

## 不完全連続合成桁の有限要素解析

### FINITE ELEMENT ANALYSIS OF CONTINUOUS COMPOSITE BEAMS WITH INCOMPLETE INTERACTION

浜田 純夫\*・有住 康則\*\*

By Sumio HAMADA and Yasunori ARIZUMI

#### 1. ま え が き

現在、短スパンの鋼道路橋においては、鋼桁と鉄筋コンクリート床版をジベルで接合した合成桁が多く用いられているが、多くの実験が示すように、鋼桁とコンクリート床版の間にはいく分のずれが生じる。このようにずれが生じる合成桁を不完全合成桁と呼んでいる。

不完全合成桁の解析は、最初 Newmark<sup>1)</sup> によって行われ、その後、Hoischen<sup>2)</sup>、Heilig<sup>3)</sup>、Homborg<sup>4)</sup>、Plum<sup>5)</sup>、山本<sup>6)</sup>、橋<sup>7)</sup>らが同じような考えで、この問題を取り扱った。Newmark の解析は、鋼およびコンクリートの応力-ひずみ関係を線形とし、ジベルを等間隔配置として、微分方程式を誘導したものであり、コンクリートスラブに引張りが作用した場合やジベルが不等間隔に配置された場合を解析することはできない。コンクリートスラブが引張りに抵抗しないことを考慮した解析に、前田<sup>8)</sup>らのものがある。これは、連続合成桁の解析にあたり、負の曲げを受ける区間の剛性を仮定して、まず曲げモーメントを求め、しかる後に Newmark の式の数値積分を用いて解析している。その他、Yam<sup>9)</sup>・<sup>10)</sup>らは、基礎的には Newmark と同じ方程式を用い、予測子-修正子法によって不完全単純および連続桁の弾塑性解析を行っている。

有限要素法による不完全合成桁の解析については、Matlock<sup>11)</sup>、Gustofson<sup>12)</sup>、佐藤<sup>13)</sup>・<sup>14)</sup>、Moffatt<sup>15)</sup>らの研究がある。Matlock は、スラブと鋼桁をはり要素で、ジベルをばね要素でモデル化し、各節点でつり合い式を誘導して解析している。また、佐藤らは、スタッドジベルの変形による合成桁の剛度の低下をコンクリートスラブの弾性係数を低減したものに類似するものとし、平面三角形要素を用いて弾塑性解析を行っている。一方、

Moffatt らは、長方形矩形平板要素を用いて合成箱桁の解析を行っている。このように、はり平面応力問題として取り扱う場合、精度の高い応力状態を表わすために節点数が多く必要となり、これは合成桁を解析するための最適モデルとは思われない。また、コンクリートは引張りに抵抗できないことを一般に原則としているが、平面三角形要素では、Scordelis<sup>16)</sup>のようにクラックの解析としてこの原則を導入した例はあるが、これを一般的に考慮することは困難である。

ここで考えた不完全合成桁のモデル化は、コンクリートスラブと鋼桁をそれぞれ、軸力と曲げを受ける独立のはり要素とし、ジベルはスラブと鋼桁の間の水平せん断力のみ抵抗する要素とするものである。従来、軸力を受けるはりでは変位は一次式で仮定しているが、一次式を用いると要素内では一定の応力、つまりスラブに作用する応力が一定となり、要素内で連続的に分布したジベル配置では複雑に分布する軸力が伝達されるので、一次式で軸方向変位を仮定するのはあまりよくないように考えられる。このようなわけで、ここでは曲げの場合と同様に軸方向変位も三次式で仮定する。ジベルの配置も要素内で連続的に分布したものと要素端に集中したものと両方の剛性行列を求めた。

このモデルを連続合成桁の解析にも用いるが、この場合には、コンクリートスラブに引張りが生ずるため、これを考慮した解析が必要となる。すなわち、引張りの作用する区間のコンクリートを無視するため、この影響を等価な力に置き換え、引張りの作用する区間を変化させながら、変位が収束するまで繰り返し計算をする。

この解析法を用いて、正および負の曲げを受ける単純ばり、2スパンおよび3スパン連続ばり、2スパン断続合成桁を解析した。負の曲げを受ける単純ばりおよび2スパン連続ばりについては、すでに得られている実験結果と比較し、この解析法は実験結果とよく合うことを示した。また、Newmark の厳密解の得られる単純桁で

\* 正会員 Ph.D. 琉球大学助教授 理工学部土木工学科

\*\* 正会員 名古屋大学助手 工学部土木工学科

は、この解析法による解と、Newmark の厳密解と比較し、ほとんど一致することを示した。

2. 解析法

合成桁要素は、コンクリートスラブと鋼桁のはり要素とジベルのスプリング要素の三つを合成したものとみなすことができる。これら三つの要素は必ずしも独立しているのではなく、コンクリートスラブと鋼桁の間には、分離はないものとし、それらのたわみおよびたわみ角は等しいものとする。さらに、ジベルは水平せん断力のみ抵抗するので変位は二つのはり要素に従属している。

Fig. 1 に示す合成桁要素において、各節点で軸方向の変位 ( $w$ ) とひずみ ( $w'$ ) およびたわみ ( $v$ ) とたわみ角 ( $v'$ ) を自由度にとるが、 $v$  と  $v'$  とは鋼桁とコンクリートスラブとで等しいので、全体としての自由度は 12 となる。したがって、変位  $\{\bar{u}\}$  は次のようになる。

$$\{\bar{u}\} = \langle w_1, w_1', v_1, v_1', w_2, w_2', w_3, w_3', v_3, v_3', w_4, w_4' \rangle^T \dots\dots\dots (1)$$

プレストレスを導入しない連続合成桁（以下連続桁と称する）では、一般に、中間支点近傍に負の曲げモーメントが生じ、負の曲げを受ける区間では、コンクリートスラブは引張力に抵抗しきれない。ここでは、コンクリートの引張強さを無視し、コンクリートスラブ中の鉄筋のみ有効であると仮定する。また、鉄筋の曲げ剛性を無視する。コンクリートスラブはひび割れが入っても、ジベルにより水平せん断力は十分鉄筋に伝達されるものと考えられる。

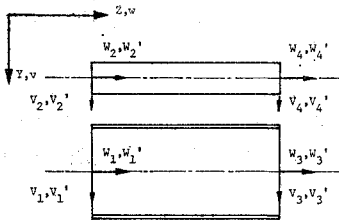


Fig. 1 Nodal Displacement for an Incomplete Composite Beam Element.

