

高異方性弾性体の近似解析理論に関する
二、三の基礎的考察SOME BASIC CONSIDERATIONS FOR THE THEORIES OF
APPROXIMATE ANALYSIS OF HIGHLY ANISOTROPIC
ELASTIC MATERIALS

北原道弘*・平島健一**・丹羽義次***

By Michihiro KITAHARA, Ken-ichi HIRASHIMA and Yoshiji NIWA

1. 緒 言

現在、古典弾性論の再考察が進むにつれて弾性体理論の枠組の中だけでも、さまざまな方向へ新分野の展開、開拓がなされている。これらの理論はいずれも連続体の基本概念のもとに一般論を展開し、その一極限として古典弾性論を位置づけるものであり、その分枝はここに述べる“層化された物質”にもその一極限を見ることができ。しかしながら、莫大な数にのぼるこれらすべての理論を総括して理論を進めることは現在のところ不可能である。たとえ、それが可能としても基礎式は実質的には解析不可能なものとなるであろう¹⁾。本論文に示す高異方性弾性体に対する解析方法は古典論の立場を守りながらも、この範疇で「より特徴的に」²⁾材料を理想化することにより古典異方性弾性体理論のもつ高異方性としての極限の問題点を示して再検討を促し、かつ異方性と不均質性の intersection における理論の出現を期待するものである。また、ここで用いる境界層の手法は、ある意味では古典的手法といえるが、たとえば、有理連続体力学 (rational continuum mechanics)³⁾ にいう流体で満たされた porous な物質などの本質的に非線形物質を扱う分野においてなんらかの近似解を得ようとする時、微小パラメータの導入は不可避であり、ある意味では二点境界値問題ともいえるこの一連の概念は有効な解析手段を与えるものと思われる。ここでは非常に特殊化された物質から異方性弾性物質を考察するという立場を取るが、これは連続体という一般概念から出発する現在の連続体力学の流れとよい対照をなすものであって、後者の全体の場合を見失わない立場とともに、ここに示す前者の立場もまた実際の現象究明という点で有効であ

ることが指摘できると考えるものである。いにかえるならば、われわれの目的は結晶性物質の枠組に入り得ない、たとえば、層化された物質、繊維強化複合材料

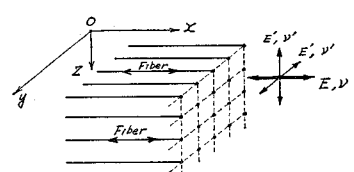


Fig. 1 General View of Orthotropic Elastic Material (Fiber-Reinforced Composite Material) and Coordinate System.

などに古典異方性基礎式を適用するには、その構成関係自身に曖昧性があること、したがって、これに基づく基礎式の複雑性などのために、それをいかに正確に解析したとしても現実物質の真の挙動推定には必ずしもならないことを考慮し、より簡単に、より特徴的に高異方性物質に対し、その異方性比をパラメータとし、そのオーダーで応力を推定する手法を試みようとするものである。この過程をたどる中で現実物質の持つ二、三の特質を見ることができ。ここで強調しておくべきことは、本論文はあくまで古典異方性弾性体理論の枠組みを出るものではないが、Fig. 1 に示すような一方向強異方性弾性物質を解析の対象とする場合、上述した理由により、この性質を最も特徴づけるような内部拘束を与え、この拘束の解除という方向から現実物質への接近を計ろうとするものであり、古典的意味での異方性弾性論における基礎方程式では表示しえない高異方性物質の持つ一極限を提示しようとするものである。以下では、簡単に本論文の基礎となった従来までの研究を概観しておく。

近年その使用性の増大を呈しつつある繊維補強複合物質 (Fiber Reinforced Composite Materials, 以下 FRC M と略称する) は、繊維方向の伸びに対する弾性係数が

注) 「より特徴的に」とは Fig. 1 に示すような一方向高異方性弾性体より強く特徴づけるような「内部拘束」(非伸張あるいは非圧縮假定等) を与えること、またはこれに起因すること、に関連しているという意味を含ませるものとする。

* 学生会員 工修 京都大学大学院生 博士課程在学

** 正会員 工修 山梨大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

それに直な方向の値に比較して、しばしば 50 倍あるいはそれ以上の値をとるという意味において高異方性を呈する。この種の物質に対する解析手法がさまざまな形で提案されており、この材料の純力学的取り扱いに対する理想化の一つの考え方は、非圧縮、非伸張と仮定することであり、1971 年 Pipkin & Rogers²⁾ により定式化された。この仮定の特徴は singular fiber (または singular sheet of fibers) と normal-line の出現であり、これらは有限の力、したがって、その結果として無限の応力を受け減衰なく長距離にまで力を伝達することになる。また、Everstine & Pipkin の論文³⁾ もこの二つの仮定に基づいて展開されたものである。すなわち、彼らは自由表面付近の高応力集中域の存在とその減衰長および層厚の尺度を与え、異方性厳密解の極限としてこの singular fiber の存在が可能であることを証明したものである。

次の力学的モデル化は本論文に示す第 (I) の仮定すなわち、材料を非伸張と仮定することであり、1973 年 England⁴⁾ によりさまざまな解が提示された。この解の特性は、Laplace 型の方程式に支配される高異方性弾性係数の方向 (繊維方向) とは直角な y 方向変位 v のみによる応力 $\sigma_{yy}^{(1)}$ が完全解に対する第一近似となりうるとするものであり、かつまた normal-line 付近の応力状態に対してよりよい近似となりうるとするものである。しかしながら、この理論をもってしてもこの応力特異 fiber の出現は改善できない。この特異 fiber の出現を解消すると同時にこの応力不連続性を境界条件として x 方向 (繊維方向) 変位 u について解こうとするのが第 (II) の仮定：境界層 (Boundary Layer) の手法である。この特異 fiber 付近の境界層解析は 1973 年 Everstine & Pipkin⁵⁾ により片持ばりに対し適用され、Laplace および Poisson 型方程式に対する解法として摂動法が提示された。この境界層の概念を用いてさらに、1974 年 Spencer⁶⁾ は平面ひずみ、平面応力をも含め、伸張性、圧縮性理論へと定式化を広めた。この境界層解は微小パラメーター ϵ に支配されることになるが、これは後に示す一般化重調和方程式の小さい方の特性根 ϵ_i に相当する。本論文では形式化を Spencer に合わせ、近似理論 [I]——非伸張仮定理論——、および近似理論 [II]——境界層存在仮定理論——による応力が異方性厳密式とどのような形で関係するかを検討考察する。なお、理論的推移は Fourier 変換で統一し、“基礎関数”を導入して近似理論解ならびに一般化重調和方程式の厳密解との一致性、それらの対応する項の持つ物理的特性等を示そうとするものである。

歴史的には、この応力特異層の存在の推定は 1966 年 M.A. Brot⁷⁾ により、skin effect という形で議論され、ここでは skin 厚ならびに減衰長は異方性比をパラメー

ターとする 2 つの特性根に支配されることが示されており、その基本的概念はここでの非伸張仮定と境界層の存在仮定による合成応力と同じである。

なお、このような Laplace および Poisson 型方程式を基礎方程式として FRCM の解析を行うことは合成板に対しても行われており、その結果は同じように端層における高応力集中域の存在を示している⁸⁾。次節以下では、内部拘束とそれの解除という手順によって現実物質への接近をめざす理論、すなわち、近似理論 [I] および [II] による二つの Laplace 方程式の解としての二つの調和関数 v, u から得られる近似合成応力と、古典弾性論における一般化重調和方程式の解としての厳密解が半無限平面の問題を例にとりて比較される。その結果、近似解の精度チェックのための尺度は重調和方程式の二つの特性根にあることが示される。

2. 平面異方性問題における一般関係式

Fig. 1 に示すように、 x 軸が fiber 方向 (yz -面が等方性の面) と一致する場合の構成関係は次式で与えられる⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz} \\ e_{yy} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} + \frac{1}{E'} \sigma_{yy} - \frac{\nu'}{E'} \sigma_{zz} \\ e_{zz} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu'}{E'} \sigma_{yy} + \frac{1}{E'} \sigma_{zz} \\ e_{xy} &= \frac{1}{2\mu_L} \sigma_{xy}, \quad e_{zx} = \frac{1}{2\mu_L} \sigma_{zx}, \quad e_{yz} = \frac{1+\nu'}{E'} \sigma_{yz} \end{aligned} \right\}$$

