【討　議】

馬場俊介
梶田建夫 共著
成岡昌夫

"差分表示を用いた板の非線形解析"への討議

(土木学会論文報告集第256号・1976年12月掲載)

▶討議者（*Discussion*）―――三　上　市　蔵（関西大学）
By Ichizou Mikami

DR法 (Dynamic Relaxation Method) は英国で生まれ育ってきたが，この間の様子は著者らの展望[10]に詳しい．そこには1972年までの26の文献が報告されているが，そのほかにも文献[11),12)]があり，1973年以後には引用文献[6)]のほかにいくつかの文献[13)~16)]が見うけられる．文献[15)]では，鋼床版の影響面を求めるためにDR法を用いており，文献[14)]などとともにDR法がすでに実用段階に入ったことを示している．しかし，実用の見地からはまだいくつかの解決すべき問題が残っている．たとえば，① 解の精度の問題と ② 計算時間（反復回数）の問題である．

DR法はあくまで差分法を用いた方法であるから，反復の後に得られる収束解は，差分方程式を直接解いて得られる解にほとんど一致する．したがって高精度解を得るためには ① 細分割するか ② 高精度差分表示を導入するか，しなければならない．細分割すると収束に必要な反復回数が増加する[17)]ので，高精度差分表示の導入に期待するところが大きい．しかし，この問題は原論文を除いてこれまでほとんど検討されていないようである．筆者の研究室でも高精度差分表示によるDR法について調査しているが，その一部を紹介したい．

例として等分布荷重満載の周辺固定正方形板を選び，板中央のたわみに注目する．減衰定数は自動決定法[18)]により限界減衰係数になるようにし，収束の判定はたわみの相対誤差 10^{-3} に対して行った．また，高精度差分法の場合，時間に関しては普通差分表示を用い，場に関してのみ高精度差分表示を用いた．

普通差分表示および高精度差分表示に対して分割数 $N\times N$ 分割）と解の誤差との関係を調べると **図-10** のようになる．同図には限界減衰係数の算定のための反復回数 n_0 とたわみが収束するまでの反復回数 n との総和が併記されている．図からわかるように，同一分割数に対して高精度差分による解の誤差は普通差分による解の誤差の約1/10に縮小する．細分化によって解の精度を向上させる場合，分割数の増加に伴って反復回数が増大することを考えあわせると，高精度差分の利用がきわめて有利であることがわかる．また，高精度差分を用いた場合の分割数と反復回数の関係は普通差分を用いた場合のそれとほぼ同じである．

図-11 は種々の計算時間間隔に対する総反復回数を示したものである．時間間隔を長くすると総反復回数は減

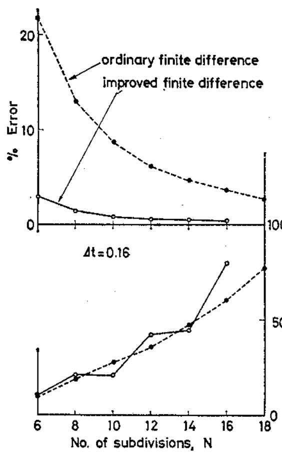

図-10

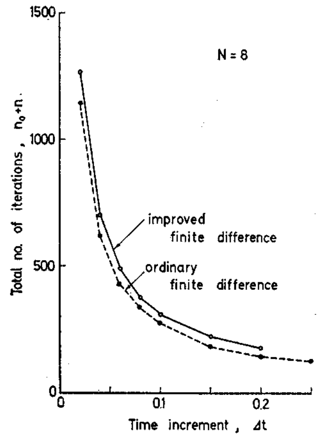

図-11

少するが，高精度差分を用いた場合でも普通差分による場合とほぼ同じ反復回数でよい．また，時間間隔の限界は普通差分の場合，$\Delta t \leqq 0.25$[17] であるが，高精度差分の場合について調査したところ，分割数が増すと限界時間間隔はやや短くなるが，ほぼ $\Delta t \leqq 0.20$ である．

第2の問題，すなわち反復回数の短縮に関しては Alwar ら[16] が初期の振動状態から収束値を外挿する方法を検討している．この手法を限界減衰状態に対して適用できるかどうか調べてみたが，不適当であることがわかった．むしろ限界減衰状態においては反復回数 n の増加とともに単調に収束する点に注目すると，Richardson の外挿式[19]を適用できる．上記例題において，高精度差分，$N=8$，$\Delta t=0.1$ の場合を例にとると，反復回数 n_1 と n_2 における値から h^4 型外挿式（関数 $f=f_{ex}+C_2/n^4$ に該当する[20]）を用いて外挿すると，収束値に対する誤差 -0.94% の値を推定することができた．ただし，n_1 として速度が 0.1 以下になったときの反復回数 $n_1=106$ をとり，$n_2=n_1+10=116$ とした．収束に必要な反復回数 $n=285$ に比較して 1/2 以下の反復で満足すべき解が推定できることになる．ただし，非線形解析に対する外挿法の適用に関しては未検討である．