(1) 合成桁要素の剛性行列

仮想仕事の原理によれば、応力テンソルを  $\sigma_{ij}$ 、ひずみテンソルを  $\epsilon_{ij}$ 、変位を  $u_i$ 、単位面積あたりの力を  $X_i$  とすると、力のつり合い式は次式で与えられる。

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_S X_i \delta u_i dS \dots\dots\dots (2)$$

はり要素では応力およびひずみは Fig. 1 の  $z$  方向のみ、変位は  $y$  および  $z$  方向のみであるので、はりのひずみ  $\epsilon_z$  および応力  $\sigma_z$  は次のように表わされる。

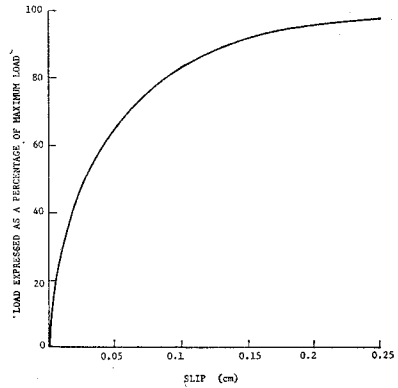


Fig. 2 Relationship between Load and Slip for Push-out Specimen<sup>17)</sup>.

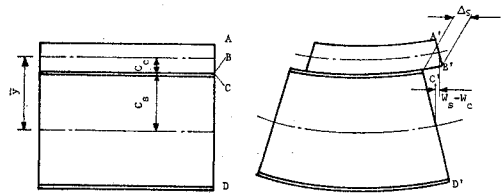


Fig. 3 Slip Configuration between the Concrete Slab and Steel Beam.

$$\epsilon_z = (dw/dz) - (d^2v/dz^2)y = w' - v''y \dots (3\cdot a)$$

$$\sigma_z = E \cdot \epsilon_z = E(w' - v''y) \dots\dots\dots (3\cdot b)$$

また、ジベルの力とずれの関係は押し抜き試験の結果を用いることにする。試験結果では力-ずれ関係の直線性が必ずしも成立しないが、Fig. 2 に示すように、ジベルに働く力がかなり小さい間は直線と仮定してさしつかえないと考えられる。したがって、力  $F$  とずれ  $\Delta_s$  との関係は、ジベルの剛性を  $Q$  とすれば、

$$F = Q\Delta_s \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここで、ずれ  $\Delta_s$  は次のように決定できる。すなわち、Fig. 3 に示すように、はりの変形は変形前  $AB$  および  $CD$  にあった平面が、変形後  $A'B'$  および  $C'D'$  平面となる。合成桁にずれが生じる限り重心軸はコンクリートスラブ断面と鋼桁断面に別々に存在し、接合面の浮き上がりがないと仮定すれば、それらの曲率は等しいので、ずれ  $\Delta_s$  は次のように示される。

$$\Delta_s = w_s - w_c + v'(C_s + C_c) = w_s - w_c + v'\bar{y} \dots\dots\dots (5\cdot a)$$

ここで、 $\bar{y}$  はコンクリートスラブと鋼桁の重心軸間の距離である。式 (5・a) を式 (4) に代入して、次の式が得られる。

$$F = Q(w_s - w_c + v'\bar{y}) \dots\dots\dots (5\cdot b)$$

式 (3・a)、(3・b) と式 (5・a)、(5・b) とを式 (2) に代入すると左辺は次のようになる。

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = E \int_V (w' - v'' y) (\delta w' - \delta v'' y) dV + \int_l q_s (w_s - w_c + v' \bar{y}) (\delta w_s - \delta w_c + \delta v' \bar{y}) dz$$

$$= E_s A_s \int_l w_s' \delta w_s' dz + E_c A_c \int_l w_c' \delta w_c' dz + (E_s I_s + E_c I_c) \int_l v'' \delta v'' dz + \int_l q_s (w_s - w_c + v' \bar{y}) (\delta w_s - \delta w_c + \delta v' \bar{y}) dz \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $q_s$  は単位長さあたりのジベルの剛性である。また、Fig. 1 のように、コンクリートスラブおよび鋼桁ともに重心軸に座標を取るの、 $\int_A y dA = 0$  となる。

不完全合成桁の解析では、軸方向の変位も非常に重要な要素であるので、曲げの場合と同様に三次式で仮定し、節点での未知数として軸方向変位のみでなく、ひずみも用いる。軸方向の変位には、コンクリートスラブおよび鋼桁の変位  $w_c$  と  $w_s$  とがあり、また、曲げによる変位は、鋼桁とコンクリートスラブと同一であるので、一般的に変位は次のように示される<sup>1)</sup>。

$$w_c = w_s g_1 + w_2' g_2 + w_4 g_3 + w_4' g_4 \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$w_s = w_1 g_1 + w_1' g_2 + w_3 g_3 + w_3' g_4 \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

$$v = v_1 g_1 + v_1' g_2 + v_3 g_3 + v_3' g_4 \dots\dots\dots (7 \cdot c)$$

ここで、 $w_1, v_1$  などは Fig. 1 に示すとおりであり、また、 $g_1 \sim g_4$  は形状関数で、次に示す関数である。

$$g_1 = 2\beta^3 - 3\beta^2 + 1 \quad g_2 = (\beta^3 - 2\beta^2 + \beta)l$$

$$g_3 = -2\beta^3 + 3\beta^2 \quad g_4 = (\beta^3 - \beta^2)l$$

ここで  $\beta = z/l$  である。式 (7) を式 (6) に代入すると、

$$E_s A_s \int_l w_s' \delta w_s' dz + E_c A_c \int_l w_c' \delta w_c' dz + \sum EI \int_l v'' \delta v'' dz = \{\delta \bar{u}\}^T [K_b] \{\bar{u}\} \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

$$\int_l q_s (w_s - w_c + v' \bar{y}) (\delta w_s - \delta w_c + \delta v' \bar{y}) dz = \{\delta \bar{u}\}^T [K_s] \{\bar{u}\} \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