考察の対象とする二次元平面ひずみ問題に対する一般化構成関係式と、後に示すような一般化重調和方程式の係数 A, B, C との関係は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz} &= \nu \frac{E'}{E} \sigma_{xx} + \nu' \sigma_{yy} \\ e_{xx} &= \frac{1}{E} \left(1 - \nu^2 \frac{E'}{E} \right) \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} (1 + \nu^2) \sigma_{yy} \\ &\equiv A \sigma_{xx} - B \sigma_{yy} \\ e_{yy} &= -\frac{\nu}{E} (1 + \nu^2) \sigma_{xx} + \frac{1}{E'} (1 - \nu'^2) \sigma_{yy} \\ &\equiv -B \sigma_{xx} + C \sigma_{yy} \end{aligned} \right\}$$

ここで、 $D = AC - B^2$ と定義すると二次元異方性弾性問題における基本的関係式は次のように要約される。

a) 一般化構成関係式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{C}{D} e_{xx} + \frac{B}{D} e_{yy} \equiv L e_{xx} + M e_{yy} \\ \sigma_{yy} &= \frac{B}{D} e_{xx} + \frac{A}{D} e_{yy} \equiv M e_{xx} + N e_{yy} \\ \sigma_{xy} &= 2\mu_L e_{xy} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

b) つり合い方程式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} &= 0 \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

c) 適合条件式

$$e_{xx,yy} + e_{yy,xx} = 2e_{xy,xy} \dots\dots\dots(3)$$

d) 基礎方程式 (一般化重調和方程式)

$$A\phi_{,yyyy} + B\phi_{,xxyy} + C\phi_{,xxxx} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

ここに、コンマの次の指標はその指標の座標での偏微分を意味するものとする。構成関係 (1) のもとに つり合い方程式 (2) を満足する応力関数 $\phi(x, y)$ が適合条件式 (3) をも満足するための条件式として生まれる一般化重調和方程式 (4) を基礎式として理論を進める、いわゆる応力表示による一般的手法に対し、ここに示す理想化理論においては変位表示により議論を進め、高異方性物質に対する弾性定数間のオーダー評価により構成関係 (1) を「より特徴的に」評価し、この種の高異方性弾性物質の持つ一極限的特質を明らかにする。

3. 非圧縮、非伸張仮定の理論

Pipkin ら²⁾により導入された概念は次のようなものである。

(a) 非伸張仮定:

$$e_{xx} = u_{,x} = 0 \quad \therefore u = u(y) \dots\dots\dots(5)$$

(b) 非圧縮仮定:

$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \quad \therefore v = v(x) \dots\dots\dots(6)$$

(c) 構成関係式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= T_1 \\ \sigma_{yy} &= T_2 \\ \sigma_{xy} &= \mu_L [u(y)_{,y} + v(x)_{,x}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

ここに、 T_1 および T_2 は不定応力である。

つり合い方程式 (2) を積分すると次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\int_0^x \sigma_{xy,y} dx = -\mu_L x \cdot u(y)_{,y} + F_1(y) \\ \sigma_{yy} &= -\int_0^y \sigma_{xy,x} dy = -\mu_L \cdot y \cdot v(x)_{,x} + F_2(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

無限遠点では無応力であるという境界条件を考えることにより、

$$\left. \begin{aligned} u(y)_{,yy} &= 0 \\ v(x)_{,xx} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

これから、 $u(y) = \alpha_1 y + \alpha_2$ 、 $v(x) = \alpha_3 x + \alpha_4$ なる解が可能であるが、これは無限遠で一定せん断力を受ける場合だけしか考えられず、したがって、無限遠での境界条件としてこれを設けないかぎり $u(y)$ 、 $v(x)$ からの垂直応力 σ_{xx} 、 σ_{yy} への寄与はない。2つの積分定数 $F_1(y)$ 、 $F_2(x)$ は物理的には作用外力を剛 fiber のみが負担するものとして解釈できる。ここでの二つの仮定が以下に示す近似理論の基礎となるものである。すなわち、近似

理論 [I] においては非圧縮仮定 (6) をはずすものであり、近似理論 [II] においては fiber 方向の非伸張仮定 (5) をはずすと同時に、近似理論 [I] により生じた境界近傍での難点を解消するものである。

4. 近似理論 [I]—非伸張仮定理論⁴⁾—

(a) fiber 方向の非伸張仮定:

$$u_{,x} = 0 \quad \therefore u = u(y) \dots\dots\dots(10)$$

(b) 構成関係式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \bar{T} \\ \sigma_{yy} &= N e_{yy} = N v(x, y)_{,y} \\ \sigma_{xy} &= \mu_L [u(y)_{,y} + v(x, y)_{,x}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

ここに、
$$N = \begin{cases} \lambda + 2\mu_T & : (\text{圧縮性, 平面ひずみ状態}) \\ 4\mu_T(\lambda + \mu_T)/(\lambda + 2\mu_T) & : (\text{圧縮性, 平面応力状態}) \\ \infty & : (\text{非圧縮性, 平面ひずみ状態}) \\ 4\mu_T & : (\text{非圧縮性, 平面応力状態}) \end{cases}$$
(11), (2) より変位表示のつり合い方程式は次の式となる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_{,x} + \mu_L [u(y)_{,yy} + v(x, y)_{,xy}] &= 0 \\ \mu_L v(x, y)_{,xx} + N v(x, y)_{,yy} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

(12) の第一式を積分することにより不定応力 σ_{xx} が次のように決定できる。

$$\bar{T} = \sigma_{xx} = -\mu_L [x u(y)_{,yy} + v(x, y)_{,y}] + F_1(y)$$

これより次節に述べる境界層において、 x 方向変位 u は「より特徴的に」評価される。他方、 x 方向の非伸張仮定による応力は (9) から y 方向変位 v のみにより次のように評価される。

仮定 (I): 非伸張仮定における構成関係式の仮定

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\mu_L v_{,y} + F(y) \\ \sigma_{yy} &= N v_{,y} \\ \sigma_{xy} &= \mu_L v_{,x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

また、(12) の第二式で $c^2 = \mu_L/N$ 、 $y_1 = cy$ とおけば、つり合い方程式は次式で表示される。

$$v_{,xx} + v_{,y_1 y_1} = 0 \dots\dots\dots(14)$$

ゆえに、変位 v は x と y_1 に関する調和関数となる。

5. 近似理論 [II]—境界層の存在の仮定^{5), 6)}—

後に示す解析例でわかるようにこの仮定における解の境界依存性と卓越性を考慮して、変位成分 u により支配される応力場を境界層^{注)}と名付けて、この層内における

注) 流体力学で用いられる「境界層」のイメージと同等である。ここでは非伸張場が完全流体部分に、境界層場が粘性の卓越するいわゆる境界層に対応していると考えてよい。ある物理量の境界近傍の卓越性は流体に限らずしばしば観察される現象であるが、ここでは「変位による応力の境界近傍依存性と卓越性」に基づいて境界層と呼ぶことにする。

材料特性に基づく近似法を述べる。(1),(2)より変位表示したつり合い方程式は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} Lu_{,xx} + (M + \mu_L)v_{,xy} + \mu_L u_{,yy} = 0 \\ \mu_L v_{,xx} + (M + \mu_L)u_{,xy} + Nv_{,yy} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

ここに、

$$\epsilon^2 = \mu_L/L, \quad c^2 = \mu_L/N, \quad d^2 = \mu_L/M \dots\dots\dots (16)$$

たとえば, Spencer⁶⁾はFRCMの実在材料に対し異方性弾性定数を実測したMarkhamの結果¹⁰⁾の一例を用いて上記の3つの材料特性パラメーターが $\epsilon^2=0.023$, $c^2=0.540$, $d^2=1.123$ となることを示している。したがって、非伸張仮定により生じる境界特異 fiber 近傍の尺度パラメーターは微量 ϵ である。そこでいま、

$$\eta = y/\epsilon \dots\dots\dots (17)$$

により境界層変数 η を導入すると、つり合い方程式(15)は ϵ, c および d を用いて次のように表示できる。

$$\left. \begin{aligned} u_{,xx} + \epsilon(1/d^2 + 1)v_{,x\eta} + u_{,\eta\eta} = 0 \\ \epsilon^2 v_{,xx} + \epsilon(1/d^2 + 1)u_{,x\eta} + \frac{1}{c^2}v_{,\eta\eta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (15)'$$

