y \\ C_n(x) &= \int_{B_n} S^x G(x; y) dS_y \end{aligned} \right\} \dots (36)$$

である。式 (36) による影響係数は式 (8) を代入すれば解析的に求めることができる。この計算はかなり長く複雑なものであり、また影響係数そのものも複雑な形になるので、附録において利用のために必要な最小限の計算手順と結果を略述しておいたので、参照されたい。

解析の手順を Fig. 6 に示す。数値解析の手順は大きく分けて三つの主要な処理のブロックからなっている。図中で、①のブロックは対称性を考慮した影響係数の計算、②は方程式 (34) を解く計算、③は式 (35)、(36) に対応しており任意の点での変位および応力の計算を行う。これらのブロックはそれぞれ独立であり、全計算を一度に行うことも、また適当に分割して計算することも可能である。とくに、③の処理過程が独立に分割でき

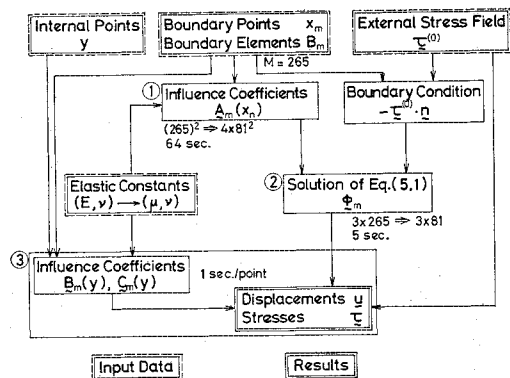


Fig. 6 Procedure of numerical integral equation analysis.

ることにより、必要な場所の応力分布をいくらでも細かく計算することができる。

Fig. 6 にはまた分割数 $N=81$ (総分割数 $M=265$) で計算したときの主要な計算量, FACOM 230-75 による CPU 時間を付記してある。CPU 時間の分配を見ると影響係数の計算量の比率が非常に大きい, これは式 (36) に表われる対数関数と逆三角関数の計算によるものと考えられる (付録参照)。これについては, 要素から離れた点に対する影響係数について適当な近似を行うことによって計算量を減少させる工夫が今後の課題ともなる¹²⁾。方程式 (34) の係数マトリックスは性質の良いものであり, 消去法などの直接法により方程式を解くよりも, 繰り返し法を用いて計算時間を短縮した方が有利であると予想される。実際, 本例題では②の過程は SOR を用いて 15 回程度の繰り返しで収束しており, この種の問題に繰り返し法の適用が有効であることが示された。

次に, (1)~(3) の一様応力場に対する数値解析の結果を挙げる。

(1) 軸に垂直な方向の一様応力を受ける円孔端付近の応力

$$\|\tau^{(0)}\| = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

応力分布を Fig. 7~11 に示す。端面から十分に離れた場所での応力分布は二次元的であり, その代表点での応力成分は次のようになる。

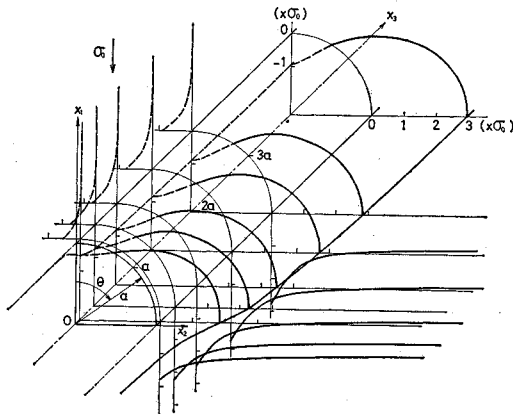


Fig. 7 Circumferential stress σ_θ , $\tau_{11}^{(0)} = \sigma_0$.