となるので不完全合成桁要素の内部仮想仕事は、

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \{\delta \bar{u}\}^T ([K_b] + [K_s]) \{\bar{u}\} \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここで、 $\{\bar{u}\}$  は変位ベクトルであって式 (1) で与えられ、 $[K_b]$  ははり要素の剛性行列である。一方、 $[K_s]$  はジベル要素の剛性行列である。これらの  $[K_b]$  および  $[K_s]$  は付録に示されている。ジベルの剛性が直線的に変化する場合には、式 (8・b) の  $q_s$  は、

$$q_s = q_1 + (q_2 - q_1)\beta \dots\dots\dots (10)$$

で表わされる。ここで、 $q_1$  および  $q_2$  は要素両端における単位長さあたりのジベルの剛性である。式 (7) と式 (10) を式 (8・b) に代入すると、ジベルの剛性が等しい場合 ( $q_1 = q_2$ )、および、直線的に分布した場合に対する剛性行列が求められる。さらに、ジベルが両端に集中する場合には、式 (8・b) の左辺の積分の代りに Summation を用い、一般に次のようにして求められる。いま、 $\beta_i l (i=1, 2, 3, \dots, n)$  点に  $Q_i$  の剛性をもつジベルが配置されていると、ジベルの内部仮想仕事  $\delta U_s$  は次のよ

うに与えられる。

$$\delta U_s = \sum_{i=1}^n Q_i [w_s(\beta_i) - w_c(\beta_i) + v'(\beta_i) \bar{y}] [\delta w_s(\beta_i) - \delta w_c(\beta_i) + \delta v'(\beta_i) \bar{y}] \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $w_s(\beta_i), w_c(\beta_i)$  および  $v'(\beta_i)$  は式 (7・a), (7・b), (7・c) で与えられる変位である。要素端にのみジベルが集中している場合については、 $\beta_i = 0$  と  $\beta_i = 1$  のときの和となり、 $\delta U_s$  は、次のようになる。

$$\delta U_s = Q_1 (w_{s1} - w_{c1} + v_1' \bar{y}) (\delta w_{s1} - \delta w_{c1} + \delta v_1' \bar{y}) + Q_2 (w_{s2} - w_{c2} + v_2' \bar{y}) (\delta w_{s2} - \delta w_{c2} + \delta v_2' \bar{y}) \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $w_s, w_c$  および  $v'$  の右下の添字 1, 2 は、はり要素の両端の変位を示している。

荷重項は外力による仮想仕事  $\delta W$  が  $\int_l t_i \delta u_i dz$  で与えられるので、軸方向の変位およびたわみを式 (7・a), (7・b), (7・c) で仮定し、 $y$  方向に分布荷重  $q_y$  および  $\beta_i (i=1, \dots, n)$  点に集中荷重  $P_{yi}$  が作用し、 $z$  方向に分布荷重  $q_s$  および  $\beta_i (i=1, \dots, n)$  点に  $P_{si}$  がスラブ上に、分布荷重  $q_c$  および  $\beta_i (i=1, \dots, n)$  点に  $P_{ci}$  が鋼桁上に作用しているときには仮想仕事  $\delta W$  は次のようになる。

$$\delta W = \int_l q_s \delta w_s dz + \int_l q_c \delta w_c dz + \sum P_{si} \delta w_{si} + \sum P_{ci} \delta w_{ci} + q_y \delta v dz + \sum P_{yi} \delta v_i = \{\delta \bar{u}\}^T \{\bar{P}\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $\{\bar{P}\}$  は  $\{\bar{u}\}$  に対応する荷重ベクトルであり、次に示される。

$$\{\bar{P}\} = \begin{Bmatrix} \int_l q_s g_1 dz + \sum P_{si} g_1(\beta_i) \\ \int_l q_s g_2 dz + \sum P_{si} g_2(\beta_i) \\ \int_l q_y g_1 dz + \sum P_{yi} g_1(\beta_i) \\ \int_l q_y g_2 dz + \sum P_{yi} g_2(\beta_i) \\ \int_l q_c g_1 dz + \sum P_{ci} g_1(\beta_i) \\ \int_l q_c g_2 dz + \sum P_{ci} g_2(\beta_i) \\ \int_l q_s g_3 dz + \sum P_{si} g_3(\beta_i) \\ \int_l q_s g_4 dz + \sum P_{si} g_4(\beta_i) \\ \int_l q_y g_3 dz + \sum P_{yi} g_3(\beta_i) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \int_1^2 q_y g_4 dz + \sum P_{y_i} g_4(\beta_i) \\ \int_1^2 q_c g_3 dz + \sum P_{c_i} g_3(\beta_i) \\ \int_1^2 q_c g_4 dz + \sum P_{c_i} g_4(\beta_i) \end{cases} \dots\dots\dots(14)$$

(2) 連続合成桁の解析法

連続合成桁の解析で問題となるのは、中間支点近傍で負の曲げを受け、コンクリートスラブに引張り力が働き

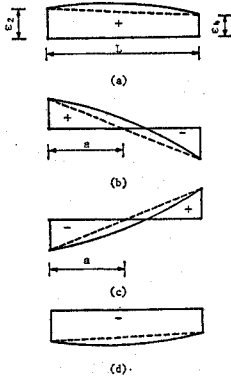


Fig. 4 Strain Diagrams in the Concrete.

剛性が異なることである。ここでは、負の曲げを受ける区間においてコンクリートスラブは剛性に対し、鉄筋のみ有効とする。これは一種の非線形解析となり、解析法として逐次代入法を用いることにする。コンクリートスラブには正と負の曲げを受ける要素があり、コンクリートスラブの要素を Fig. 4 に示すように、コンクリート応力状態によって、次の四つのタイプに分

ける。すなわち、コンクリートスラブ要素が、橋軸方向にわたって、

- (a) 圧縮応力のみを受ける
- (b) 圧縮から引張りに変化する応力を受ける
- (c) 引張りから圧縮に変化する応力を受ける
- (d) 引張り応力のみを受ける

場合である。コンクリートスラブ要素のみの内部仮想仕事  $\delta U_c$  は、次のように与えられる。

(a) の場合

$$\delta U_{ca} = E_c \int_0^l A_c w_c' \delta w_c' dz + E_c \int_0^l I_c v'' \delta v'' dz = \delta U_c \dots\dots\dots(15 \cdot a)$$