ここで対象としている材料特性 $\epsilon \ll 1.0$, $c < 1.0$, $d \approx 1.0$ を考慮すると境界層内における卓越変位成分は u であることがわかる。ゆえに境界層内で v からの寄与はたかだか $\max\{O(\epsilon), O(\epsilon^2/c^2)\}$, ($\epsilon \ll 1$)の程度であることをふまえて、これを無視する。この場合、境界層内での非卓越応力 σ_{yy} は y 方向のつり合い方程式から次のように求まる。

$$\sigma_{yy} = - \int_0^y \sigma_{yx,x} dy = -\mu_L u_{,x}$$

ゆえに、境界層内での構成関係は誤差 $\max\{O(\epsilon), O(\epsilon^2/c^2)\}$ のもとに次のように表現できる。

仮定(II)：境界層における構成関係式の仮定

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\mu_L}{\epsilon^2} u_{,x} \\ \sigma_{yy} &= -\mu_L u_{,x} \\ \sigma_{xy} &= \frac{\mu_L}{\epsilon^2} u_{,\eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

同じ近似度のもとにつり合い方程式は次式により表現できる。

$$u_{,xx} + u_{,\eta\eta} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

ゆえに、変位 u は x と η に関する調和関数となる。

ここで、仮定(I)および(II)を通じ、変位 v および u はそれぞれ (x, y_1) および (x, η) の調和関数となったが、この各変数に対する導関数も調和関数であるという性質は、応力算出において有効に用いられる。

6. 近似理論 [I] および [II] による応力場とそれらの解の合成

次節に示すように fiber 方向に非伸張と仮定した場合

(仮定(I))の応力場は、境界で応力に不連続特異性を示す。この特異性を境界層の存在仮定(II)により境界条件として導入することにすれば、この不連続特異性は解消されることになる。このことは仮定(I)および(II)の合成として応力場を近似するための一手法を与えることを示唆している。ここで仮定と近似法ならびに基礎式を再確認しておく。

仮定(I)：近似理論 [I] による構成関係およびつり合い方程式は y 方向 (fiber に垂直な方向) の変位 v のみによりそれぞれ式(13)および(14)のように表示できる。

仮定(II)：近似理論 [II] による構成関係およびつり合い方程式は x 方向 (fiber 方向) の変位 u のみによりそれぞれ式(18)および(19)のように表示できる。

仮定(III)：考察の対象としている高異方性物質の応力場は、近似的に上記2つの応力場の重ね合わせとして次のように表示できる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx}^{(I)} + \sigma_{xx}^{(II)} \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{yy}^{(I)} + \sigma_{yy}^{(II)} \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xy}^{(I)} + \sigma_{xy}^{(II)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ここに、

$$\{\sigma_{xx}^{(I)}, \sigma_{yy}^{(I)}, \sigma_{xy}^{(I)}\} :$$

非伸張仮定(I)による応力 [式(13)]

$$\{\sigma_{xx}^{(II)}, \sigma_{yy}^{(II)}, \sigma_{xy}^{(II)}\} :$$

境界層仮定(II)による応力 [式(18)]

通常の弾性問題における変位(応力)場は重調和方程式を満足するが、この仮定のもとでは変位(応力)場は二つの調和関数で近似されることになり、弾性問題は二つのLaplace型の方程式を境界条件のもとに順次解くことに帰着する。

ここで近似手法における境界条件の与え方について説明しておこう。まず、この近似手法によれば、問題とする異方性場は非伸張場と境界層場の和として表示しうることを注意する。そして、与えられた境界条件は非伸張場を解くために用いられる。したがって、問題となる点は境界層場を解析する際の境界条件の与え方である。これを次のように考える。今まで非伸張仮定の変位 $v(x, y_1)$ および境界層仮定の変位 $u(x, \eta)$ は、それぞれ仮定(I)および(II)に基づき、全体の異方性変位場 $\{u(x, y), v(x, y)\}$ に対し、独立に卓越成分をある材質的な近似度のもとに取り出したものであった。しかし、この2つの近似変位場 $\{u(x, \eta), v(x, y_1)\}$ は本来独立なものではなく、全体の変位場 $\{u(x, y), v(x, y)\}$ が応力との関係において一般化Hooke法則で結ばれるように、近似理論 [I] および [II] においてもその合成として何らかの関係を満足するものでなくてはならない。ここでは、全体の高異方性変位場を非伸張場に拘束

し、かつこれを境界層場の導入により開放するという理論構成のもとに境界層境界せん断応力が、非伸張境界せん断応力からなめらかに導入されるように二つの応力場を合成する。すなわち、次の近似合成解において具体的に示されるように非伸張仮定解において本質的に生じる境界特異 fiber に対して、一般化構成関係式 (1) を通じて境界層に対する境界条件とする。

以下、近似解、厳密解を通じて使用する基礎関数を次のように定義しておく。

$$\left. \begin{aligned} G_c(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \cdot e^{-|\xi|y} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \xi x \cdot e^{-|\xi|y} d\xi = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \\ G_s(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\xi}{|\xi|} e^{-i\xi x} \cdot e^{-|\xi|y} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \xi x \cdot e^{-|\xi|y} d\xi = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \\ &\dots\dots\dots(21) \end{aligned} \right\}$$

以下の議論において y は次のように置き換えて使用される。

近似理論 [I]: $y \rightarrow y_1 = cy$

近似理論 [II]: $y \rightarrow \eta = y/\epsilon$

これに対応する厳密解の各項においては

$$y \rightarrow \bar{y}_1 = \epsilon_c y$$

$$y \rightarrow \bar{\eta} = y/\epsilon_t$$

となる。ここに、 ϵ, c は 4., 5. において定義されたものであり、 ϵ_t, ϵ_c は 8. に述べる一般化重調和方程式の特性根 (またはその逆数) である。また、基礎関数 $G_c(x, y)$ および $G_s(x, y)$ と任意関数 $\varphi(x)$ との合成積は y をパラメーターと見なして、 x 変数について合成積をとるという意味で次のように記す。

$$\left. \begin{aligned} G_c(x, y) * \varphi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_c(x-t, y) \cdot \varphi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_c(t, y) \cdot \varphi(x-t) dt \\ &\dots\dots\dots(22) \end{aligned} \right\}$$

厳密解と近似解のオーダー評価においては通常の記述方式 (Landau の記号) に従うものとする。すなわち、連続関数 f, g に対し、

$$\begin{aligned} f &= O(g) \Leftrightarrow \exists c, \|f\| \leq c \|g\|; \\ f &= O(g) \Leftrightarrow \forall \epsilon, \|f\| \leq \epsilon \|g\| \end{aligned}$$

を意味するものとする。さらにまた、片側 Fourier 変換および逆変換を次のように定義しておく¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} F[u(x, y); x \rightarrow \xi] \\ &= \hat{u}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x, y) dx, \\ F^{-1}[\hat{u}(\xi, y); \xi \rightarrow x] \\ &= u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \hat{u}(\xi, y) d\xi, \end{aligned} \right\} \dots(23)$$

7. 近似合成解

平面ひずみ問題を例にとり半無限体の表面に Fig. 2 に示すような、(A) fiber に垂直な分布荷重 $p(x)$ のみが作用する場合、および (B) fiber に平行な分布荷重 $s(x)$ のみが作用する場合の二種類の境界条件を考え、非伸張仮定 (I) から境界層仮定 (II) へと順次、基礎 (Laplace) 方程式を Fourier 変換により追跡し、理想化された解の特性を考察する。

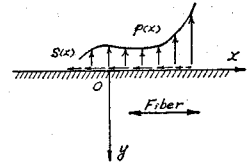


Fig.2 Half Plane Subjected to Arbitrary Normal Stress $p(x)$ and Tangential Stress $s(x)$ at the Surface Boundary.