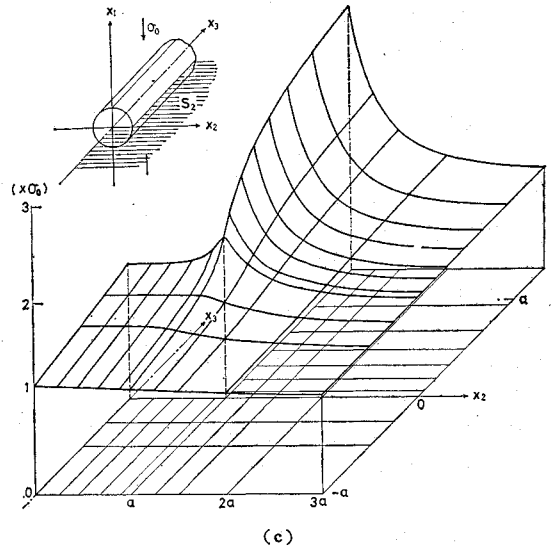
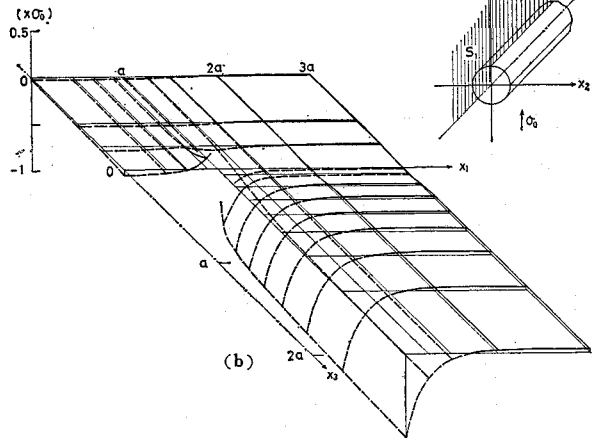
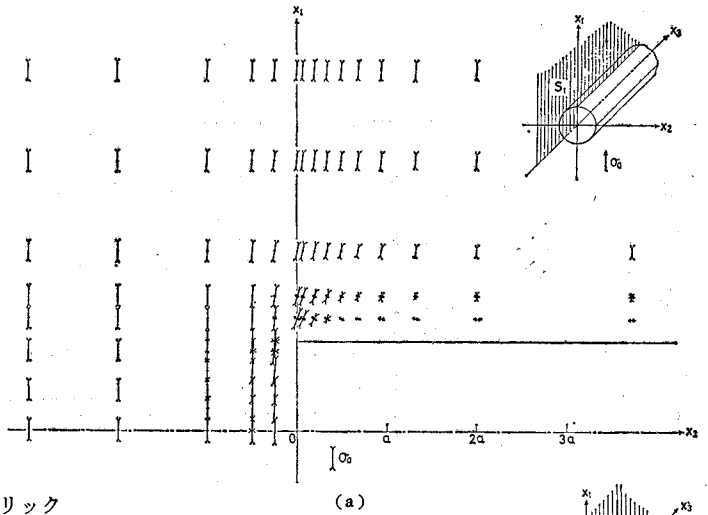


Fig. 8 Stresses around the cavity caused by uniform external stress field $\tau_{11}^{(0)} = \sigma_0$. (a) Inplane principal stresses on S_1 , (b) stress τ_{22} on S_1 , and (c) stress τ_{11} on S_2 .

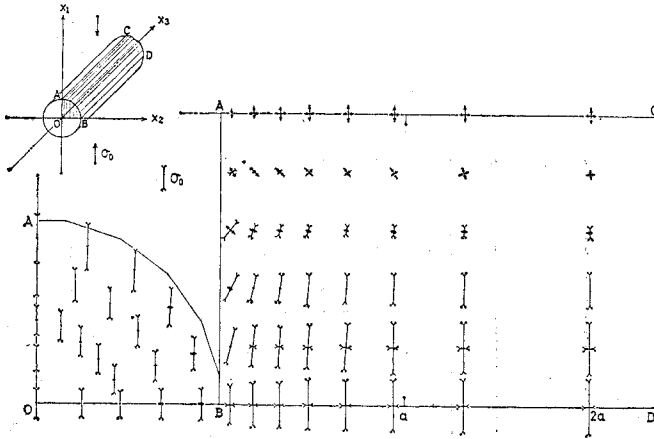


Fig. 9 Stress field on the surface of the cavity $\tau_{11}^{(0)} = \sigma_0$.

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \tau_{22}(a, 0, x_3) = -\sigma_0,$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \tau_{33}(a, 0, x_3) = -2\nu\sigma_0,$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \tau_{11}(0, a, x_3) = 3\sigma_0,$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \tau_{33}(a, 0, x_3) = 2\nu\sigma_0,$$

Fig. 7~10 は Poisson 比を $\nu=0.25$ としたときの応力分布を表わしたものである。Fig. 7 では、図中に示すように θ をとったときの応力成分 σ_θ の分布を示しており、三次元的な応力分布の概略がわかる。端面の存在が応力分布におよぼす三次元的な効果の範囲は、端面から約 $2a$ (円孔の半径 a) の間である。