(b) の場合

$$\delta U_{cb} = \delta U_c - \int_a^l \delta U_c' dz = \delta U_c - \delta \bar{U}_c \dots\dots(15 \cdot b)$$

(c) の場合

$$\delta U_{cc} = \delta U_c - \int_0^a \delta U_c' dz = \delta U_c - \delta \bar{U}_c \dots\dots(15 \cdot c)$$

(d) の場合

$$\delta U_{cd} = \delta U_c - \int_0^l \delta U_c' dz = \delta U_c - \delta \bar{U}_c \dots\dots(15 \cdot d)$$

ここで

$$\delta U_c' = E_c \{ (A_c - nA_r) w_c' \delta w_c' + I_c v'' \delta v'' \} \dots\dots(16)$$

である。  $A_c$  には鉄筋の断面積  $A_r$  をコンクリートの換算断面積として含めるので、  $(A_c - nA_r)$  はコンクリートのみの断面積となる。状態 (b) と (c) では、軸ひずみの符号が変化する点までの距離  $a$  は次のように決定する。すなわち、要素内のコンクリートの軸ひずみ分布は二次曲線分布ではあるが、直線分布と仮定し、部材端 2, 4 の軸ひずみを  $\epsilon_2, \epsilon_4$  とすると、

$$a = \epsilon_2 l / (\epsilon_2 - \epsilon_4) \dots\dots\dots(17)$$

となる。

さて、一般に、仮想仕事のつり合い式は式 (2) からわかるように、

$$\delta U = \int_1^2 t_i \delta u_i dz \dots\dots\dots(18)$$

で与えられる。式 (15) の  $\delta U_c$  はコンクリート断面が作用するときの内部仮想仕事であり、  $\delta \bar{U}_c$  はコンクリート断面が作用しない部分の内部仮想仕事である。したがって、どの要素もコンクリート断面が有効であるとの仮定から出発すれば、式 (18) は式 (15) を考え合わせて、

$$\delta U = \int_1^2 t_i \delta u_i dz + \delta \bar{U}_c \dots\dots\dots(19)$$

となる。これは、外力のなす仮想仕事の項に  $\delta \bar{U}_c$  を加えたものとなり、この  $\delta \bar{U}_c$  は次のように求めることができる。

(a) の場合  $\delta \bar{U}_c = 0$

(b) の場合  $\delta \bar{U}_c = \int_a^l \delta U_c' dz = \int_0^l \delta U_c' dz - \int_0^a \delta U_c' dz$

(c) の場合  $\delta \bar{U}_c = \int_0^a \delta U_c' dz$

(d) の場合  $\delta \bar{U}_c = \int_0^l \delta U_c' dz$

いずれの場合も、  $\delta \bar{U}_c$  は  $\int_0^l \delta U_c' dz$  と  $\int_0^a \delta U_c' dz$  とで与えられ、また、  $\int_0^l \delta U_c' dz$  は式 (8・a) の一部として与えられる。一方、  $\int_0^a \delta U_c' dz$  は次のように与えられる。

$$\int_0^a \delta U_c' dz = \{ \delta u \}^T [ \bar{K} ] \{ u \} \dots\dots\dots(20)$$

上式の  $\{ u \}$  はコンクリートスラブの変位であり、

$$\{ u \} = \langle v_1, v_1', w_2, w_2', v_3, v_3', w_4, w_4' \rangle^T \dots\dots(21)$$

となる。式 (20) の  $[ \bar{K} ]$  を【付録】に示す。

$a$  の値は式 (17) で求められるが、この式中のひずみは変位で与えられるので、式 (19) を解くにあたっては、繰り返し計算を用いる必要がある。式 (19) で  $\delta \bar{U}_c$  を外力のなす仮想仕事の項に加えると、繰り返し計算のときに、  $[ K ]$  の前進消去を一度行っておけば、あとは右辺の項が変わるごとに後退代入を行なえばよい。したがって式 (17) は繰り返し計算に用いる表現になおすと、  $i$  番目の計算については、

$$[ K ] \{ \bar{u}^{(i)} \} = \{ P \} + [ \bar{K}^{(i-1)} ] \{ \bar{u}^{(i-1)} \} \dots\dots\dots(22)$$

Table 1 Summary of Section Properties.

	YOUNG'S MODULUS FOR STEEL	YOUNG'S MODULUS FOR CONCRETE	SPAN	SHEAR CONNECTOR SPACING	CROSS SECTION	
					CONCRETE SLAB	STEEL BEAM
MODEL A	$2.1 \times 10^6$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$2.1 \times 10^5$ (kg/cm <sup>2</sup> )	A-1 32 m A-2-1 32 m × 2 A-2-2 32 m × 2 A-3 32 m × 3	CONTINUOUS CONTINUOUS DISCONTINUOUS CONTINUOUS	250 × 20 (cm)	Fig. PL. 300 × 19 Web. PL. 1600 × 9 Fig. PL. 500 × 28
MODEL B	$2.1 \times 10^6$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$2.1 \times 10^5$ (kg/cm <sup>2</sup> )	5 m	CONTINUOUS	50 × 15 (cm)	Fig. PL. 150 × 10 Web. PL. 350 × 8 Fig. PL. 250 × 15
MODEL C	$30.0 \times 10^6$ (lb/sq.in)	$4.5 \times 10^6$ (lb/sq.in)	132 in × 2	CONTINUOUS	24 × 2.375 (in)	6 in × 3 in × 12 lb/ft

MODEL A : Simply Supported Beams in Positive and Negative Bending, Continuous Beams

MODEL B : Simply Supported Beams in Negative Bending

MODEL C : Continuous Beams

となる。ここで  $\{P\}$  は外力による荷重ベクトルである。

以上に基いて連続合成桁の計算手順を示すと、次のようになる。

1) 桁全長にわたってコンクリートスラブは有効に作用するものとして計算する。ここで、 $\{\bar{u}^{(0)}\} = \{0\}$  として、 $\{\bar{u}^{(1)}\}$  を求める。