(A) fiber に垂直な分布荷重 $p(x)$ のみが作用する場合

a) 近似理論 [I]—非伸張仮定解—

基礎方程式

$$v_{,xx} + v_{,y_1 y_1} = 0 \dots\dots\dots(24)$$

境界条件式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu_L}{c} v(x, y_1)_{,y_1} &= p(x), \quad (y_1 = 0 \text{ において}) \\ &\dots\dots\dots(25) \end{aligned} \right\}$$

x 成分に対し Fourier 変換を行うと基礎式および境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{v}(\xi, y_1)_{,y_1} - \xi^2 \hat{v}(\xi, y_1) &= 0, \\ \lim_{y_1 \rightarrow 0} \frac{\mu_L}{c} \hat{v}(\xi, y_1)_{,y_1} &= \hat{p}(\xi), \\ \lim_{y_1 \rightarrow \infty} \hat{v}(\xi, y_1) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

これより $\hat{v}(\xi, y_1)$ が求まり、逆変換 $v(x, y_1)$ が、さらに微分により $v_{,x}, v_{,y}$ が次のように定められる。

$$\begin{aligned} \hat{v}(\xi, y_1) &= -\frac{c}{\mu_L} \frac{\hat{p}(\xi)}{|\xi|} e^{-|\xi|y_1}, \\ v(x, y_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \cdot \hat{v}(\xi, y_1) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{c}{\mu_L} \int_{-\infty}^{\infty} \log(t^2 + y_1^2) \cdot p(x-t) dt, \\ v(x, y_1)_{,y_1} &= \frac{c}{\mu_L} \int_{-\infty}^{\infty} G_c(t, y_1) \cdot p(x-t) dt \\ &\equiv \frac{c}{\mu_L} G_c(x, y_1) * p(x), \\ v(x, y_1)_{,x} &= \frac{c}{\mu_L} G_s(x, y_1) * p(x). \end{aligned}$$

これより非伸張仮定の場合に対する応力一般式が (13) を用いて次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^{(1)} &= -c\mu_L v_{,y_1} + F(y) \\ &= -c^2 G_c(x, y_1) * p(x), \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yy}^{(I)} &= \frac{\mu_L}{c} v, y_1 = G_c(x, y_1) * p(x) \\ \sigma_{xy}^{(I)} &= \mu_L v, x = c G_s(x, y_1) * p(x) \cdot H(y_{+0}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 $H(y_{+0})$: Heaviside のステップ関数、 $G_c(x, y_1)$ および $G_s(x, y_1)$ は基礎関数の定義式 (21) で $y_1 = cy$ と置いたものである。

さて、ここで境界条件の検討を行っておこう。

$$\left. \begin{aligned} \lim_{y_1 \rightarrow 0} \sigma_{xx}^{(I)}(x, y_1) &= -c^2 p(x), \\ \lim_{y_1 \rightarrow 0} \sigma_{yy}^{(I)}(x, y_1) &= p(x), \\ \lim_{y_1 \rightarrow 0} \sigma_{xy}^{(I)}(x, y_1) &= \mu_L \frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} \\ &= \frac{c}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{x-t} dt \end{aligned} \right\}$$

となつて、境界条件 $\lim_{y_1 \rightarrow 0} \sigma_{xy}^{(I)}(x, y_1) = 0$ が満足されていないことがわかる。非伸張仮定理論の枠内でこのせん断応力の不連続性を解消しようとする場合 (すなわち、 $\sigma_{xy}^{(I)}(x, 0) = 0$ を実現しようとする場合)、境界 fiber に次のような合応力が作用すると考えてのみ正当化しうる。

$$\begin{aligned} T(x) &= -\mu_L \int_0^x \frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} dx + T(0) \\ &= -\mu_L [v(x, 0) - v(0, 0)] + T(0) \end{aligned}$$

$T(x)$ の不定性を考慮して、 $T(0) = -\mu_L v(0, 0)$ とおくと、せん断応力に対する境界条件を満足させるために、境界上の fiber 方向応力 $\sigma_{xx}(x, 0)$ への寄与 (換算) は次のように求められる。

$$T(x) = -\mu_L v(x, 0) = -\frac{c}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log|t| \cdot p(x-t) dt \quad (y=0 \text{ において})$$

これは Laplace 方程式の解として、 v が対数特異性を有することに起因するものであり、非伸張仮定のもとでは、境界上のせん断応力の不連続性を打ち消す形で fiber 方向応力 σ_{xx} に対数的特異性が出現することになる。6. における境界条件の与え方 (16 頁参照) において説明したように、この状況の出現が境界層概念導入の動機となるものであり、ここに生じた非現実性を除去するものが次節で述べる境界層理論である。すなわち、非伸張仮定により生じたせん断応力の不連続性を新しい変位場 $u(x, y)$ に対する境界条件として導入することにより、このせん断応力不連続性とその結果生じた σ_{xx} の対数的特異性を同時に解消しようとするものである。

なお、非伸張応力のオーダー評価は、

$$\sigma_{xx}^{(I)} = O(c^3), \sigma_{yy}^{(I)} = O(c), \sigma_{xy}^{(I)} = O(c)$$

であり、 $c \ll 1$ の場合 $\sigma_{xx}^{(I)}$ の影響は特異 fiber を除くと非常に小さいものであることがわかる。

ここで近似理論 [I] および [II] の設定の動機となつた非圧縮、非伸張理論と基礎関数 $G_c(x, y_1)$ の物理

的意味について述べておく。ここで導入された非伸張基礎関数 $G_c(x, y_1) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{cy}{x^2 + c^2 y^2}$ は非圧縮性の場合において物質定数の極限を考えると $c \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) となることから、 $\lim_{c \rightarrow 0} G_c(x, y_1) = \delta(x)$ すなわち、物質極限としてデルタ関数の性格を持ち、このとき、非圧縮、非伸張仮定の応力 $\sigma_{yy}^{(I)}$ は

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} \sigma_{yy}^{(I)} &= \lim_{c \rightarrow 0} G_c(x, y_1) * p(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) p(x-t) dt = p(x) \end{aligned}$$

となり他方、非圧縮、非伸張極限のもとでは σ_{yy} は y に無関係に $y \rightarrow \infty$ にまで減衰なく伝達されることになる。また、非伸張仮定の応力式 (26) において境界 fiber ($y=0$) にせん断応力 $\sigma_{xy}^{(I)}$ の不連続を生じ、その結果として $\sigma_{xx}^{(I)}$ に特異項が出現したが、この応力特異性は y 方向変位 v に対する Laplace 方程式のみでは解消できない。以下に述べる境界層解においてこの不連続性を構成関係を通じて境界条件として導入し、せん断応力の不連続性ならびに $\sigma_{xx}^{(I)}$ の特異性を解消する。

b) 近似理論 [II]—境界層解—

6. ならびに上記の非伸張仮定解の項で述べたように境界層に対する境界条件は $p(x)$ のみ作用する場合に対しては非伸張変位 v から次の条件により導入される。

$$\sigma_{xy}^{(II)} = \frac{\mu_L}{\epsilon} u, \eta + \mu_L v, x = 0 \quad (\eta=0 \text{ において})$$

これより境界層仮定理論に対する基礎方程式および境界条件式はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u, xx + u, \eta\eta &= 0 \dots\dots\dots (27) \\ u, \eta &= -\epsilon v, x \quad (\eta=0 \text{ で}) \\ u, \eta &= 0 \quad (\eta \rightarrow \infty \text{ で}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

a) と同様な x 変数に対する Fourier 変換手法により、境界層における応力は (18) より次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^{(II)} &= \frac{\mu_L}{\epsilon^2} u, x = \frac{c}{\epsilon} G_c(x, \eta) * p(x) \\ \sigma_{yy}^{(II)} &= -\mu_L u, x = -\epsilon c G_c(x, \eta) * p(x) \\ \sigma_{xy}^{(II)} &= \frac{\mu_L}{\epsilon} u, \eta = -c G_s(x, \eta) * p(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots (29)$$

ここで、境界層応力のオーダー評価を行うと

$$\sigma_{xx}^{(II)} = O(c/\epsilon^2), \sigma_{yy}^{(II)} = O(c), \sigma_{xy}^{(II)} = O(c)$$

となり、 $\epsilon \ll 1$ より非伸張応力の場合とは逆に $\sigma_{xx}^{(II)}$ の影響がきわめて大きいことがわかる。これは、非伸張仮定解における特異境界の解消による境界近傍での境界層解の特性を強く物語るものである。

(B) fiber に平行な分布荷重 $s(x)$ のみが作用する場合

a) 近似理論 [I]

fiber 方向の非伸張性の仮定により、fiber に平行な外力が作用する場合は、非伸張変位 v は誘発され得ない。

ゆえに、非伸張仮定の応力は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^{(I)} &= -\mu_L v_{,y} + F(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(x) \cdot \text{sgn}(x) \cdot \delta(y) dx \\ \sigma_{yy}^{(I)} &= 0 \\ \sigma_{xy}^{(I)} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (30)$$

b) 近似理論 [II]

境界層解に対する境界条件は次の式により示される。

$$\sigma_{xy}^{(II)} = \frac{\mu_L}{\epsilon} u_{,\eta} + \mu_L v_{,x} = s(x) \quad (\eta=0 \text{ において})$$