Fig. 8 は円孔のまわりの応力分布を二つの対称面 S_1, S_2 上で見たもので、(a) および (b) は面 S_1 上の分布であり、(a) は面内応力成分の流れを、(b) は面 S_1 に垂直な直応力成分の分布を示す。また、(c) は面 S_2 に垂直な直応力成分の分布を示す。面 S_2 の面内応力成分は値が小さいので省略した。端面付近での応力の流れが迂回する様子および周辺での応力集中の様子がわかる。なお、図 (b) の中の実線は正の値を破線は負の値を示す。境界面上での応力分布を展開図で表わしたのが Fig. 9 である。端面では作用する応力と同じ方向の応力が支配的である。また、側面の応力の流れから、三次元的な応力状態への移行の有様が明らかである。Fig. 10 では、端面で支配的な応力成分である τ_{11} について、その分布を柱状図で表わした。中心部で $\tau_{11} \approx 1.4\sigma_0$ であり、中心部から周辺に向かっ

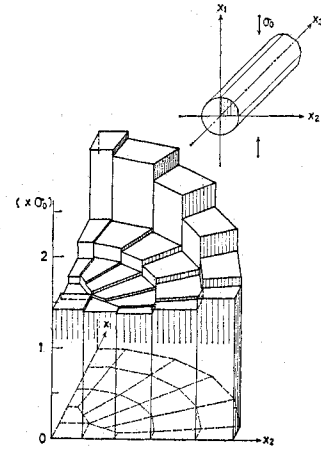


Fig. 10 Distribution of the stress τ_{11} on the end surface $\tau_{11}^{(0)} = \sigma_0$.

て応力の値は大きくなっている。

三次元的な状態では応力の分布は Poisson 比により変化する。Fig. 11 では応力分布におよぼす Poisson

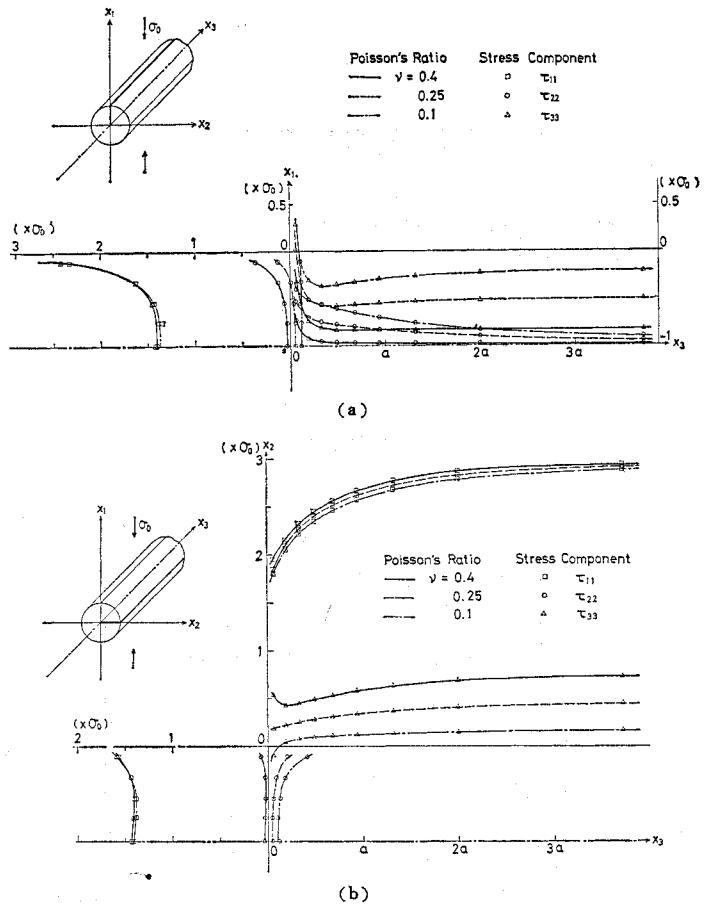


Fig. 11 Effects of Poisson's ratio on the stress distribution on the surface indicated by the thick line of the small figure $\tau_{11}^{(0)} = \sigma_0$.