DR 法を離れて差分法自体の精度改良法を論じる場合，境界条件を2つに分けて考えるのがよい．すなわち，境界の関数値を与える条件（直接条件：数学でいう Dirichlet 型境界条件または第1種境界条件）と微分方程式で与えられる条件（間接条件：第 2，3 種境界条件）である．直接境界条件は差分表示の必要がないので差分表示誤差を伴わないが，間接境界条件は差分表示の際の打ち切り誤差を伴う[21]．境界条件の差分表示誤差が解（固有値）に与える影響が大であることが指摘されている[22] が，これは間接境界条件の差分表示誤差のことである．この点に注目した簡易な精度改良法が，基礎微分方程式は普通差分表示し，間接境界条件式のみ高精度差分表示する「境界改良法」である[23]．この方法の有効性はすでに明らかになっており[21),23),24]，筆者は差分法を用いる場合は必ずといってよいほど使用しているが，もっと広く利用されてよい方法である．

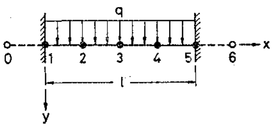

図-12

境界改良法の有効さを簡単な例を用いて説明してみよう．**図-12** に示す等分布荷重満載の固定ばりを考える．4分割し，基礎微分方程式 $d^4y/dx^4=q/EI$ と間接境界条件式 $dy/dx=0$ を普通差分表示し，直接境界条件式 $y=0$ とともに書くと次式が得られる．

$$
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}
=\frac{ql^4}{256EI}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

これを解いて真の解と比較すると次のようになる．

$$\text{近似解：}\quad [y_2 \quad y_3]=\frac{ql^4}{6144EI}[15 \quad 24]$$

$$\text{真の解：}\quad [y_2 \quad y_3]=\frac{ql^4}{6144EI}[\ 9 \quad 16]$$

次に間接境界条件式のみ高精度表示すると連立方程式は，

$$
\begin{pmatrix}
-3 & -10 & 18 & -6 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 6 & -18 & 10 & 3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}
=\frac{ql^4}{256EI}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となる．この解は，

$$[y_2 \quad y_3]=\frac{ql^4}{6144EI}[9 \quad 16]$$

で，真の解と一致している．

図-12 のはりの解は x の 4 次多項式であり，一方，基礎微分方程式の普通差分式は5次式を，間接境界条件式の普通差分式は2次式を仮定して作成していることになる[25]ので，間接境界条件の差分表示誤差のみが原因になっている．しかるに，間接境界条件式の高精度差分式は4次式から誘導されている[26]ので，誤差が混入せず，境界改良法によって正解が得られたのである．この方法は基礎微分方程式と間接境界条件式とに対して同次数の多項式による近似を行っていることになり，明解で，簡便かつ有効であるが，DR 法には不向きである．なぜな

ら，DR 法では境界条件は仮想分点の関数値を求めるために用いられるので，そこでのみ高精度式を用いるとかえって誤差を拡大させることになる．

差分法では通常，**図-12** でもわかるように間接境界条件式の数と等しい数の仮想分点を設ける．著者らも述べているように，仮想分点は取り扱い上あまり有利でない．差分法が選点法の一種であることを考えると，仮想分点を必ずしも設けなくてもよいはずである．**図-12** のはりを例にとると，分点 1～5 を用い，分点 2 と 4 は 2つの間接境界条件式に対応させ，基礎微分方程式は分点 1, 2, 4, 5 を除いた分点（この場合 3）に対してのみ適用することにすると，差分方程式は次のようになる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 48 & -36 & 16 & -3 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 3 & -16 & 36 & -48 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \frac{ql^4}{256EI} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし，境界改良法を併用している．この解は，

$$[y_2 \quad y_3] = \frac{ql^4}{6144EI}[9 \quad 16]$$

となり，正解である．

表-1 差分解の誤差（%）

N	仮想分点使用			実分点のみ使用	
	普通差分	境界改良	高精度差分	普通差分	境界改良
4	42.8	−3.6			
6	21.7	−4.0	3.0		
8	13.0	−3.0	1.5	−28.1	−11.0
10	8.7	−2.0	0.9	−19.1	−5.6
12	6.2	−1.4	0.6	−13.8	−3.2
14	4.7		0.6	−10.5	−2.0
16	3.7		0.4	−8.1	−1.3
18	2.9				