2) コンクリートスラブのひずみを算出し、 $a, [K]$  を求める。

3) 式 (22) から新しい  $\{u^{(i)}\}$  を求め、 $v^{(i)}$  と  $v^{(i-1)}$  からノルムで誤差を計算する。つまり、誤差  $e$  は、

$$e = \|v^{(i)} - v^{(i-1)}\| / \|v^{(i)}\| \dots\dots\dots (23)$$

であり、この誤差が許容値より小さくなったとき計算を打ち切る。

4) 誤差が許容値より大きいときは、2) に戻る。

以上の計算によって連続合成桁の解析を行うことができる。

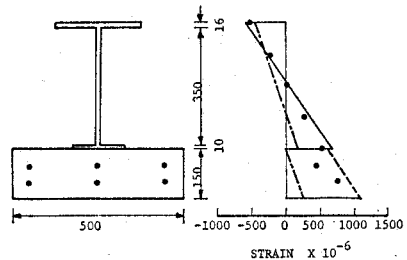
### 3. 解析結果と考察

Table 1 に解析に用いた桁の剛度および諸量を示す。ここで、MODEL-A を単純および連続桁の解析に、MODEL-B を負の曲げを受ける単純桁の解析に、また、MODEL-C を連続桁の解析に用いた。

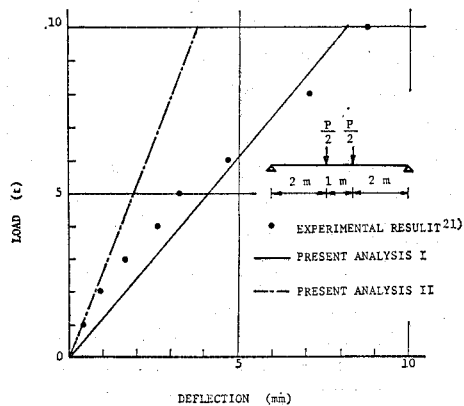
Table 2 Comparison of Values Obtained from the Proposed Method and the Exact Solution by Newmark with MODEL A-1

	LOCATION	CONCENTRATED LOAD AT THE MID-SPAN ( $P=20t$ ) (EXACT)	UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD ( $q=1t/m$ ) (EXACT)
DEFLECTION (cm)	MID-SPAN	1.5893 (1.5899)	1.5879 (1.5885)
	QUATER-SPAN	1.0912 (1.0917)	1.1316 (1.1321)
AXIAL FORCE ACTING ON SLAB (kg)	MID-SPAN	86 712 (86 861)	71 339 (71 774)
	QUATER-SPAN	44 850 (44 859)	53 769 (53 654)
HORIZONTAL SHEAR FORCE ACTING ON STUD (kg)	QUATER-SPAN	474.46 (474.69)	379.53 (379.75)

ジベルの剛性は押し抜き試験の結果から得られるものであり、直径 19 mm のスタッドジベルでは、Mains-ton<sup>18)</sup> の研究を参考にし、最終耐力の 1/5 程度のところの曲線の勾配の値を取るとおよそ 1 本あたり 450~500 ton/cm となるので 500 ton/cm とする。道路橋示方書<sup>19)</sup> によると、最終耐力の 1/6 以下を用いているので、上記の値はそう不合理ではないであろう。負の曲げを受ける部分のジベルの挙動に関する研究はあまりなされてい



(a) Cross Section and Strain Distribution at Mid-Span ( $P=P_{max}$ )



(b) Load-Deflection at Mid-span

PRESENT ANALYSIS I : REINFORCING STEEL ONLY IS EFFECTIVE IN TENSION  
PRESENT ANALYSIS II : REINFORCING STEEL AND CONCRETE ARE EFFECTIVE IN TENSION

Fig. 5 Strain Distribution and Load-Deflection at Mid-span under Negative Bending.

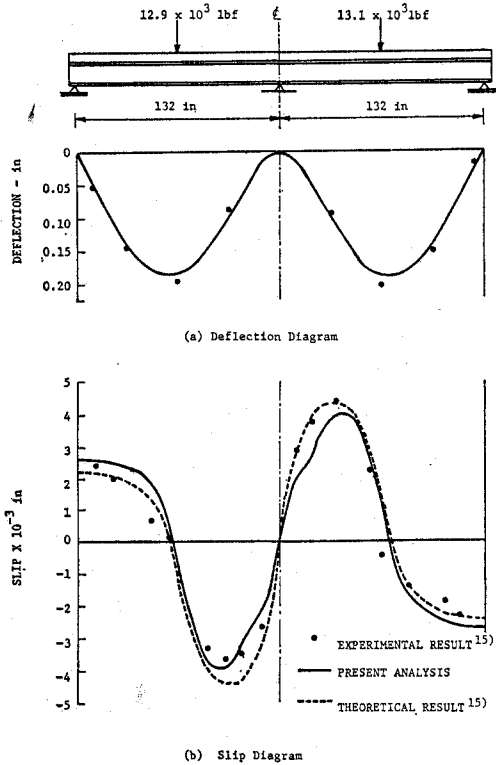


Fig. 6 Longitudinal Deflection and Slip Profile under Concentrated Load.

いが、赤尾<sup>20)</sup>は引き抜き試験からジベルの剛性を求め、18 mm 径スタッドジベルでは、最終耐力の 1/2 までは押し抜き試験の場合と差のないことを示していることより、ここでは、負の曲げを受ける部分においてもジベル剛性は 500 ton/cm を用いることにする。また、Moffatt の用いた MODEL-C の連続桁では、3/8 in 径のスタッドジベルを用いているので、ジベルの剛性は、文献<sup>15)</sup>にあるとおりの  $0.784 \times 10^6 \text{ lb/in}$  (140 ton/cm) を用いることにする。

解析の際の分割数は単純ばりで 16 分割としたが、荷重は対称に作用しているの、はり中央から半分のみについて計算した。一方、連続桁の解析では各スパン 8 分割とした。ただし、断続合成桁では、ジベルを集中した

Table 3 Comparison of Deflection, Bending Moment between Continuous Composite Beams with MODEL A-2-1 and MODEL A-2-2 under Uniformly Distributed Load ( $q=1.5 \text{ t/m}$ ).