比の影響を (a) 境界と面 S_1 との交線上, (b) 境界と面 S_2 との交線上で示した。作用応力の成分である τ_{11} を除いて, 他の応力成分は Poisson 比の影響を大きく受ける。その効果はとくに (a) で明らかで, 端面では τ_{22} が $\nu=0.1$ のときの負の値から $\nu=0.4$ のときの正の値まで変化し, 側面では Poisson 比が大きいほど二次元的な応力状態に近づく位置が端面に近くなっていることがわかる。

(2) 軸に平行な方向の一樣応力を受ける円孔端付近の応力

$$\|\tau^{(0)}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix}$$

この場合には問題は軸対称問題となるので一つの対称面 S_1 について応力分布を示す。Fig. 7 のように θ をとり, $x_3 = z$ とおいて円筒座標系 (r, θ, z) を導入すれば, S_1 面での応力成分は次の対応がある。

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \sigma_r, \tau_{22} = \sigma_\theta, \tau_{33} = \sigma_z, \tau_{13} = \sigma_{rz} \\ \tau_{12} &= \sigma_{r\theta} = 0, \tau_{23} = \sigma_{\theta z} = 0 \end{aligned}$$

また,

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \tau_{33}(a, 0, x_3) = \sigma_0$$

である。

Fig. 12 には S_1 面上の応力分布を示す。(a) には面内の応力の流れを, (b) には面に垂直な直応力成分の分布を示した。Poisson 比は $\nu=0.25$ である。Fig. 13 には応力分布におよぼす Poisson 比の影響を境界上の応力について示した。(1) の場合と同様に, 作用応力の成分である τ_{33} を除いて, 他の応力成分は Poisson 比の影響を大きく受ける。とくに端面での τ_{11}, τ_{22} は Poisson 比 ν が大きくなるほど大きい。

(3) 対称面内の一様せん断応力を受ける円孔端付近の応力

$$\|\tau^{(0)}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tau_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

この場合には

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \tau_{13}(0, a, x_3) = 2\tau_0$$

である。

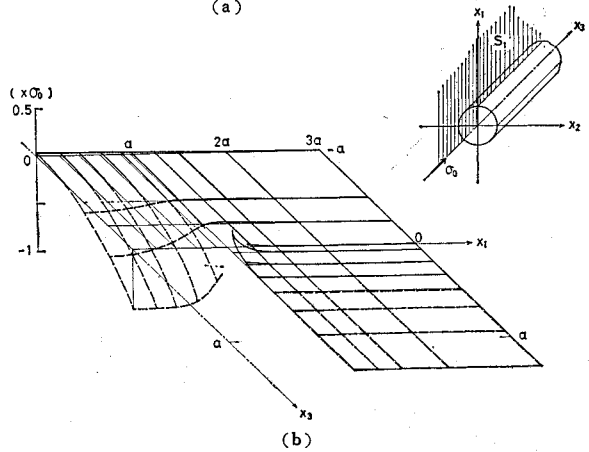
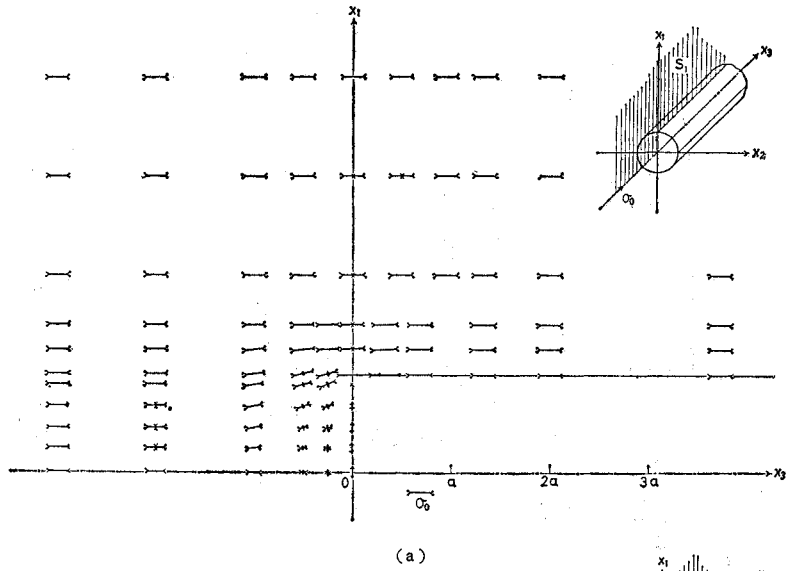


Fig. 12 Stresses around the cavity caused by external stress field $\tau_{33}^{(0)} = \sigma_0$. (a) Inplane principal stresses on S_1 , and (b) stress τ_{22} on S_1 .