仮想分点を設けずに実分点のみを用いるこの手法を，前述の板に適用してみた結果は **表-1** のようである．実分点のみを用いる手法では仮想分点も用いる従来の手法に比べて解の精度が低下しているが，未知数が減少していることを考慮に入れる必要がある．たとえば，**図-12** において従来の手法では未知数は7個あるが，実分点手法では5個しかなく，この減少分だけ逆に分割数を増すことができる．**表-1** の場合，実分点手法において，板の 1/4 を解析する場合には分割数は1だけ，板全体を解析する場合には分割数を2だけ増加し得ることを考えると，同一数の未知数に対して従来の手法とあまり遜色のない解を得ることができることがわかる．実分点のみによるこの手法はプログラミングの上から好都合であるが，DR 法に導入できるかどうかは検討していない．

参 考 文 献

10) 馬場俊介・成岡昌夫：差分表示を用いる新しい構造解析法——Dynamic Relaxation の説明，土木学会誌，Vol. 58, No. 9, pp. 50-56, 1973.8.

11) Rushton, K. R.: Simply supported plates with corners free to lift, Jour. of Strain Analysis, Vol. 4, No. 4, pp. 306-311, 1969.

12) Rushton, K. R.: Post-buckling of rectangular plates with various boundary conditions, Aeronautical Quarterly, Vol. 21, May, pp. 163-181, 1970.

13) Alwar, R. S. and Ramachandra Rao, N.: Nonliner analysis of orthotropic skew plates, AIAA Journal, Vol. 11, No. 4, April, pp. 495-498, 1973.

14) 岡本 伸：プレストレストコンクリート部材定着部に関する研究（第1報・定着部応力——解析手法および2次元載荷状態の定着部応力），日本建築学会論文報告集，No. 217, pp. 35-43, 1974.3.

15) Dowling, P. J. and Bawa, A. S.: Influence surfaces for orthotropic steel bridge decks, Proc. of ICE, Part 2, Vol. 59, Mar., pp. 149-168, 1975.

16) Alwar, R. S., Ramachandra Rao, N. and Subba Rao, M.: An alternative procedure in dynamic relaxation, Computers & Structures, Vol. 5, pp. 271-274, 1975.

17) Rushton, K. R.: The dynamic relaxation method used for stress analysis, Recent Advances in Stress Analysis, Royal Aeronautical Society, London, pp. 3-41 to 3-46, 1968.

18) Rushton, K. R.: Dynamic-relaxation solutions of elastic-plate problems, Jour. of Strain Analysis, Vol. 3, No. 1, pp. 23-32, 1968.

19) Salvadori, M. G. and Baron, M. L.: Numerical Methods in Engineering, 2nd ed., Prentice-Hall, pp. 96-101, 1961.

20) Mikami, I. and Yonezawa, H.: Extrapolation technique for finite difference and finite element solutions, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 25, Univ. Tokyo Press, pp. 557-575, 1977.

21) Croll, J. G. A. and Scrivener, J. C.: Convergence of hypar finite difference solutions, Proc. of ASCE, Vol. 95, No. ST5, May, pp. 309-830, 1969.

22) Nishino, F.: Error in finite difference solutions of local buckling strength, Trans. of JSCE, No. 127, Mar., pp. 23-36, 1966.

23) Abramowitz, M. and Cahill, W. F.: On the vibrations of a square clamped plate, Jour. of Association of Computing Machinery, Vol. 2, Nov., pp. 162-168, 1955.

24) 三上市蔵：曲げを受ける薄肉断面けたの座屈に関

する研究，名古屋大学提出学位論文，1972.12.
25) Shaw, F. S.: An Introduction to Relaxation Methods, Dover Publications, 1953.
26) Collatz, L.: The Numerical Treatment of Differential Equations, 3rd ed., Springer-Verlag, 1966.

▶**回答者** (*Closure*)——馬場俊介・梶田建夫・成岡昌夫（名古屋大学）

By Shunsuke Baba, Tateo Kajita and Masao Naruoka

貴重なるご討議ありがとうございます．高精度DRに関する有意義かつすぐれた研究成果をおもしろく拝見させていただきました．静的線形解析の場合，著者らとは異なる高精度化手法により，よい精度の解が得られています．一方，著者らの高精度DRでは，動的解析時の精度が普通精度とほとんど変わらないという結論を得ましたが，ご討議で紹介されておられる高精度DRを動的解析に用いるとどうなるかには興味があります．