	MODEL A-2-1	MODEL A-2-2
DEFLECTION AT THE MID-SPAN (tm)	1.1507	1.1608
BENDING MOMENT AT THE MID-SPAN (tm)	112.43	112.59
BENDING MOMENT AT THE INTERIOR SUPPORT (tm)	159.90	160.72

付近をさらに細かく分割し 12 分割とした。

Table 2 に、集中荷重および等分荷重を受ける合成桁の軸方向力、ジベルに作用する力およびたわみについて Newmark の式より求めた値と著者らの解析法との比較を示す。

負の曲げに対する解析を検討するため、Maeda ら<sup>21)</sup> および Teraszkiewicz (Moffatt<sup>15)</sup> による)の実験結果と、著者らの解析法とを比較した。単純ばり (MODEL-B) に二点載荷した場合のひずみ分布とたわみについて計算結果と前田の実験値の比較を Fig. 5 に示す。次に連続合成桁 (MODEL-C) に集中荷重を載荷した場合のたわみおよびずれの計算結果と Teraszkiewicz の実験結果との比較を Fig. 6 に示す。同図には、ずれについて Moffatt の計算結果を併示する。なお、たわみについては、著者らの解析結果と Moffatt の解析結果とほぼ一致している。これらから、著者らの解析法は実験結果と比較的よく一致するといえよう。

連続合成桁には、桁全長にわたってジベルを配置する形式 (MODEL A-2-1) と負の曲げモーメント域にジベルを配置しないいわゆる断続合成桁 (MODEL A-2-2)

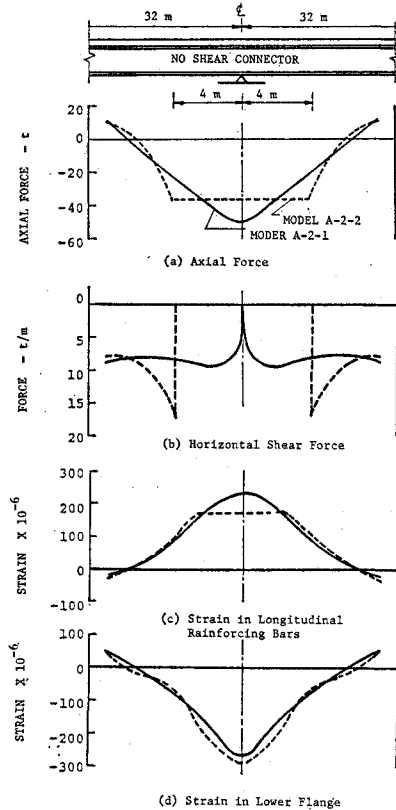


Fig. 7 Axial Force, Horizontal Shear Force, Strain Diagrams in the Negative Moment Region under Uniformly Distributed Load ( $q=1.5 \text{ t/m}$ ).

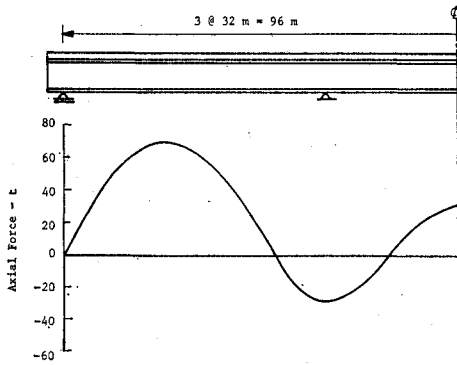


Fig. 8 Axial Force Diagram of a 3-Span Continuous Composite Beam with Incomplete Interaction under Uniformly Distributed Load ( $q=1.5$  t/m).

とがある。この方面の研究は、前田らによって行われているが、前田らの方法は、連続合成桁の解析にあたり、負の曲げモーメント域のはりの剛性を仮定し、不静定力を求め、しかる後に Newmark の式の数値積分を行っている。また、断続合成桁の解析に際し、ジベルを配置しない区間に非常に少ないジベルを仮定して解析している。著者らの方法は、ジベルが不等間隔配置された場合にも適用できるので、一例として、断続合成桁との比較計算を行った。なお挙動に関しては、Maeda らの結果と類似する結果が得られた。等分布荷重  $1.5$  ton/cm が載荷した時の、スパン中央のたわみおよび曲げモーメント、中間支点上の曲げモーメントに関して、MODEL A-2-1 と MODEL A-2-2 の比較を Table 3 に示す。次に、スラブに作用する軸力図、水平せん断力図、鉄筋および下フランジのひずみ図を Fig. 7 に示す。ここで、MODEL A-2-1 と MODEL A-2-2 で差を示すのは、断続合成桁でジベルを配置しない負の曲げモーメント域のみであるのでその部分のみを示してある。Table 3 から明らかなように剛性についてほとんど変わらないことを示しており、また、Fig. 7 の軸力図から明らかなように軸力は MODEL A-2-2 の場合には MODEL A-2-1 と比較して中間支点上で約 20% 減少する。水平せん断力は、MODEL A-2-2 の場合中間から  $4$  m の位置にジベルを集中配置したにもかかわらず大きい値が出ており、断続地点でジベルの補強方法を検討する必要がある。下フランジの応力は、中間支点上で MODEL A-2-2 の場合 MODEL A-2-1 と比較して約 5% 大きい。

3 スパン連続合成桁の解析結果を Fig. 8 に示す。図にはジベルを等間隔に配置した桁に等分荷重を載荷した場合の軸力図が示されている。この軸力は軸方向変位として三次式を仮定しているの、要素内では二次式の関数となる。これは軸方向変位を一次式で仮定した場合に要素内の軸力が一定となるのと異なる点である。

#### 4. あとがき

著者らは不完全合成桁の解析にあたり、二つのはり要素とジベルのスプリング要素から成る剛性行列を誘導し、負の曲げモーメント域におけるコンクリートの引張りの影響を等価な力におきかえる連続合成桁の解析法を示した。著者らの方法は、単純から連続合成桁までの一次元的解析ができ、また、ここで誘導したジベルの剛性行列は、ジベルが直線的に連続配置された場合および要素端に集中配置された場合の両方のジベル配置の計算が可能であり、断続合成桁などの種々のジベル配置の挙動解析に適していると考えられる。