Poisson 比 $\nu=0.25$ の場合の応力分布を Fig. 14, 15 に示す。Fig. 14 は面 S_1 および S_2 上の応力分布を示しており, (a) では面 S_1 での面内応力の分布を表わす。面 S_1 に垂直な方向の直応力成分は値が小さいので省略した。面 S_2 では応力は純せん断の状態になり, 面内の応力成分は零である。面 S_2 でのせん断応力の向きと大きさを (b) に示した (向きについては Fig. 15 を参照)。Fig. 15 は境界面上の応力の分布である。Poisson 比の変化が応力分布におよぼす影響については Fig. 16 に示した。

6. 結 語

三次元静弾性学の境界値問題を積分方程式に帰着させる方法を略述し, 積分方程式の一例を導いた。とくに,

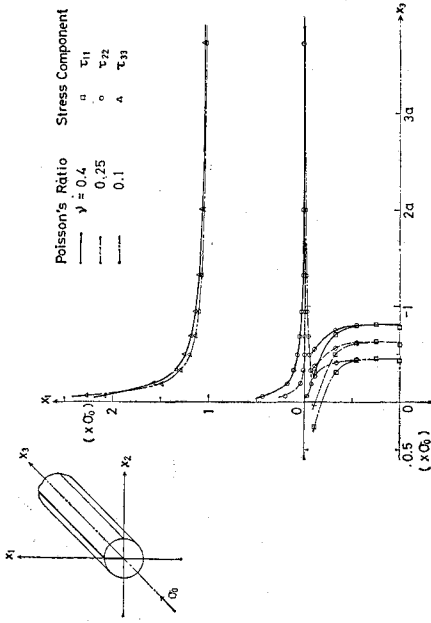


Fig. 13 Effects of Poisson's ratio on the stress distribution on the surface $\tau_{33}^{(0)} = \sigma_0$.

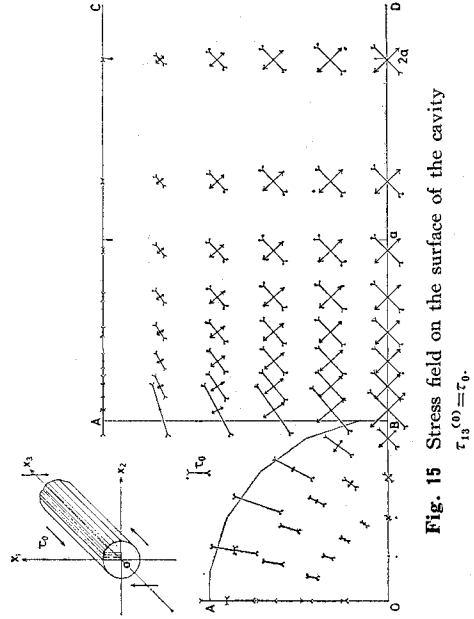


Fig. 15 Stress field on the surface of the cavity $\tau_{13}^{(0)} = \tau_0$.

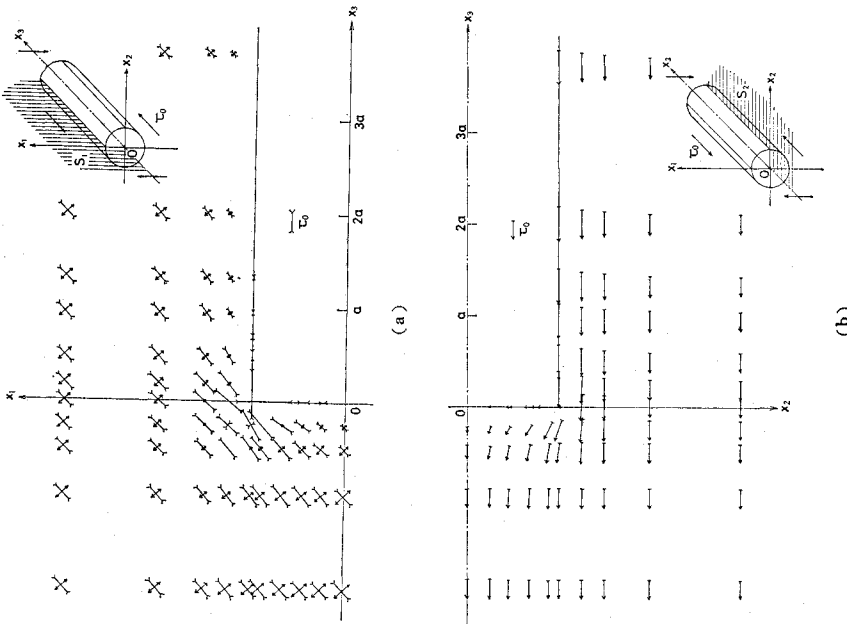


Fig. 14 Stresses around the cavity caused by external stress field $\tau_{13}^{(0)} = \tau_0$. (a) Inplane principal stresses on S_1 , and (b) the maximum shear stress and its direction on S_2 .