いまの場合、 $v=0$ より基礎方程式ならびに境界条件は次のようになる。

$$u_{,xx} + u_{,\eta\eta} = 0 \dots\dots\dots (31)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{,\eta} &= \frac{\epsilon}{\mu_L} s(x) \quad (\eta=0 \text{ で}) \\ u_{,\eta} &= 0 \quad (\eta \rightarrow \infty \text{ で}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

前と同じ手法により、 $s(x)$ が作用する場合の境界層応力は (18) より次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^{(II)} &= \frac{\mu_L}{\epsilon^2} u_{,x} = \frac{1}{\epsilon} G_s(x, \eta) * s(x) \\ \sigma_{yy}^{(II)} &= -\mu_L u_{,x} = -\epsilon G_s(x, \eta) * s(x) \\ \sigma_{xy}^{(II)} &= \frac{\mu_L}{\epsilon} u_{,\eta} = G_c(x, \eta) * s(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots (33)$$

オーダー評価を行うと、

$$\sigma_{xx}^{(II)} = O(1/\epsilon), \quad \sigma_{yy}^{(II)} = O(\epsilon), \quad \sigma_{xy}^{(II)} = O(1/\epsilon)$$

ここでも、 $\epsilon \ll 1$ より $\sigma_{yy}^{(II)} \ll 1$ となり境界層の性格が現われている。

ここで、近似理論における一般解として合成応力を示すと以下ようになる。

(A) $p(x)$ が作用する場合

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx}^{(I)} + \sigma_{xx}^{(II)} = -c^2 G_c(x, y_1) * p(x) \\ &\quad + \frac{c}{\epsilon} G_c(x, \eta) * p(x), \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{yy}^{(I)} + \sigma_{yy}^{(II)} = G_c(x, y_1) * p(x) \\ &\quad - \epsilon c G_c(x, \eta) * p(x), \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xy}^{(I)} + \sigma_{xy}^{(II)} = c G_s(x, y_1) * p(x) \\ &\quad - c G_s(x, \eta) * p(x). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

(B) $s(x)$ が作用する場合

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx}^{(I)} + \sigma_{xx}^{(II)} = 0 + \frac{1}{\epsilon} G_s(x, \eta) * s(x), \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{yy}^{(I)} + \sigma_{yy}^{(II)} = 0 - \epsilon G_s(x, \eta) * s(x) \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xy}^{(I)} + \sigma_{xy}^{(II)} = 0 + G_c(x, \eta) * s(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

後に示すように弾性厳密解を二つの特性根 ϵ_t, ϵ_c を用いて示すことによって、ここで求めた近似合成解は $\epsilon_t \rightarrow \epsilon, \epsilon_c \rightarrow c$ と置き換えることにより $p(x)$ の作用下においては、後出の係数 ω_0 を除いて完全に厳密解と一致し、 $s(x)$ の作用下においては境界層解に対応する項が係数 ω_0 を除いて厳密解と一致していることがわかる。

ゆえに、近似合成解の誤差評価の基準は ϵ_t と ϵ, ϵ_c と c なる弾性定数に関連した係数にある。

8. 異方性弾性厳密解

Everstine & Pipkin³⁾ の導入した一般化重調和方程式をわれわれの議論における近似理論 [I] および [II] と対応させ Fourier 変換手法により解析する。

基礎方程式 (一般化重調和方程式) :

$$A\phi_{,yyyy} + B\phi_{,xxyy} + C\phi_{,xxxx} = 0 \dots\dots\dots (36)$$

x 方向成分に対する特性方程式 :

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

の大小の根をそれぞれ $1/\epsilon_t, \epsilon_c$ とすると基礎方程式は次のように書ける。

$$\left(\epsilon_t^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_c^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, y) = 0$$

近似理論との対応を示すため上の特性根と関係する次の変数を導入する。

$$\bar{y}_1 = \epsilon_c y, \quad \bar{\eta} = y/\epsilon_t \dots\dots\dots (37)$$

このとき、上述の基礎方程式は次のようになる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi = 0 \dots\dots\dots (36)'$$

近似理論の場合と同様に次のように議論を進める。

応力関数の変換 :

$$\hat{\phi}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \phi(x, y) dx$$

基礎方程式の変換 :

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \epsilon_t^2 \cdot \frac{B}{A} \frac{d^2}{dy^2} + \epsilon_c^4 \cdot \frac{C}{A} \right) \hat{\phi}(\xi, y) = 0$$

$y \rightarrow \infty$ で応力 free の境界条件より応力関数は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi}(\xi, y) &= c_1 \exp\left(-\frac{|\xi|}{\epsilon_t} y\right) + c_2 \exp(-|\xi| \epsilon_c y) \\ \phi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \hat{\phi}(\xi, y) d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

定数 c_1, c_2 は $y=0$ での境界条件により決定され、応力成分の Fourier 変換および逆変換はそれぞれ次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_{xx}(\xi, y) &= -\frac{d^2}{dy^2} (\hat{\phi}(\xi, y)), \\ \hat{\sigma}_{yy}(\xi, y) &= -\epsilon_t^2 \hat{\phi}(\xi, y), \\ \hat{\sigma}_{xy}(\xi, y) &= -i\xi \frac{d}{dy} (\hat{\phi}(\xi, y)). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\xi x} \frac{d^2 \hat{\phi}}{dy^2} d\xi, \\ \sigma_{yy}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\xi x} \epsilon_t^2 \hat{\phi} d\xi, \\ \sigma_{xy}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\xi x} i\xi \frac{d}{dy} \hat{\phi} d\xi. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

以上で形式的準備は完了したので、以下では近似理論に対応する問題をこの節の厳密式によって解析する。

(A) $p(x)$ のみ作用する場合

境界条件は、

$$\sigma_{yy}(x, 0) = p(x), \sigma_{xy}(x, 0) = 0$$

であり、(38), (39) を用いて定数 $c_1(\xi), c_2(\xi)$ は次のように定まる。

$$c_1(\xi) = \frac{\omega_0}{\xi^2} \varepsilon_f \varepsilon_c \hat{p}(\xi), c_2(\xi) = -\frac{\omega_0}{\xi^2} \hat{p}(\xi)$$

ここに、

$$\omega_0 = \frac{1}{1 - \varepsilon_f \varepsilon_c} \dots\dots\dots (41)$$

したがって、応力関数は (38) より次のように定まる。

$$\hat{\phi}(\xi, y) = \frac{\omega_0}{\xi^2} \hat{p}(\xi) [\varepsilon_f \varepsilon_c e^{-|\xi|y} - e^{-|\xi|\bar{y}}]$$

$$\phi(x, y) = F^{-1}[\hat{\phi}(\xi, y); \xi \rightarrow x]$$

応力成分は、(39) より次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= \omega_0 \left[-\varepsilon_c^2 G_c(x, \bar{y}_1) * p(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_f} G_c(x, \bar{\eta}) * p(x) \right], \\ \sigma_{yy}(x, y) &= \omega_0 [G_c(x, \bar{y}_1) * p(x) \\ &\quad - \varepsilon_f \varepsilon_c G_c(x, \bar{\eta}) * p(x)], \\ \sigma_{xy}(x, y) &= \omega_0 [\varepsilon_c G_s(x, \bar{y}_1) * p(x) \\ &\quad - \varepsilon_c G_c(x, \bar{\eta}) * p(x)]. \end{aligned} \right\} \dots (42)$$

ここに、 $G_c(x, \cdot), G_s(x, \cdot)$ は (21) で定義されている。またこのとき、応力関数は次のように表示できる。

$$\phi(x, y) = \omega_0 [-G_c(x, \bar{y}_1) * p(x) + \varepsilon_f \varepsilon_c G_c(x, \bar{\eta}) * p(x)],$$

(B) $s(x)$ のみ作用する場合

境界条件は、

$$\sigma_{yy}(x, 0) = 0, \sigma_{xy}(x, 0) = s(x)$$

であり、(37), (38) より定数 $c_1(\xi), c_2(\xi)$ は次のように定まる。

$$c_1(\xi) = \frac{i\omega_0 \varepsilon_f}{\xi |\xi|} \hat{s}(\xi), c_2(\xi) = -c_1(\xi)$$