本解析法の精度を確かめるため負の曲げを受ける単純および 2 スパン連続桁について、実験結果と比較した。本解析法は、十分に実験結果を説明することができた。

断続合成桁について、AASHO<sup>21)</sup> の示方書では、スラブ中の橋軸方向の鉄筋を無視して計算しているが、本解析法からわかるように鉄筋は十分有効に作用していると考えられ、今後充分な実験的な裏付けも必要と思われる。2 スパン連続合成桁において、桁全長にわたってジベルを配置した桁と断続合成桁を比較すると次のような結論を得る。すなわち、断続合成桁は、通常のジベル配置した連続桁よりも支点上の鉄筋の応力はかなり減少するが、下フランジの応力はほとんど増加しない。このことから、コンクリートのクラック幅の点から、断続合成桁は利点があるように考えられる。しかし、断続合成桁は、断続点でジベルに大きな力が作用し、ジベルの補強に注意しなければならないと考えられる。今後、この方面の挙動に関する研究が必要と思われる。

最後に本研究をとりまとめるにあたり、名古屋大学成岡昌夫教授および梶田建夫助教授、また、岐阜大学中川建治助教授から貴重な助言を賜ったことを記し謝意を表します。

#### 参考文献

- 1) Newmark, N.M., C.P. Siess, and I.M. Viest: Test and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Stress Analysis, Vol. 9, No. 1, pp. 75-92, 1951.
- 2) Hoischen, A.: Verbundträger mit elastischer unterbrochener Verdübelung, Der Bauingenieur, H-7, pp. 241~244, 1954.
- 3) Heilig, R.: Theorie des Elastischen Verbunds, Der Stahlbau, H-5, pp. 104~108, 1953.
- 4) Homborg, H.: Brücke mit elastischen Verbund zwischen dem Stahlhauptträgern und der Betontahrbahnstapel, Der Bauingenieur, H-6, pp. 213-216, 1952.
- 5) Plum, D.R. and M.R. Horn: The Analysis of Continuous Composite Beams with Partial Interaction, Proc. ICE, Part 2, No. 59, pp. 625-643, Dec., 1975.
- 6) 山本 稔: 不完全合成桁の曲げ理論, 土木学会論文報告

集, No. 67, pp. 1~10, 1960.3.

- 7) 橋 善雄・足立義雄：不完全合成桁について，土木学会論文報告集，第 112 号，pp. 11~19, 1964. 12.
- 8) 前田幸雄・梶川靖治・中谷幸博：連続合成げた中間支点上の床版引張応力の低減について，第 28 回土木学会年次学術講演会講演集，I-109, 土木学会，1975. 10.
- 9) Yam, L.C.P. and J.C. Chapman：The Inelastic Behaviour of Simply Supported Composite Beams of Steel and Concrete, Proc. ICE, Vol. 45, pp. 651-683, Dec., 1968.
- 10) Yam, L.C.P. and J.C. Chapman：The Inelastic Behaviour of Continuous Composite Beams of Steel and Concrete, Proc. ICE, Part 2, pp. 487-501, Dec., 1972.
- 11) Taylor, T.P. and H. Matlock：Finite Element Analysis for Composite Beams, Research Report 56-10, The University Texas, Austin, 1968.
- 12) Gustofson, W.C. and R.N. Wright：Analysis of Skewed Composite Girder Bridges, Proc. of ASCE, Vol. 94, ST 4, pp. 919-941, 1968.
- 13) 奥村敏恵・佐藤政勝：床組と横構の剛度を考慮した合成桁橋の解析，土木学会論文報告集，第 222 号，1974.2.
- 14) 奥村敏恵・佐藤政勝：有限要素法によるスタッドジベルを用いた合成桁の弾塑性解析，東京大学工学部付属総合試験所年報，第 32 卷，1973.
- 15) Moffatt, K.R. and P.T.K. Lim：Finite Element Analysis of Composite Box Girder Bridges Having Complete or Incomplete Interaction, Proc. ICE, Part 2, pp. 1~22, 1976.
- 16) Ngo, D. and A.C. Scordelis：Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, J. ACI, 64, No. 3, Mar. 1967.
- 17) 藤野 勉：コンピュータによる構造工学講座，熱伝導と熱応力，培風館，1972 年.
- 18) Mainstone, R.J. and J.B. Menzies：Shear Connectors in Steel-Concrete Composite Beams for Bridges, 1: Static and Fatigue Test on Push-out Specimens, Concrete, Sept., 1967.
- 19) 道路橋示方書・同解説：日本道路協会，1973.2.
- 20) 赤尾親助：コンクリートに引張りを与える方向に荷重したスタッドジベルのせん断試験について，第 16 回土木学会年次学術講演会講演集，I-13, 1963.5.
- 21) Maeda, Y. and Y. Kajikawa：Fatigue Behavior of Steel-Concrete Composite Beams with Deformed Stud Shear Connectors, Technology Reports of the Osaka University, Vol. 25, 1975.
- 22) Standard Specifications for Highway Bridges, AAS-HO, 11 th Ed., Washington, D.C., 1973.

(1976.9.13・受付)

【付 録】

式 (9) で示されたはり要素の剛性マトリックスおよびジベル要素の剛性マトリックスは次のように与えられる。

$$[K_b] = \begin{bmatrix} \frac{6 E_s A_s}{5 l}, & \frac{E_s A_s}{10}, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{6 E_s A_s}{5 l}, & \frac{E_s A_s}{10}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{2 l E_s A_s}{15}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{E_s A_s}{10}, & -\frac{l E_s A_s}{30}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{12 \Sigma E I}{l^3}, & \frac{6 \Sigma E I}{l^2}, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{12 \Sigma E I}{l^3}, & \frac{6 \Sigma E I}{l^2}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{4 \Sigma E I}{l}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{6 \Sigma E I}{l^2}, & \frac{2 \Sigma E I}{l}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{6 E_c A_c}{5 l}, & \frac{E_c A_c}{10}, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{6 E_c A_c}{5 l}, & \frac{E_c A_c}{10}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{2 l E_c A_c}{15}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{E_c A_c}{10}, & -\frac{l E_c A_c}{30}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{6 E_s A_s}{5 l}, & -\frac{E_s A_s}{10}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{2 l E_s A_s}{15}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{12 \Sigma E I}{l^3}, & -\frac{6 \Sigma E I}{l^2}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{4 \Sigma E I}{l}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{6 E_c A_c}{5 l}, & -\frac{E_c A_c}{10}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{2 l E_c A_c}{15}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