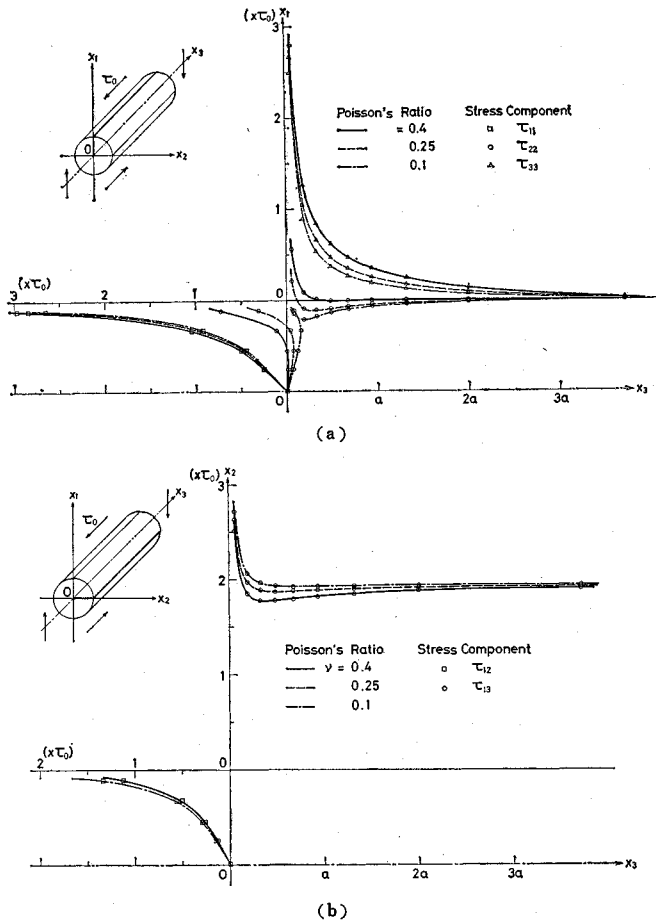


Fig. 16 Effects of Poisson's ratio on the stress distribution on the surface indicated by the thick line of the small figure $\tau_{13}^{(0)} = \tau_0$.

与えられた領域が対称形であるときには、境界値問題を対称問題と逆対称問題とに分離することができ、積分方程式の規模を縮小することができる。このことは、数値解析の立場からは問題をより容易に取り扱うことができることを示す。このような取り扱いは、とくに三次元問題の解析に有効である。

得られた積分方程式は一般には数値的に解かなければならない。本論文では、境界上での未知関数の分布を適当な補関数で近似することにより積分方程式の離散化を行った。補関近似の最も単純な例は数値例で示されており、特異点付近を除けば簡単な補間でも実用上十分な精度が得られることが示された。

積分方程式法の有効性を検討するために、端のある円孔の問題の数値例を挙げた。端の存在による三次元的な応力分布は、端から円孔の直径程度入った部分までに見られる。また、Poisson 比は三次元的な応力分布に大きく影響する。解析例から、積分方程式法により三次元弾

性境界値問題が比較的小規模な計算で解析されることがわかった。今後、種々の三次元問題に対して積分方程式法が適用されることが期待される。

数値計算には、京都大学大型計算機センターの FACOM 230-75 を用いた。

【付録】 影響係数

解析例に用いた影響係数式 (36) は以下で述べるような方法により解析的に求めることができる。まず B_n を決定すれば、 A_n および C_n は微分演算子 S^x, T^x と積分との交換法則より、単に B_n を微分するだけで求まる。

式 (36) より

$$B_i^{(k)}(x) = \int_{B_n} G_i^{(k)}(x; y) dS_y = \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \delta_{ik} \int_{B_n} \frac{1}{r} dS_y - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \int_{B_n} r dS_y \right\} \dots \dots \dots (A \cdot 1)$$

である。ここに、 x に関する微分と y に関する積分が交換可能であることを用いた。式 (A・1) より、次の積分

$$I(x) = \int_{B_n} r dS_y, J(x) = \int_{B_n} \frac{1}{r} dS_y \dots \dots \dots (A \cdot 2)$$