これより応力関数および応力成分は次のように求まる。

$$\hat{\phi}(\xi, y) = \frac{i\omega_0 \varepsilon_f}{\xi |\xi|} \hat{s}(\xi) (-e^{-|\xi|y} + e^{-|\xi|\bar{y}})$$

$$\phi(x, y) = F^{-1}[\hat{\phi}(\xi, y); \xi \rightarrow x]$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= \omega_0 \left[-\varepsilon_f \varepsilon_c^2 G_s(x, \bar{y}_1) * s(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon_f} G_s(x, \bar{\eta}) * s(x) \right], \\ \sigma_{yy}(x, y) &= \omega_0 [\varepsilon_f G_s(x, \bar{y}_1) * s(x) \\ &\quad - \varepsilon_f G_s(x, \bar{\eta}) * s(x)], \\ \sigma_{xy}(x, y) &= \omega_0 [-\varepsilon_f \varepsilon_c G_c(x, \bar{y}_1) * s(x) \\ &\quad + G_c(x, \bar{\eta}) * s(x)]. \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

このとき、応力関数は次のように表示できる。

$$\phi(x, y) = \omega_0 [-\varepsilon_f G_s(x, \bar{y}_1) * s(x) + \varepsilon_f G_s(x, \bar{\eta}) * s(x)]$$

9. 近似合成解と異方性厳密解の比較

ここに近似合成解と異方性厳密解は (A) および (B) の場合、それぞれ次のようにまとめられる。

(A) $p(x)$ が作用する場合

近似合成解：(34), 異方性厳密解：(42)

(B) $s(x)$ が作用する場合

近似合成解：(35), 異方性厳密解：(43)

近似合成解と異方性厳密解を比較して、厳密解における特性根 ε_f および ε_c をそれぞれ近似解における ε および c に置き換えて考えると両者の形式的相違は厳密解における係数 (41), すなわち

$$\omega_0 = \frac{1}{1 - \varepsilon_f \varepsilon_c} = \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_f \varepsilon_c)^n = 1 + (\varepsilon_f \varepsilon_c) + (\varepsilon_f \varepsilon_c)^2 + \dots$$

であることがわかる。しかし、これは近似理論の出発点となった高異方性物質に対しては、 $\varepsilon_f \ll 1, \varepsilon_c < 1$ であり、近似として $\omega_0 = 1$ とすることの誤差は $O(\varepsilon_f \varepsilon_c)$ の程度であり無視し得るものである。ゆえに、両者における本質的比較は ε_f と $\varepsilon, \varepsilon_c$ と c をどの程度同一視し得るかということに帰着するが、(1) に示した一般化構成関係と一般化重調和方程式の係数の関係を用いると、高異方性物質に対しては $O(\varepsilon_f) = O(\varepsilon), O(\varepsilon_c) = O(c)$ であることがわかる。

なお、 $s(x)$ の作用下において、近似合成解に非伸張仮定解が出現しないのは近似解の本質的性格によるものであり、逆に境界層の意味がはっきりとかがえるであろう。

10. 基本的荷重による検討

先に示したように半無限体の表面に $p(x), s(x)$ のおのおのが作用する場合、厳密解および近似解一般式がそれぞれ (42), (34) および (43), (35) により基礎関数との合成積として得られたが、ここでは簡単な基本的荷重が作用する場合について応力の陽な表示を示すと同時に、その幾つかにつき厳密解と近似解の相違ならびに特性を示す (ここでは、fiber に垂直な荷重 $p(x)$ が作用する場合のみ示すが、 $s(x)$ が作用した場合も同じ手法で求められる。ここでの目的は、厳密解と近似解の基本的性質を具体的に示すことであるので、 $p(x)$ のみに対する議論で十分であり、 $s(x)$ 作用の場合の具体例は省略する)。なお、ここに示す荷重に対しては合成積は簡単に積分できるので結果のみ示す。

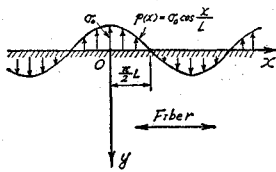


Fig. 3 Half Plane Subjected to Sinusoidal Normal Stress $p(x) = \sigma_0 \cos \frac{x}{L}$ at the Boundary.

a) fiber に垂直な荷重 $p(x)$ のみが作用する場合

① cosine 分布荷重 (Fig. 3 参照)

境界層の厚さと減衰長 の概念を明確にするため、まず特性長を L とするような分布荷重を考

える。境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0) &= p(x) = \sigma_0 \cos \frac{x}{L}, \\ \sigma_{xy}(x, 0) &= s(x) = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

で与えられ、厳密解は一般解 (42) において $p(x) = \sigma_0 \cos \frac{x}{L}$ としてやればよく、その結果次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \omega_0 \left\{ -\varepsilon_c^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon_c}{L} y\right) + \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_t} \exp\left(-\frac{1}{L\varepsilon_t} y\right) \right\} \sigma_0 \cos \frac{x}{L}, \\ \sigma_{yy} &= \omega_0 \left\{ \exp\left(-\frac{\varepsilon_c}{L} y\right) - \varepsilon_t \varepsilon_c \exp\left(-\frac{1}{L\varepsilon_t} y\right) \right\} \sigma_0 \cos \frac{x}{L}, \\ \sigma_{xy} &= \omega_0 \left\{ \varepsilon_c \exp\left(-\frac{\varepsilon_c}{L} y\right) - \varepsilon_c \exp\left(-\frac{1}{L\varepsilon_t} y\right) \right\} \sigma_0 \sin \frac{x}{L}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

他方、近似解の方は一般解 (34) において $p(x) = \sigma_0 \cos \frac{x}{L}$ とおくことにより、上記の応力式 (45) の係数を $\omega_0 \rightarrow 1.0$, $\varepsilon_t \rightarrow \varepsilon$, $\varepsilon_c \rightarrow c$ とおいてやったもの一致するので式の再録は省略する。

ここで、Pipkin & Rogers²⁾ が行ったように、 σ_{yy} が境界荷重の e^{-1} 倍に減衰するときの y の値を減衰長とし、また σ_{xx} が境界荷重の e^{-1} 倍に減衰するときの y の値を境界層厚として定義するものとすれば、減衰長は $0(L/c)$, および境界層厚は $0(L\varepsilon)$ となり、非伸張仮定解に対応する各式の右辺第一項は長距離にまで伝播する特徴を持つことがわかる。また、境界層仮定解に対応する上式の右辺第二項は、境界近傍においてのみ強い影響を与えることがわかる。

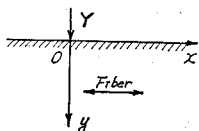


Fig. 4 Half Plane Subjected to a Normal Concentrated Force Y at the Boundary.

② 点集中荷重 (Fig. 4 参照)

作用荷重 $p(x)$ を $p(x) = -Y\delta(x)$ とおいてやればよく、厳密解および近似解はそれぞれ次のようになる。

厳密解¹²⁾ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\omega_0}{\pi} Y \left[\varepsilon_c^2 \frac{\bar{y}_1}{x^2 + \bar{y}_1^2} - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_t} \frac{\bar{\eta}}{x^2 + \bar{\eta}^2} \right], \\ \sigma_{yy} &= \frac{\omega_0}{\pi} Y \left[-\frac{\bar{y}_1}{x^2 + \bar{y}_1^2} + \varepsilon_t \varepsilon_c \frac{\bar{\eta}}{x^2 + \bar{\eta}^2} \right], \\ \sigma_{xy} &= \frac{\omega_0}{\pi} Y \left[-\varepsilon_c \frac{x}{x^2 + \bar{y}_1^2} + \varepsilon_c \frac{x}{x^2 + \bar{\eta}^2} \right]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

近似解 :

これは上式で

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &\rightarrow 1.0, \\ \varepsilon_t &\rightarrow \varepsilon, \varepsilon_c \rightarrow c, \\ \bar{y}_1 &\rightarrow y_1, \bar{\eta} \rightarrow \eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

と置きなおしてやったものと一致する。

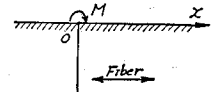


Fig. 5 Half Plane Subjected to a Concentrated Couple M at the Boundary.