Symmetric

.....(a)



$$[K_s] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & B_{11} & B_{12} & -A_{11} & -A_{21} & A_{31} & A_{41} & -B_{11} & B_{14} & -A_{31} & -A_{41} \\ & A_{22} & B_{21} & B_{22} & -A_{21} & -A_{22} & A_{32} & A_{42} & -B_{21} & B_{24} & -A_{32} & -A_{42} \\ & & C_{11} & C_{21} & -B_{11} & -B_{21} & B_{31} & B_{41} & -C_{11} & C_{41} & -B_{31} & -B_{41} \\ & & & C_{22} & -B_{12} & -B_{22} & B_{32} & B_{42} & -C_{21} & C_{42} & -B_{32} & -B_{42} \\ & & & & A_{11} & A_{21} & -A_{31} & -A_{41} & B_{11} & -B_{14} & A_{21} & A_{41} \\ & & & & & A_{22} & -A_{32} & A_{42} & B_{21} & -B_{24} & A_{32} & A_{42} \\ & & & & & & A_{33} & A_{43} & -B_{31} & B_{34} & -A_{33} & -A_{43} \\ & & & & & & & A_{44} & -B_{41} & B_{22} & -A_{43} & -A_{44} \\ & & & & & & & & C_{11} & -C_{41} & B_{31} & B_{41} \\ & & & & & & & & & C_{44} & -B_{34} & -B_{32} \\ & & & & & & & & & & A_{33} & A_{43} \\ & & & & & & & & & & & A_{44} \end{bmatrix} \dots\dots (b)$$

Symmetric

$$\begin{aligned} A_{11} &= (10 q_1 + 3 q_2) l / 35 + Q_1 & A_{21} &= (15 q_1 + 7 q_2) l^2 / 420 & A_{22} &= (5 q_1 + 3 q_2) l^3 / 840 \\ A_{23} &= (9 q_1 + 9 q_2) l / 140 & A_{32} &= (6 q_1 + 7 q_2) l^2 / 420 & A_{33} &= (3 q_1 + 10 q_2) l / 35 + Q_2 \\ A_{41} &= -(7 q_1 + 6 q_2) l^2 / 420 & A_{42} &= -(q_1 + q_2) l^3 / 280 & A_{43} &= -(7 q_1 + 15 q_2) l^2 / 420 \\ A_{44} &= (3 q_1 + 5 q_2) l^3 / 840 & B_{11} &= -(22 q_1 + 13 q_2) \bar{y} / 70 & B_{12} &= (23 q_1 - 2 q_2) l \bar{y} / 210 + Q_1 \bar{y} \\ B_{14} &= -(31 q_1 + 11 q_2) l \bar{y} / 420 & B_{21} &= -(4 q_1 + 3 q_2) l \bar{y} / 70 & B_{22} &= -(q_2 - q_1) l^2 \bar{y} / 210 \\ B_{24} &= -(5 q_1 + 2 q_2) l^2 \bar{y} / 420 & B_{31} &= -(13 q_1 + 22 q_2) \bar{y} / 70 & B_{32} &= -(11 q_1 + 31 q_2) l \bar{y} / 420 \\ B_{34} &= (23 q_2 - 2 q_1) l \bar{y} / 210 + Q_2 \bar{y} & B_{41} &= (3 q_1 + 4 q_2) l \bar{y} / 70 & B_{42} &= (2 q_1 + 5 q_2) l^2 \bar{y} / 420 \\ C_{11} &= (24 q_1 + 18 q_2) \bar{y}^2 / 35 l & C_{21} &= q_2 \bar{y}^2 / 10 & C_{22} &= (3 q_1 + q_2) l \bar{y}^2 / 30 + Q_1 \bar{y}^2 \\ C_{44} &= (q_1 + 3 q_2) l \bar{y}^2 / 30 + Q_2 \bar{y}^2 & C_{42} &= -(q_1 + q_2) l \bar{y}^2 / 60 & C_{41} &= q_1 \bar{y}^2 / 10 \end{aligned}$$

また、連続合成桁の解析における式 (20) のマトリックス  $[\bar{K}]$  は、

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & -D_{11} & D_{14} & 0 & 0 \\ & D_{22} & 0 & 0 & -D_{12} & D_{24} & 0 & 0 \\ & & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & -C_{11} & C_{14} \\ & & & C_{22} & 0 & 0 & -C_{12} & C_{21} \\ & & & & D_{11} & -D_{14} & 0 & 0 \\ & & & & & D_{44} & 0 & 0 \\ & & & & & & C_{11} & -C_{14} \\ & & & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (c)$$

Symmetric

で与えられる。ここで

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_c A_c (7.2 \alpha^5 - 18 \alpha^4 + 12 \alpha^3) / l & D_{11} &= E_c I_c (48 \alpha^3 - 72 \alpha^2 + 36 \alpha) / l^3 \\ C_{12} &= E_c A_c (3.6 \alpha^5 - 10.5 \alpha^4 + 10 \alpha^3 - 3 \alpha^2) & D_{12} &= E_c I_c (24 \alpha^3 - 42 \alpha^2 + 24 \alpha) / l^2 \\ C_{14} &= E_c A_c (3.6 \alpha^5 - 7.5 \alpha^4 + 4 \alpha^3) & D_{14} &= E_c I_c (24 \alpha^3 - 30 \alpha^2 + 12 \alpha) / l^2 \\ C_{22} &= E_c A_c (1.8 \alpha^5 - 6 \alpha^4 + 22 \alpha^3 / 3 - 4 \alpha^2 + \alpha) l & D_{22} &= E_c I_c (12 \alpha^3 - 24 \alpha^2 - 24 \alpha + 16) / l \\ C_{24} &= E_c A_c (1.8 \alpha^5 - 4.5 \alpha^4 + 11 \alpha^3 / 3 - \alpha^2) l & D_{24} &= E_c I_c (12 \alpha^3 - 18 \alpha^2 + 8 \alpha) / l \\ C_{44} &= E_c A_c (1.8 \alpha^5 - 3 \alpha^4 + 4 \alpha^3 / 3) l & D_{44} &= E_c I_c (12 \alpha^3 - 12 \alpha^2 + 4 \alpha) / l \end{aligned}$$

また、

$$\alpha = a/l$$

である。