が決まれば、すべての影響係数はこれらを適当に微分

したものの組み合わせから求められることがわかる。

式 (A・2) の積分を決定するために、Fig. A・1 のように四辺形 B_n を含む面に x_1, x_2 軸をとり、 x_3 軸を法線方向にとる。 $x_1 x_2$ 平面に極座標 (R, θ) を次のように定義する。

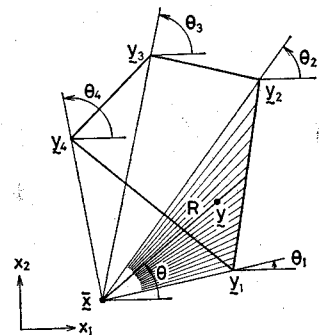


Fig. A・1 Integration on a quadrilateral element.

$$y_1 - x_1 = R \cos \theta, y_2 - x_2 = R \sin \theta, x_3 = z$$

このとき、式 (A・2) は

$$I(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \int_0^R r R dR d\theta$$

変数変換 $r^2 = R^2 + z^2$ より

$$I(x) = \hat{\Sigma} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \int_{|z|}^r r^2 dr d\theta = \frac{1}{3} \hat{\Sigma} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} r^3 d\theta - \frac{|z|^3}{3} \hat{\Sigma} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} d\theta = \frac{1}{3} \hat{\Sigma} I_{i,i+1} - \frac{|z|^3}{3} \Delta\theta \quad \dots\dots\dots (A.3)$$

となる。ここに、 $\hat{\Sigma}$ は各辺についての和を表わす。また、 $\Delta\theta$ は (x_1, x_2) が四辺形の中にあるか、外にあるかによって次の値をとる。

$$\Delta\theta = \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \in B_n \\ 2\pi, & (x_1, x_2) \notin B_n \end{cases}$$

同様にして

$$J(x) = \hat{\Sigma} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \int_{|z|}^r r dr d\theta = \hat{\Sigma} J_{i,i+1} - |z| \Delta\theta \quad \dots\dots\dots (A.4)$$

を得る。式 (A.3), (A.4) において、 $I_{i,i+1}, J_{i,i+1}$ は次のようである。

$$I_{i,i+1} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} r^3 d\theta, \quad J_{i,i+1} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} r d\theta$$

$I_{i,i+1}, J_{i,i+1}$ を表現するために、たとえば辺 (1, 2) について次の量を定義する (Fig. A.2 参照)。

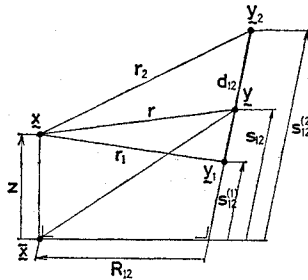


Fig. A.2 Local coordinate system.

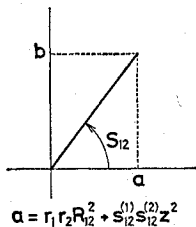
$$d_{12} = |y_1 - y_2|, \quad r_1 = |x - y_1|, \quad r_2 = |x - y_2|,$$

$$S_{12} = \frac{(\bar{x} - y) \cdot (y_1 - y_2)}{d_{12}},$$

$$R_{12} = \frac{(\bar{x} - y) \cdot (y_1 - y_2)}{d_{12}} \cdot e_3,$$

$$S_{12}^{(1)} = \frac{(\bar{x} - y_1) \cdot (y_1 - y_2)}{d_{12}},$$

$$S_{12}^{(2)} = \frac{(\bar{x} - y_2) \cdot (y_1 - y_2)}{d_{12}}$$



$$a = r_1 r_2 R_{12}^2 + S_{12}^{(1)} S_{12}^{(2)} z^2$$

$$b = |z| R_{12} (r_1 S_{12}^{(2)} - r_2 S_{12}^{(1)})$$

Fig. A.3 Definition of S_{12} .