③ 集中モーメント荷重 (Fig. 5 参照)

厳密解 :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\omega_0}{\pi} M \left[\varepsilon_c^2 \frac{x\bar{y}_1}{(x^2 + \bar{y}_1^2)^2} - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_t} \frac{x\bar{\eta}}{(x^2 + \bar{\eta}^2)^2} \right], \\ \sigma_{yy} &= \frac{\omega_0}{\pi} M \left[-\frac{x\bar{y}_1}{(x^2 + \bar{y}_1^2)^2} + \varepsilon_t \varepsilon_c \frac{x\bar{\eta}}{(x^2 + \bar{\eta}^2)^2} \right], \\ \sigma_{xy} &= \frac{\omega_0}{\pi} M \left[-\varepsilon_c \frac{x^2 - \bar{y}_1^2}{(x^2 + \bar{y}_1^2)^2} + \varepsilon_c \frac{x^2 - \bar{\eta}^2}{(x^2 + \bar{\eta}^2)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

近似解 :

この場合も上式で (47) のような係数を代入してやれば求まる。点集中荷重および集中モーメント荷重の解を通じ、また厳密解および近似解を通じ高異方性極限 ($\varepsilon_t \rightarrow 0$, $\varepsilon_c \rightarrow 0$) においては、 $\sigma_{xx} = O(1/\varepsilon_t^2)$ が支配的であり、fiber に垂直な荷重が作用しても境界のごく近傍に、fiber 方向の直応力 σ_{xx} が強く応答することを示している。

④ 内部点集中荷重 (Fig. 6 参照)

図に示すように State I の応力状態は、State II と State III の重ね合わせで得られる。

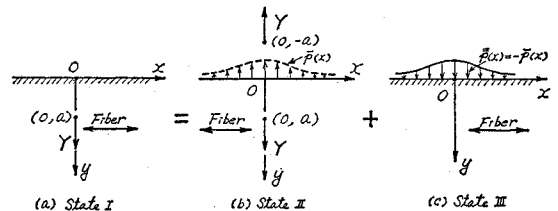


Fig. 6 Half Plane Subjected to a Vertical Concentrated Force Y at the Finite Depth $y=a$.

厳密解¹²⁾ :

点集中荷重解の重ね合わせにより State II の応力は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= \frac{\omega_0}{\pi} Y \left\{ \varepsilon_c^2 G_c [x, \varepsilon_c(y-a)] - \varepsilon_c^2 G_c [x, \varepsilon_c(y+a)] - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_t} G_c \left[x, \frac{y+a}{\varepsilon_t} \right] \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\epsilon_c}{\epsilon_t} \cdot G_c \left[x, \frac{y+a}{\epsilon_t} \right] \Big\}, \\
 \bar{\sigma}_{yy} = & \frac{\omega_0}{\pi} Y \left\{ -G_c [x, \epsilon_c (y-a)] \right. \\
 & + G_c [x, \epsilon_c (y+a)] + \epsilon_t \epsilon_c G_c \left[x, \frac{y-a}{\epsilon_t} \right] \\
 & \left. - \epsilon_t \epsilon_c G_c \left[x, \frac{x+a}{\epsilon_t} \right] \right\}, \\
 \bar{\sigma}_{xy} = & \frac{\omega_0}{\pi} Y \left\{ -\epsilon_c G_s [x, \epsilon_c (y-a)] \right. \\
 & + \epsilon_c G_s [x, \epsilon_c (y+a)] + \epsilon_c G_s \left[x, \frac{y-a}{\epsilon_t} \right] \\
 & \left. - \epsilon_c G_s \left[x, \frac{y+a}{\epsilon_t} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

.....(49)

境界 $y=0$ での応力は

$$\begin{aligned}
 \lim_{y \rightarrow 0} \bar{\sigma}_{yy}(x, y) & \equiv \bar{p}(x) \\
 & = 2 \omega_0 Y \left[G_c(x, \epsilon_c a) - \epsilon_t \epsilon_c G_c \left(x, \frac{a}{\epsilon_t} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \bar{\sigma}_{xy}(x, y) = 0$$

State III に対する境界条件は次式で与えられる。

$$\lim_{y \rightarrow 0} \bar{\sigma}_{yy}(x, y) \equiv \bar{p}(x) = -\bar{p}(x)$$

一般解 (42) に $\bar{p}(x)$ を代入し、基礎関数の合成積の簡単な関係式

$$\begin{aligned}
 G_c(x, \bar{y}_1) * G_c(x, \epsilon_c a) & = \frac{1}{\pi} \frac{\bar{y}_1 + \epsilon_c a}{x^2 + (\bar{y}_1 + \epsilon_c a)^2} \\
 G_s(x, \bar{y}_1) * G_c(x, \epsilon_c a) & = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + (\bar{y}_1 + a/\epsilon_t)^2}
 \end{aligned}$$

に注意すると、State III の応力は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{xx} = & \frac{2 \omega_0^2}{\pi} Y \left\{ \epsilon_c^2 G_c [x, \bar{y}_1 + \epsilon_c a] \right. \\
 & \left. - \epsilon_t \epsilon_c^3 G_c \left[x, \bar{y}_1 + \frac{a}{\epsilon_t} \right] - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_t} \cdot G_c [x, \bar{\eta} + \epsilon_c a] \right. \\
 & \left. + \epsilon_c^2 G_c \left[x, \bar{\eta} + \frac{a}{\epsilon_t} \right] \right\}, \\
 \bar{\sigma}_{yy} = & \frac{2 \omega_0^2}{\pi} Y \left\{ -G_c [x, \bar{y}_1 + \epsilon_c a] \right. \\
 & + \epsilon_t \epsilon_c G_c \left[x, \bar{y}_1 + \frac{a}{\epsilon_t} \right] + \epsilon_t \epsilon_c G_c [x, \bar{\eta} + \epsilon_c a] \\
 & \left. - (\epsilon_t \epsilon_c)^2 G_c \left[x, \bar{\eta} + \frac{a}{\epsilon_t} \right] \right\}, \\
 \bar{\sigma}_{xy} = & \frac{2 \omega_0^2}{\pi} Y \left\{ -\epsilon_c G_s [x, \bar{y}_1 + \epsilon_c a] \right. \\
 & + \epsilon_t \epsilon_c^2 G_s \left[x, \bar{y}_1 + \frac{a}{\epsilon_t} \right] + \epsilon_c G_s [x, \bar{\eta} + \epsilon_c a] \\
 & \left. - \epsilon_t \epsilon_c^2 G_s \left[x, \bar{\eta} + \frac{a}{\epsilon_t} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

.....(50)

これより、

$$\begin{aligned}
 \lim_{y \rightarrow 0} \sigma_{yy}(x, y) & = \lim_{y \rightarrow 0} [\bar{\sigma}_{yy}(x, y) + \bar{\sigma}_{yy}(x, y)] = 0, \\
 \lim_{y \rightarrow 0} \sigma_{xy}(x, y) & = \lim_{y \rightarrow 0} [\bar{\sigma}_{xy}(x, y) + \bar{\sigma}_{xy}(x, y)] = 0.
 \end{aligned}$$

となり、自由境界の条件は満足されている。ゆえに、State I の応力状態の厳密解は (49) と (50) の応力成分をそれぞれ重ね合わせた次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} & = \bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{xx} \\
 \sigma_{yy} & = \bar{\sigma}_{yy} + \bar{\sigma}_{yy} \\
 \sigma_{xy} & = \bar{\sigma}_{xy} + \bar{\sigma}_{xy}
 \end{aligned}$$

.....(51)

近似解：

集中荷重解の重ね合わせにより、State II の応力は (49) の係数を (47) のように置きかえてやったものに等しくなる。境界 ($y=0$) 上の応力は

$$\begin{aligned}
 \lim_{y \rightarrow 0} \bar{\sigma}_{yy}(x, y) & = \bar{p}_1(x) \\
 & = 2 Y [G_c(x, ca) - \epsilon_c G_c(x, a/\epsilon)], \\
 \lim_{y \rightarrow 0} \bar{\sigma}_{xy}(x, y) & = 0.
 \end{aligned}$$

となる。

State III に対する境界条件は次式で表わされる。

$$\lim_{y \rightarrow 0} \bar{\sigma}_{yy}(x, y) \equiv \bar{p}_1(x) = -\bar{p}_1(x)$$

近似一般解 (34) に $\bar{p}_1(x)$ を代入することにより、厳密解の場合と同様にして State III に対する応力 $\{\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}\}$ が得られ、これとの重ね合わせとして State I に対する近似解 (第一次補正解) の応力は、異方性厳密解である (49), (50) および (51) においてそれらの式に現われる係数を (47) のように置き換えてやったもので与えられることになる。ただし、こうして得られた式のうち $y \rightarrow 0$ のときの σ_{yy} および σ_{xy} は次式：

$$\begin{aligned}
 \lim_{y \rightarrow 0} \sigma_{yy}(x, y) & = \\
 & -\epsilon_c \frac{2Y}{\pi} \left[-\frac{ca}{x^2 + (ca)^2} + \epsilon_c \frac{a/\epsilon}{x^2 + (a/\epsilon)^2} \right] \\
 \lim_{y \rightarrow 0} \sigma_{xy}(x, y) & = 0
 \end{aligned}$$