さらに、これらの量を用いて次の量を定義する。

$$P_{12} = r_2 S_{12}^{(2)} - r_1 S_{12}^{(1)}$$

$$Q_{12} = \log \left\{ \frac{r_1 + r_2 + d_{12}}{r_1 + r_2 - d_{12}} \right\}$$

$$S_{12} = \tan^{-1} \left\{ \frac{|z| R_{12} (r_1 S_{12}^{(2)} - r_2 S_{12}^{(1)})}{r_1 r_2 R_{12}^2 + S_{12}^{(1)} S_{12}^{(2)} z^2} \right\}$$

ただし、 $-\pi < S_{12} < \pi$ で Fig. A.3 のように定義する。 I_{12}, J_{12} は P_{12}, Q_{12}, S_{12} などを用いて次のように書ける。

$$I_{12} = \frac{R_{12}}{2} \{P_{12} + (R_{12}^2 + 3z^2)Q_{12}\} + |z|^3 S_{12}$$

$$J_{12} = R_{12} Q_{12} + |z| S_{12}$$

残りの各辺についても、 $I_{i,i+1}, J_{i,i+1}$ が同様に決まり、式 (A.3), (A.4) より

$$\left. \begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{3} (I_{12} + I_{23} + I_{34} + I_{41}) - \frac{|z|^3}{3} \Delta\theta \\ J(x) &= J_{12} + J_{23} + J_{34} + J_{41} - |z| \Delta\theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (A.5)$$

となる。したがって、係数 $B_n(x)$ は次のように与えられる。

$$B_i^{(k)}(x) = \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \delta_{ik} J(x) - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right\}$$

式が長くなるので右辺の微分はそのままに残した。他の係数 $C_n(x), A_n(x)$ は $B_n(x)$ を微分して、

$$\left. \begin{aligned} C_{ij}^{(k)}(x) &= S_{ijm} x B_m^{(k)}(x) \\ A_i^{(k)}(x) &= T_{im} x B_m^{(k)}(x) \\ &= n_j S_{ijm} x B_m^{(k)}(x) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (A.6)$$

と求められる。

注意すべきことは、 $C_n(x), A_n(x)$ は点 x が四辺形 B_n を横切るとき不連続性をもつことである (2.2 参照)。式 (11) および題意より、点 x が四辺形 B_n 上にあるときの値は領域の内部からの極限をとることにすると、この極限操作のもとでは式 (34) の右辺第一項は式 (A.6) の表現の中に含まれている。また、この種の影響係数は一般の平面多辺形についてもまったく同様に求まることは明白である。

参考文献

- 1) Sternberg, E. : Three-Dimensional Stress Concentrations in the Theory of Elasticity, Appl. Mech. Rev., Vol. 11, pp. 1~5, 1958
- 2) Cruse, T.A. : Numerical Solutions in Three-Dimensional Elastostatics, Int. J. Solids Structures, Vol. 5, pp. 1259~1274, 1969.
- 3) Cruse, T.A. : An Improved Boundary-Integral Equation Method for Three Dimensional Elastic Stress Analysis, Computers & Structures, Vol. 4, pp. 741~754, 1974.
- 4) Deák, A.L. : Numerical Solution of Three-Dimensional Elasticity Problems for Solid Rocket Grains Based on Integral Equations, Vol. 1, Integral Equation Formulations, AFSC Report No. AFRPL-TR-71-140, Vol. 1, 1972.
- 5) 岡村宏一・島田 巧 : 3次元弾性問題の一般数値解法とその応用, 土木学会論文報告集, 第199号, pp. 33~43, 1972.
- 6) Lachat, J.C. and J.O. Watson : Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations : A Formulation for Three-Dimensional Elastostatics, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 10, pp. 991~1005, 1976.
- 7) 丹羽義次・小林昭一・横田和男 : 積分方程式による任意形状, 多数空洞周辺応力の解析, 土木学会論文報告集, 第195号, pp. 27~35, 1971.
- 8) 丹羽義次・小林昭一・福井卓雄・東 憲昭 : 積分方程式法による埋設物周辺の過渡応力の解析, 土木学会論文報告

- 集, 第248号, pp. 41~53, 1976.
- 9) Nedelec, J.C. : Curved Finite Element Methods for the Solution of Singular Integral Equations on Surfaces in R^3 , *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 8, pp. 61~80, 1976.
 - 10) Harder, R.L. and R.N. Desmarais : Interpolation Using Surface Splines, *J. Aircraft*, Vol. 9, No. 2, pp. 189~191, 1972.
 - 11) 日野幹雄・宮永洋一 : グリーン関数および仮想法による波力と波の回折計算, 土木学会論文報告集, 第237号, pp. 51~62, 1975.
 - 12) Hess, J.L. and A.M.O. Smith : Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies, *Progress in Aeronautical Sciences*, Vol. 8, pp. 1~138, Pergamon Press, 1966.

(1976.12.18・受付)