となって、境界上で $\sigma_{yy}=0$ なる条件がこの過程で実現できない。この理由は、厳密解である一般式 (42) における係数 ω_0 が近似解の一般式 (34) においては出現せず、単位の値となるためである。しかるに、厳密解のパラメーター $\{\epsilon_t, \epsilon_c\}$ と近似解のパラメーター $\{\epsilon, c\}$ は高異方性極限においては同じオーダー ($\epsilon_t \neq \epsilon, \epsilon_c \neq c$) であり、物理的には類似した意味を持ち応力の値そのものにはほとんど影響を与えないにもかかわらず、この一般化重調和方程式の特性根 ϵ_t および ϵ_c にかからむ係数 ω_0 は、高異方性極限において厳密解と近似解を特徴づける重要な意味を持っていると指摘できよう。

なお、ここで出現した境界応力 σ_{yy} を $\bar{p}_2(x) = -\lim_{y \rightarrow 0} \sigma_{yy}(x, y)$ とおいて、近似一般解 (34) に代入することにより、さらに自由境界の条件に近づけることは可能であるが、ここでの目的は両者の解の特質を探ることであるから、近似解の第一近似を示すことにとどめる。なお、この第一近似において出現した境界応力 σ_{yy} のオーダーは、 $\sigma_{yy}(x, 0) = 0(\epsilon c^2)$ であり、近似基礎式が

正当であるような高異方性の場合 $\epsilon \ll c < 1$ に対しては、十分な精度で自由境界の条件を満足していることがわかる。

11. 結 言

材料の理想化に対する解析手法に対するこの一連の流れについていくつかの指摘ができる。理想化とは、「より特徴的に」その材料特性を提示しようとするものであり、「非圧縮非伸張仮定理論」に示されたように singular fiber と normal-line なる二つの応力特異 fiber の出現、近似理論 [I] における fiber の出現、そしてこれらの fiber に沿い減衰なく無限距離にまで不定応力（物理的には作用外力そのもの）が伝達されること。現実の高異方性と見なし得る物質においては、この傾向の可能性が十分考え得ること。これらのことは、古典異方性弾性論の基礎式では明確には表示し得ない高異方性体の持つ本質的性格を示しており、古典理論との相違点でもある。Pipkin さんも指摘しているように、ここで次のような疑問が提示できる。『古典的かつ危険な言い方をすれば、合力、合モーメントの等価性は外力作用点近傍を除けば系全体の応力の等価性を保証する、とする St. Venant 原理はここでどう解釈すべきか？』、また『真の応力状態とは？ 厳密式なるものが、はたしてこの異方性場を正当に表示し得るか？』少なくとも、ここで対象とした繊維複合材料のような現実の高異方性物質に対しては、この原理使用に際して十分なる注意を要することがここで得られたことからうかがえる。言葉をかえるならば、数学的極限を物理的極限と解釈して実在物質に適用することの危険性を示しているとも言えよう。Hoff の例¹³⁾ に見られるように立体トラスや補強薄肉円筒に対しこの原理が成立しない例は、弱体物質に超剛性が埋め込まれた物質という形で、ある意味では本論文に言う物質定数の極限として捉えることにより説明がつく。Sternberg¹⁴⁾ がいうような空間的尺度だけからではこの原理は把握しきれぬものではなく、さらに広い意味をつける必要があると思われる。また、異方性弾性論の出発点はあくまで等方性物質からの拡張を基礎としており、FRCM などの現在多数出現しつつある新物質に対しても正当に適用できるか否かは十分なチェックが必要である。なお、ここでの理想化の流れは非圧縮、非伸張という内部拘束をもつ物質の解析を出発点としており、完全剛から現実への接近を計ったものであり、古典異方性弾性論とは両極端としての出発点を持つと考えられ、材料特性の把握と再考察への足掛かりとなりうるものと考えられる。

なお、本論文においても示されているように $[\epsilon \rightarrow 0$

$(\epsilon_f \rightarrow 0), c \rightarrow 0 (\epsilon_c \rightarrow 0)]$ なる二つの材料定数比の極限においては両者は一致しており、この古典異方性理論とここでの近似理論は全く相矛盾したものではないことを再度強調しておきたい。一つの指摘として古典的な意味における St. Venant 原理が正当ではなくなる異方性比の限界が存在するという点である。一般にこの原理は、空間的応力伝達機構について述べたものであり、ここでの主張はそれに材質的考察も含めてより正確な記述が必要であることを主張するものである。また、異方性の複雑な弾性定数間の関係を一般化重調和方程式の二つの特性根で陽に表示し、それを重調和方程式として提示しようとするこの考えは FRCM に限らず一般的にも有利な表記であると思われ、これから広く活用されるべきものであり、厳密式の簡単化ならびに解析手法の簡単化の両者、相伴なったものとして、異方性厳密解の追求とともに研究されるべき課題と思われる。

参 考 文 献

- 1) たとえば Eringen, A.C. and E.S. Suhubi: *Nonlinear Theory of Simple Microelastic Solids*, Int. J. Eng. Sci., Vol. 2 (1964), pp. 189~203, pp. 389~404, Ariman, T., M.A. Turk and N.D. Sylvester: *Microcontinuum Fluid Mechanics—A Review*, Int. J. Eng. Sci., Vol. 11 (1973), pp. 905~930.
- 2) Pipkin, A.C. and T.G. Rogers: *Plane Deformations of Incompressive Fiber-Reinforced Materials*, J. Appl. Mech., Vol. 38 (1971), pp. 634~640.
- 3) Everstine, G.C. and A.C. Pipkin: *Stress Channeling in Transversely Isotropic Elastic Composites*, ZAMP Vol. 22 (1971), pp. 825~834.
- 4) England, A.H., J.E. Ferrier and J.N. Thomas: *Plane Strain and Generalized Plane Stress Problems for Fibre-Reinforced Materials*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 21 (1973), pp. 279~301.
- 5) Everstine, G.C. and A.C. Pipkin: *Boundary Layers in Fiber-Reinforced Materials*, J. Appl. Mech., Vol. 40 (1973), pp. 518~522.
- 6) Spencer, A.J.M.: *Boundary Layers in Highly Anisotropic Plane Elasticity*, Int. J. Solids Structures, Vol. 25 (1974), pp.1103~1123.
- 7) Biot, M.A.: *Fundamental Skin Effect in Anisotropic Solid Mechanics*, Int. J. Solids Structures, Vol. 17 (1966), pp. 645~663.
- 8) Pipes, R.B. and N.J. Pagano: *Interlaminar Stress in Composite Laminates—An Approximate Elasticity Solution*, J. Appl. Mech., Vol. 41 (1974), pp. 668~672.
- 9) Lekhnitskii, S.G.: *Anisotropic Plates*, (Eng. Trans), Gordon and Breach (1968).
- 10) Markham, M.F.: *Measurement of the Elastic Constants of Fibre Composites by Ultrasonics*, Composites, Vol. 1 (1970), p. 145.
- 11) Sneddon, I.N.: *Fourier Transforms*, McGraw-Hill (1950).
- 12) Conway, H.D.: *Some Problems of Orthotropic Plane Stress*, J. Appl. Mech., Vol. 25 (1953), pp. 72~76; Conway, H.D. *The Stress Distributions Induced by Concentrated Loads Acting in Isotropic and Ortho-*

- tropic Half Planes, J. Appl. Mech., Vol. 25 (1953), pp. 82~86.
- 13) Hoff, N.J. : The Applicability of Saint-Venant's Principle to Airplane Structures, J. Aeron. Sci., Vol. 12 (1945), pp. 455~460; Fung, Y.C., Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall (1965), pp. 306~309, 大橋義夫ほか訳：固体の力学/理論，培風館，pp. 313~316.
- 14) Sternberg, E. : On Saint-Venant's Principle, Quat. Appl. Math., Vol. 11 (1954), pp. 394~402.
- 15) たとえば，Noll, W. : A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media, Rat. Mech. Anal., Vol. 2 (1958), pp. 197~226; 徳岡辰雄：有理力学—新しい連続体力学，材料，第23巻(1974)253号~第24巻(1975)258号.

(1976.12.6・受付)
